1 Seminar nr. 4. Funcţii. Funcţii injective, surjective, bijective

1. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Să se arate ca funcţia polinomială reală de gradul întâi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, este bijectivă şi să se determine funcţia inversă.

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

   (a) să se arate că funcţia NU este nici injectivă, nici surjectivă;

   (b) să se arate că funcţia $g = f|_{[0,+\infty)}$, este injectivă;

   (c) Este g surjectivă ?

   (d) să se determine $f(\mathbb{R})$ şi $g(\mathbb{R})$;

   (e) pentru $a, b \in \mathbb{R}$ să se determine $f([a, b])$;

   (f) să se arate că funcţia $\tilde{g} : [0, +\infty) \to g(\mathbb{R})$ este bijectivă şi să se determine inversa.

3. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Să se arate că funcţia polinomială reală $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^3 + b$, este bijectivă şi să se determine funcţia inversă.

4. Fie $a > 0$. Să se arate că funcţia polinomială reală $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^3 + x + b$, este bijectivă.

   Rezolvare $\forall x, y \in \mathbb{R}$ se arată că din $f(x) = f(y)$ se obţine $x = y$. Avem $ax^3 + x + b = ay^3 + y + b$, de unde $(x - y)(ax^2 + axy + ay^2 + 1) = 0$; de aici $x = y$ deoarece $ax^2 + axy + ay^2 + 1 = ax^2 + axy + \frac{1}{4}y^2 + \frac{3}{4}y^2 + 1 = a(x + y/2)^2 + \frac{3}{4}y^2 + 1 > 0$.

5. Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ cu $c \neq 0$. Să se arate că dacă $ad - bc \neq 0$, funcţia reală $f : \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}$, $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, este bijectivă şi să se calculeze funcţia inversă.

6. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$. Să se determine imaginea următoarelor mulţimi prin funcţia f :

   a) $A = [0, 1]$; b) $A = [1, 2)$; c) $A = [0, +\infty)$; d) $A = \mathbb{R}$.

   Răspuns a) Avem $f([0, 1]) = [1, 3]$, ceea ce se poate observa din graficul funcţiei. Din definiţie $f(A) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in A, f(x) = y\}$; $f([0, 1]) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in [0, 1], f(x) = y\}$; $0 \leq x \leq 1$, atunci $0 \leq 2x \leq 2$, de unde $1 \leq 2x + 1 \leq 3$.

   b) $f([1, 2)) = [3, 5)$; c) $f([0, +\infty)) = [1, +\infty)$; d) $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

7. Să se determine $Im(f)$, imaginea funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ în următoarele cazuri:

   a) $f(x) = \frac{x}{x^2+x+1}$; b) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$; c) $f(x) = \frac{x}{x^2-x+1}$.

Rezolvare a) Din definiţie $f(\mathbb{R}) = Imf = \{y \in \mathbb{R} \,|\, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = y\}$; $\frac{x}{x^2+x+1} = y$, de unde $x^2y + x(y-1) + y = 0$, pentru ca să existe $x \in \mathbb{R}$ (deci ecuaţia să aibă soluţie) atunci $\Delta \geq 0$, deci $(y-1)^2 - 4y^2 \geq 0$, adică $(y+1)\cdot(3y-1) \leq 0$, pentru care $y \in [-1, 1/3] = f(\mathbb{R})$.

Alternativ, din studiul variaţiei funcţiei f, se obţin punctele critice $-1, 1$ care dau punctele de minim $f(-1)$ şi respectiv de maxim $f(1) = 1/3$; (vezi WA).

b) Se poate proceda similar, însă direct $-1 \leq \frac{2x}{x^2+1} \leq 1$; cu observaţia că marginile sunt atinse pentru $x = -1$ respectiv $x = 1$ deci $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

c) ca şi la pct. a) $\Delta \geq 0$, deci $(y+1)^2 - 4y^2 \geq 0$, adică $(y-1)\cdot(3y+1) \leq 0$, pentru care $y \in [-1/3, 1] = f(\mathbb{R})$.

8. Fie $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Să se arate că funcţia polinomială complexă de gradul întâi $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = az+b$, este bijectivă şi să se determine funcţia inversă.

9. Fie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$.

   (a) să se arate că funcţia NU este injectivă, dar este surjectivă;

   (b) să se determine imaginea unei drepte paralele cu axa Ox prin f;

   (c) să se determine imaginea unei drepte paralele cu axa Oy prin f.

Rezolvare Se cere imaginea prin funcţia f a mulţimilor de forma

$$A = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Re} z = a\}, a \in \mathbb{R} \text{ şi } B = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Im} z = b\}, b \in \mathbb{R}.$$

Pentru $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ avem

$$w = f(z) = x^2 - y^2 + 2xyi = u + iv, u, v \in \mathbb{R}$$

cu $u = \operatorname{Re} f = x^2 - y^2$ iar $v = \operatorname{Im} f = 2xy$.

Fie $b \in \mathbb{R}$ fixat. Pentru $z \in B$ avem $y = b$ de unde $u = x^2 - b^2$ şi $v = 2xb$. Eliminăm variabila x. Pentru $b \neq 0$ avem $x = v/(2b)$ de unde găsim curba (locul geometric dat de perechea (u, v))

$$u = v^2/(4b^2) - b^2$$

reprezentând o parabolă (fig. 1). Dacă $b = 0$ atunci $v = 0$ şi $u = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Analog pentru mulţimea A. Fie $a \in \mathbb{R}$ fixat. Pentru $z \in A$ avem $x = a$ de unde $u = a^2 - y^2$ şi $v = 2ay$. Eliminăm variabila y. Pentru $a \neq 0$ avem $y = v/(2a)$ de unde găsim curba

$$u = a^2 - v^2/(4a^2)$$

reprezentând o parabolă (fig. 2). Dacă $a = 0$ atunci $v = 0$ şi $u = -y^2$, $y \in \mathbb{R}$.

Dreptele reprezentate prin mulţimile A şi B sunt perpendiculare. Uşor se poate observa că tangentele în punctul de intersecţie a două parabole $f(A)$ şi $f(B)$ sunt tangente. O funcţie care păstrează unghiurile dintre două curbe se numeşte **conformă**.

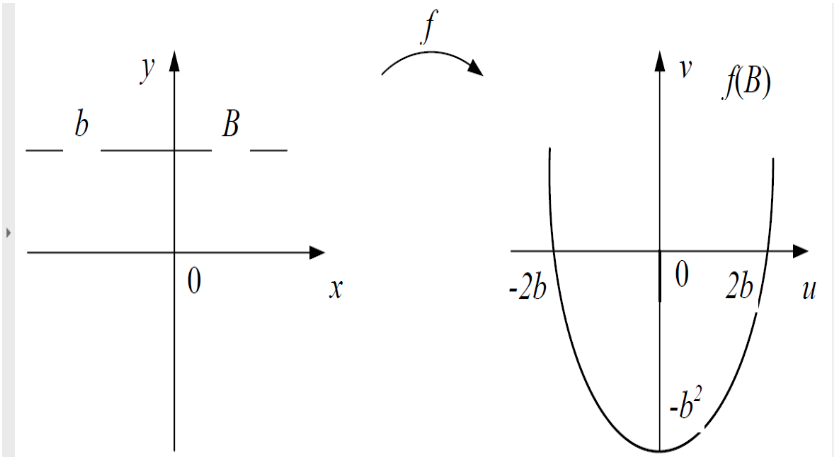

Figura 1: $f(z) = z^2$

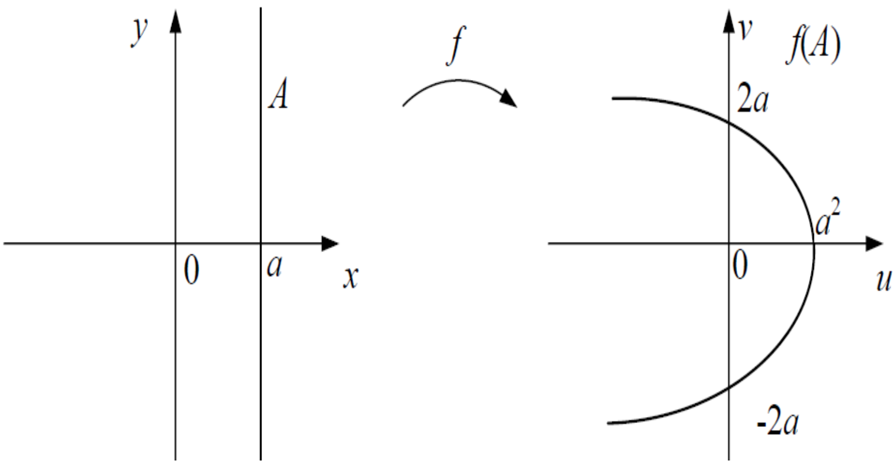

Figura 2: $f(z) = z^2$

10. Fie $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ cu $c \neq 0$. Să se arate că dacă $ad - bc \neq 0$, funcţia

$$f : \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \to \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{a}{c} \right\},\ f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

este bijectivă şi să se calculeze funcţia inversă.

11. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$. Să se determine $f^{-1}(2), f^{-1}(-1), f^{-1}([1, 4[)$.

Obs. Se defineşte contraimaginea unui punct printr-o funcţie $f : X \to Y$

$$f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}$$

respectiv contraimaginea printr-o funcţie a unei mulţimi

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}, B \subseteq Y.$$

vezi şi exerciţiile 29, 30, 31 pag. 13, Cap.III, Năstăsescu,... Culegere de probleme de algebră, Ed. Rotech Pro, 1997.

12. Fie X, Y două mulţimi nevide şi $f : X \to Y$. Să se arate că

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2),$$

pentru orice $B_1, B_2 \subseteq Y$.

13. Fie X, Y două mulţimi nevide şi $f : X \to Y$. Să se arate că

$$f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i),$$

pentru orice $B_i \subseteq Y$, $i \in I$, I mulţime de indici oarecare. Să se arate că

$$f(\bigcup_{i \in I} A_i) \subseteq \bigcup_{i \in I} f(A_i),$$

pentru orice $A_i \subseteq X$.

14. Fie X, Y două mulţimi nevide şi $f : X \to Y$. Să se arate că

a) $f\big(f^{-1}(B)\big) \subseteq B,\ B \subseteq Y;$ b) $A \subseteq f^{-1}\big(f(A)\big),\ A \subseteq X.$

15. Fie X, Y două mulţimi nevide şi $f : X \to Y$. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) f este injectivă;
b) $A = f^{-1}\big(f(A)\big)$, pentru orice $A \subseteq X$.
c) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$, pentru orice $A_1, A_2 \subseteq X$;
d) pentru orice $A_1, A_2 \subseteq X$ din $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ avem $f(A_1) \cap f(A_2) = \emptyset$;
e) $f(X \setminus A) \subseteq Y \setminus f(A)$, pentru orice $A \subseteq X$.

Rezolvare Arătăm $a) \Longleftrightarrow c)$;

$\Longrightarrow$ în general, pentru orice $A_1, A_2 \subseteq X$; $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$, folosind definiţia. Pentru incluziunea inversă, fie $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$, adică $y \in f(A_1)$ şi $y \in f(A_2)$, de unde există $x_1 \in A_1$ pentru care $y = f(x_1)$ şi există $x_2 \in A_2$ pentru care $y = f(x_2)$. De aici $y = f(x_1) = f(x_2)$, iar din injectivitate $x_1 = x_2 \in A_1 \cap A_2$, astfel că $y \in f(A_1 \cap A_2)$.

" $\Longleftarrow$ " fie $x, y \in X$ şi $f(x) = f(y)$; alegem $A_1 = \{x\}$ şi $A_2 = \{y\}$. Presupunem prin absurd că f nu ar fi injectivă, deci $x \neq y$, adică $A_1 \cap A_2 \emptyset$; folosind egalitatea dată $\emptyset = f(\emptyset) = f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2) = \{f(x)\}$, contradicţie.

se relaţionează a) şi d). d) implică a); fie $x \neq y$ şi se arată că $f(x) \neq f(y)$; se aleg $A_1 = \{x\}$ şi $A_2 = \{y\}$ care sunt disjuncte; de unde $f(A_1)$ şi $f(A_2)$ sunt disjuncte. Invers, fie acum A_1, A_2 disjuncte şi trebuie arătat că $f(A_1) \cap f(A_2) = \emptyset$; pp. că ar aexista $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$, deci $y \in f(A_1)$ şi $y \in f(A_2)$, deci ar exista $x_1 \in A_1$ cu $f(x) = y$ şi $x_2 \in A_2$ pentru care $y = f(x_2)$, de unde în baza injectivităţii se ajunge că $x \in A_1 \cap A_2$ ceea ce este contradicţie.