

Análisis armónico en el sistema biela-manivela

Criterios de evaluación:

- El entregable debe ser un documento en donde se adjuntará un video de explicación de resultados experimentales (véase apéndice D).
- La rúbrica está indicada en el apéndice E.

Objetivo principal del laboratorio:

- Analizar el primer y segundo armónico en el sistema biela-manivela

Competencias durante y después de la experiencia:

- Utilizar herramientas de **adquisición de datos** (Sensor Vernier) y software de **análisis de datos** (Python) para obtener y procesar información experimental.
- Aplicar el **Movimiento Armónico Simple (MAS)**, para interpretar el comportamiento de sistemas mecánicos reales.
- Emplear la **Transformada Discreta de Fourier (DFT)** para descomponer señales en sus componentes armónicos y analizar su relevancia física.

1. Fundamento teórico

El Movimiento Armónico Simple (MAS) es un tipo de movimiento oscilatorio (de ida y vuelta) que experimenta un objeto cuando la fuerza que actúa sobre él es proporcional a su desplazamiento respecto a cierta posición de equilibrio. Por ejemplo, el caso típico del sistema masa-resorte que se mueve en línea recta se describe como un MAS con las siguientes expresiones para su posición $x(t)$, velocidad $v(t)$ y aceleración $a(t)$:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (1)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt}(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi) \quad (2)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt}(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi) \quad (3)$$

Nótese que la aceleración es proporcional a la posición, pero con el signo contrario. Esta es una característica fundamental propia del MAS.

El MAS como marco teórico es importante porque permite describir de forma simplificada sistemas complejos dinámicos y se usa en procesamiento de señales que contienen componentes armónicas. Para entender esta última afirmación, **esta experiencia en el laboratorio tiene como objetivo usar el modelo físico MAS en un sistema biela-manivela** que convierte un movimiento rotacional en uno lineal, como por ejemplo en motores de combustión interna (véase figura 1). Se analizará la movimiento del pistón respecto al ángulo de rotación (θ) de la manivela, concluyendo que no se sigue un movimiento armónico puramente sinusoidal. Esto se debe a que la longitud finita (l) de la biela introduce términos anarmónicos, es decir, el movimiento del pistón incluye componentes adicionales que distorsionan la forma sinusoidal ideal, generando asimetrías en las fases de compresión y expansión del pistón. Matemáticamente, esta desviación se puede expresar mediante una expansión en series de Fourier, donde aparecen términos de frecuencia doble, triple, etc., respecto al componente principal.

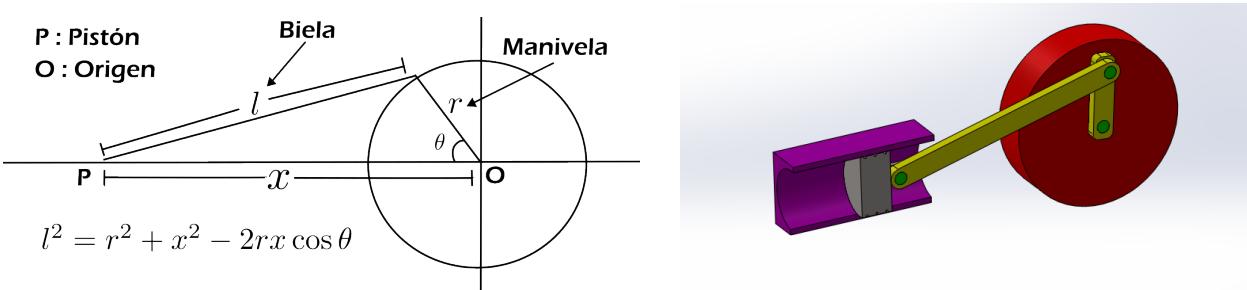


Figura 1: Esquema geométrico (izquierda) y modelo físico en 3D (derecha) del sistema biela-manivela. La manivela (de radio r) gira en torno a un punto fijo O , generando un movimiento angular descrito por el ángulo θ . El pistón, situado en el punto P , se desplaza en línea recta dentro de un cilindro. La biela, de longitud fija l , conecta el pistón con la manivela y transmite el movimiento circular de esta en un movimiento lineal. La relación geométrica entre las variables del sistema viene dada por la ecuación $l^2 = r^2 + x^2 - 2rx \cos \theta$, donde x representa la distancia horizontal entre el origen O y el pistón.

Una aproximación inicial al movimiento del pistón puede modelarse como sinusoidal. Sin embargo, para representar con mayor precisión la dinámica del sistema, es necesario incorporar términos anarmónicos. Estos constituyen correcciones al modelo ideal de movimiento armónico simple (MAS) y permiten capturar las desviaciones generadas por la geometría del sistema, en particular por la longitud finita de la biela.

1.1. Sistema biela-manivela

A partir del sistema biela-manivela mostrado en la figura 1, y aplicando la ley de los cosenos, se obtiene la expresión para la posición del pistón $x(t)$ en función de la longitud de la biela l , el radio de la manivela r y el ángulo de rotación $\theta(t)$ de la manivela:

$$x(t) = \underbrace{r \cos \theta(t)}_{\text{Armónico}} + \sqrt{\underbrace{l^2 - r^2 \sin^2 \theta(t)}_{\text{Anarmónico}}} \quad (4)$$

Si se asume un movimiento circular uniforme, es decir, $\theta(t) = \omega t$, la ecuación (4) muestra claramente que el desplazamiento del pistón tiene una **componente armónica** y una **componente anarmónica**.

Derivando respecto al tiempo, se obtiene la velocidad del pistón $v(t)$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \underbrace{-\omega r \sin \theta}_{\text{armónico}} - \frac{\omega r^2 \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \theta}} \quad (5)$$

y derivando nuevamente se obtiene la aceleración del pistón $a(t)$

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = \underbrace{-\omega^2 r \cos \theta}_{\text{armónico}} - \frac{\omega^2 r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \theta}} - \frac{\omega^2 r^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{(\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \theta})^3} \quad (6)$$

Las ecuaciones (4), (5) y (6) implican que el pistón no describe un MAS sino un movimiento que incluye términos anarmónicos debido al movimiento de la biela a medida que se balancea con la rotación de la manivela.

En la figura 2 se presenta una comparación entre la posición, velocidad y aceleración del sistema biela-manivela y las expresiones correspondientes a un MAS

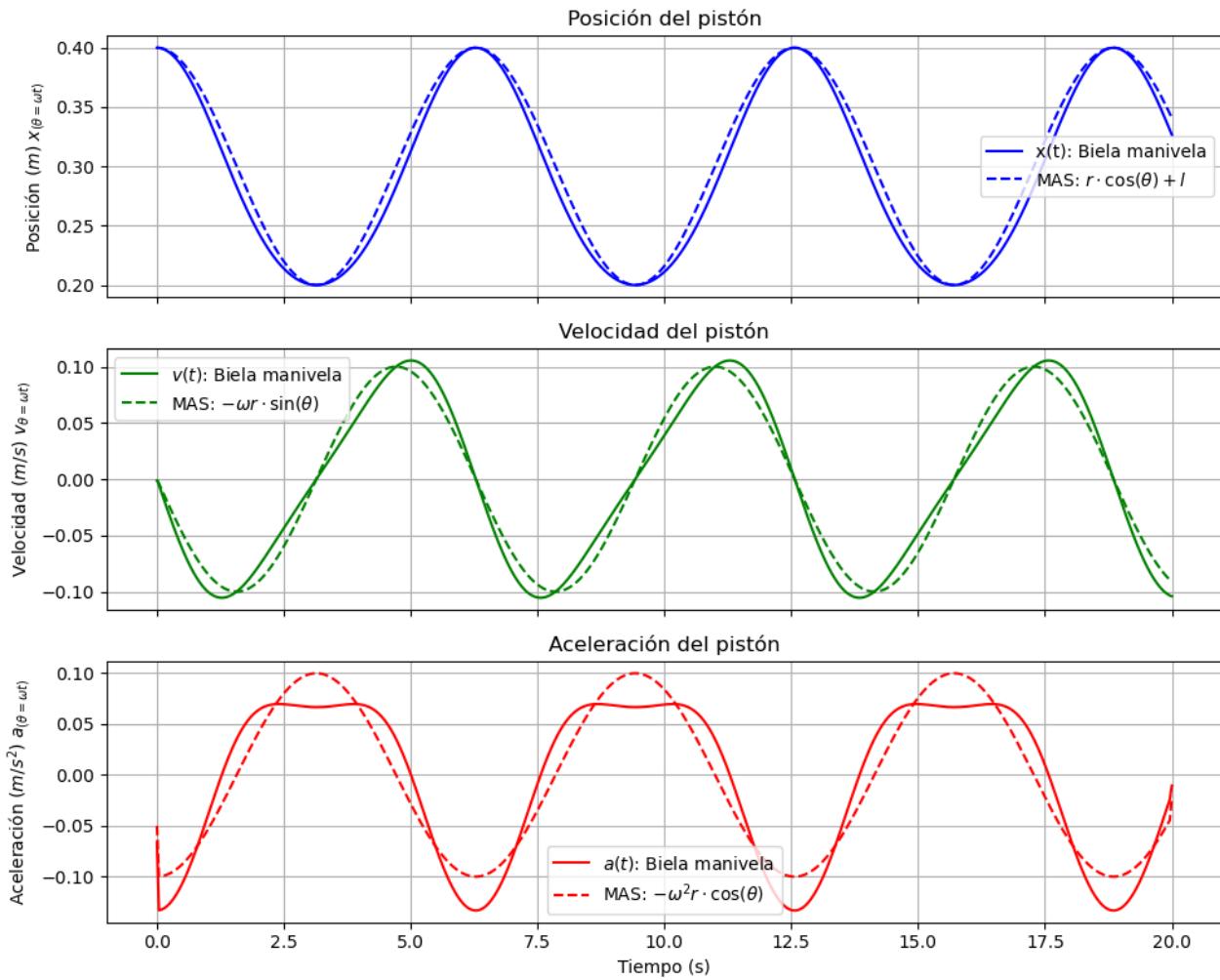


Figura 2: Comparación de la posición $x(t)$, velocidad $v(t)$ y aceleración $a(t)$ del sistema biela-manivela con las ecuaciones de MAS ($r = 0.1 \text{ m}$, $l = 0.3 \text{ m}$ y $\omega = 1 \text{ rad/s}$). [Clic para ver código](#)

1.2. Segundo armónico

Se puede demostrar (véase Apéndice A) que la posición del pistón puede aproximarse mediante la siguiente expresión:

$$x(t) \approx \left(l - \frac{r^2}{4l} \right) + r \cos \theta(t) - \frac{r^2}{4l} \cos 2\theta(t) \quad (7)$$

Al derivar dos veces respecto al tiempo, la aceleración toma la forma:

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = \underbrace{-r\omega^2 \cos \theta(t)}_{A_1 \cos \theta(t)} + \underbrace{\frac{r^2\omega^2}{l} \cos 2\theta(t)}_{A_2 \cos 2\theta(t)} \quad (8)$$

En esta aproximación, el término $A_1 \cos \theta(t)$ representa el **primer armónico**, correspondiente al MAS, mientras que $A_2 \cos 2\theta(t)$ es el **segundo armónico**, que actúa como una **perturbación** al comportamiento armónico ideal.

1.3. Fuerza de inercia

Cuando el pistón del sistema biela-manivela se mueve, su aceleración es generada por una fuerza de inercia que por la segunda ley de Newton está dada por:

$$F(t) = m_{\text{eq}} \cdot a(t) \quad (9)$$

donde m_{eq} es la masa equivalente del conjunto pistón-bielas y $a(t)$ es la aceleración del pistón dado por (8), por lo tanto, la fuerza también puede descomponerse en:

$$F(t) \approx \underbrace{-m_{\text{eq}} r \omega^2 \cos(\theta)}_{\text{primer armónico}} + \underbrace{m_{\text{eq}} \omega^2 \left(\frac{r^2}{l} \right) \cos(2\theta)}_{\text{segundo armónico}} \quad (10)$$

- El **primer armónico** es la oscilación principal y dominante.
- El **segundo armónico** aparece debido a la **longitud finita de la biela**, que introduce asimetrías en el movimiento.

En la presente experiencia de laboratorio, la aceleración del pistón será analizada como función del ángulo θ (o del tiempo, en caso de asumirse un movimiento circular uniforme). Para dicho análisis, se empleará la transformada discreta de Fourier (DFT), a partir de la cual podrán ser extraídas las siguientes componentes:

- El **primer armónico**, con el cual se valida el componente dominante de la señal.
- El **segundo armónico**, cuya aparición permite observar la distorsión generada por la geometría del sistema y sirve como base para discutir fenómenos de vibración.

2. Equipo experimental

Nº	Elemento	Función en el sistema biela-manivela
(1)	Riel dinámico con escala (carril)	Permite el movimiento lineal del carrito deslizante. Proporciona alineación y estabilidad. Permite observar y registrar el desplazamiento.
(2)	Sensor de movimiento Vernier	Mide la posición, velocidad y aceleración del carrito (4). Se conecta a la interfaz Vernier (7) para registrar datos en tiempo real.
(3)	Perno hexagonal y tuerca con rosca interna	Permiten fijar el carrito (4) a un extremo de la biela (6).
(4)	Carrito deslizante (simula el pistón)	Representa el pistón del sistema. Se desplaza en vaivén sobre el riel (1) al ser impulsado por la biela (6).

Nº	Elemento	Función en el sistema biela-manivela
(5)	Tuercas cuadradas y perno con cabeza de goma	Se utilizan para unir la biela (6) con la manivela (8), permitiendo una articulación libre que facilite la rotación.
(6)	Barra soporte (biela)	Conecta el carrito (4) con la manivela (8). Transmite el movimiento rotacional de la manivela al carrito en forma de movimiento lineal alternativo.
(7)	Interfaz Vernier de datos	Dispositivo que permite conectar los sensores al computador, para adquirir y visualizar datos como posición, velocidad y aceleración.
(8)	Sensor rotacional con disco de inercia (manivela)	Simula la manivela del sistema. Al girar, transmite su movimiento a la biela (6). El sensor mide el ángulo y la velocidad angular del eje y va conectado a la Interfaz Vernier de Datos (7).
(9)	Soporte universal con base de hierro	Proporciona una estructura firme para montar las varillas verticales. Permite fijar el sistema completo con estabilidad.
(10)	Abrazaderas y ajustadores (nuez doble, tornillos mariposa)	Permiten ensamblar y ajustar con precisión las varillas del soporte (9). Se usan para fijar la manivela y asegurar la correcta rotación sin soltarse.

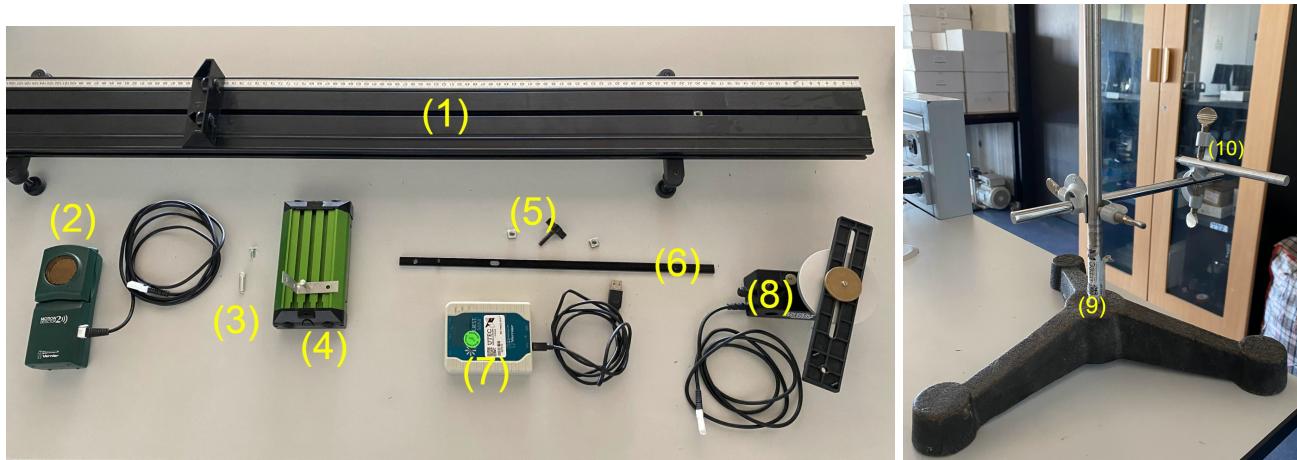


Figura 3: Equipo experimental utilizado en el montaje. Para la identificación detallada de cada elemento enumerado, véase la tabla correspondiente.

3. Procedimiento experimental

3.1. Montaje

1. Fija el riel dinámico sobre la mesa de trabajo y ubica el soporte con abrazaderas (véase la figura 4a). Ensambla la manivela en el soporte (véase la figura 4b).
2. Ensambla el sistema biela-manivela: conecta la biela desde la polea con sensor rotacional hasta el carrito. Utiliza los pernos y tuercas para fijar ambas uniones, asegurándote de que puedan rotar libremente.
3. Verifica que el carrito se desplace libremente sobre el riel, sin fricción excesiva, y que la biela esté alineada correctamente, como indica la figura 4c.
4. Conecta el sensor rotacional al puerto correspondiente de la interfaz Vernier.
5. Ubica el sensor de movimiento al frente del carrito, y conéctalo también a la interfaz.
6. Conecta la interfaz a la laptop o computadora vía USB.
7. Abre el software de adquisición **Logger Pro** (véase figura 4d) y verifica que ambos sensores sean reconocidos correctamente.

Software para registro de datos

- Si el estudiante dispone de una laptop con el software **Logger Pro** instalado, puede conectar los sensores directamente a su equipo mediante la interfaz Vernier.
- En caso de no contar con laptop propia, el laboratorio dispone de computadoras con **Logger Pro** preinstalado.

Recomendación: cada grupo debe exportar sus datos en formato .txt y guardarlos en una carpeta personal para su posterior análisis.

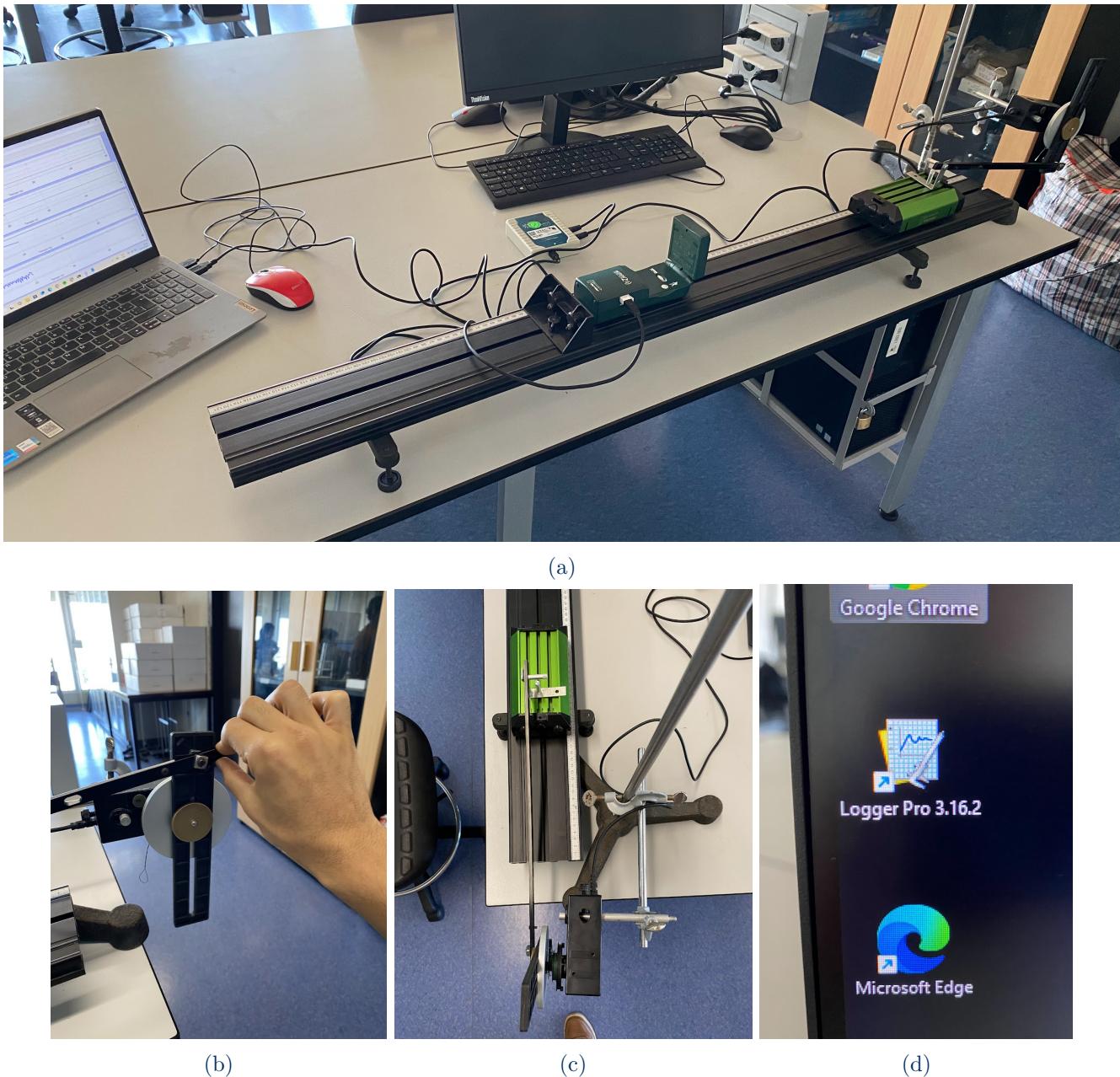


Figura 4: (a) Montaje experimental (b) Rotación de la manivela (c) Alineación correcta de la biela para que el carro pueda deslizarse sin fricción excesiva (d) Software de adquisición Logger Pro.

3.2. Parámetros físicos y condiciones de medición

Antes de iniciar la adquisición de datos, cada grupo debe identificar y registrar las siguientes dimensiones del sistema biela-manivela. Estas medidas permiten comprender mejor el movimiento observado, aunque no sean utilizadas directamente en los cálculos posteriores.

- **Longitud de la manivela (r):** corresponde a la distancia desde el eje de rotación hasta el punto donde la manivela se une con la biela. Esta medida representa el radio del movimiento circular que origina el sistema.

Medición estimada (cm): _____

- **Longitud de la biela (L):** es la distancia entre el punto de unión con la manivela y el punto de conexión con el carro (también llamado émbolo o pistón). Esta barra transmite el giro de la manivela en movimiento lineal alternativo .

Medición estimada (cm): _____

3.3. Medición y registro

1. Abre el software **Logger Pro** y verifica nuevamente que ambos sensores (rotacional y de movimiento) estén siendo reconocidos correctamente.
2. Configura la velocidad de muestreo (muestras/segundos) para cada uno de los siguientes valores: **10 Hz**, **20 Hz** o **30 Hz**. Realizarás tres mediciones distintas, una por cada frecuencia de muestreo.
3. Ajusta la duración de cada adquisición a un intervalo entre **10 y 20 segundos**.
4. Para iniciar la medición, haz clic en el botón **Tomar Datos**.
5. Gira manualmente la manivela a una velocidad angular constante (véase la figura **4b**). Asegúrate de mantener un ritmo uniforme durante la adquisición.
6. Observa en tiempo real los gráficos de:
 - Posición, velocidad y aceleración del carrito (sensor de movimiento).
 - Ángulo, velocidad angular y aceleración angular (sensor rotacional).
7. Realiza al menos **5 ciclos completos** de giro de la manivela por cada velocidad de muestreo.
8. Repite el procedimiento para las otras dos velocidades de muestreo restantes.
9. Después de cada adquisición, exporta los datos completos en formato **.txt**.

3.4. Formato de exportación de datos

Cada grupo debe exportar sus datos en formato **.txt** desde Logger Pro para que puedan ser analizados posteriormente de manera uniforme. Asegúrate de seguir estas indicaciones (véase la figura **5**):

- Utiliza el comando **Archivo >Exportar como texto** desde Logger Pro.
- Guarda el archivo con el siguiente nombre estándar:

biela-manivela-[frecuenciaHz]-[fecha].txt

Por ejemplo: **biela-manivela-20Hz-22-04-2025.txt**
- Verifica que se exporten todas las columnas registradas por los sensores.

El archivo debe incluir las siguientes columnas (el orden puede variar):

- **Tiempo (t)**: instante de cada muestra, en s.
- **Posición lineal (x)**: desplazamiento del carrito, en m.
- **Velocidad lineal** : en m/s.
- **Aceleración lineal** : en m/s².
- **Ángulo (θ)**: rotación de la manivela, en rad.
- **Velocidad angular** : en rad/s.
- **Aceleración angular** : en rad/s².

Nota: Estos archivos serán utilizados para el análisis posterior: reconstrucción del movimiento, comparación con modelos teóricos y descomposición armónica. Si el orden o los nombres de columnas difieren, cada grupo deberá ajustar su código o método de análisis en consecuencia.

Vernier Format 2 biela-manivela-20Hz-22-05-2024.cmlb 22/04/2025 11:31:55 .							
Tiempo t s	Angulo Angulo rad	Velocidad 1 v 1 rad/s	Aceleración 1 x rad/s ²	Posición a 1 m	Velocidad 2		Aceleración 2 a 2 m/s ²
					v 2 m/s	a 2 m/s ²	
0.05	-0.209439510239	-3.76215416542	0.662578697572	0.3105865	0.241052777778	-0.104847901235	
0.1	-0.401425727959	-3.69912838687	-0.21008592848	0.322763	0.236860555556	-0.137316450617	
0.15	-0.575958653158	-3.72336907093	-1.47544963623	0.3345965	0.2296385	-0.188427685185	
0.2	-0.767944870878	-3.84942062802	-2.72842366098	0.3459155	0.2186625	-0.254328148148	
0.25	-0.959931088597	-4.01425727961	-3.86504240206	0.3565485	0.204466111111	-0.338426666667	
0.3	-1.16937059884	-4.21787902566	-5.30601639833	0.3664955	0.186363333333	-0.465283734568	
0.35	-1.37881010908	-4.49907096064	-7.22911066684	0.3754135	0.161305277778	-0.668056018519	
0.4	-1.60570291183	-5.01297346262	-7.44997023328	0.383131	0.123384722222	-0.943355864198	
0.45	-1.88495559215	-5.4292169548	-4.17478447667	0.388619	0.0664086111111	-1.19578904321	
0.5	-2.16420827247	-5.48809087017	0.355530032549	0.390334	-0.00285833333333	-1.30445864198	
0.55	-2.44346095279	-5.3232542186	3.60378169616	0.388276	-0.0718394444444	-1.24538641975	
0.6	-2.70526034059	-4.98388464182	3.82464126208	0.3826165	-0.130435277778	-1.10728657407	
0.65	-2.93215314335	-4.81904799024	1.42750694994	0.374899	-0.181027777778	-0.981996296296	
0.7	-3.17649923863	-4.86752935836	-0.904985538071	0.3644375	-0.227809166667	-0.867239506173	
0.75	-3.42084533391	-4.93540327371	-2.92504254268	0.351918	-0.269159722222	-0.719929475309	
0.8	-3.66519142919	-5.12932874616	-5.34911094815	0.337169	-0.302125833333	-0.499784876543	
0.85	-3.92699081699	-5.46869832293	-7.58464069978	0.321391	-0.324611388889	-0.126507716049	
0.9	-4.20624349731	-5.9438157304	-8.32263485861	0.3040695	-0.3267075	0.510318364198	
0.95	-4.52040276267	-6.41893313784	-6.11942601908	0.2869195	-0.284880555556	1.35649089506	

Figura 5: Ejemplo de formato de exportación de datos.

4. Cálculos y gráficas

A partir de los datos experimentales obtenidos con el sensor de movimiento Vernier, se solicita desarrollar el siguiente análisis

1. Análisis del movimiento angular y lineal

- Gráficar el ángulo (rad) en función del tiempo
- Gráficar la velocidad angular y la aceleración angular respecto al tiempo
- Analizar y comentar sobre los intervalos de aceleración positiva y negativa.
- ¿Usted puede afirmar que aproximadamente realizó un movimiento circular uniforme MCU?
- Graficar la posición lineal (m), velocidad lineal (m/s) y aceleración lineal (m/s²) en función del tiempo y realizar un ajuste no lineal con las ecuaciones del MAS

$$x(t) = A_0 + A \cos(\omega t + \phi) \quad (11)$$

$$v(t) = -\omega A \sin(\omega t + \phi) \quad (12)$$

$$a(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) \quad (13)$$

2. Comparación entre espacio angular y lineal

- Graficar la posición lineal del pistón en función del ángulo de la manivela.
- Analizar si la relación $x(\theta)$ se comporta como una función sinusoidal. ¿Se observan asimetrías? ¿Se parece a un movimiento sinoidal?
- Comentar si es posible ajustar la curva a una función tipo $x(\theta) = A_0 + A \cos(\theta + \phi)$. ¿Qué aspectos de la geometría del sistema podrían explicar las desviaciones?
- Si en caso no puede ajustar la función $x(\theta)$, intente ajustar por partes.

Referencia de código para el ajuste no lineal

Para facilitar el análisis, se ha preparado un **notebook en Python** disponible en el siguiente enlace de GitHub:

[plantilla-ajuste-MAS.ipynb](#)

Este archivo contiene una plantilla con el código necesario para realizar el **ajuste no lineal del Movimiento Armónico Simple (MAS)** sobre los datos experimentales de posición, velocidad y aceleración.

Importante:

- Deberás **cargar tus propios datos** exportados desde Logger Pro.
- Tendrás que **acotar el intervalo de tiempo** donde la señal sea aproximadamente periódica, ya que esto influye directamente en la calidad del ajuste.
- Es responsabilidad del grupo **proponer condiciones iniciales razonables** para los parámetros del ajuste (A_0, A, ω, ϕ). Pensar cuidadosamente estos valores facilitará una mejor convergencia del algoritmo.
- No se evaluará el código ni la estructura del notebook, sino los **gráficos generados y el análisis físico** que presentes a partir de ellos.

3. Análisis espectral de la aceleración (véase apéndice C)

- Realice la Transformada Discreta de Fourier (DFT) de la aceleración lineal $a(t)$, obtenida en función del tiempo.
- Identifique los dos primeros armónicos dominantes a partir del espectro de amplitudes: determine sus frecuencias f_1, f_2 , amplitudes A_1, A_2 y fases ϕ_1, ϕ_2 .
- Utilice estos datos para reconstruir la señal de aceleración aproximada mediante la suma de armónicos:

$$a_{\text{aprox}}(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(2\pi f_2 t + \phi_2)$$

Compare gráficamente esta señal reconstruida con la señal original. Comente qué tanto se aproxima y qué información se pierde o se conserva.

- Comente si aparecen armónicos adicionales y proponga posibles causas: errores de medición, resonancias mecánicas, efectos no lineales u otros factores físicos del sistema.
- **Importante:** la señal $a(t)$ no es estrictamente periódica en todo el intervalo de medición. Por tanto, debe seleccionar (acotar) un intervalo donde el comportamiento sea aproximadamente periódico antes de aplicar la DFT. Este paso es fundamental para obtener un espectro claro y representativo.

Referencia de código para el ajuste no lineal

Se ha preparado un **notebook en Python** para realizar la Transformada Discreta de Fourier (DFT) sobre los datos de aceleración registrados experimentalmente.

[plantilla_analisis_espectral.ipynb](#)

Este archivo contiene una plantilla para:

- Cargar tus propios archivos ‘.txt’ exportados desde Logger Pro.
- Acotar un intervalo donde la aceleración sea aproximadamente periódica.
- Aplicar la DFT y obtener el espectro de amplitudes.
- Identificar el primer y segundo armónico y reconstruir la señal aproximada.

Importante:

- Deberás **cargar tu propio archivo de datos** y elegir manualmente el intervalo adecuado.
- La selección de parámetros como frecuencia de muestreo y rango de análisis influirá en la calidad del espectro.
- No se evaluará la forma del código ni su complejidad, sino los **gráficos generados** y la **interpretación física** que realices a partir del espectro y la reconstrucción.

El objetivo es que interpretes la presencia de armónicos en el sistema biela-manivela, no que entregues un código.

4.1. Motor de combustión interna

Importancia del segundo armónico

El sistema biela-manivela que se ha analizado en este laboratorio no solo se utiliza para convertir un movimiento rotacional en uno lineal (o viceversa), sino que es el mecanismo básico que se encuentra en la mayoría de los motores de combustión interna, como los que utilizan automóviles.

En estos motores, cada pistón se conecta mediante una biela al cigüeñal. Cuando el pistón se mueve hacia arriba y hacia abajo dentro del cilindro, este movimiento es transformado en rotación continua del cigüeñal, permitiendo así que las ruedas del vehículo giren. El movimiento del pistón no es perfectamente sinusoidal debido a la geometría del mecanismo biela-manivela. Por esta razón, la aceleración del pistón contiene no solo un componente principal (el primer armónico), sino también otros llamados **armónicos superiores**.

Cuando se agrupan varios pistones en un motor, como en un motor de cuatro cilindros en línea (véase figura 6), se busca distribuir los ángulos de encendido de manera que algunas de estas oscilaciones se cancelen entre sí. Sin embargo, no todos los componentes de la aceleración se cancelan automáticamente. En particular, los **armónicos pares**, y especialmente el **segundo armónico**, no se cancelan y pueden producir vibraciones no deseadas que afectan al motor y al vehículo.

Con este contexto en mente, analizar los resultados obtenidos experimentalmente y reflexionar sobre el significado físico del segundo armónico presente en el movimiento del pistón.

4. Discusión sobre el segundo armónico y el motor de cuatro cilindros

- A partir del análisis de armónicos, discutir cuál podría ser la fuente del primer y segundo armónico.
- Según el análisis espectral realizado sobre la aceleración del pistón, ¿se puede identificar la presencia de un segundo armónico importante? ¿Qué implicancias tendría esto si el sistema formara parte de un motor real de cuatro cilindros?

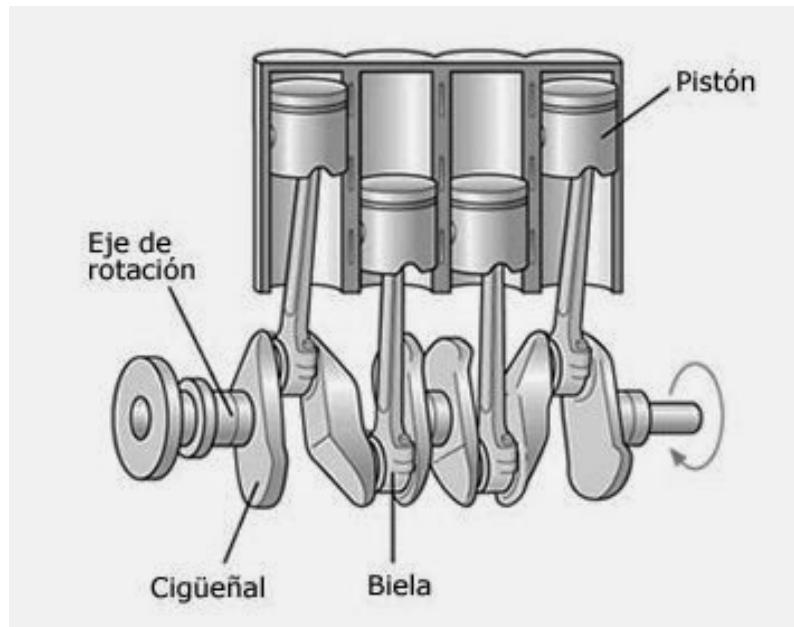


Figura 6: Motor de 4 cilindros

A. Perturbación del MAS

Se parte de la ecuación 4, que describe la posición del pistón en función del ángulo de la manivela:

$$x(t) = r \left[\cos \theta(t) + \frac{l}{r} \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l} \right)^2 \sin^2 \theta(t)} \right] \quad (14)$$

Este movimiento no es un Movimiento Armónico Simple (MAS), aunque su forma puede parecerse. Para entender mejor sus desviaciones, se realiza una expansión binomial del término cuadrático:

$$\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l} \right)^2 \cos^2 \theta} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{l} \right)^2 \cos^2 \theta - \frac{1}{8} \left(\frac{r}{l} \right)^4 \cos^4 \theta - \dots \quad (15)$$

Dado que en este experimento la razón $r/l < 1/3$, es válido considerar solo los primeros dos términos de la serie. Así, la ecuación (14) se aproxima por:

$$x(t) \approx r \left[\cos \theta(t) + \frac{l}{r} - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{l} \right) \cos^2 \theta(t) \right] \quad (16)$$

Utilizando la identidad trigonométrica $\cos^2 \theta = (1 + \cos 2\theta)/2$, el desplazamiento del pistón se puede expresar como:

$$x(t) \approx r \left[\cos \theta(t) + \frac{l}{r} - \frac{1}{4} \left(\frac{r}{l} \right) (1 + \cos 2\theta(t)) \right] \quad (17)$$

$$\approx \left(l - \frac{r^2}{4l} \right) + r \cos \theta(t) - \frac{r^2}{4l} \cos 2\theta(t) \quad (18)$$

considerando $\theta(t) = \omega t$ esta expresión puede verse como una corrección del movimiento armónico simple $r \cos \theta(t)$ donde el término que perturba es $-r^2/(4l) \cos 2\theta(t)$ (véase figura 2).

B. Informacion resumen

B.1. Palabras clave

- | | | |
|----------------|----------------|------------|
| 1. MAS | 4. Armónico | 7. Vernier |
| 2. Aceleración | 5. Anármónicos | 8. Fourier |
| 3. Biela | 6. Pistón | 9. DFT |

B.2. Fórmulas importantes

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega t + \phi) \\ v(t) &= -A\omega \sin(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (19) \qquad a(t) = -r\omega^2 \cos \theta + \frac{r^2\omega}{l} \cos 2\theta \quad (21)$$

$$a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi) \quad (22)$$

$$x(t) = \left(l - \frac{r^2}{4l} \right) + r \cos \theta - \frac{r^2}{4l} \cos 2\theta \quad (20)$$

C. Transformada Discreta de Fourier (DFT)

¿Qué es una serie de Fourier real?

Una señal periódica real $f(t)$ puede descomponerse como suma de funciones seno y coseno. Esta descomposición se llama **serie de Fourier**:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \quad (23)$$

- Los coeficientes a_n y b_n determinan la **amplitud** de los cosenos y senos.
- Cada término n representa un **armónico**, es decir, una oscilación con frecuencia múltiplo de la frecuencia fundamental ω .

Esto permite describir **formas de onda complejas** usando combinaciones de oscilaciones simples.

¿Qué hace la Transformada Discreta de Fourier (DFT)?

La **Transformada Discreta de Fourier (DFT)** es una herramienta computacional que aplica el concepto de la serie de Fourier a señales reales, discretas y de duración finita (como las que se miden en laboratorio).

- Toma una señal $a(t)$ como entrada (por ejemplo, aceleración vs tiempo).
- Devuelve un conjunto discreto de frecuencias $f_n = \frac{n}{T_{\text{total}}}$, con su **amplitud** y **fase**.
- Permite identificar los **armónicos dominantes** de la señal mediante un gráfico de amplitudes.

Se suele aplicar mediante algoritmos rápidos (FFT)¹, y los resultados se pueden expresar en forma real como:

$$a(t) \approx \sum_{n=1}^{N} A_n \cos(2\pi f_n t + \phi_n) \quad (24)$$

donde:

- A_n es la **amplitud** de cada componente (calculada a partir de la magnitud del coeficiente complejo),
- ϕ_n es la **fase**, obtenida a partir del argumento del coeficiente complejo,
- $f_n = \frac{n}{T_{\text{total}}}$ es la **frecuencia** correspondiente (en Hz), donde T_{total} es la duración de la señal analizada.

¹DFT es la fórmula matemática para descomponer una señal discreta en frecuencias, mientras que la FFT es un algoritmo eficiente para calcular la DFT

Equivalencia teórica vs práctica en Fourier

Serie de Fourier (forma teórica):

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

Forma práctica (DFT/FFT):

$$f(t) \approx \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \phi_n)$$

Equivalencia clave:

La suma de un seno y un coseno con la misma frecuencia n puede escribirse como un **solo coseno con desfase**:

$$a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = A_n \cos(n\omega t + \phi_n)$$

donde:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \phi_n = \tan^{-1} \left(-\frac{b_n}{a_n} \right)$$

Esta forma compacta es la que entrega directamente la DFT, facilitando el análisis espectral de señales físicas.

Elemento	Teoría (Serie de Fourier)	Práctica (DFT / FFT)
Representación	$a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$	$A_n \cos(2\pi f_n t + \phi_n)$ con $f_n = n/T_{\text{total}}$
Información separada	a_n, b_n (por análisis)	$A_n = \text{magnitud}, \quad \phi_n = \text{fase del coef. complejo}$
Visualización	No directa	Gráfico de amplitudes (y a veces fases)

Tabla 2: Comparación entre la representación teórica (serie de Fourier) y la práctica (DFT/FFT). La tabla resume la equivalencia entre la expresión teórica de la serie de Fourier (23) y su implementación práctica mediante la DFT (24).

Ejemplo práctico: reconstrucción con dos armónicos

Supongamos que tienes una señal muestreada con frecuencia de muestreo $f_s = 100$ Hz, y has registrado $N = 1000$ puntos uniformemente distribuidos. Entonces:

- La duración total es $T_{\text{total}} = N/f_s = 10$ s
- La separación entre frecuencias en el espectro es:

$$\Delta f = \frac{f_s}{N} = 0.1 \text{ Hz}$$

- Si la señal contiene un componente de $f = 2.0 \text{ Hz}$, su pico aparecerá en el **índice** $n = 20$ del espectro.
- El segundo armónico $f = 4.0 \text{ Hz}$ aparecerá en $n = 40$.

Este tipo de análisis permite identificar con precisión los armónicos principales del sistema biela-manivela, como el primer y segundo armónico asociados a la geometría del mecanismo.

A continuación se muestra cómo se puede construir una señal compleja sumando **dos armónicos tipo coseno**, de acuerdo con la teoría obtenida para el sistema biela-manivela (véase figura 7):

$$a(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t) + A_2 \cos(2\pi f_2 t) \quad (25)$$

Este es el caso típico del sistema biela-manivela, donde:

- El **primer armónico** representa la oscilación dominante tipo Movimiento Armónico Simple (MAS).
- El **segundo armónico** representa una corrección geométrica debida a la longitud finita de la biela (componente anarmónica).

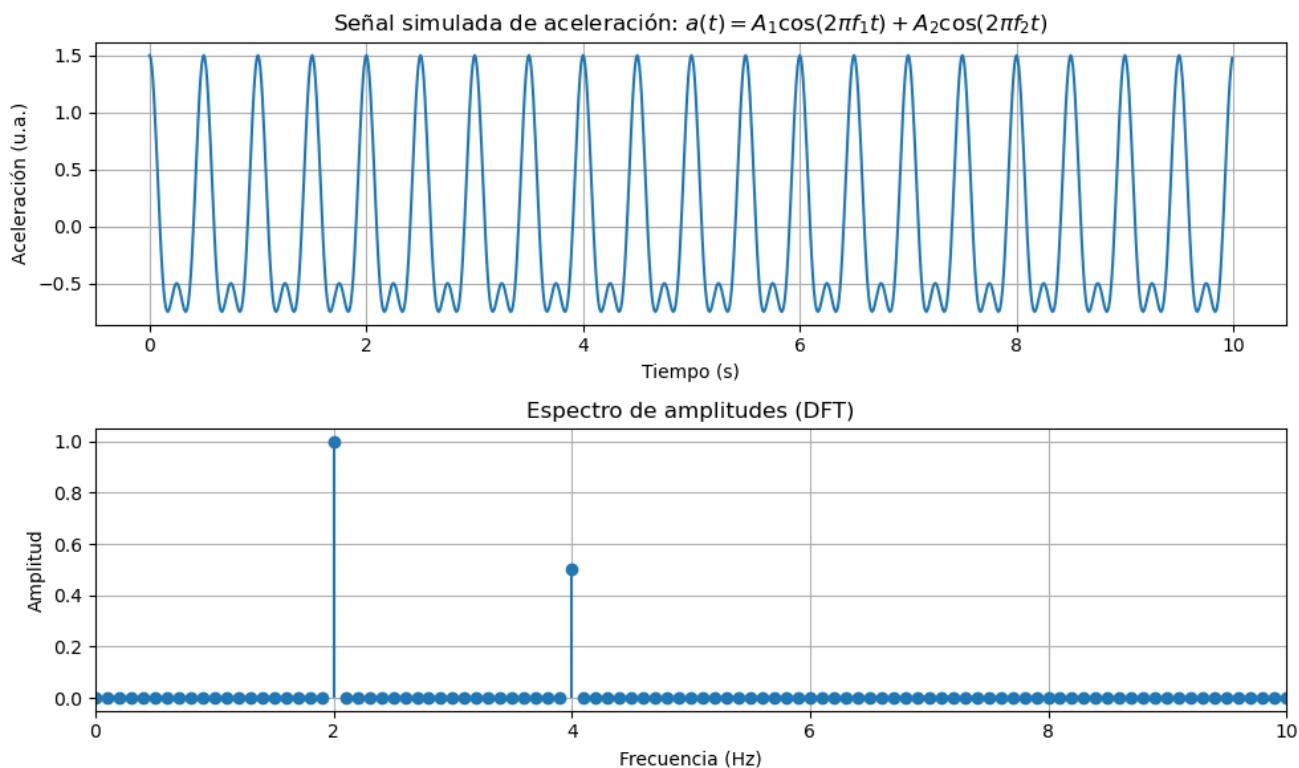


Figura 7: Arriba: señal simulada de aceleración en un sistema biela-manivela como combinación de dos cosenos. Parámetros usados: $f_s = 100 \text{ Hz}$, $N = 1000$, $T = 10 \text{ s}$; $f_1 = 2.0 \text{ Hz}$, $A_1 = 1.0$; $f_2 = 4.0 \text{ Hz}$, $A_2 = 0.5$. Abajo: espectro de amplitudes obtenido mediante la DFT, con picos en $n = 20$ y $n = 40$, siguiendo la relación $f_n = \frac{n f_s}{N}$.

La figura 7 muestra una idealización del comportamiento del pistón, en la que se observa que los dos primeros armónicos dominan el movimiento y bastan para reconstruir gran parte de la señal real. Sin embargo, en el laboratorio no se obtendrá exactamente la figura 7, sino una más parecida a la figura 8.

¿Cómo vas a aplicarlo en tu laboratorio?

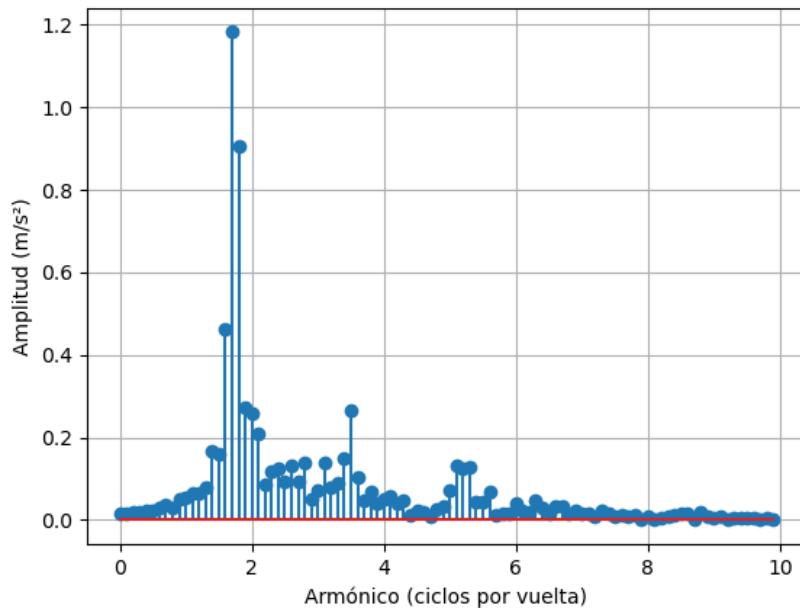


Figura 8: DFT de ejemplo de una señal real del sistema biela-manivela

En tu experiencia de laboratorio, has medido la **aceleración del pistón** en función del tiempo. Esta señal contiene información clave sobre el movimiento real del sistema biela-manivela.

Vas a aplicar lo aprendido de la serie de Fourier y la DFT

1. **Seleccionar un intervalo de tiempo** donde la señal de aceleración sea aproximadamente periódica.
2. **Aplicar la Transformada Discreta de Fourier (DFT)** a ese intervalo para obtener el **espectro de amplitudes**.
3. **Identificar los dos armónicos principales**: el primero representa el comportamiento tipo MAS; el segundo, una corrección geométrica propia del mecanismo.
4. **Reconstruir la señal de aceleración** usando solo estos dos armónicos:

$$a(t) \approx A_1 \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(2\pi f_2 t + \phi_2)$$

5. **Comparar** la señal original medida con la reconstruida:
 - ¿Qué tanto se parecen?
 - ¿Qué información conserva la reconstrucción?
 - ¿Qué se pierde o se simplifica?
6. **Interpretar los resultados**: relaciona los picos del espectro con el modelo físico del sistema. Comenta si aparecen otros armónicos y a qué podrían deberse (ruido, errores, fenómenos mecánicos no lineales, etc.).

Este procedimiento te permitirá validar experimentalmente que el movimiento del pistón no es un MAS ideal, y que contiene componentes armónicas adicionales relacionadas con la geometría del sistema.

D. Evaluación de la experiencia

Cada grupo deberá entregar un documento en el que se incluyan los cálculos realizados, los gráficos obtenidos, un enlace que lleve a los resultados y otro a un video de 15 minutos donde se expliquen estos resultados. Para ello, deben tener en cuenta los siguientes puntos:

1. El documento debe contener:

- Las gráficas correspondientes a los resultados experimentales.
- Los cálculos efectuados durante la experiencia.
- Fotografías tomadas durante el desarrollo del laboratorio.

Este documento servirá como apoyo visual para la explicación en el video.

2. En el video (duración máxima: 15 minutos), todos los integrantes del grupo deben participar y utilizar el documento como referencia.
3. El formato del video es libre. Debe ser subido a YouTube y el enlace correspondiente debe incluirse en el documento.
4. Es obligatorio que el rostro de todos los participantes aparezca en el video. Se recomienda grabar la presentación y editar las partes relevantes posteriormente.
5. El documento debe incluir también un enlace a los datos experimentales obtenidos y utilizados en el análisis.
6. La calificación se basará exclusivamente en el contenido del video. El documento tiene un propósito auxiliar y no se evaluará como un informe formal, pero debe contener de forma clara el enlace al video y a los datos experimentales.

Cualquier duda sobre la evaluación, enviar mensaje a: dsuarez@utec.edu.pe

E. Rúbrica

La siguiente rúbrica se utilizará para evaluar el video. Los tiempos indicados son solo una sugerencia para organizar la presentación.

1. Introducción² (3 minutos)

- Explica claramente el objetivo del experimento (+0.5 ptos.)
- Presenta la conclusión principal del experimento (+0.5 ptos.)
- Utiliza palabras clave relevantes asociadas al tema experimental (+1 ptos.)

2. Métodos³ (2 minutos)

- Enumera adecuadamente todo el equipo de laboratorio utilizado (+0.5 ptos.)
- Describe correctamente el procedimiento experimental seguido (+2.5 ptos.)

3. Resultados (5 minutos)

- Presenta los resultados en forma de tablas o gráficos (+0.5 ptos.)
- Aplica correctamente el tratamiento estadístico requerido (+4 ptos.)
- Describe y explica los resultados obtenidos (+0.5 ptos.)

²No es necesario presentar a los integrantes del grupo

³Se recomienda mostrar fotografías si se dispone de ellas.

4. Discusión⁴ (5 minutos)

- Analiza adecuadamente el movimiento angular y lineal (**+2 ptos.**)
- Compara el comportamiento del espacio angular y lineal (**+1 ptos.**)
- Explica el análisis espectral de la aceleración (**+3 ptos.**)
- Presenta y discute de forma clara la conclusión principal del experimento (**+1 ptos.**)
- Discute el segundo armónico y su relación con el motor de cuatro cilindros (**+3 ptos**)

■ Descuentos por errores (a considerar)

- Cálculos incorrectos detectados (**-1 ptos. por cada cálculo**)
- Se discuten resultados que no fueron obtenidos (**-2 ptos.**)
- El video excede los 15 minutos de duración (**-3 ptos.**)
- Se identifican alteraciones en los datos experimentales (**-5 ptos.**)
- Se detecta copia de datos de otro grupo (**-8 ptos.**)

⁴También puede apoyarse en imágenes o fotos si lo considera útil