

Invariants

Maena Quemener

22/09/2021

– Partie cours –

Les exercices suivants ont été traités pendant le cours pour introduire et illustrer la notion d'invariants.

Exercice 1 On définit deux suites de la manière suivante : $x_0 = a$ et $y_0 = b$ tels que $0 < b < a$ et $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$ et $y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$. Trouver des invariants intéressants.

Exercice 2 Soit n un entier positif impair. On écrit sur un tableau tous les nombres de 1 à $2n$. A chaque tour on peut choisir deux nombres a et b écrits sur le tableau et les remplacer par $|a - b|$. Quelle est la parité du dernier nombre restant ?

Exercice 3 On considère un échiquier, dont on découpe la case en haut à gauche et la case en bas à droite. Peut-on paver les 62 cases restantes avec des dominos ?

Exercice 4 On peut appliquer les opérations suivantes au polynôme $ax^2 + bx + c$: échanger a et b ou remplacer x par $x + t$ avec t un réel. Peut-on transformer $x^2 - x - 2$ en $x^2 - x - 1$ uniquement en itérant ces opérations ?

Exercice 5 Un dragon a 100 têtes. Un chevalier peut couper exactement, soit 15, soit 17, soit 20, soit 5 têtes avec un coup d'épée. Il repousse alors respectivement 24, 2, 14 et 17 nouvelles têtes. Si toutes les têtes sont coupées, le dragon meurt. Peut-il mourir ?

Exercice 6 En arrivant à Valbonne, chaque élève a au plus 3 amis. Pour qu'ils apprennent à se connaître, les animatheux veulent les séparer en deux groupes de manière à ce que chaque élève ait au plus un ami dans son groupe. Cela est-il possible ?

– Partie TD –

Exercice 7 On place aléatoirement cinq 1 et quatre 0 sur un cercle. A chaque tour on peut mettre un 0 entre deux chiffres identiques ou un 1 entre deux chiffres différents. Puis on efface ces deux chiffres. Peut-on arriver à une configuration avec uniquement des 0 ?

Exercice 8 On considère des "mots" écrits avec les lettres x, y, z et t . On autorise les trois transformations suivantes : $xy \mapsto yyx$, $xt \mapsto ttx$ et $yt \mapsto ty$. Les mots suivants sont-ils équivalents ?

- (i) $xyyx$ et $xyyyxx$,
- (ii) $xytx$ et $txyt$,
- (iii) xy et xt .

Exercice 9 Sur une table on dispose de a jetons bleus, b jetons verts et c jetons rouges. A chaque tour on peut enlever deux jetons de couleurs différentes, et rajouter un jeton de la troisième couleur. Peut-il rester un unique jeton sur la table ?

Exercice 10 Soit $2n$ points du plan. Montrer qu'on peut toujours les relier par paire sans qu'aucun segment ne s'intersecte.