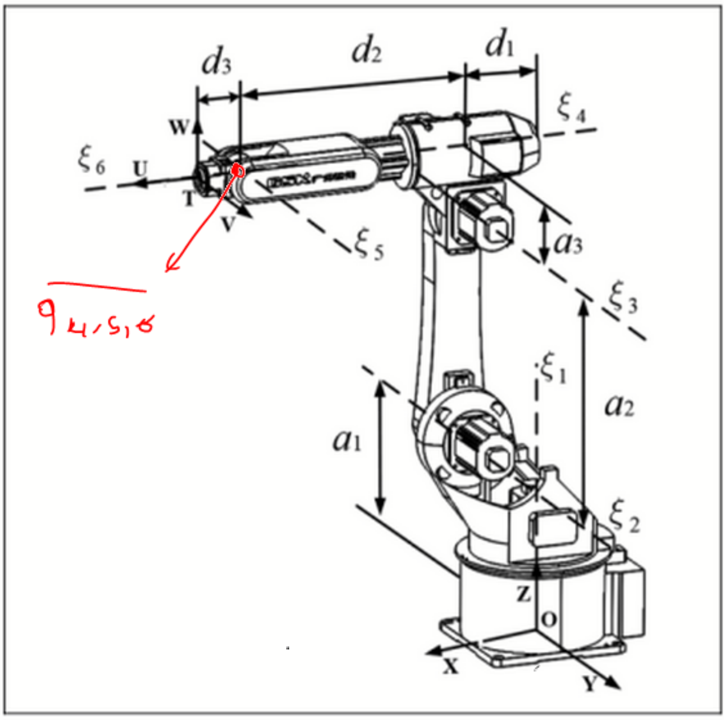


First, forward K. using P.O.E formula;

$$T = e^{[S_1]\theta_1} e^{[S_2]\theta_2} e^{[S_3]\theta_3} e^{[S_4]\theta_4} e^{[S_5]\theta_5} e^{[S_6]\theta_6} . M$$

Coordinat Reduction:

Axes w_4, w_5, w_6 intersect a single $q_{4,5,6}$ point. so;

Homogenous coord.

$$e^{[S_4]\theta_4} e^{[S_5]\theta_5} e^{[S_6]\theta_6} \overline{q_{4,5,6}} = \overline{q_{4,5,6}}$$

Define T1 as:

$$T1 = T . M^{-1} = e^{[S_1]\theta_1} \dots e^{[S_6]\theta_6}$$

apply to $\overline{q_{4,5,6}}$ ⇒

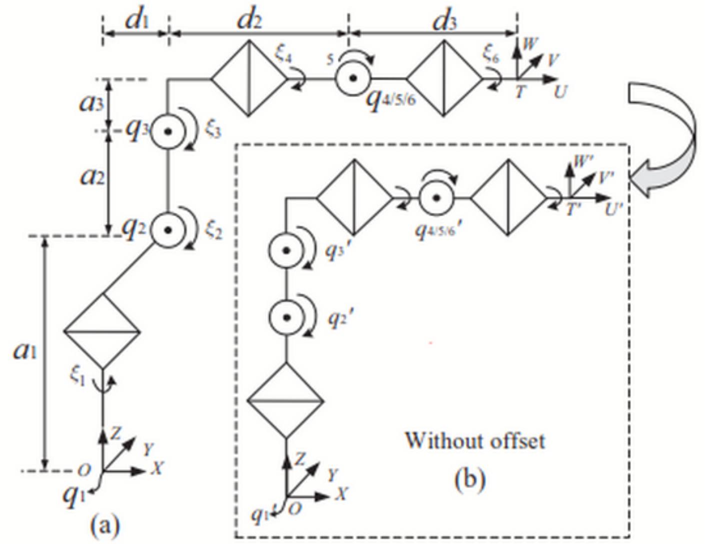
$$\Rightarrow T1 . \overline{q_{4,5,6}} = e^{[S_1]\theta_1} e^{[S_2]\theta_2} e^{[S_3]\theta_3} \overline{q_{4,5,6}}$$

$$\bar{p}_1 = e^{[S_1]\theta_1} e^{[S_2]\theta_2} e^{[S_3]\theta_3} \overline{q_{4,5,6}}$$

$$= [p_{1x}, p_{1y}, p_{1z}, 1]^T$$

$\Rightarrow w_1 = Z$, p_1 noktasının z deki dönüşü sadece w_1 ile olduğundan

$$\theta_1 = atan2(\pm p_{1y}, \pm p_{1x})$$



Çözümsüz durumlardan kurtulmak için d_1 kadar (x ve Y yönünde) öteleme yapılır. Bu öteleme dönüşümü:

$$T_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -d_1\cos\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 & -d_1\sin\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dönüşümden sonra q noktaları aşağıdaki biçime gelir:

$$q_1' = [0 \quad 0 \quad 0]^T, \; q_2' = [0 \quad 0 \quad a_1]^T,$$
$$q_2' = [0 \quad 0 \quad a_1 + a_2]^T,$$
$$q_4' = q_5' = q_6' = [d_2 \quad 0 \quad a_1 + a_2 + a_3]^T$$

Başlangıç poz matrisi ise:

$$M' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_2 + d_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_1 + a_2 + a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

θ_3 ün Çözümü:

$$T_t . T . M' . \overline{q_4}' = e^{[S_1]\theta_1} e^{[S_2]\theta_2} e^{[S_3]\theta_3} . \overline{q_4}'$$

Transforma uğradıktan önce ve sonra aynı kaldığını nereden biliyoruz?

T_t soldan değil de sağdan çarpılsaydı önceki $\overline{q_4} \to \overline{q_4}'$ olurdu.

$$\bar{p}_2 = e^{[S_1]\theta_1} e^{[S_2]\theta_2} e^{[S_3]\theta_3} \bar{q}_4'$$

olsun. q_2' noktasına göre norm alınırsa;

$$e^{[S_1]\theta_1} e^{[S_2]\theta_2} e^{[S_3]\theta_3} \bar{q}_4' - \bar{q}_2'$$

$$= e^{[S_1]\theta_1} e^{[S_2]\theta_2} \left[e^{[S_3]\theta_3} \bar{q}_4' - \bar{q}_2' \right]$$

$$= \bar{p}_2 - \bar{q}_2'$$

Not: q_2', w_1 ve w_2 dönüşlerinden etkilenmez.

Normu alınırsa (Norm alındığında p_2' ve q_2' arasındaki mesafe w_1 ve w_2 ile değişmez.)

$$\| e^{[S_3]\theta_3} \bar{q}_4' - \bar{q}_2' \| = \overbrace{\| \bar{p}_2 - \bar{q}_2' \|}^{\delta}$$

Şimdi PK3 ile çözülebilir. r noktası S_3 üzerinde olmalıdır:

$r_3 = [0 \;\; 0 \;\; a_1+a_2]^T$ olarak seçildi.

$$\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{q}_4' - \boldsymbol{r}_3 = [d_2 \;\; 0 \;\; a_3]^T, \; \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{r}_3 = [0 \;\; 0 \;\; -a_2]^T,$$
$$\boldsymbol{u}_3' = \boldsymbol{u}_3 - \boldsymbol{\omega}_3 \boldsymbol{\omega}_3^T \boldsymbol{u}_3 = [d_2 \;\; 0 \;\; a_3]^T, \; \boldsymbol{v}_3' = \boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{\omega}_3 \boldsymbol{\omega}_3^T \boldsymbol{v}_3 = [0 \;\; 0 \;\; -a_2]^T$$
$$\delta'^2 = \delta^2 - |\boldsymbol{\omega}_3^T(\boldsymbol{q}_4' - \boldsymbol{q}_2)| = p_{2x}^2 + p_{2y}^2 + (p_{2z} - a_1)^2$$

$$\begin{cases} \theta_0 = \operatorname{arctan2}\left(\boldsymbol{\omega}_3^T(\boldsymbol{u}_3' \times \boldsymbol{v}_3'), \;\; \boldsymbol{u}_3'^T \boldsymbol{v}_3' \right) \\ \theta_3 = \theta_0 \pm \arccos\left(\dfrac{\|\boldsymbol{u}_3'\|^2 + \|\boldsymbol{v}_3'\|^2 - \delta_3'^2}{2\|\boldsymbol{u}_3'\| \|\boldsymbol{v}_3'\|} \right) \end{cases} \quad (9)$$

Thus, the θ_3 can be given as follows

$$\begin{cases} \theta_0 = \operatorname{arctan2}(a_2 d_2, \;\; -a_2 a_3) \\ \theta_3 = \theta_0 \pm \arccos\left[\dfrac{d_2^2 + a_3^2 + a_2^2 - p_{2x}^2 - p_{2y}^2 - (p_{2z} - a_1)^2}{2 a_2 \sqrt{d_2^2 + a_3^2}} \right] \end{cases} \quad (10)$$

θ_2 nin Çözümü:

$T_2 = e^{-[S_1].\theta_1} T_1$ olarak tanımlansın.

$$\underbrace{T_2 \cdot \bar{q}_4'}_{p_3} = e^{[S_2]\theta_2} \underbrace{e^{[S_3]\theta_3}}_{\text{Biliniyor.}} \bar{q}_4'$$

$\bar{q}_7 = e^{[S_3]\theta_3} \bar{q}_4'$ olsun. Öyleyse;

$$\bar{p}_3 = e^{[S_2]\theta_2} \bar{q}_7$$

P.K.1 ile çözülebilir.

r_2 noktasının S_2 üzerinde olması gerekir. $r_2 = [0 \;\; 0 \;\; a_1]^T$ olarak tanımlanır.

$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{q}_7' - \boldsymbol{r}_2 = [q_{7x} \;\; q_{7y} \;\; q_{7z} - a_1]^T, \; \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{r}_3 = [\boldsymbol{p}_{3x} \;\; p_{3y} \;\; p_{3z} - a_1]^T,$$
$$\boldsymbol{u}_2' = \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{\omega}_2 \boldsymbol{\omega}_2^T \boldsymbol{u}_2 = [q_{7x} \;\; 0 \;\; q_{7z} - a_1]^T, \; \boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{\omega}_2 \boldsymbol{\omega}_2^T \boldsymbol{v}_2 = [p_{3x} \;\; 0 \;\; p_{3z} - a_1]^T$$

$$\theta_2 = arctan2\left(\boldsymbol{\omega}_2^T(\boldsymbol{u}_2' \times \boldsymbol{v}_2'), \;\; u_2'^T v_2' \right)$$

$$\theta_2 = \operatorname{arctan2}\left(p_{3x} q_{7z} - p_{3x} a_1 - q_{7x} p_{3z} + q_{7x} a_1, \;\; q_{7x} p_{3x} + q_{7z} p_{3z} - q_{7z} a_1 - p_{3z} a_1 + a_1^2 \right)$$

θ_4 ve θ_5 in Çözümü:

$$T_3 = e^{-[S_3]\theta_3} e^{-[S_2]\theta_2} T_2$$
$$= e^{+[S_6]\theta_6} e^{+[S_5]\theta_5} e^{+[S_4]\theta_4}$$

$\bar{q}_6''$ noktası S_5 ile kesişmeyecek şekilde $\bar{q}_6'' = [0 \;\; 0 \;\; a_1+a_2+a_3]^T$ olarak tanımlansın.

$$\underbrace{T_3 \cdot \bar{q}_6''}_{p_4} = e^{[S_4]\theta_4} e^{[S_5]\theta_5} \bar{q}_6''$$

$$e^{[S_6]\theta_6} \bar{q}_6'' = \bar{q}_6''$$

Artık PK2 ile çözülebilir.

S_4 ve S_5 in kesiştiği bir r_4 noktasına ihtiyaç vardır.

$r_4 = [d_2 \;\; 0 \;\; a_1+a_2+a_3]^T$ olarak seçilebilir.

$$\boldsymbol{u}_4 = \boldsymbol{q}_6'' - \boldsymbol{r}_4 = [-d_2 \;\; 0 \;\; 0]^T,$$
$$\boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{p}_4 - \boldsymbol{r}_4 = [p_{4x} - d_2 \;\; p_{4y} \;\; p_{4z} - a_1 - a_2 - a_3]^T$$

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{(\boldsymbol{\omega}_4^T \boldsymbol{\omega}_5) \boldsymbol{\omega}_4^T \boldsymbol{u}_4 - \boldsymbol{\omega}_4^T \boldsymbol{v}_4}{(\boldsymbol{\omega}_4^T \boldsymbol{\omega}_5)^2 - 1} \\ \beta = \dfrac{(\boldsymbol{\omega}_4^T \boldsymbol{\omega}_5) \boldsymbol{\omega}_5^T \boldsymbol{v}_4 - \boldsymbol{\omega}_5^T \boldsymbol{u}_4}{(\boldsymbol{\omega}_4^T \boldsymbol{\omega}_5)^2 - 1} \\ \gamma^2 = \dfrac{\|\boldsymbol{u}_4\|^2 - \alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha\beta \boldsymbol{\omega}_4^T \boldsymbol{\omega}_5}{\|\boldsymbol{\omega}_4 \times \boldsymbol{\omega}_5\|^2} \\ \boldsymbol{z} = \alpha \boldsymbol{\omega}_4 + \beta \boldsymbol{\omega}_5 + \gamma(\boldsymbol{\omega}_4 \times \boldsymbol{\omega}_5) \\ \exp\left(\hat{\xi}_5 \theta_5\right) \overline{\boldsymbol{q}_6''} = \bar{\boldsymbol{c}} \\ \exp\left(-\hat{\xi}_4 \theta_4\right) \overline{\boldsymbol{p}_4} = \bar{\boldsymbol{c}} \end{cases}$$

Namely

$$\begin{cases} \theta_4 = \operatorname{arctan2}(\pm p_{4y}, \;\; \pm(a_1 + a_2 + a_3 - p_{4z})) \\ \theta_5 = \operatorname{arctan2}(\pm \sqrt{2 p_{4x} d_2 - p_{4x}^2}, \;\; d_2 - p_{4x}) \end{cases}$$

θ_6 nın çözümü

$$T_4 = e^{-[S_4]\theta_4} e^{-[S_5]\theta_5} T_3$$

$$= e^{[S_6]\theta_6}$$ olarak tanımlansın.

q_8, S_6 da olmayan bir nokta olsun.

$$q_8 = [0 \quad 0 \quad a_1 + a_2]^T$$

PS $T_4 \cdot \bar{q}_8 = e^{[S_6]\theta_6} \bar{q}_8$

PK2 ile çözülebilir.

r_6, S_6 üzerinde bir nokta olsun:

$$r_6 = [0 \quad 0 \quad a_1 + a_2 + a_3]^T$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{q}_8' - \boldsymbol{r}_6 = [0 \quad 0 \quad -a_3]^T, \ \boldsymbol{v}_6 = \boldsymbol{p}_5 - \boldsymbol{r}_6 = [p_{5x} \quad p_{5y} \quad p_{5z} - a_1 - a_2 - a_3]^T$$
$$\boldsymbol{u}_2' = \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{\omega}_2\boldsymbol{\omega}_2^T\boldsymbol{u}_2 = [0 \quad 0 \quad -a_3]^T, \ \boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{\omega}_2\boldsymbol{\omega}_2^T\boldsymbol{v}_2 = [0 \quad p_{5y} \quad p_{5z} - a_1 - a_2 - a_3]^T$$

$$\theta_6 = \arctan2(p_{5y}, \quad p_{5z} - a_1 - a_2 - a_3)$$