2018

Подготовка к ЕГЭ по математике

Теория для решения заданий «Уравнения»

Наталья и Александр Крутицких
www.matematikalegko.ru

Проверка навыков умения решать уравнения. Чаще встречаются логарифмические, квадратные (рациональные и иррациональные, которые сводятся к квадратным) и показательные уравнения, реже тригонометрические. Будьте внимательны, записывая ответ. В любом случае, ОБЯЗАТЕЛЬНО делайте проверку, много времени это не займёт, а вас избавит от ошибок. Помните, что ответ это целое число или конечная десятичная дробь.

Обратите внимание:

- решая уравнения, в которых получается больше одного корня, выбирайте правильный ответ, в вопросе всегда указывается, какое значение требуется найти.
- вы можете знать, как решать, но не дорешать, иногда из-за спешки выпускники записывают какой-либо промежуточный результат. Например, в уравнении $\log_4(3x+4)=2$ записывают в ответе 16.

Итак, задачи включают в себя:

Линейные и квадратные уравнения

Рациональные уравнения

Иррациональные уравнения

Показательные уравнения

Логарифмические уравнения

Тригонометрические уравнения

Знание нижеуказанных формул и свойств необходимо для решения заданий данной группы:

Формулы сокращённого умножения:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

Степени и корни:

$$a^0=1$$

Нулевая степень любого числа равна единице.

* * *

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n} \qquad a\neq 0 \quad n-\text{натуральное число}$$

Суть данного свойства заключается в том, что при переносе числителя в знаменатель и наоборот, знак показателя степени меняется на противоположный. Например:

$$\frac{x^7}{y^{-2}}=\frac{y^2}{x^{-7}}$$

Следствие из данного свойства $a^{-1}=\frac{1}{a}$

$* * *$

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

$* * *$

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$$

При умножении степеней с одинаковыми основаниями основание остаётся прежним, а показатели степеней складываются.

$* * *$

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n} \qquad m>n, \qquad a\neq 0$$

При делении степеней с одинаковыми основаниями основание остаётся прежним, а показатели степеней вычитаются.

***

$$(a^m)^n=a^{m\cdot n}$$

При возведении степени в степень основание остаётся прежним, а показатели перемножаются.

***

$$(a\cdot b)^m=a^m\cdot b^m$$

При возведении в степень произведения в эту степень возводится каждый множитель.

***

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}$$

При возведении в степень дроби, в эту степень возводится и числитель и знаменатель.

***

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a} \qquad (m > 0)$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}} \quad (k > 0)$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \quad \text{если } m \leq 0, \text{то } \ a \neq 0$$

Логарифм

Логарифмом числа a по основанию b называется показатель степени, в который нужно возвести b, чтобы получить a.

$$\log_b a = x \qquad b^x = a \quad (a > 0,\ b > 0,\ b \neq 1)$$

Например:

$$\log_3 9 = 2 \text{ , так как } 3^2 = 9$$

Основное логарифмическое тождество:

$$b^{\log_b a} = a$$

Свойства логарифмов:

$$\log_a a^x = x$$

$$\log_x (ab) = \log_x a + \log_x b$$

$$\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b$$

$$\log_a b^m = m \cdot \log_a b$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Частные случаи логарифмов:

$$\ln x = \log_e x - \textit{натуральный}$$

$$\lg x = \log_{10} x - \textit{десятичный}$$

***

Тригонометрические уравнения

Решение простейших тригонометрических уравнений (в итоге к ним сводятся все тригонометрические уравнения):

$$\sin x = a$$

имеет решение при $-1 \le a \le 1$

Решением являются два корня ($Z -$ целое число):

$$x_1 = \arcsin\ a + 2\pi n, \quad n \in Z$$

$$x_2 = \pi - \arcsin\ a + 2\pi n, \quad n \in Z$$

Обе формулы можем объединить в одну:

$$x = (-1)^k \arcsin\ a + \pi k, \quad k \in Z$$

***

$$\cos x = a$$

имеет решение при $-1 \le a \le 1$

Решением являются два корня:

$$x_1 = \arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z$$

$$x_2 = -\arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z$$

Обе формулы можем объединить в одну:

$$x = \pm\arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z$$

Если получите $\cos x = 7$ или $\sin x = -\frac{10}{7}$

Знайте, решения у данных уравнений нет, так как значения лежат за пределами интервала $[-1; 1]$.

***

$$\operatorname{tg} x = a$$

имеет решение при любом a

Решением является корень:

$$x = \operatorname{arctg}\ a + \pi n, \quad n \in Z$$

***

$$\operatorname{ctg} x = a$$

имеет решение при любом a

Решением является корень:

$$x = \operatorname{arcctg}\ a + \pi n, \quad n \in Z$$

Итак, формулы для решения простейших тригонометрических уравнений:

Уравнение	Решения
$\sin x = a,\ \lvert a\rvert \leqslant 1$	$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z$
$\cos x = a,\ \lvert a\rvert \leqslant 1$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$
$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z$
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z$

Значения sin, cos, tg, ctg острых углов от 0° до 90°,

которые необходимо помнить:

Аргумент	Функция			
	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
0° (0)	0	1	0	не определен
30° $\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45° $\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60° $\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
90° $\left(\frac{\pi}{2}\right)$	1	0	не определен	0

Знание этих значений необходимо, это «азбука», без которой невозможно будет справиться с множеством заданий. Отлично, если память хорошая, вы легко выучили и запомнили эти значения. Что делать, если этого сделать не получается, в голове путаница, да просто вы именно при сдаче экзамена сбились. Обидно будет потерять бал из-за того, что вы запишите при расчётах неверное значение.

Используйте алгоритм, благодаря которому вы легко, в течение минуты восстановите в памяти все вышеуказанные значения:

1. Записываем в строчку углы от 0 до 90 градусов.

0° 30° 45° 60° 90°

2. Записываем слева в столбик синус и косинус аргумента:

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$					
$\cos\alpha$					

3. Напротив синуса пишем числа от нуля до четырёх (под значениями углов). Напротив косинуса от 4 до 0.

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	0	1	2	3	4
$\cos\alpha$	4	3	2	1	0

4. Далее извлекаем корень

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	$\sqrt{0}$	$\sqrt{1}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{4}$
$\cos\alpha$	$\sqrt{4}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{1}$	$\sqrt{0}$

5. Делим на 2

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

6. Считаем

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Мы получили значения синуса и косинуса углов от 0 до 90 градусов. Далее, зная формулы тангенса и котангенса:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

вы сможете найти значения для указанных углов.

Например:

$$\operatorname{tg}30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{ctg}30^\circ = \frac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

И так для любого угла.

Список сайтов по другим предметам:

Подготовка к экзамену по русскому языку

Подготовка к экзамену по литературе

Подготовка к экзамену по химии

Подготовка к экзамену по истории и обществознанию

Подготовка к экзамену по биологии

Бесплатные материалы для подготовки по математике:

Сайт Яковлева Игоря Вячеславовича здесь.

Материалы ЕГЭ-Судии на этой странице.

Сайт Александра Ларина.

Платные курсы

Посмотреть подробнее

Подготовка к ЕГЭ и ОГЭ (ГИА) КУРС Видеорепетитор.

Полезные ресурсы:

Материалы для учителей и учеников Портал Инфоурок.

Подготовка к ЕГЭ по математике – блог Инны Фельдман.

Портал Дмитрия Тарасова Видеоуроки в Интернет.

Обучение онлайн ЕГЭ, ОГЭ, олимпиады   Библиотека курсов Фоксворд