

POLITECHNIKA BIAŁOSTOCKA

WYDZIAŁ INFORMATYKI

PRACA DYPLOMOWA INŻYNIERSKA

TEMAT: GRAFY CAYLEY'A GRUP
SKOŃCZONYCH I ICH IZOMORFIZMY

WYKONAWCA: PAWEŁ MARCZAK

.....
podpis

PROMOTOR: DR HAB.CZESŁAW BAGIŃSKI PROF. PB

.....
podpis

BIAŁYSTOK 2021 r.

Karta dyplomowa

POLITECHNIKA BIAŁOSTOCKA Wydział Informatyki	Studia stacjonarne <small>stacjonarne/niestacjonarne</small> pierwszego stopnia <small>studia I stopnia/studia II stopnia</small>	Nr albumu studenta 104160
		Rok akademicki 2020/2021
		Kierunek studiów matematyka stosowana Specjalność Matematyka Nowoczesnych Technologii
Paweł Marczak <small>Imiona i nazwisko studenta</small>		
TEMAT PRACY DYPLOMOWEJ: <div style="text-align: center; margin-top: 10px;"> Grafy Cayley'a grup skończonych i ich izomorfizmy </div>		
Zakres pracy: <ol style="list-style-type: none"> 1. Opis wybranych algebraicznych charakterystyk grafów prostych. 2. Grafy Cayley'a grup i ich podstawowe własności. 3. Wybrane aspekty izomorfizmów grup małych rzędów i ich grafów Cayley'a . 4. Generyczne grafy Cayley'a grup małych rzędów. 		
Słowa kluczowe (max 5): graf prosty, grupa, graf Cayley'a, izomorfizm		
dr hab. Czesław Bagiński <small>Imię i nazwisko, stopień/tytuł promotora - podpis</small>		
30.01.2020 <small>Data wydania tematu pracy dyplomowej - podpis promotora</small>	28.02.2021 <small>Regulaminowy termin złożenia pracy dyplomowej</small>	<small>Data złożenia pracy dyplomowej - potwierdzenie dziekanatu</small>
<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div> <small>Ocena promotora</small> </div> <div> <small>Podpis promotora</small> </div> </div>		
<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div> <small>Imię i nazwisko, stopień/ tytuł recenzenta</small> </div> <div> <small>Ocena recenzenta</small> </div> <div> <small>Podpis recenzenta</small> </div> </div>		

Subject of diploma thesis

Cayley graphs of finite groups and their isomorphisms

SUMMARY

The diploma thesis is about Cayley graphs, the graphs generated by groups, i.e. the graphs defined in the following way: let G be a group and S a subset of G . A Cayley graph $\text{Cay}(G, S)$ is a graph whose vertex set is equal G , and two elements $x, y \in G$ are connected by an edge $e = (x, y)$, when there exists $s \in S$ such that $sx = y$. In our thesis we study the Cayley graphs of all finite groups of order ≤ 16 , in particular we study conditions under which two Cayley graphs $\text{Cay}(G, S)$, $\text{Cay}(H, T)$ are isomorphic and also when a given group is a CI -group (which m - CI -properties it has). In our study we use a computer tool written in Python which uses the computer algebra systems Sage and GAP. This tool is a part of the thesis, the code of it is included in the electronic version of it. The main part of the thesis are sections 3 and 4 in which we describe our software, results of studies, conclusions and also the directions in which they could be developed.

Białystok, dnia.....

Paweł Marczak

Imiona i nazwisko studenta

104160

Nr albumu

Matematyka stosowana, pierwszy stopień, stacjonarne

Kierunek i forma studiów

dr hab. Czesław Bagiński prof. PB

Promotor pracy dyplomowej

OŚWIADCZENIE

Przedkładając w roku akademickim 2020/2021 Promotorowi dr hab. Czesławowi Bagińskiemu prof. PB pracę dyplomową pt.: *Grafy Cayley'a grup skończonych i ich izomorfizmy*, dalej zwaną pracą dyplomową,

oświadczam, że:

- 1) praca dyplomowa stanowi wynik samodzielnej pracy twórczej/zespołowej pracy twórczej*;
- 2) wykorzystując w pracy dyplomowej materiały źródłowe, w tym w szczególności: monografie, artykuły naukowe, zestawienia zawierające wyniki badań (opublikowane, jak i nieopublikowane), materiały ze stron internetowych, w przypisach wskazywałem/am ich autora, tytuł, miejsce i rok publikacji oraz stronę, z której pochodzą powoływane fragmenty, ponadto w pracy dyplomowej zamieściłem/am bibliografię;
- 3) praca dyplomowa nie zawiera żadnych danych, informacji i materiałów, których publikacja nie jest prawnie dozwolona;
- 4) praca dyplomowa dotychczas nie stanowiła podstawy nadania tytułu zawodowego, stopnia naukowego, tytułu naukowego oraz uzyskania innych kwalifikacji;
- 5) treść pracy dyplomowej przekazanej do dziekanatu Wydziału Informatyki jest jednakowa w wersji drukowanej oraz w formie elektronicznej;
- 6) jestem świadomy/a, że naruszenie praw autorskich podlega odpowiedzialności na podstawie przepisów ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych (Dz. U. z 2019 r. poz. 1231, późn. zm.), jednocześnie na podstawie przepisów ustawy z dnia 20 lipca 2018 roku Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. poz. 1668, z późn. zm.) stanowi przesłankę wszczęcia postępowania dyscyplinarnego oraz stwierdzenia nieważności postępowania w sprawie nadania tytułu zawodowego;
- 7) udzielam Politechnice Białostockiej nieodpłatnej, nieograniczonej terytorialnie i czasowo licencji wyłącznej na umieszczenie i przechowywanie elektronicznej wersji pracy dyplomowej w zbiorach systemu Archiwum Prac Dyplomowych Politechniki Białostockiej oraz jej zwielokrotniania i udostępniania w formie elektronicznej w zakresie koniecznym do weryfikacji autorstwa tej pracy i ochrony przed przywłaszczeniem jej autorstwa.

.....
czytelny podpis studenta

*w przypadku pracy zespołowej

Spis treści

1	Wstęp	1
2	Wprowadzenie teoretyczne	2
2.1	Grupy	2
2.2	Grafy	5
2.3	Izomorfizmy, automorfizmy, grupy automorfizmów	6
2.4	Grafy Cayley’a i ich izomorfizmy	7
3	Oprogramowanie	11
3.1	Schemat działania	11
3.2	Algorytmy	13
3.3	Sposób prezentacji i interpretacji wyników	16
4	Przegląd uzyskanych wyników	21
4.1	Izomorfizm grup, a izomorfizm ich grafów Cayley’a	21
4.2	Izomorfizmy grafów w obrębie grupy generującej, CI-grafy i CI-grupy	31
5	Podsumowanie	37

1. Wstęp

Tematem poniższej pracy są grafy Cayley’a, specjalny typ grafów głęboko zakorzeniony w teorii grup, jednej z gałęzi nauk algebraicznych. Konkretniej, autor skupi się na badaniu izomorfizmów pomiędzy tymi grafami, czyli przypadków, gdy 2 grafy są takie same pod względem swojej konstrukcji. Na zawartość pracy składają się:

- wprowadzenie teoretyczne w tematykę
- postępy naukowe w dziedzinie, znalezione przez autora w publikacjach
- opis oprogramowania utworzonego przez autora, wspierającego badania
- przegląd uzyskanych wyników
- liczne przykłady i rozważania autora dotyczące tematu

Do pracy dołączone zostało wspomniane oprogramowanie, bazujące na języku Python, wykorzystujące biblioteki Sage (szczegółowy opis w rozdziale 3). Podsumowanie najciekawszych, zdaniem autora, wyników znalazło się w rozdziale 4, jednak warto zapoznać się z możliwościami programu, choćby dlatego, że po dokonaniu drobnych modyfikacji, nadaje się również do bardziej ogólnych badań nad własnościami grafów Cayley’a, nie tylko tych związanych z izomorfizmami.

W celu wdrożenia się w tematykę, autor w dużym stopniu wykorzystał [9], [3],[11], także [10], [4], [5] i [2].

Przy pisaniu kodu oprogramowania, wykorzystane zostały różne poradniki i dokumentacje, informacje dotyczące najważniejszych narzędzi można znaleźć w [8], [14], [13].

W początkowych założeniach, planem było utworzenie oprogramowania badającego izomorfizmy grafów Cayley’a niskich rzędów i krótkie podsumowanie otrzymanych wyników. Za namową promotora, autor rozszerzył rozdział wynikowy o bardziej teoretyczne podejście do zagadnienia. Zaskakującym okazał się fakt, że przygotowane oprogramowanie było bardzo pomocne przy teoretycznych rozważaniach, rzutujących również w pewnym stopniu na przypadki grafów Cayley’a wyższych rzędów i bardziej generalne podejście do poruszanych problemów.

2. Wprowadzenie teoretyczne

W celu zrozumienia kolejnych rozdziałów pracy, niezbędne jest wprowadzenie teoretyczne. Zaprezentowane zostaną kluczowe pojęcia dotyczące teorii grup, grafów, grafów Cayley'a, ich izomorfizmów i metod ich badania. W rozdziale znajdują się tylko najistotniejsze pojęcia pod kątem niniejszej pracy, żeby lepiej zrozumieć pełen kontekst tematu, warto zapoznać się z pozycjami [3] i [9].

2.1 Grupy

Definicja 1. Grupa, to zbiór G z operacją \circ spełniające warunki:

- dla dowolnych $g, h, k \in G$, $(g \circ h) \circ k = g \circ (h \circ k)$;
- istnieje element $1 \in G$ (identyczność), taki, że $1 \circ g = g \circ 1 = g$ dla dowolnego $g \in G$
- dla każdego $g \in G$ istnieje $g^{-1} \in G$ (odwrotność g), taki, że $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = 1$.

Zazwyczaj, $g \circ h$ zapisuje się po prostu jako gh . Jeśli dodatkowo zachodzi warunek:

- dla dowolnych $g, h \in G$, $g \circ h = h \circ g$

grupę G nazywa się abelową.

Liczbę elementów grupy G , oznaczaną jako $|G|$, nazywa się rzędem grupy G .

Jeżeli G jest grupą skończoną, dla dowolnego $g \in G$ i pewnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $g^n = 1$. Najmniejsze n spełniające ten warunek dla danego elementu g nazywane jest rzędem elementu g (często oznaczane jako $o(g)$).

Definicja 2. Podgrupą H grupy G nazywa się podzbiór elementów G , będący grupą ze względu na operację grupową G (spełnia wszystkie warunki z definicji 1).

Podgrupa H grupy G (często oznaczana jako $H < G$) w naturalny sposób (właściwie 2 sposoby) wprowadza podział grupy G na równoliczne podzbiory:

- podział na podzbiory $Hx : x \in G = \{hx : h \in H\} : x \in G$, nazywane prawostronnymi warstwami H (Ha dla konkretnego $a \in G$ jest warstwą prawostronną reprezentowaną przez a i $|Ha| = |H|$);
- podział na podzbiory $xH : x \in G = \{xh : h \in H\} : x \in G$, nazywane lewostronnymi warstwami H (aH dla konkretnego $a \in G$ jest warstwą lewostronną reprezentowaną przez a i $|aH| = |H|$);

Liczba prawostronnych (lub lewostronnych) warstw nazywana jest indeksem H w grupie G . Konsekwencją tych rozważań jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. (Lagrange'a) *Rząd dowolnej podgrupy $H < G$ jest dzielnikiem $|G|$.*

Definicja 3. O elementach grupy $a, b \in G$ mówi się, że są sprzężone, gdy istnieje element $x \in G$, taki, że $xax^{-1} = b$

Analogicznie, o podgrupach $A, B < G$, mówi się że są sprzężone, gdy istnieje element $x \in G$, taki, że $xAx^{-1} = B$, gdzie $xAx^{-1} = \{xax^{-1}, a \in A\}$

Definicja 4. Niech $S \subseteq G$, gdzie G jest grupą. Przez $\langle S \rangle$ oznacza się zbiór wszystkich elementów grupy G , które można zapisać jako skończoną kombinację elementów z podzbioru S . Z wcześniejszych rozważań wynika, że $\langle S \rangle \leq G$. W przypadku, gdy $\langle S \rangle = G$, mówi się, że S jest podzbiorem generującym G .

Najmniejsze n , takie że $|S| = n$ i $\langle S \rangle = G$ nazywa się rangą grupy G i oznacza przez $rank(G)$.

Istotnym zagadnieniem jest sposób prezentacji grup. Grupy mogą być prezentowane na różne sposoby. Pokazane zostaną 2 z nich, które będą wykorzystywane w dalszej części pracy:

- postać słowna, czasami nazywana algebraiczną (autor będzie korzystał z tego określenia)-elementy grupy są reprezentowane przez słowa, złożone z liter będących generatorami grupy. Jest to popularna metoda prezentacji grupy, ze względu na zwięzłość zapisu- wystarczy podać listę generatorów i relacje definiujące grupę.

Przykład 1. Tak prezentuje się grupa dihedralna D_8 w zapisie algebraicznym:

$$D_8 = \langle a, b : a^4 = b^2 = 1, bab = a^{-1} \rangle ,$$

gdzie a, b to generatory, a $a^4 = b^2 = 1, bab = a^{-1}$ to relacje definiujące.

Twierdzenie 2. (Cayley'a) *Dowolna grupa jest izomorficzna z pewną podgrupą grupy permutacji (symetrycznej).*

Bezpośrednio z twierdzenia 2 wynika kolejna postać prezentacji grupy:

- postać permutacyjna- elementami grupy są permutacje, a działaniem w grupie jest składanie permutacji

Przykład 2. Tak prezentuje się grupa dihedralna D_8 w zapisie permutacyjnym:

$$\{(), (1, 2, 3, 4), (1, 4, 3, 2), (1, 3)(2, 4), (2, 4), (1, 3), (1, 4)(2, 3), (1, 2)(3, 4)\}$$

Obserwując rzędy poszczególnych elementów, można przejść z zapisu permutacyjnego do algebraicznego. Wystarczy wskazać, które elementy grupy permutacji przechodzą na generatory w zapisie algebraicznym. W tym przypadku, takie przejście mogłoby wyglądać następująco:

$$(1, 2, 3, 4) \rightarrow a, (2, 4) \rightarrow b$$

Łatwo jest sprawdzić, że przypisanie (zadanie izomorfizmu) jest prawidłowe, sprawdzając czy spełnione są zadane relacje:

$$\begin{aligned}(1, 2, 3, 4)^4 &= (2, 4)^2 = (), \\ (2, 4)(1, 2, 3, 4)(2, 4) &= (1, 4, 3, 2) = (1, 2, 3, 4)^{-1},\end{aligned}$$

co potwierdza, że przejście jest prawidłowe.

Przedstawione zostanie kilka ważnych faktów w kontekście strategii badań autora i projektu oprogramowania wspomagającego je.

Nieizomorficznych (patrz podrozdział 2.3) grup skończonego rzędu n jest skończona liczba. W szczególności, stosunkowo niewiele takich grup jest dla $|G| \leq 16$. Wziąwszy to pod uwagę, narodził się pomysł by oprogramowanie zostało przystosowane do kompletnego zbadania (pod względem izomorfizmów) grafów Cayley’a generowanych przez każdą z nich (więcej o grafach Cayley’a w podrozdziale 2.4). Dzięki temu, możliwy jest w miarę szczegółowy przegląd otrzymanych wyników.

Wszystkie skończone grupy są grupami prostymi lub produktami powstałymi z takich grup prostych (na podobnej zasadzie, co pierwiastki i związki chemiczne w chemii). Z racji, że grupy konstruuje się z „mniejszych” elementów, można sklasyfikować je na podobne pod względem konstrukcji. Takie klasy nazywa się rodzinami grup. Wiele wyników zaprezentowanych w rozdziale 4 jest analizowane pod kątem całych rodzin grup, co jest częstą praktyką w badaniu izomorfizmów grafów Cayley’a. Tak prezentują się wybrane rodziny grup:

- grupy cykliczne, zapis algebraiczny: $C_n = \langle a : a^n = 1 \rangle$ (czasami oznaczane jako Z_n);
- grupy dihedralne: $D_{2n} = \langle a, b : a^n = 1, b^2 = 1, bab = a^{-1} \rangle$;
- grupy iloczynowe postaci: $C_2 \times C_n = \langle a, b : a^n = 1, b^2 = 1, ab = ba \rangle$;
- grupy symetryczne S_n , grupy wszystkich permutacji na zbiorze n -elementowym;

- grupy alternujące A_n , grupy wszystkich parzystych permutacji na zbiorze n -elementowym (permutacji złożonych z parzystej liczby transpozycji)

2.2 Grafy

Definicja 5. Graf jest definiowany przez parę zbiorów (V, E) , gdzie V jest zbiorem elementów nazywanych wierzchołkami, a E jest zbiorem par elementów zbioru V , element tego zbioru jest nazywany krawędzią. Bardzo często korzysta się z graficznej prezentacji grafów, w której wierzchołki są oznaczane przez punkty, a krawędzie przez łączące je linie (wiele przykładów zostanie zaprezentowane w dalszej części).

Elementy zbioru E , w zależności od typu badanych grafów, można traktować jako pary uporządkowane lub nieuporządkowane. Mówi się wtedy, odpowiednio o grafach skierowanych lub nieskierowanych. Jeżeli dla grafów skierowanych zachodzi:

$$\text{dla dowolnej krawędzi } (u, v) \in E, \text{ istnieje krawędź } (v, u) \in E,$$

często traktuje się je jako grafy nieskierowane (jest to przypadek, na którym w dużej mierze skupia się ta praca).

Liczba elementów zbioru V danego grafu G ($|V(G)|$), jest często określana rzędem grafu G , podobnie jak w przypadku liczby elementów grupy (co, jak zostanie pokazane w późniejszych rozdziałach, jest wygodne przy omawianiu grafów Cayley'a).

Definicja 6. Niech $u, v \in V(G)$ i $(u, v) \in E(G)$. Wtedy wierzchołki u i v nazywa się sąsiadującymi. Liczbę wszystkich sąsiadów danego wierzchołka v nazywa się stopniem wierzchołka v i oznacza $\deg v$. Jeżeli wszystkie wierzchołki grafu G mają stopień k , wtedy mówi się o grafie G , że jest k -regularny.

Definicja 7. Spacerem w grafie nazywa się sekwencję wierzchołków i krawędzi $v_0, e_0, v_1, \dots, e_{k-1}, v_k$, w której $e_i = (v_i, v_{i+1})$. Mówi się o takim spacerze, że łączy wierzchołki v_0 i v_k . Jeśli $v_0 = v_k$, to spacer jest zamknięty. Wyróżnione typy spacerów:

- spacer, w którym żaden wierzchołek się nie powtarza, nazywa się ścieżką
- spacer, w którym żadna krawędź się nie powtarza, nazywa się szlakiem
- zamknięty spacer, będący równocześnie szlakiem i ścieżką (z wyjątkiem wierzchołka końcowego), nazywa się cyklem

Definicja 8. Graf G jest spójny, jeżeli dla dowolnych dwóch wierzchołków $u, v \in V(G)$ istnieje ścieżka łącząca u i v . W praktyce, dla grafów nieskierowanych, oznacza to że, jeśli graf jest nie-spójny, to jego wierzchołki można podzielić na podzbiory, w których żaden wierzchołek nie jest połączony z wierzchołkiem należącym do podzbioru, do którego nie należy.

Definicja 9. Dopełnieniem grafu G nazywa się graf \overline{G} , generowany w następujący sposób:

- wierzchołki \overline{G} są takie jak G (to znaczy $V(G) = V(\overline{G})$)
- jeżeli $(u, v) \in E(G)$, to $(u, v) \notin E(\overline{G})$
- jeżeli $(u, v) \notin E(G)$, to $(u, v) \in E(\overline{G})$

2.3 Izomorfizmy, automorfizmy, grupy automorfizmów

Definicja 10. W ogólnym znaczeniu, izomorfizm jest bijekcją przekształcającą jeden obiekt matematyczny na drugi, w taki sposób, że unikatowa struktura tego obiektu pozostaje zachowana. Można zdefiniować izomorfizm zarówno dla grup jak i dla grafów:

- Niech G i H będą grupami. Izomorfizm grup to bijekcja na elementach grup $\phi : G \rightarrow H$, taka, że dla dowolnych $g_1, g_2, g_3 \in G$ zachodzi $g_1 g_2 = g_3$, wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi również $g_1^\phi g_2^\phi = g_3^\phi$, gdzie g_i^ϕ to element grupy H , na który ϕ przekształca g_i . Można zauważyć, że tak zadane przekształcenie wymusza przejście elementu 1 (identyczności) w grupie G na element 1 w grupie H .
- Niech G i H będą grafami. Izomorfizm grafów to bijekcja na wierzchołkach grafów $\phi : V(G) \rightarrow V(H)$, taka, że dla dowolnych $u, v \in V(G)$ istnieje $(u, v) \in E(G)$, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje również $(u^\phi, v^\phi) \in E(H)$, gdzie u^ϕ, v^ϕ to wierzchołki grafu H , na które ϕ przekształca wierzchołki u i v .

Obiekty izomorficzne (takie, pomiędzy którymi istnieje izomorfizm), często traktuje się jako nie-odróżnialne, a wszystkie kluczowe własności dla danego obiektu są prawdziwe również dla wszystkich obiektów izomorficznych z nim. Istnienie izomorfizmu pomiędzy dwoma obiektami A i B , oznacza się przez $A \cong B$.

Zweryfikowanie istnienia izomorfizmu pomiędzy dwoma grafami jest ciekawym problemem, którym od dłuższego czasu zajmują się badacze związani z teorią grafów. Znalazienie uniwersalnego algorytmu rozstrzygającego te zagadnienie w czasie wielomianowym pozostaje problemem otwartym, ale istnieją pewne przesłanki, świadczące o tym, że zadanie to może być wykonalne. Dla niektórych typów grafów algorytm taki został znaleziony ([10]). Praca [6] przedstawia

bardziej zaawansowane podejście do uogólnienia problemu izomorfizmu grafów. Co ciekawe, w zaproponowanym algorytmie, Derksen korzysta z własności grup algebraicznych.

Definicja 11. Specjalnym rodzajem izomorfizmu jest automorfizm. Przekształca on obiekt matematyczny na siebie ($\phi : G \rightarrow G$ w wypadku grup, $\phi : V(G) \rightarrow V(G)$, w wypadku grafów), tak by zachowana została jego struktura. Oznacza to, że zarówno dla grup, jak i dla grafów, przekształcenie to musi spełniać warunki przedstawione w definicji 10.

Zbiór wszystkich automorfizmów danego obiektu A z operacją składania automorfizmów tworzy grupę, zwaną grupą automorfizmów (oznaczaną przez $\text{Aut}(A)$), w której zachowane są wszystkie własności z definicji 1. Grupa ta odgrywa ważną rolę w badaniu izomorfizmów grafów i własności grafów ogółem.

2.4 Grafy Cayley’a i ich izomorfizmy

W poprzednich podrozdziałach przedstawione zostały pojęcia wprowadzające w temat grafów Cayley’a. Ten podrozdział skupi się na zagadnieniach ściśle dotyczących meritum pracy.

Definicja 12. Niech G będzie grupą, a $S \subseteq G$ podzbiorem jej elementów. Graf Cayley’a $\text{Cay}(G, S)$ jest grafem skierowanym ze zbiorem wierzchołków odpowiadającym zbiorowi elementów grupy G i zbiorowi krawędzi generowanemu przez zależność:

$$\text{dla dowolnych } x, y \in G, (x, y) \in E(\text{Cay}(G, S)) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } yx^{-1} \in S$$

W praktyce oznacza to, że z danego wierzchołka odpowiadającego elementowi x wychodzą krawędzie, połączone z wierzchołkami postaci $y = ax$, gdzie $a \in S$.

Nietrudno zauważyć, że:

Stwierdzenie 3. Jeśli $(x, y) \in E(\text{Cay}(G, S))$ i $a \in S$, $ax = y$, to $(y, x) \in E(\text{Cay}(G, S))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a^{-1} \in S$.

Ze stwierdzenia 3 wynika:

Stwierdzenie 4. Dla dowolnej krawędzi $(x, y) \in E(\text{Cay}(G, S))$, $(y, x) \in E(\text{Cay}(G, S))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $S = S^{-1}$, gdzie S^{-1} to zbiór odwrotności elementów ze zbioru S .

Jeśli dla danego grafu Cayley’a $\text{Cay}(G, S)$ stwierdzenie 4 zachodzi, można traktować go jako graf nieskierowany. Wiele prac dotyczących grafów Cayley’a ogranicza się do grafów nieskierowanych. Wszystkie własności prawdziwe dla grafów skierowanych są prawdziwe również dla grafów nieskierowanych, jednak odwrotnie, nie zawsze jest to prawdą. W dalszych rozważaniach autor będzie skupiał się głównie na grafach Cayley’a nieskierowanych.

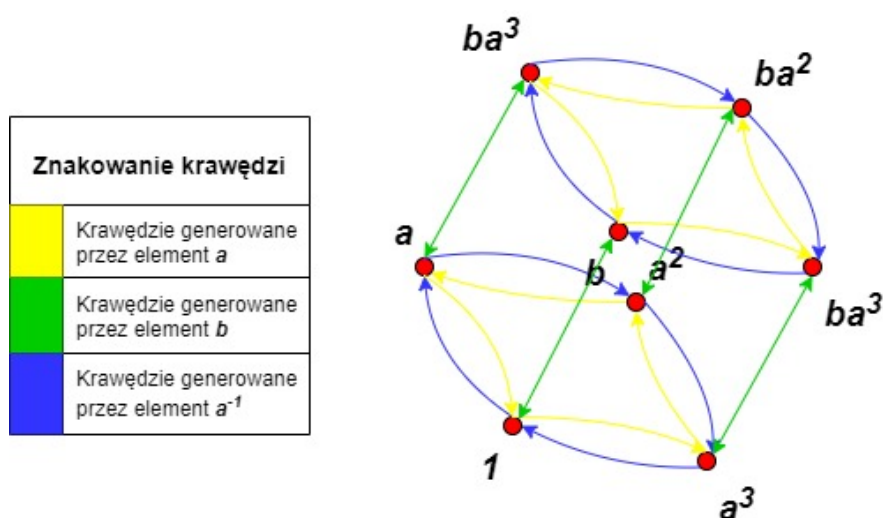
Przykład 3. Zademonstrowany zostanie przykład grafu Cayley’a dla grupy D_8 (patrz przykłady 1 i 2). Niech grupa ma postać algebraiczną:

$$D_8 = \langle a, b : a^4 = b^2 = 1, bab = a^{-1} \rangle,$$

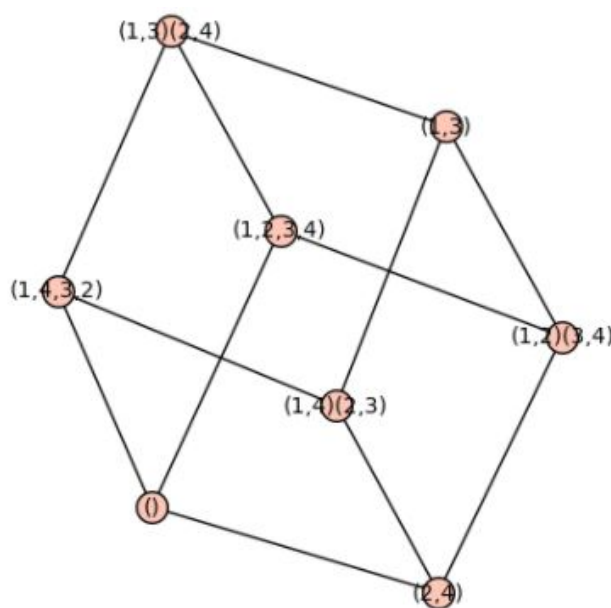
a zbiór generujący krawędzie S będzie miał postać:

$$S = \{a, a^{-1}, b\}.$$

Na rysunku 2.1 przedstawiony został graf $\text{Cay}(D_8, S)$, ze wskazaniem, które elementy zbioru S generują konkretne krawędzie.



Rysunek 2.1: Graf Cayley’a $\text{Cay}(D_8, S)$, $S = \{a, a^{-1}, b\}$



Rysunek 2.2: Graf Cayley’a z rysunku 2.1, postać permutacyjna grupy D_8 , nieskierowany

Uwaga 1. Można zauważyć, że jeśli $1 \in S$, to dla dowolnego $x \in G$, $(x, x) \in E(\text{Cay}(G, S))$. Oznacza to, że każdy wierzchołek $\text{Cay}(G, S)$ będzie połączony sam ze sobą tak zwaną pętlą. Krawędź taka nie jest interesująca z perspektywy badawczej, dlatego zazwyczaj, przyjmuje się, że $S \subseteq G \setminus \{1\}$.

Twierdzenie 5. *Graf $\text{Cay}(G, S)$ jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle S \rangle = G$.*

Twierdzenie 5 wynika z faktu, że startując z dowolnego wierzchołka grafu $g \in G$, dowolny wierzchołek końcowy ścieżki jest postaci sg , gdzie $s \in \langle S \rangle$. Oznacza to, że jeżeli $\langle S \rangle \neq G$ (czyli $\langle S \rangle < G$), to graf $\text{Cay}(G, S)$ jest podzielony na indeks $\langle S \rangle$ składowych, których wierzchołki odpowiadają warstwom prawostronnym podgrupy $\langle S \rangle$, a każda składowa jest izomorficzna z $\text{Cay}(\langle S \rangle, S)$. Konsekwencją tego jest ważny fakt:

$$\text{Cay}(G, S) \cong \text{Cay}(G, H) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \text{Cay}(\langle S \rangle, S) \cong \text{Cay}(\langle H \rangle, H)$$

lub ogólniej:

Twierdzenie 6. *Jeśli G i A są grupami i $|G| = |A|$, to $\text{Cay}(G, S) \cong \text{Cay}(A, B)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{Cay}(\langle S \rangle, S) \cong \text{Cay}(\langle B \rangle, B)$*

Dowolny wierzchołek grafu Cayley'a ma stopień równy $|S|$ (grafy Cayley'a są $|S|$ -regularne). Co więcej, dla dowolnej pary wierzchołków $\text{Cay}(G, S)$, istnieje automorfizm grafowy przekształcający jeden na drugi. Ta własność nazywa się wierzchołkową tranzytywnością.

Wierzchołkowa tranzytywność jest istotną własnością grafów Cayley'a. Jest jednym z powodów, przez które znaleziono dla nich wiele zastosowań mniej lub bardziej praktycznych, takich jak modelowanie sieci połączeń komputerowych, czy badanie własności zagadek matematycznych ([5]).

Twierdzenie 7. *Dowolny graf Cayley'a jest wierzchołkowo tranzytywny.*

Dowód. Wskazana zostanie rodzina bijekcji zbioru wierzchołków $V(\text{Cay}(G, S))$ (G) na siebie:

Stwierdzenie 8. *Dla dowolnego $g \in G$, przekształcenie $\hat{g}: G \rightarrow G$, takie, że $a^{\hat{g}} = ag$ jest bijekcją.*

Łatwo zauważyć, że dla dowolnych $x, y \in G$ istnieje \hat{g} , takie, że $x^{\hat{g}} = y$, konkretniej $g = x^{-1}y$. Należy pokazać jeszcze, że \hat{g} jest automorfizmem grafu Cayley'a $\text{Cay}(G, S)$ (sąsiedztwo wierzchołków pozostaje zachowane).

Należy pokazać, że jeżeli x sąsiaduje z t to $x^{\hat{g}}$ sąsiaduje z $t^{\hat{g}}$.

Wierzchołki x i t są sąsiadami, więc istnieje $s \in S$, takie, że $sx = t$. Zachodzi $x^{\hat{g}} = xg$ i $t^{\hat{g}} = tg$, a z $sx = t$ wynika, że $sxg = tg$, więc $x^{\hat{g}}$ sąsiaduje z $t^{\hat{g}}$.

W drugą stronę:

Wierzchołki $x^{\hat{g}}$ i $t^{\hat{g}}$ sąsiadują ze sobą. Istnieje $s \in S$, takie, że $sx^{\hat{g}} = t^{\hat{g}}$.

$$sx = sx^{\hat{g}\hat{g}^{-1}} = sxgg^{-1} = tgg^{-1} = t^{\hat{g}\hat{g}^{-1}} = t$$

Znaczy to że x i t sąsiadują ze sobą. Wynika z tego, że \hat{g} jest automorfizmem $Cay(G, S)$. \square

Definicja 13. Reprezentacją Cayley’a grafu Γ nazywa się parę (G, S) , gdzie G jest grupą, a S podzbiorem elementów G , taką że $\Gamma \cong Cay(G, S)$

Problem znalezienia reprezentacji Cayley’a danego grafu jest pokrewny do problemu izomorfizmu grafów Cayley’a. Stwierdzenie, czy para (G, S) to reprezentacja grafu $Cay(G, H)$ jest jednoznaczne z rozstrzygnięciem $Cay(G, S) \cong Cay(G, H)$.

Wprowadzone zostanie pojęcie CI-grafu, bardzo istotne w kontekście badań nad izomorfizmami grafów Cayley’a.

Definicja 14. Graf Cayley’a $Cay(G, S)$ nazywa się CI-grafem (CI odpowiada „Cayley Isomorphism”), jeśli prawdą jest, że $Cay(G, S) \cong Cay(G, H)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\sigma \in Aut(G)$, takie że $S^\sigma = H$.

Jeżeli wszystkie grafy Cayley’a generowane przez grupę G o stopniu wierzchołka m ($|S| = m$) są CI-grafami, mówi się, że grupa G ma m -CI-własność.

Jeżeli grupa G ma m -CI-własność dla dowolnego $m < |G|$, mówi się, że G jest CI-grupą.

Kolokwialnie ujmując, graf będący CI-grafem to graf, którego izomorfizmy w obrębie grafów generowanych przez grupę generującą G , można utożsamić z automorfizmami grupy generującej $\sigma \in Aut(G)$ działającymi na zbiór generujący S .

Problem klasyfikacji CI-grafów i CI-grup był obiektem bardzo intensywnych badań matematyków. W [11] Li zebrał wszystkie najistotniejsze wyniki, co wymagało od niego przeglądu ponad 120 prac naukowych. Jednym z fundamentalnych kryteriów jest twierdzenie udowodnione przez Babai’a (dowód można znaleźć w [11]):

Twierdzenie 9. *Niech Γ będzie grafem Cayley’a skończonej grupy G . Wtedy Γ jest CI-grafem wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie regularne podgrupy $Aut(\Gamma)$ są sprzężone.*

Okazuje się, że nieizomorficzne grupy mogą generować izomorficzne grafy Cayley’a. Badanie takich izomorfizmów nie cieszy się takim samym zainteresowaniem w środowisku naukowym, co badanie CI-grafów i CI-grup. Jedną z prac skupionych na tym zagadnieniu jest [12]. W rozdziale 4 temat ten zostanie poruszony szerzej i wsparty wieloma przykładami.

3. *Oprogramowanie*

Ten rozdział będzie poświęcony opisowi programu dołączonego do niniejszej pracy. W początkowych założeniach, jego podstawową funkcją miała być możliwość sprawdzenia, czy dany graf jest CI-grafem, co za tym idzie czy dana grupa ma m -CI-własność dla pewnego m i ostatecznie czy jest CI-grupą. Podczas implementacji podstawowych zastosowań, zaciekawienie autora dodatkowymi pytaniami związanymi z tematem grafów Cayley’a, umotywowало powstanie dodatkowych funkcji. Nie wszystkie z nich są ściśle związane z tematem pracy, dlatego opisane zostaną tylko te najistotniejsze, wykorzystane w następnym rozdziale podsumowującym uzyskane wyniki. Pozostałe zostały udokumentowane w załączonym pliku `.ipynb` i tam można dowiedzieć się o nich więcej.

Oprogramowanie bazuje na języku programowania python i w dużym stopniu wykorzystuje pakiet Sage oraz wbudowany w Sage interfejs do GAP. O wspomnianych bibliotekach można dowiedzieć się więcej w [1] i [7]. Oprogramowanie nie posiada tradycyjnego pliku wykonywalnego, załączony plik `.ipynb` jest interaktywnym notatnikiem zawierającym komórki kodu z opisem, komentarzami i przykładami zastosowania, umożliwiające też bezpośrednie testowanie funkcji z poziomu notatnika.

Wiele zaimplementowanych funkcji wykorzystuje gotowe, sprawdzone rozwiązania częściowo zaimportowane ze wspomnianych pakietów. Dokładny opis ich działania można znaleźć w następujących źródłach: funkcje grafowe (Sage)[13], funkcje dotyczące teorii grup (Sage)[14], homomorfizmy grup i grupy automorfizmów własnych grup (GAP)[8].

3.1 Schemat działania

Oprogramowanie, zgodnie z początkowymi założeniami, jest przystosowane do badania grafów Cayley’a rzędów nie większych niż 16. Jego główne funkcje można opisać następującym schematem:

- wygenerowane zostają wszystkie grafy Cayley’a nieskierowane danego rzędu
- zebrane zostają w izomorficzne klasy z podziałem uwzględniającym grupy generujące

- przy pomocy otrzymanej listy klas, można zweryfikować m-CI-własności danej grupy oraz stwierdzić, czy dana grupa jest CI-grupa
- otrzymana lista klas może zostać przeorganizowana, tak, by nie był uwzględniany podział grupowy (pozwala to na znalezienie reprezentacji Caley'a danego grafu we wszystkich grupach, w których jest to możliwe)

Wewnątrz systemu grupy są reprezentowane przez odpowiadające grupy permutacji (zgodnie z twierdzeniem Cayley'a), przez co wierzchołki grafów są oznakowane przez odpowiadające permutacje, a ich krawędzie są prowadzone zgodnie z definicją zależnie od zbioru S . Kod odpowiadający za utworzenie takiego grafu prezentuje się następująco:

`G1 = Graph([grupa.list(), lambda g, h: h*g^(-1) in S]), gdzie:`

- `grupa.list()` - lista elementów grupy generującej (w postaci grupy permutacji),
- `g` - zmienna iterująca po wierzchołkach grafu,
- `h` - zmienna iterująca po elementach zbioru S ,
- S - zbiór generujący S (zbiór permutacji)

Strukturą danych, na której oparte jest działanie większości funkcji jest klasa izomorficznych grafów generowanych przez daną grupę. Prezentuje się następująco:

```
Class Klasa_graf_w_grup:
def __init__(self, graf, grupa, lista_gen):
self.graf = graf
self.lista_gen = lista_gen
self.grupa = grupa , gdzie:
```

- `lista_gen` - lista zbiorów S , generujących graf charakterystyczny dla danej klasy,
- `grupa` - grupa generująca, której podzbiorami są elementy z `lista_gen`,
- `graf` - graf reprezentujący daną klasę, izomorficzny graf generują każdy zbiór S z `lista_gen` w parze z grupą generującą `grupa`

Przy pomocy funkcji `generuj_liste_klas(P)`, gdzie P to rząd grup, generowane są wszystkie możliwe klasy (tzn. obiekty klasy `Klasa_graf_w_grup`) dla każdej z grup danego rzędu P , następnie umieszczone zostają na kilkupoziomowej liście. Struktura tej listy jest następująca:

indeks grupy -> stopień wierzchołka klasy ->indeks klasy-> klasa (obiekt klasy
`Klasa_graf_w_grup`)

Taka struktura pozwala na stosunkowo proste nawigowanie pomiędzy klasami i usprawnia działanie pozostałych funkcji.

Funkcja `generuj_liste_kl_pom_gr(lista_klas_wszy_gr, P)` tworzy przeorganizowaną listę początkowo wygenerowaną przez `generuj_liste_klas` (argument `lista_klas_wszy_gr`), tak by zniwelowany został podział grupowy. Przeorganizowana lista pozwala na łatwiejszy dostęp do grafów izomorficznych generowanych przez różne (nieizomorficzne) grupy. Struktura nowej listy jest następująca:

stopień wierzchołka ->indeks listy zawierającej klasy z izomorficznym grafem -> indeks klasy
 generowanej przez konkretną grupę -> klasa (obiekt klasy `Klasa_graf_w_grup`)

Istotna jest również funkcja sprawdzająca m-CI-własności grup . Szerzej o niej można przeczytać w podrozdziale 3.2 z opisami algorytmów.

3.2 Algorytmy

Ten podrozdział będzie poświęcony opisowi algorytmów wykorzystanych przy implementacji głównych funkcji oraz najważniejszych podfunkcji.

Funkcja `generuj_liste_klas(P)` -generuje listę wszystkich klas grafów Cayleya rzędu P ze względu na izomorfizm(z uwzględnionym podziałem grupowym). Struktura listy zgodna z kluczem: indeks grupy -> stopień wierzchołka klasy -> indeks klasy -> klasa.

- P - argument odpowiada rzędowi grup

Algorytm:

Wygenerowana zostaje lista wszystkich grup rzędu P w postaci grup permutacji (permutacji umieszczonych na liście). Następnie każda grupa zostaje wysłana do funkcji `generuj_liste_klas_dla_grupy(P, grupa)`, by wygenerować i odpowiednio sklasyfikować wszystkie generowane przez nią, nieskierowane grafy Cayley'a.

Funkcja `generuj_liste_klas_dla_grupy(P, grupa)` -generuje listę wszystkich klas grafów Cayley'a rzędu P ze względu na izomorfizm dla pojedynczej grupy `grupa`.

- P - argument odpowiada rzędowi grupy
- `grupa` - argument odpowiada grupie, której podzbiory mają zostać sklasyfikowane

Algorytm:

Funkcja działa kilkietapowo. Niech $i = 0$:

1. Wyznaczone zostają wszystkie i -elementowe kombinacje elementów należących do grupy grupa(z wykluczeniem identyczności). Są to zbiory S generujące grafy Cayley'a.
2. Wyeliminowane zostają te podzbiory, które nie są zamknięte na odwrotność (zawierają pewien element i i nie zawierają jego odwrotności). Służy to wyeliminowaniu zbiorów generujących grafy skierowane.
3. Graf wygenerowany przez pierwszy zbiór z listy staje się grafem charakteryzującym klasę (zbiór generujący zostanie oznaczony jako S_0).
4. Wszystkie zbiory generujące graf izomorficzny z $Cay(grupa, S_0)$ zostają przeczepione na listę `lista_gen` klasy (izomorfizm jest sprawdzany wbudowaną funkcją Sage `is_isomorphic`).
5. Kroki 3 i 4 są powtarzane, aż wszystkie zbiory S z listy zostaną sklasyfikowane
6. Wszystkie kroki zostają powtórzone dla $i = 1, 2, \dots, P-1$

Funkcja `generuj_liste_kl_pom_gr(lista_klas_wszy_gr, P)` -przekształca listę wygenerowaną przez `generuj_liste_klas`, tak by zniwelować podział grupowy. Struktura listy zgodna z kluczem: stopień wierzchołka ->indeks listy zawierającej klasy z izomorficznym grafem ->indeks klasy -> klasa.

- `lista_klas_wszy_gr` - argument odpowiada liście wygenerowanej przez `generuj_liste_klas`
- `P` - argument odpowiada rzędowi grup

Algorytm:

Niech $i = 0$:

1. klasy grafów o stopniu wierzchołka i każdej grupy zostają przeczepione na pojedynczą listę.
2. następuje klasyfikacja analogiczna do tej z funkcji `generuj_liste_klas_dla_grupy(P, grupa)`
3. Wszystkie kroki zostają powtórzone dla $i = 1, 2, \dots, P-1$

Funkcja `zwroc_klasy(ind, st_wie, lista_klas_wszy_gr)` -zwraca listę klas izomorficznych grafów generowanych przez grupę z indeksem systemowym `ind`, o stopniu wierzchołka `st_wie`. Ułatwia dostęp do klas szczególnie interesujących użytkownika.

- `lista_klas_wszy_gr` - argument odpowiada liście wygenerowanej przez `generuj_liste_klas`
- `ind` - argument odpowiada indeksowi grupy związanej z szukaną listą klas
- `st_wie` argument odpowiada stopniowi wierzchołka związanemu z szukaną listą klas

Algorytm:

Funkcja nawiguje po liście `lista_klas_wszy_gr`, i zwraca wskaźnik na listę klas zgodną z parametrami `ind` i `st_wie`

Funkcja `wlasnosc_m_CI(ind, lista_klas_wszy_gr, P)` - zwraca podsumowanie, czy grupa o indeksie systemowym `ind` ma własność m -CI dla $m=1,2,\dots,P-1$.

- `lista_klas_wszy_gr` - argument odpowiada liście wygenerowanej przez `generuj_liste_klas`
- `ind` - argument odpowiada indeksowi weryfikowanej grupy
- `P` - argument odpowiada rzędowi weryfikowanej grupy

Algorytm:

Funkcja oparta jest na definicji CI-grafu i m -CI własności (patrz podrozdział 2.4), liście klas izomorficznych grafów `lista_klas_wszy_gr` oraz następujących stwierdzeniach wynikających z własności grupy automorfizmów:

Stwierdzenie 10. *Jeśli $A, B, C \subseteq G$, gdzie G jest grupą i $\sigma_1, \sigma_2 \in \text{Aut}(G)$, takie że $A^{\sigma_1} = B$ i $A^{\sigma_2} = C$, wtedy $B^{\sigma_2\sigma_1^{-1}} = C$*

Stwierdzenie 11. *Jeśli $A, B, C \subseteq G$, gdzie G jest grupą, istnieje $\sigma_1 \in \text{Aut}(G)$, takie że $A^{\sigma_1} = B$ i nie istnieje $\sigma_2 \in \text{Aut}(G)$, takie że $C^{\sigma_2} = A$, wtedy nie istnieje $\sigma_3 \in \text{Aut}(G)$, takie, że $C^{\sigma_3} = B$*

Niech G będzie grupą z indeksem systemowym `ind` oraz $i = 0$:

1. Wyznaczona zostaje grupa automorfizmów grupy G przy pomocy funkcji `GAP AutomorphismGroup`.
2. Rozpatrywana jest pierwsza klasa zbiorów generujących izomorficzne grafy o stopniu wierzchołka i (element należący do klasy `Klasa_graf_w_grup`)
3. Sprawdzone zostaje, czy istnieje automorfizm grupy G przekształcający pierwszy zbiór z listy `lista_gen` na każdy z pozostałych zbiorów z tej listy. Zważając na stwierdzenie 10, to wystarczy, by sprawdzić, czy zachodzi $\text{Cay}(G, S) \cong \text{Cay}(G, H) \Rightarrow \exists \sigma \in \text{Aut}(G), S^\sigma = H$. Sprawdzenie to wymaga użycia funkcji `GAP Image`, zwracającej obraz danego zbioru elementów pod podanym automorfizmem.

4. krok 3 jest powtarzany dla każdej klasy o stopniu wierzchołka i .
5. Należy stwierdzić jeszcze czy zachodzi $\text{Cay}(G, S) \cong \text{Cay}(G, H) \Leftarrow \exists \sigma \in \text{Aut}(G), S^\sigma = H$. W tym celu weryfikowane jest, czy istnieje automorfizm przekształcający zbiory należące do różnych klas na siebie. Sprawdzana jest każda para klas, ale dzięki temu, że zachodzi warunek $\text{Cay}(G, S) \cong \text{Cay}(G, H) \Rightarrow \exists \sigma \in \text{Aut}(G), S^\sigma = H$, zweryfikowani muszą zostać jedynie pojedynczy reprezentanci każdej klasy (wynika to ze stwierdzenia 11). W algorytmie są to pierwsze elementy odpowiednich list `lista_gen`.
6. Jeżeli każda weryfikacja z kroku 3 jest prawdziwa, i każda z kroku 5 jest fałszywa, stwierdzone jest, że grupa G ma i -CI-własność. Jeśli, któryś z wymienionych warunków już na etapie sprawdzania nie zachodzi, algorytm jest przerywany i stwierdzone jest, że grupa G nie ma i -CI-własności.
7. kroki od 2 do 6 są powtarzane dla $i = 1, 2, \dots, P - 1$

3.3 Sposób prezentacji i interpretacji wyników

Ten podrozdział poświęcony będzie funkcjom zwracającym wyniki i krótkiemu omówieniu, jak powinno się je interpretować.

Niektóre z omawianych funkcji zwracają tabelaryczne podsumowania (na przykład rysunek 3.1). By wyglądały bardziej przejrzyste, zastosowany został pakiet graficzny Plotly (open-source) oferujący wiele gotowych obiektów, takich jak tabele, wykresy i tym podobne. Więcej o nim można dowiedzieć się na oficjalnej stronie twórców <https://plotly.com/>.

Przedstawione zostaną poszczególne funkcje odpowiadające za prezentację wyników.

Funkcja `generuj_spis_grup(rzad)` - służy do wyświetlenia indeksowania poszczególnych grup wewnątrz systemu, wartość `rzad` odpowiada rzędowi grup które chce się obejrzeć.

- `rzad` - argument odpowiada rzędowi grup

indeks wew.	grupa
0	CyclicPermutationGroup(12)
1	direct_product_permgroups([C2,C6])
2	AlternatingGroup(4)
3	DihedralGroup(6)
4	DiCyclicGroup(3)

Rysunek 3.1: Przykładowa tabela generowana przez `generuj_spis_grup` (rząd grup = 12)

Autor, w celu ułatwienia dostępu do poszczególnych grup, nadał im indeksy systemowe. Dla każdego rzędu grup, każda grupa otrzymała numer nie mniejszy od 0, tak, że para (rzęd,indeks) jednoznacznie pozwala zidentyfikować konkretną grupę. Funkcja `generuj_spis_grup(rzad)` pokazuje, jak zadane zostało to przyporządkowanie (przykład rysunek 3.1). W pierwszej kolumnie tabeli znajduje się indeks systemowy, w drugiej komenda Sage, użyta do wygenerowania odpowiedniej grupy w postaci permutacyjnej (komenda w jawny sposób odwołuje się do konkretnej grupy).

Funkcja `prezentuj_kl_poj_gr(ind, lista_klas_wszy_gr, P)` - dla grupy z indeksem wewn. `ind`, zwraca podsumowanie, ile jest różnych (nieizomorficznych) grafów Cayley'a oraz ile jest wszystkich podzbiorów generujących grafy nieskierowane, w zależności od stopnia wierzchołka $|S|$.

- `ind` - argument odpowiada indeksowi systemowemu grupy
- `lista_klas_wszy_gr` - argument odpowiada liście wygenerowanej przez `generuj_liste_klas`
- `P` - argument odpowiada rzędowi grupy

st.wierz	licz. klas	łączna licz. repr. dla st
0	1	1
1	1	1
2	2	3
3	2	3
4	2	3
5	2	3
6	1	1
7	1	1

Rysunek 3.2: Przykładowa tabela generowana przez `prezentuj_kl_poj_gr` (dla grupy C_8)

Przykładowe podsuowanie znajduje się na rysunku 3.2. Kolumna „stopień wierzchołka” odpowiada stopniowi wierzchołka ($|S|$), kolumna „liczba klas” odpowiada liczbie nieizomorficznych grafów o danym stopniu wierzchołka, a „łączna liczba reprezentantów dla stopnia” odpowiada liczbie wszystkich zbiorów generujących S dla stopnia wierzchołka (generujących grafy nieskierowane). Zazwyczaj nie da się z niego odczytać ilu jest reprezentantów dla konkretnej klasy, w tym celu należy posłużyć się funkcją `prezentuj_kl_gr_st(lista_kl)`.

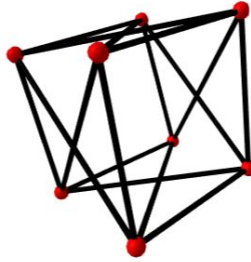
Funkcja `prezentuj_kl_gr_st(lista_kl)` - szczegółowo przedstawia wyniki dotyczące listy zwróconej przez funkcję `zwroc_klasy`.

- `lista_kl` - argument odpowiada liście klas zwróconej przez `zwroc_klasy`

```

klasa 1
liczba reprezentantów: 3
postać permutacyjna grupy: [( ), (5,6), (1,3)(2,4), (1,3)(2,4)(5,6), (1,4,3,2), (1,4,3,2)(5,6), (1,2,3,4), (1,2,3,4)(5,6)]

```



①

```

zbiory generujące S
zbiór 0
[(5,6), (1,3)(2,4)(5,6), (1,4,3,2), (1,2,3,4)]

zbiór 1
[(5,6), (1,3)(2,4)(5,6), (1,4,3,2)(5,6), (1,2,3,4)(5,6)]

zbiór 2
[(1,4,3,2), (1,4,3,2)(5,6), (1,2,3,4), (1,2,3,4)(5,6)]

```

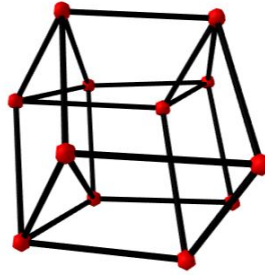
Rysunek 3.3: Przykładowe wyniki generowane przez `prezentuj_kl_gr_st` (dla grupy $C_4 \times C_2$)

Rysunek 3.3 przedstawia podsumowanie dotyczące pojedynczej klasy (w górnej części postać grupy, niżej graf odpowiadający klasie, na dole wszystkie zbiory S należące do klasy). Funkcja `prezentuj_kl_gr_st(lista_kl)` pokazuje jednak wszystkie klasy o danym stopniu wierzchołka dla danej grupy, jedna pod drugą, co nie zostało ujęte na obrazku.

Funkcja `prezentuj_liste_klas_dla_danego_stopnia(lista_kl_pom_gr, st_w)` -wyświetla wszystkie klasy grafów o stopniu wierzchołka `st_w` bez podziału grupowego oraz zwraca podsumowanie, dotyczące tego jakie grupy generują izomorficzny graf, jakie są własności danego grafu.

- `lista_kl_pom_gr` - argument odpowiada liście wygenerowanej przez `generuj_liste_kl_pom_gr`
- `st_w` - argument odpowiada badanemu stopniowi wierzchołka

graf 7
izomorficzny graf generują grupy 12 -elementowe, o następujących indeksach:



①

```

grupa o indeksie wew. 0 - 1 reprezentant/ów
przykładowy reprezentant: grupa [(), (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12), (1,3,5,7,9,11)(2,4,6,8,10,12), (1,4,7,10)(2,5,8,11)(3,6,9,12), (1,5,9)(2,6,10)(3,7,11)(4,8,12), (1,6,11,4,9,2,7,12,5,10,3,8), (1,7)(2,8)(3,9)(4,10)(5,11)(6,12), (1,8,3,10,5,12,7,2,9,4,11,6), (1,9,5)(2,10,6)(3,11,7)(4,12,8), (1,10,7,4)(2,11,8,5)(3,12,9,6), (1,11,9,7,5,3)(2,12,10,8,6,4), (1,12,11,10,9,8,7,6,5,4,3,2)] - zbiór generujący S [(1,4,7,10)(2,5,8,11)(3,6,9,12), (1,5,9)(2,6,10)(3,7,11)(4,8,12), (1,9,5)(2,10,6)(3,11,7)(4,12,8), (1,10,7,4)(2,11,8,5)(3,12,9,6)]
grupa o indeksie wew. 1 - 3 reprezentant/ów
przykładowy reprezentant: grupa [(), (7,8), (1,5,3)(2,6,4), (1,5,3)(2,6,4)(7,8), (1,3,5)(2,4,6), (1,3,5)(2,4,6)(7,8), (1,6,5,4,3,2), (1,6,5,4,3,2)(7,8), (1,4)(2,5)(3,6), (1,4)(2,5)(3,6)(7,8), (1,2,3,4,5,6), (1,2,3,4,5,6)(7,8)] - zbiór generujący S [(7,8), (1,5,3)(2,6,4), (1,3,5)(2,4,6), (1,4)(2,5)(3,6)]
grupa o indeksie wew. 3 - 9 reprezentant/ów
przykładowy reprezentant: grupa [(), (1,5,3)(2,6,4), (1,3,5)(2,4,6), (1,6,5,4,3,2), (1,4)(2,5)(3,6), (1,2,3,4,5,6), (2,6)(3,5), (1,5)(2,4), (1,3)(4,6), (1,6)(2,5)(3,4), (1,4)(2,3)(5,6), (1,2)(3,6)(4,5)] - zbiór generujący S [(1,5,3)(2,6,4), (1,3,5)(2,4,6), (1,4)(2,5)(3,6), (2,6)(3,5)]
grupa o indeksie wew. 4 - 3 reprezentant/ów
przykładowy reprezentant: grupa [(), (5,6,7), (5,7,6), (1,2)(3,4), (1,2)(3,4)(5,6,7), (1,2)(3,4)(5,7,6), (1,4,2,3)(6,7), (1,4,2,3)(5,6,7), (1,4,2,3)(5,7), (1,3,2,4)(6,7), (1,3,2,4)(5,6), (1,3,2,4)(5,7)] - zbiór generujący S [(5,6,7), (5,7,6), (1,4,2,3)(6,7), (1,3,2,4)(6,7)]

```

Rysunek 3.4: Przykładowe podsumowanie klasy generowane przez `prezentuj_liste_klas_dla_danego_stopnia(lista_kl_pom_gr,st_w)` (dla grafu o 12 wierzchołkach o stopniu 4)

Rysunek 3.4 przedstawia przykładowe podsumowanie dla pojedynczej klasy (podobnie jak w przypadku funkcji `prezentuj_kl_gr_st(lista_kl)`, zaprezentowanych klas jest więcej, ale nie zostały ujęte na rysunku). Pod grafem można zaobserwować informacje dotyczące reprezentacji Cayley’a tego grafu, konkretniej:

- wszystkie grupy generujące ten graf (podane za pośrednictwem indeksu systemowego)
- postać permutacyjna każdej z tych grup
- liczba wszystkich reprezentacji tego grafu w danej grupie
- przykładowy zbiór S w danej grupie generujący ten graf

indeks grafu	indeksy grup generujących	średnica grafu	czy_eulerowski
1	[0, 3]	3	True
2	[0, 3]	3	True
3	[0, 3]	3	True
4	[0, 1, 3, 4]	3	True
5	[0, 1, 3, 4]	2	True
6	[0, 1, 3, 4]	+Infinity	False
7	[0, 1, 3, 4]	3	True
8	[1, 3]	3	True
9	[2]	2	True
10	[2]	3	True
11	[3]	3	True

Rysunek 3.5: Przykładowe podsumowanie tabelaryczne generowane przez `prezentuj_liste_klas_dla_danego_stopnia(lista_kl_pom_gr, st_w)` (dla grafu o 12 wierzchołkach o stopniu 4)

Tabela z rysunku 3.5 zbiera wyniki dotyczące wszystkich klas w jednym miejscu i rozszerza je o dodatkowe informacje dotyczące samego grafu odpowiadającego klasie. W pierwszej kolumnie znajduje się indeks grafu, jest to zwyczajny numer porządkowy przyznany każdemu grafowi na liście. W następnej kolumnie zebrane są indeksy systemowe wszystkich grup generujących dany graf. Kolejne kolumny zawierają własności grafu. Domyślnie podawane są średnica i to, czy jest eulerowski, ale rozszerzenie tabeli o inne własności jest stosunkowo proste, znając możliwości Sage. Pokazuje to duży potencjał utworzonego oprogramowania w bardziej ogólnym badaniu grafów Cayley’a (na przykład popularne badanie cykli Hamiltona grafów Cayley’a). Niniejsza praca skupia się na badaniu izomorfizmów, więc wspomniane wątki nie będą szerzej rozwijane.

Zaprezentowane zostanie jeszcze podsumowanie uzyskane dzięki `wlasnosc_m_CI` (rysunek 3.6). Interpretacja jest dość oczywista- pierwsza kolumna odpowiada za m , druga mówi, czy grupa ma m -CI-własność. Zgodnie z definicją, jeśli grupa G ma m -CI-własność dla dowolnego $m < |G|$, to G jest CI-grupą

st.wierz(m)	m-CI własność
0	True
1	True
2	True
3	True
4	True
5	True
6	True
7	True

Rysunek 3.6: Przykładowe podsumowanie grupy generowane przez `wlasnosc_m_CI` (dla grupy C_8)

4. Przegląd uzyskanych wyników

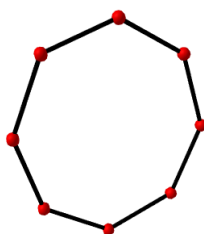
W poprzednim rozdziale zaprezentowano schemat działania oprogramowania i jego możliwości. Ten rozdział przedstawi rozważania oraz wnioski autora, umotywowane otrzymanymi wynikami.

Uwaga 2. *Należy zaznaczyć, że algorytmy uwzględniają jedynie grafy nieskierowane i pokazane własności mogą nie być prawdziwe dla ogólniejszego przypadku grafów skierowanych. Dla zwięzłości tekstu nie będzie to przypomniane w późniejszych etapach.*

4.1 Izomorfizm grup, a izomorfizm ich grafów Cayley’a

W podrozdziale 2.4 wspomniano o fakcie dotyczącym badań nad izomorfizmami grafów Cayley’a, mówiącym o możliwym izomorfizmie grafów wygenerowanych przez nieizomorficzne grupy. Okazuje się, że grafów takich jest nieskończenie wiele i w stosunkowo łatwy sposób można to pokazać. W tym celu wykorzystany zostanie przykład.

graf 1
izomorficzny graf generujący grupy 8 -elementowe, o następujących indeksach:



①

grupa o indeksie wew. 0 - 2 reprezentant/ów
przykładowy reprezentant: grupa $[(1), (1,2,3,4,5,6,7,8), (1,3,5,7)(2,4,6,8), (1,4,7,2,5,8,3,6), (1,5)(2,6)(3,7)(4,8), (1,6,3,8,5,2,7,4), (1,7,5,3)(2,8,6,4), (1,8,7,6,5,4,3,2)]$ - zbiór generujący 5 $[(1,2,3,4,5,6,7,8), (1,8,7,6,5,4,3,2)]$
grupa o indeksie wew. 3 - 4 reprezentant/ów
przykładowy reprezentant: grupa $[(1), (1,3)(2,4), (1,4,3,2), (1,2,3,4), (2,4), (1,3), (1,4)(2,3), (1,2)(3,4)]$ - zbiór generujący 5 $[(2,4), (1,4)(2,3)]$

Rysunek 4.1: Graf spójny, 2-regularny, 8-wierzchołkowy i jego reprezentacje Cayley’a

Przykład 4. Graf z rysunku 4.1 w naturalny sposób może zostać wygenerowany przez grupę cykliczną C_8 . (zbiór tworzący S zawiera dowolny generator i jego odwrotność), ale okazuje się, że może być reprezentowany również przez D_8 . Co więcej, jak weryfikuje oprogramowanie, dla dowolnego $n \leq 8$ istnieje reprezentacja podobnego grafu cyklicznego w grupie D_{2n} .

Pozwala to podejrzewać, że podobny graf cykliczny o $2n$ wierzchołkach ma swoją reprezentację w D_{2n} dla dowolnego n . Zostanie to udowodnione przez zaprezentowanie ogólnej konstrukcji takiego grafu z wykorzystaniem algebraicznej reprezentacji D_{2n} :

Twierdzenie 12. *Dowolny graf spójny, cykliczny 2-regularny rzędu $2n$ ma swoją reprezentację Cayley'a zarówno w C_{2n} jak i D_{2n} .*

Dowód. Niech: $C_{2n} = \langle a : a^{2n} = 1 \rangle, T = \{a, a^{-1}\}, F = \text{Cay}(C_{2n}, T), D_{2n} = \langle x, y : x^2 = 1, y^n = 1, xyx = y^{-1} \rangle$. Należy znaleźć taki podzbiór elementów $K \subseteq D_{2n}$, że $\text{Cay}(D_{2n}, K) \cong F$. Łatwo zauważyć, że F jest grafem, spójnym, cyklicznym, 2-regularnym i nie istnieje graf spójny, cykliczny, 2-regularny nie będący izomorficznym do tego grafu. Korzystając dodatkowo z faktów, że $\text{Cay}(G, S)$ jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle S \rangle = G$ oraz $\text{rank}(D_{2n}) = 2$ otrzymuje się:

Lemat 13. $\text{Cay}(D_{2n}, K) \cong F$ wtedy i tylko wtedy, gdy $K = \{b, c : b^2 = c^2 = 1, \langle b, c \rangle = D_{2n}\}$.

Niezależnie od przyjętego n łatwo jest wskazać przykład takiego zbioru K zgodnie z zadaną wcześniej definicją D_{2n}

$$K = \{b := x, c := xy\}$$

Można dostrzec, że $xyx = y^{-1} \Rightarrow xyxy = 1 = (xy)^2$ i $bc = y$, więc $\langle K \rangle = D_{2n}$, przez co uzyskano konstrukcję grafu izomorficznego do $\text{Cay}(C_{2n}, T)$ generowanego przez D_{2n} \square

Analizując głębiej lemat trzeci, można sformułować warunek równoważny lepiej obrazujący strukturę grafu $\text{Cay}(D_{2n}, K)$.

Niech $K = \{b, c : b^2 = c^2 = 1, \langle b, c \rangle = D_{2n}\}$. Z racji, że $b^2 = c^2 = 1$ i $\text{rank}(D_{2n}) = 2$, to $\text{Cay}(D_{2n}, \{b\})$ i $\text{Cay}(D_{2n}, \{c\})$ są nieskierowane i niespójne, czyli składają się z n składowych z dwoma wierzchołkami i jedną krawędzią. Wiadomo, że złożenie tych grafów da graf spójny cykliczny $\text{Cay}(D_{2n}, K)$, stąd wniosek, że sąsiadujące krawędzie grafu $\text{Cay}(D_{2n}, K)$ są generowane przez różne elementy zbioru K . W ten sposób można dojść do alternatywnego zapisu lematu 13:

Lemat 14. $\text{Cay}(D_{2n}, K) \cong F$ wtedy i tylko wtedy, gdy $K = \{b, c : b^2 = c^2 = 1, (bc)^n = 1, (bc)^i \neq 1, i < n\}$

W praktyce, oznacza to, że cykl grafu można otrzymać wychodząc z dowolnego elementu D_{2n} , następnie działając na niego na zmianę elementami ze zbioru K .

Istnieje zdecydowanie więcej grafów mających reprezentację zarówno w C_{2n} jak i D_{2n} . Wiedząc, że:

- D_{2n} ma podgrupę cykliczną rzędu n ,
- D_{2n} ma podgrupę cykliczną rzędu 2,
- podgrupa grupy cyklicznej jest grupą cykliczną

i korzystając z twierdzenia Lagrange'a (patrz podrozdział 2.1) w celu wykluczenia istnienia podgrup rzędów dzielących $|C_{2n}| = 2n$, można stwierdzić, że

Lemat 15. *Dla dowolnego $H < C_{2n}$ istnieje $T < D_{2n}$, takie że $H \cong T$.*

Wiedząc dodatkowo, że $\text{Cay}(G, S) \cong \text{Cay}(A, B)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{Cay}(\langle S \rangle, S) \cong \text{Cay}(\langle B \rangle, B)$, można wnioskować, że

Lemat 16. *Dowolny graf niespójny generowany przez C_{2n} ma swoją reprezentację również w D_{2n} .*

Biorąc pod uwagę lemat 16, udowodnione wcześniej twierdzenie 12 o grafie spójnym 2-regularnym oraz fakt że nie ma innych grafów 2-regularnych generowanych przez C_{2n} oprócz niespójnych i spójnego cyklicznego, można sformułować twierdzenie.

Twierdzenie 17. *Dla dowolnego $\text{Cay}(C_{2n}, S)$, gdzie $|S| \leq 2$ istnieje $\text{Cay}(D_{2n}, T)$, taki, że $\text{Cay}(D_{2n}, T) \cong \text{Cay}(C_{2n}, S)$.*

Testy przeprowadzone przy pomocy oprogramowania pokazują, że

Stwierdzenie 18. *Dla dowolnego $\text{Cay}(C_{2n}, S)$, gdzie $n \leq 8$ istnieje $\text{Cay}(D_{2n}, T)$, taki, że $\text{Cay}(D_{2n}, T) \cong \text{Cay}(C_{2n}, S)$.*

W naturalny sposób rodzi się pytanie, czy da się to stwierdzenie uogólnić, tzn. czy prawdą jest, że

Dla dowolnego $\text{Cay}(C_{2n}, S)$, istnieje $\text{Cay}(D_{2n}, T)$, taki że $\text{Cay}(D_{2n}, T) \cong \text{Cay}(C_{2n}, S)$?

Przeprowadzone rozważania niosą ze sobą pewne wnioski. Pierwszym z nich jest fakt, że nie każdy graf dobrze oddaje unikatową strukturę grupy. W szczególności zdarza się, że bez oznakowania krawędzi i wierzchołków, nie da się odróżnić grafu generowanego przez grupę abelową (grupa cykliczna) od generowanego przez grupę nieabelową (grupa dihedralna).

Kolejny wniosek wymaga cofnięcia się do lematów 13 i 14. Można je przekształcić w następujący fakt:

Twierdzenie 19. *Jeśli $b, c \in D_{2n}$ i $b^2 = c^2 = 1$ to $\langle b, c \rangle = D_{2n}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(bc)^n = 1$, $(bc)^i \neq 1$, gdzie $i < n$*

Oznacza to, że badając izomorfizm grafów otrzymano własność charakteryzującą grupę generującą, a konkretniej badane podzbiory generujące S i „rolę” jaką odgrywają wewnątrz grupy. Pokazuje to, że własności grup można badać przez badanie ich grafów Cayley’a.

Dotychczas omawiane były jedynie izomorfizmy grafów generowanych przez D_{2n} i C_{2n} . Teraz podane zostaną przykłady izomorfizmów pomiędzy grafami grup należących również do innych rodzin. W tym celu wykorzystane zostanie oprogramowanie. Z racji, że co najmniej kilka nieizomorficznych grup rzędu $n \neq 16$ istnieje tylko dla $n \in \{8, 12, 16\}$, zaprezentowane wyniki ograniczą się do grup tych rzędów.

Zazwyczaj, jest więcej nieizomorficznych grafów Cayley’a dla S , których $|S|$ jest bliższe $\lfloor n/2 \rfloor$ (lepsze wyjaśnienie w przykładzie 7). Z tego powodu i z faktu, że zaprezentowanie wyników dla wszystkich grafów byłoby bardzo obszerne i ciężkie do omówienia, pokazane zostaną jedynie te, dla $|S| = 4$.

Na początku rozpatrzone zostaną grupy rzędu 8.

indeks wew.	grupa
0	CyclicPermutationGroup(8)
1	direct_product_permgroups([C4,C2])
2	direct_product_permgroups([C2,C2,C2])
3	DihedralGroup(4)
4	QuaternionGroup()

Rysunek 4.2: spis grup rzędu 8 (z indeksowaniem w systemie)

indeks grafu	indeksy grup generujących	średnica grafu	czy_eulerowski
1	[0, 3]	2	True
2	[0, 1, 2, 3, 4]	2	True
3	[1, 2, 3]	2	True

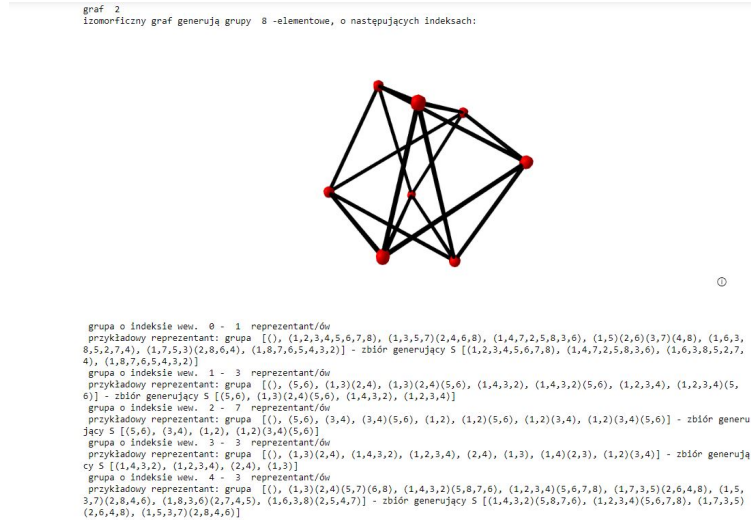
Rysunek 4.3: podsumowanie wyników dla grup rzędu 8, $|S|=4$

Z rysunku 4.3 można odczytać, że istnieją 3 nieizomorficzne grafy Cayley’a o zadanej charakterystyce i każdy z nich może zostać wygenerowany przez co najmniej 2 grupy, w szczególności każdy może zostać wygenerowany przez grupę z indeksem systemowym 3 (grupę D_8).

Uwaga 3. Permutacyjna postać reprezentacji Cayley’a grafu może wydawać się nieoczywista, konstrukcje grafów są bardziej przejrzyste, jeżeli grupy i zbiory S zostaną zapisane w postaci algebraicznej (tabele 4.1, 4.2, 4.3, i 4.4). W ostatniej kolumnie tabel zostało umieszczone przyporządkowanie, jednoznacznie zadające izomorfizm z postaci permutacyjnej grupy do postaci algebraicznej.

Przykład 5. Ciekawym wydaje się być graf z indeksem systemowym 2, posiadający reprezentację w każdej grupie rzędu 8 (patrz rysunek 4.4).

Uwagę mogą zwrócić reprezentacje w $C_4 \times C_2$ i D_8 . Ich zbiory S w zapisie algebraicznym są takie same. Biorąc pod uwagę jednak sposób, w jaki obie te grupy się konstruuje (obie są produktami C_4 i C_2) fakt ten nie zaskakuje tak bardzo (choć pozostaje ciekawy). Jest to kolejny przykład na to, jak abelowość grupy może nie mieć znaczenia, jeśli chodzi o strukturę nieskierowanych grafów Cayley'a.



Rysunek 4.4: graf o ind. syst. 2, $|G|=8$, $|S|=4$, reprezentacje Cayley'a

grupa G	reprezentacja algebraiczna grupy G	zbiór S	izomorfizm
C_8	$\langle a : a^8 = 1 \rangle$	$\{a, a^3, a^{-3}, a^{-1}\}$	$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) \rightarrow a$
$C_4 \times C_2$	$\langle a, b : a^4 = b^2 = 1 \rangle$	$\{a, a^{-1}, b, ba^2\}$	$(1, 2, 3, 4) \rightarrow a, (5, 6) \rightarrow b$
C_2^3	$\langle a, b, c : a^2 = b^2 = c^2 = 1 \rangle$	$\{a, b, c, abc\}$	$(1, 2) \rightarrow a, (3, 4) \rightarrow b, (5, 6) \rightarrow c$
D_8	$\langle a, b : a^4 = b^2 = 1, bab = a^{-1} \rangle$	$\{a, a^{-1}, b, ba^2\}$	$(1, 2, 3, 4) \rightarrow a, (2, 4) \rightarrow b$
Q_8	$\langle a, b, c : a^2 = b^2 = c^2 = abc = -1 \rangle$	$\{b, b^{-1}, c, c^{-1}\}$	$(1, 6, 3, 8)(2, 5, 4, 7) \rightarrow a, (1, 7, 3, 5)(2, 6, 4, 8) \rightarrow b, (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8) \rightarrow c$

Tablica 4.1: graf o ind. syst. 2, $|G|=8$, $|S|=4$, reprezentacje w zapisie algebraicznym

Podobne zestawienie wyników zostanie zaprezentowane dla grup rzędu 12 (rysunki 4.5 i 4.6).

indeks wew.	grupa
0	CyclicPermutationGroup(12)
1	direct_product_permgroups([C2,C6])
2	AlternatingGroup(4)
3	DihedralGroup(6)
4	DiCyclicGroup(3)

Rysunek 4.5: spis grup rzędu 12 (z indeksowaniem w systemie)

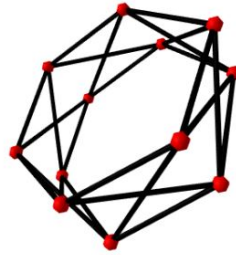
indeks grafu	indeksy grup generujących	średnica grafu	czy_eulerowski
1	[0, 3]	3	True
2	[0, 3]	3	True
3	[0, 3]	3	True
4	[0, 1, 3, 4]	3	True
5	[0, 1, 3, 4]	2	True
6	[0, 1, 3, 4]	+Infinity	False
7	[0, 1, 3, 4]	3	True
8	[1, 3]	3	True
9	[2]	2	True
10	[2]	3	True
11	[3]	3	True

 Rysunek 4.6: podsumowanie wyników dla grup rzędu 12, $|S|=4$

W tym wypadku nieizomorficznych grafów Cayley'a jest więcej, aż jedenaście. cztery z nich mają reprezentację w czterech różnych grupach, jeden z tych czterech jest niespójny (ma nieskończoną średnicę).

Przykład 6. Warto zwrócić uwagę na graf o indeksie systemowym 4 (rysunek 4.7, tablica 4.2). Jego konstrukcja jest analogiczna do tego z rysunku 4.4 (2 cykle długości $n/2$ zespolone n krawędziami "krzyżującymi się"). Ten graf podobnie jak odpowiednik rzędu 8 może zostać wygenerowany przez grupy należące do rodzin C_{2n} , $C_n \times C_2$ i D_{2n} , konkretniej do C_{4n} , $C_{2n} \times C_2$ i D_{4n} . Próbując znaleźć ogólną konstrukcję takich grafów przy pomocy wspomnianych grup (analogicznie jak w dowodzie twierdzenia 12), można natknąć się na pewne problemy. Starając się wyznaczyć ogólny wzór algebraiczny konstrukcji zbioru S na podstawie tablic 4.1 i 4.2 można wysnuć podejrzenie, że ich postaci to:

- $\{a, a^{-1}, a^{2n-1}, a^{-(2n-1)}\}$ dla C_{4n}
- $\{a, a^{-1}, b, ba^2\}$ dla D_{4n}

graf 4
 izomorficzny graf generujący grupy 12 -elementowe, o następujących indeksach:


①

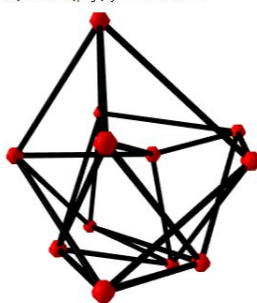
grupa o indeksie wew. 0 - 1 reprezentant/ów
 przykładowy reprezentant: grupa $[(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12), (1, 3, 5, 7, 9, 11)(2, 4, 6, 8, 10, 12), (1, 4, 7, 10)(2, 5, 8, 11)(3, 6, 9, 12), (1, 5, 9)(2, 6, 10)(3, 7, 11)(4, 8, 12), (1, 6, 11, 4, 9, 2, 7, 12, 5, 10, 3, 8), (1, 7)(2, 8)(3, 9)(4, 10)(5, 11)(6, 12), (1, 8, 3, 10, 5, 12, 7, 2, 9, 4, 1, 6), (1, 9, 5)(2, 10, 6)(3, 11, 7)(4, 12, 8), (1, 10, 7, 4)(2, 11, 8, 5)(3, 12, 9, 6), (1, 11, 9, 7, 5, 3)(2, 12, 10, 8, 6, 4), (1, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2)]$ - zbiór generujący $S [(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12), (1, 6, 11, 4, 9, 2, 7, 12, 5, 10, 3, 8), (1, 8, 3, 10, 5, 12, 7, 2, 9, 4, 11, 6), (1, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2)]$
 grupa o indeksie wew. 1 - 3 reprezentant/ów
 przykładowy reprezentant: grupa $[(1, 7, 8), (1, 5, 3)(2, 6, 4), (1, 5, 3)(2, 6, 4)(7, 8), (1, 3, 5)(2, 4, 6), (1, 3, 5)(2, 4, 6)(7, 8), (1, 6, 5, 4, 3, 2), (1, 6, 5, 4, 3, 2)(7, 8), (1, 4)(2, 5)(3, 6), (1, 4)(2, 5)(3, 6)(7, 8), (1, 2, 3, 4, 5, 6), (1, 2, 3, 4, 5, 6)(7, 8)]$ - zbiór generujący $S [(1, 5, 3)(2, 6, 4)(7, 8), (1, 3, 5)(2, 4, 6)(7, 8), (1, 6, 5, 4, 3, 2), (1, 2, 3, 4, 5, 6)]$
 grupa o indeksie wew. 3 - 9 reprezentant/ów
 przykładowy reprezentant: grupa $[(1, 5, 3)(2, 6, 4), (1, 3, 5)(2, 4, 6), (1, 6, 5, 4, 3, 2), (1, 4)(2, 5)(3, 6), (1, 2, 3, 4, 5, 6), (2, 6)(3, 5), (1, 5)(2, 4), (1, 3)(4, 6), (1, 6)(2, 5)(3, 4), (1, 4)(2, 3)(5, 6), (1, 2)(3, 6)(4, 5)]$ - zbiór generujący $S [(1, 6, 5, 4, 3, 2), (1, 2, 3, 4, 5, 6), (2, 6)(3, 5), (1, 5)(2, 4)]$
 grupa o indeksie wew. 4 - 3 reprezentant/ów
 przykładowy reprezentant: grupa $[(1, 5, 6, 7), (5, 7, 6), (1, 2)(3, 4), (1, 2)(3, 4)(5, 6, 7), (1, 2)(3, 4)(5, 7, 6), (1, 4, 2, 3)(6, 7), (1, 4, 2, 3)(5, 6), (1, 4, 2, 3)(5, 7), (1, 3, 2, 4)(6, 7), (1, 3, 2, 4)(5, 6), (1, 3, 2, 4)(5, 7)]$ - zbiór generujący $S [(1, 4, 2, 3)(6, 7), (1, 4, 2, 3)(5, 6), (1, 3, 2, 4)(6, 7), (1, 3, 2, 4)(5, 6)]$

 Rysunek 4.7: graf o ind. syst. 4 , $|G|=12$, $|S|=4$, reprezentacje

grupa G	reprezentacja algebraiczna grupy G	zbiór S	izomorfizm
C_{12}	$\langle a : a^{12} = 1 \rangle$	$\{a, a^5, a^{-5}, a^{-1}\}$	$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) \rightarrow a$
$C_6 \times C_2$	$\langle a, b : a^6 = b^2 = 1 \rangle$	$\{a, a^{-1}, ba^{-2}, ba^2\}$	$(1, 2, 3, 4, 5, 6) \rightarrow a,$ $(7, 8) \rightarrow b$
D_{12}	$\langle a, b : a^6 = b^2 = 1, bab = a^{-1} \rangle$	$\{a, a^{-1}, b, ba^2\}$	$(1, 2, 3, 4, 5, 6) \rightarrow a,$ $(1, 5)(2, 4) \rightarrow b$
Dic_3	$\langle a, b : a^6 = 1, a^3 = b^2, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$	$\{b, b^{-1}, ba^2, (ba^2)^{-1}\}$	$(1, 2)(3, 4)(5, 6, 7) \rightarrow a,$ $(1, 3, 2, 4)(6, 7) \rightarrow b$

 Tablica 4.2: graf o ind. syst. 4 , $|G|=12$, $|S|=4$, reprezentacje w zapisie algebraicznym

Kłopoty pojawiają się przy reprezentacji w $C_{2n} \times C_2$. Na podstawie tabeli 4.1 można przypuścić, że konstrukcja zbioru S wygląda następująco: $\{a, a^{-1}, b, ba^n\}$. Nie pokrywa się to z tabelą 4.2, co jeszcze o niczym nie przesądza, gdyż, jak pokazuje oprogramowanie, istnieją 3 reprezentacje tego grafu w $C_6 \times C_2$. Można jednak zauważyć, że zbiór $\{a, a^{-1}, b, ba^n\}$ dla $n = 3$ generuje graf nieizomorficzny z szukany (rysunek 4.8, tabela 4.3). Dowodzi to, że $\text{Cay}(C_{2n} \times C_2, S)$, gdzie $S = \{a, a^{-1}, b, ba^n\}$ nie jest uniwersalną konstrukcją tego typu grafów, co nie oznacza, że taka konstrukcja nie istnieje. Rysunek 4.10 i tabela 4.4 przedstawiają konstrukcje podobnego grafu dla $|G| = 16$.

graf 5
 izomorficzny graf generujący grupy 12 -elementowe, o następujących indeksach:


①

grupa o indeksie wew. 0 - 1 reprezentant/ów
 przykładowy reprezentant: grupa $[(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12), (1, 3, 5, 7, 9, 11)(2, 4, 6, 8, 10, 12), (1, 4, 7, 10)(2, 5, 8, 11)(3, 6, 9, 12), (1, 5, 9)(2, 6, 10)(3, 7, 11)(4, 8, 12), (1, 6, 11, 4, 9, 2, 7, 12, 5, 10, 3, 8), (1, 7)(2, 8)(3, 9)(4, 10)(5, 11)(6, 12), (1, 8, 3, 10, 5, 12, 7, 2, 9, 4, 1, 6), (1, 9, 5)(2, 10, 6)(3, 11, 7)(4, 12, 8), (1, 10, 7, 4)(2, 11, 8, 5)(3, 12, 9, 6), (1, 11, 9, 7, 5, 3)(2, 12, 10, 8, 6, 4), (1, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2)]$ - zbiór generujący S $[(1, 3, 5, 7, 9, 11)(2, 4, 6, 8, 10, 12), (1, 4, 7, 10)(2, 5, 8, 11)(3, 6, 9, 12), (1, 10, 7, 4)(2, 11, 8, 5)(3, 12, 9, 6), (1, 1, 9, 7, 5, 3)(2, 12, 10, 8, 6, 4)]$
 grupa o indeksie wew. 1 - 3 reprezentant/ów
 przykładowy reprezentant: grupa $[(1, 7, 8), (1, 5, 3)(2, 6, 4), (1, 5, 3)(2, 6, 4)(7, 8), (1, 3, 5)(2, 4, 6), (1, 3, 5)(2, 4, 6)(7, 8), (1, 6, 5, 4, 3, 2), (1, 6, 5, 4, 3, 2)(7, 8), (1, 4)(2, 5)(3, 6), (1, 4)(2, 5)(3, 6)(7, 8), (1, 2, 3, 4, 5, 6), (1, 2, 3, 4, 5, 6)(7, 8)]$ - zbiór generujący S $[(7, 8), (1, 6, 5, 4, 3, 2), (1, 4)(2, 5)(3, 6)(7, 8), (1, 2, 3, 4, 5, 6)]$
 grupa o indeksie wew. 3 - 9 reprezentant/ów
 przykładowy reprezentant: grupa $[(1, 5, 3)(2, 6, 4), (1, 3, 5)(2, 4, 6), (1, 6, 5, 4, 3, 2), (1, 4)(2, 5)(3, 6), (1, 2, 3, 4, 5, 6), (2, 6)(3, 5), (1, 5)(2, 4), (1, 3)(4, 6), (1, 6)(2, 5)(3, 4), (1, 4)(2, 3)(5, 6), (1, 2)(3, 6)(4, 5)]$ - zbiór generujący S $[(1, 6, 5, 4, 3, 2), (1, 2, 3, 4, 5, 6), (2, 6)(3, 5), (1, 4)(2, 3)(5, 6)]$
 grupa o indeksie wew. 4 - 3 reprezentant/ów
 przykładowy reprezentant: grupa $[(1, 5, 6, 7), (5, 7, 6), (1, 2)(3, 4), (1, 2)(3, 4)(5, 6, 7), (1, 2)(3, 4)(5, 7, 6), (1, 4, 2, 3)(6, 7), (1, 4, 2, 3)(5, 6), (1, 4, 2, 3)(5, 7), (1, 3, 2, 4)(6, 7), (1, 3, 2, 4)(5, 6), (1, 3, 2, 4)(5, 7)]$ - zbiór generujący S $[(1, 2)(3, 4)(5, 6, 7), (1, 2)(3, 4)(5, 7, 6), (1, 4, 2, 3)(6, 7), (1, 3, 2, 4)(6, 7), (1, 3, 2, 4)(5, 6)]$

 Rysunek 4.8: graf o ind. syst. 5, $|G|=12$, $|S|=4$, reprezentacje Cayley'a

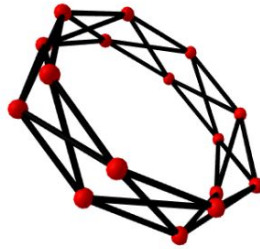
grupa G	reprezentacja algebraiczna grupy G	zbiór S	izomorfizm
C_{12}	$\langle a : a^{12} = 1 \rangle$	$\{a^2, a^3, a^{-3}, a^{-2}\}$	$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) \rightarrow a$
$C_6 \times C_2$	$\langle a, b : a^6 = b^2 = 1 \rangle$	$\{a, a^{-1}, b, ba^3\}$	$(1, 2, 3, 4, 5, 6) \rightarrow a,$ $(7, 8) \rightarrow b$
D_{12}	$\langle a, b : a^6 = b^2 = 1, bab = a^{-1} \rangle$	$\{a, a^{-1}, b, a^3\}$	$(1, 2, 3, 4, 5, 6) \rightarrow a,$ $(1, 5)(2, 4) \rightarrow b$
Dic_3	$\langle a, b : a^6 = 1, a^3 = b^2, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$	$\{b, b^{-1}, a, a^{-1}\}$	$(1, 2)(3, 4)(5, 6, 7) \rightarrow a,$ $(1, 3, 2, 4)(6, 7) \rightarrow b$

 Tablica 4.3: graf o ind. syst. 5, $|G|=12$, $|S|=4$, reprezentacje w zapisie algebraicznym

indeks wew.	grupa
0	CyclicPermutationGroup(16)
1	direct_product_permgroups([C2,C8])
2	direct_product_permgroups([C4,C4])
3	direct_product_permgroups([C4,C2,C2])
4	direct_product_permgroups([C2,C2,C2,C2])
5	direct_product_permgroups([C2,D4])
6	direct_product_permgroups([C2,Q])
7	DihedralGroup(8)

Rysunek 4.9: spis grup rzędu 16 (z indeksowaniem w systemie, niepełny)

graf 5
izomorficzny graf generujący grupy 16-elementowe, o następujących indeksach:



①

grupa o indeksie wew. 0 - 2 reprezentant/ów
przykładowy reprezentant: grupa $[(1), (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16), (1,3,5,7,9,11,13,15)(2,4,6,8,10,12,14,16), (1,4,7,10,13,16,3,6,9,12,15,2,5,8,11,14), (1,5,9,13)(2,6,10,14)(3,7,11,15)(4,8,12,16), (1,6,11,16,5,10,15,4,9,14,3,8,13,2,7,12), (1,7,13,3,9,15,5,11)(2,8,14,4,10,16,6,12), (1,8,15,6,13,4,11,2,9,16,7,14,5,12,3,10), (1,9)(2,10)(3,11)(4,12)(5,13)(6,14)(7,15)(8,16), (1,10,3,12,5,14,7,16,9,2,11,4,13,6,15,8), (1,11,5,15,9,3,13,7)(2,12,6,16,10,4,14,8), (1,12,7,2,13,8,3,14,9,4,15,10,5,16,11,6), (1,13,9,5)(2,14,10,6)(3,15,11,7)(4,16,12,8), (1,14,11,8,5,2,15,12,9,6,3,16,13,10,7,4), (1,15,13,11,9,7,5,3)(2,16,14,12,10,8,6,4), (1,16,15,14,13,12,11,10,9,8,7,6,5,4,3,2)]$ - zbiór generujący S $[(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16), (1,8,15,6,13,4,11,2,9,16,7,14,5,12,3,10), (1,10,3,12,5,14,7,16,9,2,11,4,13,6,15,8), (1,16,15,14,13,12,11,10,9,8,7,6,5,4,3,2)]$
grupa o indeksie wew. 1 - 4 reprezentant/ów
przykładowy reprezentant: grupa $[(1), (3,7)(4,8)(5,9)(6,10), (3,9,7,5)(4,10,8,6), (3,5,7,9)(4,6,8,10), (3,10,9,8,7,6,5,4), (3,6,9,4,7,10,5,8), (3,8,5,10,7,4,9,6), (3,4,5,6,7,8,9,10), (1,2), (1,2)(3,7)(4,8)(5,9)(6,10), (1,2)(3,9,7,5)(4,10,8,6), (1,2)(3,5,7,9)(4,6,8,10), (1,2)(3,10,9,8,7,6,5,4), (1,2)(3,6,9,4,7,10,5,8), (1,2)(3,8,5,10,7,4,9,6), (1,2)(3,4,5,6,7,8,9,10)]$ - zbiór generujący S $[(3,10,9,8,7,6,5,4), (3,4,5,6,7,8,9,10), (1,2)(3,10,9,8,7,6,5,4), (1,2)(3,4,5,6,7,8,9,10)]$
grupa o indeksie wew. 5 - 8 reprezentant/ów
przykładowy reprezentant: grupa $[(1), (3,5)(4,6), (3,6,5,4), (3,4,5,6), (4,6), (3,5), (3,6)(4,5), (3,4)(5,6), (1,2), (1,2)(3,5)(4,6), (1,2)(3,6,5,4), (1,2)(3,4,5,6), (1,2)(4,6), (1,2)(3,5), (1,2)(3,6)(4,5), (1,2)(3,4)(5,6)]$ - zbiór generujący S $[(4,6), (3,6)(4,5), (1,2)(4,6), (1,2)(3,6)(4,5)]$
grupa o indeksie wew. 7 - 20 reprezentant/ów
przykładowy reprezentant: grupa $[(1), (1,5)(2,6)(3,7)(4,8), (1,7,5,3)(2,8,6,4), (1,3,5,7)(2,4,6,8), (1,8,7,6,5,4,3,2), (1,4,7,2,5,8,3,6), (1,6,3,8,5,2,7,4), (1,2,3,4,5,6,7,8), (2,8)(3,7)(4,6), (1,5)(2,4)(6,8), (1,7)(2,6)(3,5), (1,3)(4,8)(5,7), (1,8)(2,7)(3,6)(4,5), (1,4)(2,3)(5,8)(6,7), (1,6)(2,5)(3,4)(7,8), (1,2)(3,8)(4,7)(5,6)]$ - zbiór generujący S $[(1,8,7,6,5,4,3,2), (1,2,3,4,5,6,7,8), (2,8)(3,7)(4,6), (1,7)(2,6)(3,5)]$

Rysunek 4.10: graf o ind. syst. 5, $|G|=16$, $|S|=4$, reprezentacje Cayley'a

grupa G	reprezentacja algebraiczna grupy G	zbiór S	izomorfizm
C_{16}	$\langle a : a^{16} = 1 \rangle$	$\{a, a^7, a^{-7}, a^{-1}\}$	$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16) \rightarrow a$
$C_8 \times C_2$	$\langle a, b : a^8 = b^2 = 1 \rangle$	$\{a, a^{-1}, ba^{-1}, ba^1\}$	$(3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) \rightarrow a,$ $(1, 2) \rightarrow b$
D_{16}	$\langle a, b : a^8 = b^2 = 1, bab = a^{-1} \rangle$	$\{a, a^{-1}, b, ba^2\}$	$(1, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2) \rightarrow a,$ $(1, 7)(2, 6), (3, 5) \rightarrow b$

Tablica 4.4: graf o ind. syst. 5, $|G|=16$, $|S|=4$, reprezentacje w zapisie algebraicznym

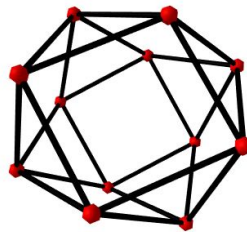
Warto jeszcze wrócić do podsumowania z rysunku 4.6. Można zauważyć, że grupa z indeksem systemowym 2 (A_4) generuje grafy o stopniu wierzchołków 4, których nie generuje żadna inna grupa i tylko takie. Szczególnie interesujący jest graf z rysunku 4.11. Jest to graf planarny, tzn. można rozmieścić jego wierzchołki i krawędzie na sferze, tak by krawędzie nie przecinały się. W tym konkretnym przypadku, jeśli odpowiednio rozmieści się wierzchołki i krawędzie w przestrzeni trójwymiarowej, otrzyma się szkielet ciekawej bryły, której ściany to kwadraty i trójkąty foremne. W istocie, bryłę tą można opisać jako sześciian, którego narożniki zostały odcięte w połowie krawędzi. Okazuje się, że wśród grafów Cayley'a grupy A_4 o stopniach wierzchołków $\neq 4$ można znaleźć więcej szkieletów interesujących brył.

- graf o stopniu wierzchołka 3, ściany bryły składające się z trójkątów i sześciokątów foremnych, czworościan z narożnikami odciętymi w $\frac{1}{3}$ długości, rysunek 4.12
- graf o stopniu wierzchołka 5, ściany bryły składające się z trójkątów foremnych, dwudziestościan foremny (ikosaedr), rysunek 4.13

Oba te grafy również są generowane jedynie przez A_4 . Dobrze obrazują unikatowość struktury grupy i samo ich istnienie jest ciekawym faktem dotyczącym grafów Cayley'a. Prowokuje ono pytanie:

Jakie jeszcze szkielety brył mogą być reprezentowane przez grafy Cayley'a i w jakich grupach można znaleźć takie reprezentacje?

graf 10
izomorficzny graf generują grupy 12 -elementowe, o następujących indeksach:

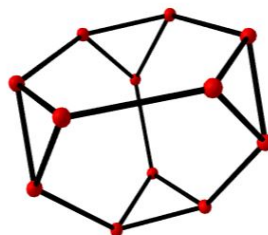


⑩

grupa o indeksie wew. 2 - 6 reprezentant/ów
przykładowy reprezentant: grupa $[(1), (1,3)(2,4), (1,2)(3,4), (1,4)(2,3), (2,4,3), (1,3,4), (1,2,3), (1,4,2), (2,3,4), (1,3,2), (1,2,4), (1,4,3)]$ - zbiór generujący $S [(2,4,3), (1,3,4), (2,3,4), (1,4,3)]$

Rysunek 4.11: graf o ind. syst. 10, $|G|=12$, $|S|=4$, reprezentacje Cayley'a

graf 6
izomorficzny graf generują grupy 12 -elementowe, o następujących indeksach:

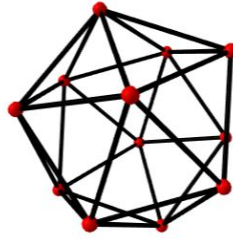


⑥

grupa o indeksie wew. 2 - 12 reprezentant/ów
przykładowy reprezentant: grupa $[(1), (1,3)(2,4), (1,2)(3,4), (1,4)(2,3), (2,4,3), (1,3,4), (1,2,3), (1,4,2), (2,3,4), (1,3,2), (1,2,4), (1,4,3)]$ - zbiór generujący $S [(1,3)(2,4), (2,4,3), (2,3,4)]$

Rysunek 4.12: graf o ind. syst. 6, $|G|=12$, $|S|=3$, reprezentacje Cayley'a

graf 10
izomorficzny graf generują grupy 12 -elementowe, o następujących indeksach:



①

grupa o indeksie wew. 2 - 12 reprezentant/ów
przykładowy reprezentant: grupa $[(1), (1,3)(2,4), (1,2)(3,4), (1,4)(2,3), (2,4,3), (1,3,4), (1,2,3), (1,4,2), (2,3,4), (1,3,2), (1,2,4), (1,4,3)]$ - zbiór generujący $S [(1,3)(2,4), (2,4,3), (1,3,4), (2,3,4), (1,4,3)]$

Rysunek 4.13: graf o ind. syst. 10 , $|G|=12$, $|S|=5$, reprezentacje Cayley'a

4.2 Izomorfizmy grafów w obrębie grupy generującej, CI-grafy i CI-grupy

Ten podrozdział będzie poświęcony uzyskanym wynikom dotyczącym izomorfizmów grafów generowanych przez izomorficzne grupy i ściśle powiązanej z tym tematem klasyfikacji CI-grafów i CI-grup. Z racji, że wiele konkretnych przykładów zostało pokazane w podrozdziale 4.1, tutaj zaprezentowane zostaną głównie bardziej ogólne wyniki, na których łatwą ekstrakcję pozwala oprogramowanie.

Na początku omówione zostaną przykładowe podsumowania wyników klasyfikacji izomorficznych grafów dla grup C_8 , D_{12} , C_9 .

Przykład 7. Rysunki 4.14 i 4.15 przedstawiają podsumowanie klas izomorficznych grafów generowanych przez C_8 i D_{12} .

st.wierz	licz. klas	łączna licz. repr. dla st
0	1	1
1	1	1
2	2	3
3	2	3
4	2	3
5	2	3
6	1	1
7	1	1

Rysunek 4.14: podsumowanie dotyczące klas izomorficznych grafów dla C_8

st.wierz	licz. klas	łączna licz. repr. dla st
0	1	1
1	1	7
2	4	23
3	6	49
4	9	78
5	11	98
6	11	98
7	9	78
8	6	49
9	4	23
10	1	7
11	1	1

 Rysunek 4.15: podsumowanie dotyczące klas izomorficznych grafów dla D_{12}

Przytoczony zostanie fakt.

Lemat 20. *Jeśli $S' = (G \setminus S) \setminus \{1\}$, a $\overline{\text{Cay}(G, S)}$ jest dopełnieniem grafu $\text{Cay}(G, S)$, to $\text{Cay}(G, S') = \overline{\text{Cay}(G, S)}$*

Łatwo zauważyć symetrię względem środka w kolumnach „liczba klas” i „łączna liczba reprezentantów dla stopnia”. Wynika ona bezpośrednio z lematu 20. Trudniej jest wytłumaczyć przedziałowo monotoniczne (niemalejące aż do środka tabeli, później nierosnące) tendencje, jakie zachodzą w kolumnach.

Jako pierwsza rozpatrzona zostanie kolumna dotycząca łącznej liczby reprezentantów. Gdyby rozpatrywane były również skierowane grafy Cayley’a, problem byłby banalny, wtedy liczba reprezentantów o stopniu wierzchołka k ($|S| = k$) wynosiłaby $\binom{n-1}{k}$, gdzie n to rząd grupy. W tym wypadku, znając strukturę trójkąta Pascala, łatwo wytłumaczyć przedziałową monotoniczność. Grafy skierowane nie są jednak uwzględniane. Należy zauważyć, że jeśli $a \in S$, to zachodzi jedna z dwóch możliwości:

- rząd a jest równy 2
- rząd a nie jest równy 2 i $a^{-1} \in S$

Niech m będzie równe liczbie elementów rzędu 2 w danej grupie G , $|G| = n + 1$ (+1 odpowiada za element neutralny, którego się nie uwzględnia). Wtedy, problem liczby wszystkich nieskierowanych reprezentacji Cayley’a w grupie G , takich, że $|S| = k$ można sprowadzić do następującego problemu kombinatorycznego:

Mamy m zbiorów 1-elementowych i $\frac{n-m}{2}$ zbiorów 2-elementowych, zbiory te są rozłączne. Na ile sposobów można zsumować te zbiory, tak, by otrzymać zbiór k -elementowy?

Zadanie to, pomimo z pozoru prostej konstrukcji, jest dość skomplikowane, z uwagi na wiele zmiennych. Można zauważyć, że liczba wszystkich możliwych sum zbiorów wynosi $2^{\frac{n+m}{2}}$, w istocie zadanie polega na odpowiednim rozbiciu zbioru potęgowego o $2^{\frac{n+m}{2}}$ elementach na n podzbiorów. Podstawiając pod zmienne konkretne wartości, zazwyczaj otrzymuje się przedziałową

monotoniczność w zależności od k , taką jak na rysunkach 4.14 i 4.15. Zazwyczaj, ponieważ zdarzają się wyjątki (patrz przykład 8). Autor przytoczył to zagadnienie, gdyż uznał je za ciekawe, nie jest ściśle związane z tematem pracy, więc nie zostanie pokazane bardziej formalne uzasadnienie. Można przyjąć, że najczęściej, więcej jest nieskierowanych reprezentacji Cayley'a $Cay(G, S)$ dla $|S|$ bliższych $\frac{n}{2}$, podobnie jak dla grafów skierowanych.

Liczba wszystkich reprezentacji zazwyczaj nie pokrywa się z liczbą reprezentacji generujących nieizomorficzne grafy Cayley'a. Mimo to, intuicyjnie, więcej jest nieizomorficznych grafów Cayley'a grupy G o stopniu wierzchołka k , gdy więcej jest metod łączenia wierzchołków (reprezentacji Cayley'a w grupie G , gdzie $|S| = k$). Ponownie, nie jest to formalne wyjaśnienie, ale zostało potwierdzone badaniami empirycznymi autora (widać to, np. na rysunkach 4.14 i 4.15).

Przykład 8. Ten przykład posłuży jako kontrprzykład do wcześniejszych rozważań. Rysunek 4.16 przedstawia podsumowanie dla grupy C_9 .

st.wierz	licz. klas	łączna licz. repr. dla st
0	1	1
1	0	0
2	2	4
3	0	0
4	2	6
5	0	0
6	2	4
7	0	0
8	1	1

Rysunek 4.16: podsumowanie dotyczące klas izomorficznych grafów dla C_9

Nie trudno zauważyć, że dla nieparzystych stopni wierzchołka nie ma żadnej nieskierowanej reprezentacji Cayley'a w grupie C_9 .

Można ten fakt wyjaśnić. Należy zauważyć następującą własność.

Stwierdzenie 21. *Jeśli $Cay(G, S)$ jest grafem nieskierowanym i $2 \nmid |S|$, to istnieje $a \in S$, takie, że $a^2 = 1$.*

Z twierdzenia Lagrange'a wynika, że:

Lemat 22. *Jeśli G jest grupą i $2 \nmid |G|$, to nie istnieje $a \in G$, takie, że $a^2 = 1$.*

Biorąc pod uwagę stwierdzenie 21 i lemat 22, można sformułować następujące twierdzenie.

Twierdzenie 23. *Jeśli G jest grupą i $2 \nmid |G|$, to nie istnieje nieskierowany graf Cayley'a $Cay(G, S)$, taki, że $2 \nmid |S|$.*

Przykład 8 pokazuje, że przedziałowa monotoniczność wspomniana w przykładzie 7 nie zawsze musi zachodzić. Jeśli z tabeli z rysunku 4.16 „wykluczy się” nieparzyste stopnie wierzchołków, znów będzie zachodzić przedziałowa monotoniczność. Jest to ciekawy przykład w kontekście wcześniej przytoczonego problemu kombinatorycznego.

Istotnym modulem oprogramowania dołączonego do niniejszej pracy jest możliwość rozstrzygania problemu klasyfikacji CI-grafów, m-CI-własności i CI-grup.

Pomimo faktu, że algorytm oparty jest w znaczącej części na definicjach i wbudowanych, sprawdzonych funkcjach Sage i GAP, należy zweryfikować poprawność zwracanych wyników. W tym celu wykorzystana została praca [4], w której autorzy zamieścili spis wszystkich CI-grup rzędu < 20 . Sklasyfikowanie, pozytywne lub negatywne, każdej z grup wspomnianych rzędów zostało udowodnione. Prezentuje się następująco:

Twierdzenie 24. *Wszystkie CI-grupy rzędu co najwyżej 19 są znane i są to:*

- Z_n dla $2 \leq n \leq 19$ i $n \neq 16$,
- Q_8 i Z_2^d dla $d = 2, 3, 4$
- D_{2n} dla $n = 3, 5, 7, 9$,
- $Z_3^2, Dic_{12}, Z_2 \times Z_6, A_4, Z_3^2 \times Z_2, Dih(Z_3^2)$

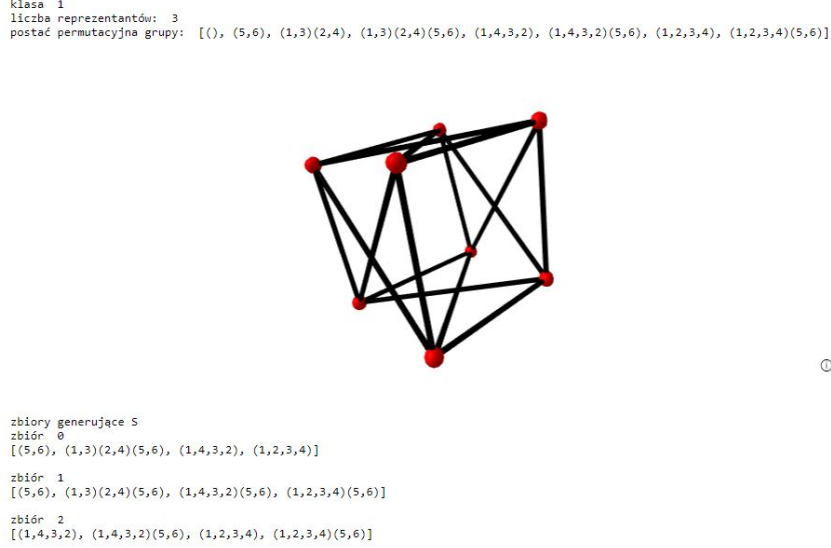
Oprogramowanie jest przystosowane do obliczeń na grupach do rzędu 16 włącznie, więc kryterium z twierdzenia 24 pozwala na pełną weryfikację wyników (przynajmniej pod względem klasyfikacji CI-grup). Wszystkie grupy do rzędu 15 włącznie są klasyfikowane poprawnie. Problemy pojawiają się dopiero przy grupach rzędu 16. Czas potrzebny na obliczenia jest bardzo długi, niektóre grupy o dużej liczbie podzbiorów generujących S i złożonej grupie automorfizmów własnych (np. Z_2^4) nie są weryfikowalne w rozsądnym czasie na komputerze autora (po dwóch godzinach obliczeń funkcja jest na etapie sprawdzania 1-CI-własności).

Oznacza to, że zaimplementowany naiwny algorytm nie jest wystarczający już dla grup 16 rzędu. Z tego względu w obecnej formie nie nadaje się do klasyfikowania grup jeszcze nie sklasyfikowanych. Wymaga optymalizacji rozwiązań cząstkowych, specyficznego podejścia do poszczególnych przypadków lub zmiany fundamentalnych założeń algorytmu. Przytoczone w podrozdziale 2.4 kryterium Babai'a (twierdzenie 9) wydaje się być obiecującym tropem, zważając na możliwości, które dostarcza GAP.

O ile wyniki zwracane przez gotowy moduł są dobre, warto zademonstrować na czym polega taka klasyfikacja i jakie są jej konsekwencje na konkretnym przykładzie.

Przykład 9. W przykładzie 5 przytoczono graf posiadający reprezentację Cayley'a $Cay(C_4 \times C_2, S)$, gdzie $S = \{a, a^{-1}, b, ba^2\}$. W przykładzie 6 pokazano, że zbiór $S = \{a, a^{-1}, b, ba^3\}$ o podobnej konstrukcji dla grupy z tej samej rodziny, $C_2 \times C_6$ generuje graf o zupełnie innej strukturze. Z twierdzenia 24, można odczytać, że $C_4 \times C_2$ nie jest CI-grupą, a $C_2 \times C_6$ nią jest. Fakty te pozwalają podejrzewać, że struktura zbioru generującego $S = \{a, a^{-1}, b, ba^2\}$, nie jest typowa dla grafów podobnych do tego w przykładzie 5. Co za tym idzie może nie istnieć automorfizm przekształcający

zbiór $S = \{a, a^{-1}, b, ba^2\}$ na pozostałe podzbiory $C_4 \times C_2$ generujące izomorficzny graf i w konsekwencji $\text{Cay}(C_4 \times C_2, \{a, a^{-1}, b, ba^2\})$ może nie być CI-grafem. By odnaleźć wszystkie podzbiory $S \subseteq C_4 \times C_2$ generujące graf izomorficzny z $\text{Cay}(C_4 \times C_2, \{a, a^{-1}, b, ba^2\})$, wykorzystane zostanie oprogramowanie (rysunek 4.17).



Rysunek 4.17: graf z przykładu 9 i jego reprezentacje Cayley'a w $C_4 \times C_2$

numer zbioru S	reprezentacja algebraiczna zbioru S
0	$\{b, ba^2, a, a^{-1}\}$
1	$\{b, ba^2, ba, ba^{-1}\}$
2	$\{a, a^{-1}, ba, ba^{-1}\}$

Tablica 4.5: graf z przykładu 9, zbiory S w zapisie algebraicznym

Nie trudno zauważyć, że w zbiorze o numerze 2, wszystkie elementy są rzędu 4, a zbiory 0 i 1 mają po dwa elementy rzędu 2. Oznacza to, że nie może istnieć automorfizm $\sigma \in \text{Aut}(G)$, taki, że $S_0^\sigma = S_2$, więc $\text{Cay}(C_4 \times C_2, S_0)$ nie jest CI-grafem (co za tym idzie $\text{Cay}(C_4 \times C_2, S_1)$ i $\text{Cay}(C_4 \times C_2, S_2)$ również nie są CI-grafami).

Przykład 9 może posłużyć jako dowód faktu, że $C_4 \times C_2$ nie jest CI-grupą. Warto wrócić jeszcze do przykładu 5. Jak stwierdzono, graf nie będący CI-grafem $\text{Cay}(C_4 \times C_2, \{a, a^{-1}, b, ba^2\})$ ma swoją reprezentację również w C_8 , a jak wiadomo z twierdzenia 24, C_8 jest CI-grupą. Prowadzi to do istotnego stwierdzenia.

Stwierdzenie 25. *Graf Cayley'a nie będący CI-grafem ze względu na swoją reprezentację w grupie G , może być CI-grafem ze względu na swoją reprezentację w grupie H , gdzie $G \not\cong H$.*

Oznacza to, że jeśli pewien graf $\text{Cay}(G, S)$ nie jest CI-grafem ze względu na grupę G , można szukać jego CI-reprezentacji w innej grupie.

Pośrednio zaprezentowana została również moc pojęcia CI-grafów i CI-grup. Rozważając grafy $\text{Cay}(G, S)$ i $\text{Cay}(G, H)$, jeśli conajmniej jeden z tych grafów jest CI-grafem, stwierdzenie czy $\text{Cay}(G, S) \cong \text{Cay}(G, H)$ sprowadza się do stwierdzenia czy istnieje automorfizm $\sigma \in \text{Aut}(G)$ taki, że $S^\sigma = H$. Jak pokazał przykład, stwierdzenie tego bywa dość proste, zazwyczaj prostsze, niż zastosowanie algorytmów grafowych.

5. Podsumowanie

Ze strony programistycznej, niemal wszystkie początkowe założenia zostały spełnione (niektóre nawet w nadmiarze). Jak pokazał podrozdział 4.2, zaprojektowane moduły nie radzą sobie do końca z każdą z grup generujących, jednak autor ma pomysły jak usprawnić działanie odpowiednich funkcji. Być może, ekstrakcja i prezentacja wyników również mogłaby zostać udoskonalona, ale wprawiony użytkownik nie powinien mieć problemów z wyciągnięciem wszystkich interesujących informacji. Silną stroną oprogramowania jest możliwość pełnego przeglądu nieskierowanych grafów Cayley’a danej grupy (każda możliwa nieskierowana reprezentacja jest klasyfikowana).

Ze strony teoretycznej, przytoczone zostały wszystkie najistotniejsze pojęcia wprowadzające w temat grafów Cayley’a i najpopularniejsze prace oraz kierunki badań dotyczące ich izomorfizmów. Przedstawiono liczne przykłady, rozważania i wnioski sformułowane przez autora. Nie udało się uzyskać szczególnie odkrywczych wyników, ale pozostawiono kilka otwartych pytań, zdaniem autora ciekawych, na które ciężko znaleźć odpowiedzi w literaturze. Wyniki dotyczące badań nad CI-grafami i CI-grupami zostały przedstawione ogólnie, nieproporcjonalnie do tego jak obszernie były poruszane w literaturze naukowej. Wiedząc jak ogromnym i stosunkowo przystępnym przeglądem dotyczącym CI-grafów jest cytowana praca [11], w zamian autor zdecydował się na obszerniejsze zaprezentowanie własnych wyników sporządzonych z wykorzystaniem oprogramowania.

Podsumowując, autor uważa całokształt pracy za udany, a samą pracę traktuje jako dobre wprowadzenie w temat grafów Cayley’a i badania ich izomorfizmów. Co więcej, dostrzega kilka interesujących kierunków kontynuacji badań i pogłębiania wiedzy:

- kontynuacja pracy nad grafami Cayley’a i ich izomorfizmami, dokładniejszy przegląd pozycji [11] i dzieł w niej cytowanych, próba odpowiedzi na pozostawione pytania;
- kontynuacja pracy nad oprogramowaniem, zgłębianie bibliotek Sage i GAP;
- dokładniejszy wgląd w generalny problem izomorfizmu grafów (zaczynając od dokładniejszej analizy pozycji [6]).

Spis tablic

4.1	graf o ind. syst. 2 , $ G =8$, $ S =4$, reprezentacje w zapisie algebraicznym	25
4.2	graf o ind. syst. 4 , $ G =12$, $ S =4$, reprezentacje w zapisie algebraicznym	27
4.3	graf o ind. syst. 5 , $ G =12$, $ S =4$, reprezentacje w zapisie algebraicznym	28
4.4	graf o ind. syst. 5 , $ G =16$, $ S =4$, reprezentacje w zapisie algebraicznym	29
4.5	graf z przykladu 9, zbiory S w zapisie algebraicznym	35

Spis rysunków

2.1	Graf Cayley'a $Cay(D_8, S)$, $S = \{a, a^{-1}, b\}$	8
2.2	Graf Cayley'a z rysunku 2.1, postać permutacyjna grupy D_8 , nieskierowany	8
3.1	Przykładowa tabela generowana przez <code>generuj_spis_grup</code> (rząd grup = 12)	16
3.2	Przykładowa tabela generowana przez <code>prezentuj_kl_poj_gr</code> (dla grupy C_8) .	17
3.3	Przykładowe wyniki generowane przez <code>prezentuj_kl_gr_st</code> (dla grupy $C_4 \times C_2$)	18
3.4	Przykładowe podsumowanie klasy generowane przez <code>prezentuj_liste_klas_dla_danego_stopnia</code> (<code>lista_kl_pom_gr, st_w</code>) (dla grafu o 12 wierzchołkach o stopniu 4)	19
3.5	Przykładowe podsumowanie tabelaryczne generowane przez <code>prezentuj_liste_klas_dla_danego_stopnia</code> (<code>lista_kl_pom_gr, st_w</code>) (dla grafu o 12 wierzchołkach o stopniu 4)	20
3.6	Przykładowe podsumowanie grupy generowane przez <code>wlasnosc_m_CI</code> (dla grupy C_8)	20
4.1	Graf spójny, 2-regularny, 8-wierzchołkowy i jego reprezentacje Cayley'a	21
4.2	spis grup rzędu 8 (z indeksowaniem w systemie)	24
4.3	podsumowanie wyników dla grup rzędu 8, $ S =4$	24
4.4	graf o ind. syst. 2 , $ G =8$, $ S =4$, reprezentacje Cayley'a	25
4.5	spis grup rzędu 12 (z indeksowaniem w systemie)	26
4.6	podsumowanie wyników dla grup rzędu 12, $ S =4$	26
4.7	graf o ind. syst. 4 , $ G =12$, $ S =4$, reprezentacje	27
4.8	graf o ind. syst. 5 , $ G =12$, $ S =4$, reprezentacje Cayley'a	28
4.9	spis grup rzędu 16 (z indeksowaniem w systemie, niepełny)	28
4.10	graf o ind. syst. 5 , $ G =16$, $ S =4$, reprezentacje Cayley'a	29
4.11	graf o ind. syst. 10 , $ G =12$, $ S =4$, reprezentacje Cayley'a	30
4.12	graf o ind. syst. 6 , $ G =12$, $ S =3$, reprezentacje Cayley'a	30

4.13	graf o ind. syst. 10 , $ G =12$, $ S =5$, reprezentacje Cayley'a	31
4.14	podsumowanie dotyczące klas izomorficznych grafów dla C_8	31
4.15	podsumowanie dotyczące klas izomorficznych grafów dla D_{12}	32
4.16	podsumowanie dotyczące klas izomorficznych grafów dla C_9	33
4.17	graf z przykładu 9 i jego reprezentacje Cayley'a w $C_4 \times C_2$	35

Bibliografia

- [1] *A Tour Of Sage Release 9.2*. 2020. URL: https://doc.sagemath.org/pdf/en/a_tour_of_sage/a_tour_of_sage.pdf.
- [2] C. Bagiński i M. Łuba. “O klasyfikacji skończonych grup prostych”. W: 38 (). ISSN: 2543-991X. DOI: 10.14708/wm.v38i01.4901.
- [3] Lowell W. Beineke. *Topics in Algebraic Graph Theory*. Red. Robin J. Wilson i Peter J. Cameron. Cambridge, 2004.
- [4] Marston Conder i Cai Heng Li. “On Isomorphisms of Finite Cayley Graphs”. W: *Europ. J. Combinatorics* 19 (1998), 911–919.
- [5] G. Cooperman, L. Finkelstein i N. Sarawagi. *Applications of Cayley graphs*. 1991. DOI: 10.1007/3-540-54195-0_65.
- [6] Harm Derksen. “The Graph Isomorphism Problem and approximate categories”. W: 59 (2013), s. 81–112. ISSN: 0747-7171. DOI: 10.1016/j.jsc.2013.06.002.
- [7] *gap-system- manual-chapter 1*. 2020. URL: <https://www.gap-system.org/Manuals/doc/ref/chap1.html>.
- [8] *gap-system-manual-chapter 40*. 2020. URL: <https://www.gap-system.org/Manuals/doc/ref/chap40.html>.
- [9] Chris Godsil i Gordon Royle. *Algebraic graph theory*. [Nachdr.] Graduate texts in mathematics 207. New York, NY: Springer, 2004. XIX, 439. ISBN: 0387952411.
- [10] Łukasz Kowalik. “Problem izomorfizmu grafów”. W: *Delta* (grud. 2018). URL: http://www.deltami.edu.pl/temat/informatyka/algorytmy/2018/11/26/Problem_izomorfizmu_grafow/.
- [11] Cai Heng Li. “On isomorphisms of finite Cayley graphs-a survey”. W: *Discrete Mathematics* 256 (2002), 301 – 334.
- [12] Joy Morris. “Isomorphic Cayley graphs on Nonisomorphic Groups”. W: *Journal of Graph Theory* 31(4) (2004).

- [13] *Sage 9.2 Reference Manual: Graph Release 9.2*. 2020. URL: <https://doc.sagemath.org/pdf/en/reference/graphs/graphs.pdf>.
- [14] *Sage 9.2 Reference Manual: Groups Release 9.2*. 2020. URL: <https://doc.sagemath.org/pdf/en/reference/groups/groups.pdf>.