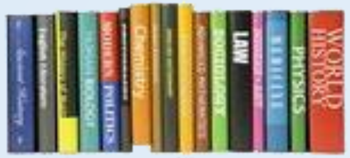
哈爾濱工業大學(深圳)
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY, SHENZHEN

RSA密码算法实验



实验目的

- 掌握 RSA 算法的密钥生成方法
- 掌握 RSA 算法的加解密过程
- 了解RSA算法的具体应用

实验内容

编写代码实现RSA加密解密程序

1) 随机选取满足条件的p、q和d，要求p和q的值在1000-10000之间，也就是二进制长度不小于14bit.

2) 以附件的明文lab2-Plaintext.txt作为待加密的明文，可以自行设定编码格式。

方式1：每个英文字母对应一个数字，规则如下：每个字母或数字与一个两位的十进制数字对应，（如：数字为00 - 09，a-z = 10-35，A-Z = 36-61），明文的一个分组块由4个十进制数字组成，即两个字母。去掉空格和其他标点符号。

方式2：直接将字符的ASCii码两个字符组成一个四位十进制数处理。

3) 用公钥加密，私钥解密。

4) 将p, q, n,e, d,$\phi(n)$的值以及加密后的密文、解密后的明文输出到文件或屏幕。

实验原理

➢ RSA的密钥产生过程

(1) 生成两个保密的大素数 p 和 q ；

(2) 计算这两个素数的乘积n，$n = p \times q$ ；

(3）计算小于n并且与n互质的个数，即欧拉函数 $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$ ；

(4) 选择随机的素数*e*，满足$1 < e < \varphi(n)$，并且e和$\varphi(n)$互质，即$\gcd\{\varphi(n), e\} = 1$;

(5) 根据 $d \cdot e \equiv 1 \bmod \varphi(n)$，求出 d ；

保密d,公开n和e；以 $\{e, n\}$ 为公钥, $\{d, n\}$ 为私钥。
p和q销毁

实验原理

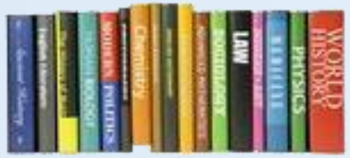
- 加密算法

$$c \equiv m^{e} \bmod n$$

- 解密算法

$$m \equiv c^{d} \bmod n$$

Tips: 要求m<n，如果m>n，需要进行分组。
加密时首先将明文比特串分组，使得每个分组对应的十进制数小于n ，即分组长度小于 $\log_2 n$ 。



实验原理

RSA-密钥

- 两个素数: p=17, q=11
- 计算n=pq=17*11=187
- 计算$\varphi(n)$=(p-1)(q-1)=16*10=160
- 选择e,其中gcd(e,160)=1,假设e=7
- 求解d, 其中ed=1 mod 160,2<d<160

  d=23, 验证 23*7=161=1*160+1

公钥PU={7, 187}

私钥PR={23, 187}

RSA-加密/解密

- M=88 (88<187)
- 加密

  C=88^7 mod 187 =11
- 解密

  M=11^{23} mod 187 =88

实验原理

- 如何找到足够的大随机素数p和q?
- 如何通过 $d \cdot e \equiv 1 \bmod \varphi(n)$ 求得d？
- 如何快速进行模幂运算?
- 如何进行大数运算?

大整数库官网 https://gmplib.org/

实验原理

➢如何找到足够的大随机素数p和q

- Miller-Rabin算法TEST(n)细节：
  1. 找出整数k,q，其中$k > 0, q$是奇数，使得$(n - 1 = 2^k q)$；
  2. 随机选取整数$a, 1 < a < n - 1$；
  3. If $a^q \bmod n = 1$或者$n - 1$，返回“很可能为素数”；
  4. For $j = 1$ to $k - 1$ do
  5. If $a^{2^j q} \bmod n = n - 1$，返回“很可能为素数”
  6. 返回“合数”

实验原理

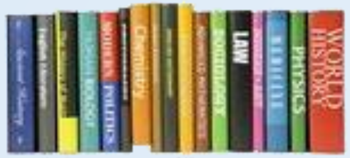
- 如何通过 $d \cdot e \equiv 1 \bmod \varphi(n)$ 求得d

◆ 扩展的欧几里德算法

如果$(a,b)=1$，则 b 在 mod$a$ 下有乘法逆元（不妨设$b<a$），即存在一 $x(x<a)$，使得 $bx \equiv 1 \bmod a$ 。推广的Euclid算法先求出(a,b)，当$(a,b)=1$时，则返回 b的逆元。

EXTENDED EUCLID（a,b）（设$b<a$ ）

1. $(X_1,X_2,X_3) \leftarrow (1,0,a)$； $(Y_1,Y_2,Y_3) \leftarrow (0,1,b)$ ；
2. if $Y_3=0$ then return $X_3=(a,b)$； no inverse;
3. if $Y_3=1$ then return $Y_3=(a,b)$ ； $Y_2=b^{-1} \bmod f$；
4. $Q=\left\lfloor \frac{X_3}{Y_3} \right\rfloor$
5. $(T_1,T_2,T_3) \leftarrow (X_1-QY_1, X_2-QY_2, X_3-QY_3)$；
6. $(X_1,X_2,X_3) \leftarrow (Y_1,Y_2,Y_3)$ ；
7. $(Y_1,Y_2,Y_3) \leftarrow (T_1,T_2,T_3)$；
8. goto 2



实验原理

- 加密和解密运算都是模指数运算，$c \equiv m^e \bmod n \quad m \equiv c^d \bmod n$
- 可以通过e-1次模乘来实现计算，但是如果e非常大，效率会很低下
- 平方-乘算法可以把计算所需的模乘的次数减少

求模指数实例

$$11^{23} \bmod 187 = [(11^1 \bmod 187)*(11^2 \bmod 187)*(11^4 \bmod 187)$$
$$*(11^8 \bmod 187)*(11^8 \bmod 187)] \bmod 187$$

$$11^1 \bmod 187 = 11$$
$$11^2 \bmod 187 = 121$$
$$11^4 \bmod 187 = 14641 \bmod 187 = 55$$
$$11^8 \bmod 187 = 214358881 \bmod 187 = 33$$
$$11^{23} \bmod 187 = (11*121*55*33*33) \bmod 187$$
$$= 79720245 \bmod 187 = 88$$

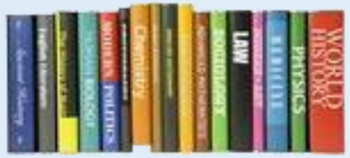
实验原理

计算a^b mod p

```
y=1
while(1)
    {
        if (b == 0)
            return y;
        while (b > 0 && b % 2 == 0)
        {
            a = (a * a) % p;
            b = b / 2;
        }
        b--;
        y = (a * y) % p;
    }
```

快速幂介绍视频

https://www.bilibili.com/video/BV16Z4y1M7y1?from=search&seid=12692871177987833892&spm_id_from=333.337.0.0



实验注意细节

1、RSA中加密解密用10进制来算；

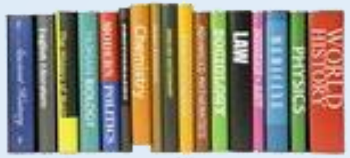
2、加密时明文4个十进制位一组明文加密，也就是一个4位数。

3、如果最后一个分组不足4位，比如1个字母，明文分组可以自己设定一个2位数的值进行填充。这个2位数自己设定（大于61的数字），解密时删除。

4、明文加密后的密文分组需要处理长度，否则解密时不知道如何分组。为保险起见，设置密文的分组长度可为最大可能的长度 $\log_2 n$。

5、对于长度不足的情况，要前面补0

6、解密时如果明文长度不足4位也是前面补0



实验要求

- 提交内容

① 源代码

② 实验结果截图

- 截止时间

下一次实验课前提交至HITsz Grader 作业提交平台，具体截止日期参考平台发布。

- 登录网址：：http://grader.tery.top:8000/#/login
- 推荐浏览器：Chrome
- 初始用户名、密码均为学号，登录后请修改

请同学们开始实验！