Principe des tiroirs
Extrema

Maena Quemener et Théo Lenoir

24/10/2019

– Dénombrement –

Exercice 1 Théodore va au restaurant tous les soirs et il veut prendre un menu différent à chaque fois. Le restaurant propose 3 entrées, 2 plats principaux et 5 desserts. Combien de jours Théodore peut-il venir ?

Exercice 2 Raphaël assiste à une course de 6 chevaux. On suppose qu'aucun cheval n'arrive en même temps.
- Combien d'ordres d'arrivée différents possibles y a-t-il ?
- Combien de podium différents possibles y a-t-il ?

Exercice 3 Il existe une langue composée uniquement de mots de 6 lettres, composés des lettres a et b. Combien de mots comporte cette langue ?

Exercice 4 Combien d'anagramme du mot $ABRACADABRA$ existe-t-il ?

Exercice 5 Dénombrer les différentes figures de poker possibles.

Exercice 6 On a n droites dans le plan en position générale (2 droites ne sont jamais parallèles et 3 droites jamais concourantes en un même point).
- Combien y a-t-il d'intersections ?
- Combien de triangles forment-elles ?

Exercice 7 On a une grille de taille $n \times m$. Une fourmi débute en $(0; 0)$ et veut rejoindre la case $(n; m)$, mais elle ne peut aller que vers le haut ou la droite. Combien de chemins peut-elle emprunter ?

Exercice 8 Soit $n, k \in \mathbb{N}^*$, calculer le nombre de solutions $(a_1, \dots a_k) \in (\mathbb{N}^*)^k$ de $a_1 + \cdots + a_k = n$. Calculer le nombre de solutions $(a_1, \dots a_k) \in \mathbb{N}^k$ de $a_1 + \cdots + a_k = n$.

Exercice 9 Démontrer de manière combinatoire que :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Exercice 10
Démontrer de manière combinatoire :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Exercice 11 Démontrer de manière combinatoire :

$$k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$$

Puis :

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

Exercice 12 Identité de Vandermonde Démontrer de manière combinatoire :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} \cdot \binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$$

Exercice 13 Démontrer de manière combinatoire que :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \binom{k}{m} = 2^{n-m} \binom{n}{m}$$

Exercice 14 On considère une grille triangulaire obtenue en divisant un triangle équilatéral de côté n en n^2 triangles équilatéraux de côté 1. Déterminer le nombre de parallélogramme qui apparaissent sur cette grille.

Exercice 15 Soit n un entier naturel. Si A est un ensemble de réels de cardinal n, on note $A + A$ les entiers somme de deux éléments de A. Quel est le maximum de $|A + A|$ pour A un ensemble de réels de cardinal n, donner un exemple pour lequel on a l'égalité, quel est le minimum de $|A + A|$ pour A un ensemble de réels de cardinal n, quelles sont les ensembles pour lesquels on a l'égalité ?

– Extrema –

Théorème 1.
Tout ensemble non-vide de réels fini admet un minimum et un maximum.

Théorème 2.
Tout sous-ensemble non-vide d'entiers naturels admet un minimum.

Attention à ne pas confondre minimum et minorant !

— Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.
— Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 16 Soit S un ensemble de points tel que tout point de S est le milieu de deux autres poins de S. Montrer que S admet une infinité de point.

Exercice 17 A chaque point à coordonnées entières du plan, on attribue un nombre entier strictement positif, tel que chaque nombre est égal à la moyenne arithmétique de ses quatre voisins (en haut, en bas, à gauche et à droite). Montrer que toutes les valeurs sont égales.

Exercice 18 Soit $2n$ points du plan. Montrer qu'on peut toujours les relier par paire sans qu'aucun segment ne s'intersecte.

Exercice 19 Soit $n > 0$ un entier. Chacune des n filles d'un groupe est la seule à connaître un potin. Pour partager leurs informations, elles se téléphonent deux à deux, mais à chaque fois, seule l'une parle et l'autre ne fait qu'écouter toutes les informations que son amie lui transmet. Déterminer le nombre minimal de coups de téléphone suffisant pour que chacune des filles connaisse tous les potins.

Exercice 20 Lors d'une soirée dansante, aucun garçon n'a dansé avec toutes les filles, mais chaque fille a dansé avec au moins un garçon. Montrer qu'il existe deux garçons g et g' et deux filles f et f' tel que g a dansé avec f mais pas avec f' et g' a dansé avec f' mais pas avec f.

Exercice 21 Soit n points du plan. On suppose que chaque triplet de points forme un triangle d'aire $A \leqslant 1$. Montrer que tous les points sont compris dans un triangle d'aire $A \leqslant 4$.

Exercice 22 On considère un ensemble fini de points S tel que toute droite passant par deux points de S passe aussi par un troisième. Montrer que tous les points de S sont alignés.