Principe des tiroirs
Extrema

Maena Quemener et Félix Breton

24/10/2019

– Principe des tiroirs –

Théorème 1 (Principe des tiroirs)**.**
Si $n+1$ éléments doivent être placés dans n ensembles, alors il existe au moins un ensemble qui contient au moins 2 éléments.

Démonstration. Par l'absurde, si tous les ensembles contiennent 0 ou 1 élément, alors le nombre d'éléments est inférieur ou égal à n. □

Théorème 2 (Principe des tiroirs généralisé)**.**
Si $nk+1$ éléments doivent être rangé dans n ensembles, alors il existe au moins un ensemble avec $k+1$ éléments.

Théorème 3 (Principe des tiroirs infini)**.**
Si une infinité d'éléments doivent être placés dans n ensembles, alors il existe au moins un ensemble qui contient une infinité d'éléments.

Exercice 1 Baptiste veut attraper une paire de chaussettes dans le noir. Il a 6 chaussettes rouges, 13 bleues et 8 blanches. Combien doit-il en prendre pour être sûr d'en avoir 2 de même couleur ?

Exercice 2 Une personne a entre 0 et 300000 cheveux sur la tête. L'agglomération de Marseille contient 2000000 habitants. Combien de Marseillais au minimum ont le même nombre de cheveux ?

Exercice 3 Combien de personnes faut-il au minimum pour que deux personnes aient leur anniversaire le même jour ?

Exercice 4 Montrer que $(a-b)(b-c)(c-a)$ est toujours pair pour a, b, c entiers.

Exercice 5 Il y a n élèves au stage de Cachan Junior et certains se sont serrés la main en arrivant. Montrer qu'il existe deux personnes ayant serré le même nombre de mains.

Exercice 6 On colorie le plan en blanc et noir. Montrer qu'il existe deux points de même couleur distant d'exactement $1\mathrm{cm}$.

Exercice 7 On prend 5 points dans un carré de côté 1. Montrer qu'il existe 2 points dont la distance est inférieure $\frac{3}{4}$.

Exercice 8 On prend cinq points distincts du plan à coordonnées entières. Montrer qu'il en existe d'eux tel que le milieu du segment les reliant soient à coordonnées entières.

Exercice 9 On prend 11 entiers distincts compris en 1 et 20. Montrer qu'il y en a deux premiers entre eux.

Exercice 10 Un joueur d'échec a 77 jours pour préparer un tournoi. Il joue au moins une partie par jour, mais pas plus de 132 au total. Démontrer qu'il existe une période continue de jours sur laquelle il aura joué 21 parties.

Exercice 11 Montrer que parmi 10 entiers inférieurs à 100, on peut trouver 2 ensembles A et B disjoints et non vides de même somme.

– Extrema –

Théorème 4.
Tout ensemble non-vide de réels fini admet un minimum et un maximum.

Théorème 5.
Tout sous-ensemble non-vide d'entiers naturels admet un minimum.

Attention à ne pas confondre minimum et minorant !

— Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.
— Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 12 Soit S un ensemble de points tel que tout point de S est le milieu de deux autres poins de S. Montrer que S admet une infinité de point.

Exercice 13 A chaque point à coordonnées entières du plan, on attribue un nombre entier strictement positif, tel que chaque nombre est égal à la moyenne arithmétique de ses quatre voisins (en haut, en bas, à gauche et à droite). Montrer que toutes les valeurs sont égales.

Exercice 14 Soit $2n$ points du plan. Montrer qu'on peut toujours les relier par paire sans qu'aucun segment ne s'intersecte.

Exercice 15 Lors d'une soirée dansante, aucun garçon n'a dansé avec toutes les filles, mais chaque fille a dansé avec au moins un garçon. Montrer qu'il existe deux garçons g et g' et deux filles f et f' tel que g a dansé avec f mais pas avec f' et g' a dansé avec f' mais pas avec f.

Exercice 16 Soit n points du plan. On suppose que chaque triplet de points forme un triangle d'aire $A \leqslant 1$. Montrer que tous les points sont compris dans un triangle d'aire $A \leqslant 4$.

Exercice 17 On considère un ensemble fini de points S tel que toute droite passant par deux points de S passe aussi par un troisième. Montrer que tous les points de S sont alignés.