Gyakorló feladatsor megoldásai

Kombinatorika és klasszikus valószínűségi mező

Kombinatorika:

1. 6 főt akarunk leültetni. Hányféleképpen tehetjük meg, ha

   a) egy sorba, 6 üres székre szeretnénk őket leültetni: ez eddig sima ismétlés nélküli permutáció: a megoldás **6! = 720**
   b) egy sorba, egymás mellé ültetjük őket, **de csak az számít, kik a szomszédok**, az nem, hogy melyikük ül jobb, és melyik baloldalon
   6!/2=360 Úgy jön ki, hogy a sima lehetőségeknek (6!) csak a fele számít különbözőnek, mivel minden olyan sorrend, amely csak egy másik ülésrend megfordítása, kiesik.
   c) egy sorba ültetjük őket (ismét minden ülésrend különbözőnek számít), **de van egy pár**, ahol a **nő a férfi jobb oldalán** szeretne ülni
   ők 1 elemnek számítanak: **5!=120**
   d) egy sorba ültetjük őket, **de van egy pár, viszont mindegy, ki ül melyik oldalon**
   helyet cserélhetnek, ezért az előbbi duplája: **2*5!=240**
   e) (ismét **nincsenek párok)** egy sorba ültetjük őket, de vannak ketten, akik ki nem állhatják egymást, ezért **nem hajlandók egymás mellett** ülni
   Ebben az esetben éppen annak az ellenkezője jó, mint az előbbi esetben: ott még az kellett, hogy ketten egymás mellé kerüljenek, itt pedig éppen, hogy nem. Vagyis az összes 720 esetből, ha kivonjuk azt a 240-et, amikor egymás mellé kerülnek, megkapjuk, hogy 480 eset marad.
   f) egy sorba ültetjük őket, és van köztük egy **háromfős család, akik egymás melletti székeken** szeretnének ülni. A többiek egyedül jönnek, és mindegy nekik, ki mellett ülnek.
   Most a háromfős család először egy elemnek számít, így négy elemet permutálunk (4!), majd ezt követően a családon belül is meghatározzuk az ülésrendet (3!). Összesen: 4!*3! megoldás van.
   g) (**ismét nincsenek se párok, se családok**) egy sorba ültetjük őket, de van valaki, aki **a bal szélen szeretne ülni.**
   A bal szélső szék elkelt. Már csak 5 személy van és 5 szék: **5! = 120 megoldás**.
   h) egy sorba ültetjük őket, de van valaki, aki **szélen szeretne ülni, de mindegy, melyiken**
   Kétszer annyi eset van, mint az előbb, mert a bal szél mellett hozzáadódnak még azok az esetek is, amikor a jobb szélen ül. Másképp: először leültetjük a „problémás” illetőt (2 megoldás közül választhatunk), majd a fennmaradó 5 székre leültetjük az 5 embert. **2*5! = 240** megoldást kapunk így is, úgy is.
   i) egy sorba ültetjük őket, de van valaki, aki nem szeretne a bal szélén ülni
   A bal szélére csak 5 ember közül választhatunk, a többi helyre pedig a fennmaradó 5 személy közül bármilyen sorrendben, ezért **5*5!=600**. Másképpen 6!-5!, mivel az összes lehetőségből kivonjuk azokat, amikor az illető ül a bal szélén (kettővel fentebb ezt számoltuk ki).

j) egy sorba ültetjük őket, de van valaki, aki egyik szélén sem szeretne ülni
5*4*4! vagy másképpen **6!-2*5!=480**. Az egyik megoldás úgy jön ki, hogy az egyik szélre 5 ember közül választhatunk, a másik szélre a fennmaradó 5 közül csak 4 ülhet, és végül a fennmaradó 4 személy közül bárki bárhová. A másik megoldás pedig az összes lehetőségből kivonja egyrészt azokat, amikor a válogatós illető a bal szélre kerül, másrészt azokat, amikor a jobb szélre kerül (ezért 2*5!)

k) egy sorba ültetjük őket, de vannak ketten, akik mindketten szélen szeretnének ülni, de mindegy nekik, hogy jobb vagy bal szélen
Az egyik szélre 2 személy közül választhatunk, a másik szélre már adódik, ki ül (a másikuk), végül a 4 személyt, akinek mindegy, hová ül, leültetjük a fennmaradó helyekre: **2*1*4!=48**

l) 3-an nők, 3-an férfiak, és úgy ültetjük őket, hogy baloldali 3 széken a férfiak, jobb oldalon a nők ülnek
Külön sorba rakjuk a férfiakat és a nőket, és bármelyik sorrend bármelyikkel kombinálható: **3!*3!=36**

m) 3-an nők, 3-an férfiak, és úgy ültetjük őket, hogy felváltva üljenek a nők és férfiak, a bal szélső székre pedig csak nő ülhet
Tulajdonképpen azonos az előzővel, csak a kijelölt helyek egymáshoz képesti helyzete különbözik: **3!*3!=36**

n) 3-an nők, 3-an férfiak, és felváltva ültetjük őket, és mindegy milyen nemű ül a bal szélső székre
az előbbi duplája, mivel minden esetben helyet is cserélhetnek a férfiak és a nők: **2*3!*3!=72**

o) kerek asztalhoz ültetjük őket
úgy kapjuk meg, hogy egy valakit leültetünk bárhová az asztalhoz, és azt nézzük meg, hozzá képest hogyan tudjuk leültetni az embereket: **5!=120.** A másik megoldás, hogy az összes sima esetet (6!) elosztjuk annyival, ahányszor el tudjuk forgatni az egyes ülésrendeket.

p) **kerek asztalhoz** ültetjük őket, és csak az számít, kik a szomszédok, az nem, hogy melyik oldalon ülnek
Ez éppen a fele az előzőnek, mert az előzőben még minden ülésrend és annak tükörképe is szerepelt, de ebben az esetben ezek már nem számítanak különbözőnek. Összesen tehát 60 ülésrend létezik.

q) a teremben elszórva ültetjük őket 6 székre
mivel itt is minden ülésrend különböző, **6!=720**

r) egy moziterem két sorába, 3-3 székre ültetjük őket
szintén minden ülésrend különböző, ezért **6!=720**

s) egy moziterem két sorába, 3-3 székre ültetjük őket, és **csak az számít, ki melyik sorból** nézi, az nem, hogy melyik székről
a kérdés, hányféleképpen tudjuk kiválasztani azt a 3 főt, aki az első/második sorba kerül →
kombináció: $\boldsymbol{C_6^3} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!*3!} = \mathbf{20}$

t) a 6-ból 4-et egy moziterem 4 szabad székére, és **minden ülésrend különbözőnek** számít
variáció: $\boldsymbol{V_6^4} = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \mathbf{6*5*4*3 = 360}$

u) hányféleképpen tudjuk őket leültetni 7 szabad szék közül 6-ra, ha **mindegyik ülésrend különbözőnek** számít?

A megoldás szempontjából lényegtelen, hogy emberből vagy székből van több, a fő, hogy egy elemet egy elemhez rendeljük, ezúttal nem embereket székekhez, hanem székeket választunk az embereknek. Minden széket csak egyszer osztunk ki, ezért ismétlés nélküli, és mivel nem használunk fel minden széket (elemet), ezért variáció, de mivel csak egy szék marad üresen, ezért a permutáció is ugyanazt az eredményt adná (azzal, hogy valamelyik széket – de csak egyet – kihagyjuk, tulajdonképpen azt is sorba állítjuk, és az utolsó helyre kerül)

$$V_7^6 = \frac{7!}{(7-6)!} = \frac{7!}{1!} = 7! = 7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 = 5040$$

v) hányféleképpen tudjuk őket leültetni 10 szabad szék közül 6-ra, ha **mindegyik ülésrend különbözőnek** számít?
két lépésben megoldva: először kiválasztjuk azt a 6 széket a 10-ből, amelyen ülni fognak: $\binom{10}{6}$ –féleképpen, majd ezekre leültetjük az embereket 6!-féleképpen. Ez összesen 210*720 = 151 200. Másik megoldás, hogy a székeket (helyjegyeket) osztjuk ki az embereknek: az elsőnek 10 jegy közül választhatunk, a másodiknak 9 közül, stb. Az eredmény: 10*9*8*7*6*5 = 151 200

w) a 6-ből 4-et a 4 szabad székre (2-2 a két sorban), és **csak az számít, ki melyik sorból nézi**
kombináció: előbb kiválasztjuk a 6-ból a 2-t (egyik sor), majd a fennmaradó 4-ből a 2-t: $\binom{6}{2} * \binom{4}{2} = 15 * 6 = 90$. Ugyanezt kapjuk, ha úgy gondolkodunk, hogy kiválasztjuk a 4 embert, aki elmehet, és a 4-ből a 2-t, aki az első/második sorba ül.

x) 6-ból 4-en tudnak elmenni, és **csak az számít, ki látja a filmet, és ki nem**
kombináció: $\binom{6}{4} = 15$

2. Nyolcan állnak a parton, és kenuzni szeretnének.
   a. Csak egy ötszemélyes kenut kaptak. Hányféleképpen tudjuk kiválasztani azt az 5 személyt, aki elmehet kenuzni, ha az nem érdekel minket, ki hová ül a kenuban?
   Mivel nem számít, ki milyen sorrendben ül be a kenuba, ismétlés nélküli kombinációról van szó: $C_8^5 = \binom{8}{5} = 56$
   b. Hányféleképpen tudjuk kiválasztani azt a 3 személyt, aki **nem** mehet el kenuzni?
   Valójában, amikor kiválasztjuk az 5 kenuzót, egyúttal kiválasztjuk azt a 3 személyt, aki nem mehet kenuzni. Mivel minden 5-öshöz egy 3-as tartozik, ugyanannyi lesz a megoldások száma. Kombinációként: $C_8^3 = \binom{8}{3} = 56.$ Általában: n-ből k darabot ugyanannyi féleképpen tudunk kiválasztani, mint (n-k) darabot.
   c. Kaptak egy háromszemélyes és egy kétszemélyes kenut. Hányféleképpen tudjuk őket beültetni a két kenuba, ha csak az érdekel minket ki és melyik kenuba kerül?
   Először vagy kiválasztjuk azt a három személyt, aki a nagyobbik kenuba ül $\binom{8}{3} =$ 56-féleképpen, majd ezután a fennmaradó 5 személyből azt a kettőt, aki a kisebbe: $\binom{5}{2} = 10$-féleképpen, vagy először kiválasztjuk az ötöt, aki elmehet kenuzni $\binom{8}{5} =$

56-féleképpen, és aztán ebből az 5-ből választjuk ki valamelyik kenu utasait $\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10$-féleképpen, de az összes eset mindenképp 56*10 = 560 lesz.

3. Egy félévben összesen 30 tárgy közül választhatunk. Hányféleképpen tudunk ezek közül minimum 10-et, de legfeljebb 15-öt választani?

   Éppen 10-et $\binom{30}{10}$-féleképpen, 11-et $\binom{30}{11}$-féleképpen, és így tovább. Mivel ezek egymást kizáró lehetőségek (vagy 10 tárgyat veszünk fel, vagy 11-et, vagy 12-t, stb.), ezért ezeket össze kell adni.

   A végeredmény: $\binom{30}{10} + \binom{30}{11} + \binom{30}{12} + \binom{30}{13} + \binom{30}{14} + \binom{30}{15}$

4. Egy fókuscsoportos beszélgetésre 10 embert várunk. Ehelyett 19-en jelentkeznek, közülük 5 budapesti, 10 vidéki városi, 4 pedig községből jön. Hányféleképpen választhatjuk ki a 10 résztvevőt, ha azt szeretnénk, hogy mindenképpen legyen köztük legalább 1 budapesti, 4 vidéki városi és 3, aki községből jön?
   Nem ússzuk meg, hogy számításba vegyük az egymást kizáró alternatívákat: 5 ilyen van, attól függően, hogy a fennmaradó 2, aki bármilyen lehet, milyen. Lehet mindkettő fővárosi, lehet mindkettő vidéki városi, de **nem** lehet mindkettő falusi, mivel csak 1 valaki van, akit nem választunk közülük kötelezően. Ha pedig nem mindkettő ugyanolyan, akkor három eset lehetséges: Bp – város, Bp – község és város – község.
   Az öt alternatíva tehát:
   $$\binom{5}{3}*\binom{10}{4}*\binom{4}{3}+\binom{5}{1}*\binom{10}{6}*\binom{4}{3}+\binom{5}{2}*\binom{10}{5}*\binom{4}{3}+\binom{5}{2}*\binom{10}{4}*\binom{4}{4}+\binom{5}{1}*\binom{10}{5}*\binom{4}{4}$$
   Ez, ha valaki szeretné, csoportosítható, a közös tagok kiemelésével. Legegyszerűbben a harmadik tag segítségével, abból ugyanis csak két lehetőség van: 3-at vagy 4-et választunk

5. Interjús kutatást végzünk, amelyhez 12 interjúalanyt találtunk, összesen 5 településről (egy egy településről jellemzően 2-en vannak, 2 településről azonban 3-an). 1 nap 1 települést tudunk meglátogatni. Hányféle sorrendben tudjuk lefolytatni a 12 interjút?
   Előbb megnézzük, hányféleképpen rakhatjuk sorba a településeket: 5!=120. Ezt követően pedig megnézzük, hogy az egyes településeken milyen sorrendben kérdezhetjük meg az embereket. Ahol 2-en élnek, ott 2! = 2-féleképpen, ahol 3-an, ott 3! = 6-féleképpen. A végeredmény tehát: 5!*2!*2!*2!*3!*3!=34560

6. Hányféleképpen rakhatjuk sorba a 2018.02.15 dátum számjegyeit? Hányféle sorrend lehetséges, ha az első számjegy nem lehet 0?
   Ismétléses permutációról van szó: 8 elem, 2, 2, 2 ismétlődés: $P_8^{2,2,2} = \frac{8!}{2!*2!*2!} = 5040$, ezek között azonban vannak olyanok, amelyek 0-val kezdődnek, mégpedig annyi, amennyit a 2018215 számjegyeiből ki tudunk rakni: $P_7^{2,2} = \frac{7!}{2!*2!} = 1260$. A végeredmény 5040 – 1260 = 3780

7. Étlapot állítunk össze. Az étlapon először következnek a levesek, majd a főételek, végül a desszertek. A szakács 10 leves közül 3-at, 20 főétel közül 5-öt, és 7 ismert desszert közül 2-t választ ki, és tesz fel az étlapra. Hányféle étlapot tudunk összeállítani, ha
   a. csak az számít, mely ételek kerülnek az étlapra?

   Levesek kiválasztása: $\binom{10}{3}$, **főételek:** $\binom{20}{5}$, **desszertek:** $\binom{7}{2}$ **– mivel bármelyik három leves bármelyik főételekkel, bármelyik desszertekkel kombinálható, összeszorozzuk:** $\binom{10}{3} * \binom{20}{5} * \binom{7}{2} = \mathbf{120 * 15504 * 21 = 39\ 070\ 080}$

   b. az ételek sorrendje is számít az étlapon? (a leves, főétel, desszert sorrendet betartva)

   Vagy a fenti részeredményeket permutáljuk: pl. levesek $\binom{10}{3} * 3!$**, vagy pedig eleve variációkat számolunk:** $\boldsymbol{V_{10}^{3} * V_{20}^{5} * V_{7}^{2} = \frac{10!}{7!} * \frac{20!}{15!} * \frac{7!}{5!} = 10 * 9 * 8 * 20 * 19 * 18 * 17 * 16 * 7 * 6 = 56\ 260\ 915\ 200}$

8. Tombolán 10 nyereményt akarunk kisorsolni 30 jelenlévő között. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha
   a. egy ember csak egyszer nyerhet, és a nyeremények különböző értékűek?
   Mivel a díjak különböző értékűek, nem csak a 3 ember személye számít, hanem az is, milyen sorrendben kapják a díjakat, vagyis rangsorolni kell őket, ezért ismétlés nélküli variáció:

$$V_{30}^{10} = \frac{30!}{(30-10)!} = \frac{30!}{20!}$$

   b. egy ember csak egyszer nyerhet kaphat, és a jutalmak egyforma értékűek, ezért csak az számít, ki nyer?

   Mivel itt nem kell rangsort felállítani a három kiválasztott ember között, ez ismétlés nélküli tízelemű harmadosztályú kombináció:

$$C_{30}^{10} = \binom{30}{10} = \frac{30!}{10! * (30-10)!} = \frac{30!}{10! * 20!} = 30\ 045\ 015$$

   c. egy embert többször is nyerhet, és a nyeremények különböző értékűek?

   Mivel a díjak különböző értékűek, ismét számít a rangsor (ezért variáció), ám mivel egy személy többször is nyerhet, ezért ismétléses: $V_{30}^{10,i} = 30^{10}$

   d. egy embert többször is nyerhet, és a nyeremények egyforma értékűek, ezért csak az számít, ki hányat nyer?

   Mivel nem számít, hogy milyen sorrendben osztom ki a díjakat, ezért ez ismétléses tízelemű harmadosztályú kombináció:

$$C_{10}^{3,i} = \binom{30+10-1}{10} = \binom{39}{10} = 635\ 745\ 396$$

9. Adott az alábbi alakzat:

L	A	B	I	R	I
A	B	I	R	I	N
B	I	R	I	N	T
I	R	I	N	T	U
R	I	N	T	U	S

Hányféleképpen tudnak ezen úgy végighaladni, hogy a betűket összeolvasva a LABIRINTUS szót kapják?

Ehhez összesen 5x kell jobbra lépni, és 4x lefelé, valamilyen sorrendben. Balra és felfelé lépni nem szabad. A feladat kétféleképpen oldható meg: 5 jobbra lépést és 4 lefelé lépést permutálunk:

$$P_9^{4,5} = \frac{9!}{4! * 5!} = 126$$

A másik megoldás, hogy a 9 lépésből ki kell választani azt a 5-öt, amikor jobbra lépünk vagy azt a 4-et, amikor lefelé:

$$\binom{9}{5} = \binom{9}{4} = 126$$

Valószínűségszámítás:

A megoldáshoz számítsák ki az összes esetet, illetve a kedvező (vagy a kedvezőtlen) esetek számát, majd használják a „klasszikus" képletet: $P(A) = \frac{kedvező}{összes\ eset}$

1. 6-jegyű jelszót állítunk össze az angol ABC 26 betűjéből (csak kisbetűket használunk) és a 10 számjegyből. Mennyi a valószínűsége, ha véletlenszerűen generáljuk a jelszót ezekből az elemekből, hogy egy olyan jelszót kapunk, amely első négy helyén betűk, az utolsó két helyen pedig számok vannak? (Egy betűt és számot többször is felhasználhatunk)
Összes eset: 36 elem ismétléses 6-odosztályú variációja:
$$V_{36}^{6,i} = 36^6$$
Kedvező eset: az első négy helyre a 26 betű 4-edosztályú ismétléses variációi kerülhetnek, a második két helyre pedig a 10 számjegy másodosztályú ismétléses variációi:
$$V_{26}^{4,i} * V_{10}^{2,i} = 26^4 * 10^2$$
A keresett valószínűség:
$$P(A) = \frac{26^4 * 10^2}{36^6} = 0,02 = 2\%$$

2. Van 9 könyvünk. Valaki véletlenszerűen felteszi ezeket egy könyvespolcra. A könyvek között van 4 Jókai, 2 Móricz, a többi pedig mind különböző szerzők műve. Mennyi a valószínűsége, hogy a könyveket épp úgy teszi fel a polcra, hogy az azonos szerzőktől származó művek egymás mellé kerülnek?
Összes sorrend: 9!

Kedvező: Az első lépésben a szerzőket 1-1 elemnek tekintjük, és őket rakjuk sorba: vagyis csak 5 elemmel van dolgunk, amely 5! = 120-féleképpen tehető fel a polcra. Ezt követően kell megnézni, hogy a Jókai könyvek, és a Móricz könyvek hányféle sorrendben tehetők fel. A Jókai könyvek 4! = 24, a Móricz könyvek pedig 2! = 2 sorrendben. Vagyis a kedvező sorrendek száma (mivel bármelyik sorrend bármelyikkel kombinálható): 120*24*2 = 5760
A valószínűség: 5760/362880 = 0,016 = 1,6%

3. Háromszor dobunk egy kockával. Hányféle dobássorrend lehetséges?
   Ismétléses variáció: $6^3 = 216$ dobássorrend létezik
   a. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobások között éppen egy hatos van?
      Az, hogy melyik a 6-os, $\binom{3}{1}$ = 3-féleképpen alakulhat. Ez az érték kötött, a másik két dobás pedig bármi lehet a 6-oson kívül. A megoldás ezért: 3*5*5=75
      A valószínűség 75/216 = 0,347 = 34,7%
   b. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobások között nincs 6-os?
      Csak 5 elem közül választhatunk, ezek harmadosztályú ismétléses variációiról van szó: $5^3 = 125$ lehetőség. A valószínűség: 125/216 = 0,579 = 57,9%
   c. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobások között van legalább egy 6-os?
      Ez épp akkor valósul meg, ha az előző esemény nem. Vagyis a valószínűsége: 1 – 0,579 = 0,421 = 42,1%
   d. Mennyi a valószínűsége, hogy a második dobás páros?
      Az első és az utolsó dobás bármi lehet, a második viszont csak 3 elem valamelyike (2, 4, 6) – ezért a kedvező lehetőségek száma 6*3*6 = 108
      A valószínűség 108/216 = 0,5 = 50%
      Megoldható úgy is, hogy tudjuk, a második dobás értéke független a többitől, ezért csak erre kell összpontosítanunk: a 6 lehetséges kimenetel közül 3 kedvező, vagyis a valószínűség 50%.
   e. Mennyi a valószínűsége, hogy minden dobás különböző?
      Az első dobás bármi lehet, a második már csak a fennmaradó 5-ből valami, a harmadik pedig 4-ből: 6*5*4 = 120, a valószínűség 120/216 = 0,556 = 55,6%

4. Hányféleképpen tudunk 58 főt véletlenszerűen elosztani 2 busz között, amelyek közül az egyik 40 férőhelyes, a másik pedig 20? (Természetesen nem kell, hogy bármelyik busz is tele legyen, és csak az számít, ki melyik busszal utazik)
   Három alternatíva lehetséges: a 40-es busz tele van, a 20-as busz tele van, illetve egyik sincs tele, hanem 1-1 üres hely marad mindkettőben. A nagyobb busz szempontjából ez azt jelenti, hogy 40-en, 39-en vagy 38-an ülhetnek benne. Vagyis az összes eset:
   $$\binom{58}{40} + \binom{58}{39} + \binom{58}{38}$$
   a. Mennyi a valószínűsége, hogy a véletlenszerű elosztás során a csoport legfiatalabb és legidősebb tagja is a 40 férőhelyes buszba kerül?
   Vagyis a 40-es buszba még 38, 37 vagy 36 embert ültethetünk a fennmaradó 56-ból. Kedvező esetek száma:
   $$\binom{56}{38} + \binom{56}{37} + \binom{56}{36}$$
   A valószínűség:

$$\frac{\binom{56}{38}+\binom{56}{37}+\binom{56}{36}}{\binom{58}{40}+\binom{58}{39}+\binom{58}{38}} = 0{,}438 = 43{,}8\%$$

b. Mennyi a valószínűsége, hogy a 20 fős buszba kerül?

Könnyebb átlátni, ha a 20-as busz felől közelítünk: ebbe az 56 emberből még 18-at, 17-et vagy 16-ot ültethetünk. Kedvező esetek száma:

$$\binom{56}{18}+\binom{56}{17}+\binom{56}{16}$$

A valószínűség:

$$\frac{\binom{56}{18}+\binom{56}{17}+\binom{56}{16}}{\binom{58}{40}+\binom{58}{39}+\binom{58}{38}} = 0{,}108 = 10{,}8\%$$

c. Mennyi a valószínűsége, hogy bármelyik buszba, de ugyanabba kerülnek?

A kedvező esetek száma az előbbi két alfeladat összege. Mivel az összes eset száma ugyanaz mindkét esetben, ezért a valószínűség is a két részfeladatban kapott valószínűségek összege: 54,7%

Kiszámítható úgy is, hogy előbb annak a valószínűségét számítjuk ki, hogy nem ugyanabba a buszba kerülnek.

d. Mennyi a valószínűsége, hogy nem ugyanabba a buszba kerülnek?

Ez az esemény az előző komplementere (akkor, és csak akkor következik be, ha az előző esemény nem): ha 54,7% a valószínűsége, hogy egy buszban ülnek, akkor 45,3% annak a valószínűsége, hogy nem.

5. 8-jegyű számokat alkotunk véletlenszerűen, az összes számjegyet akárhányszor felhasználva, mennyi a valószínűsége, hogy a kapott szám 4 páros és 4 páratlan számjegyet tartalmaz?

Összes lehetőség: $9 * 10^7$

Kedvező lehetőségek: Először kiszámoljuk, hány szám lenne, ha 0 is kerülhetne az első helyre: $\binom{8}{4}$-féleképpen dőlhet el, hová jönnek a páros számok. Miután ez eldőlt, magukat a számokat $5^4 * 5^4 = 5^8$ módon választhatjuk meg. Ebben azonban benne vannak azok az esetek, amikor az első hely páros, és 0 kerül oda. Ezekben a számokban van még 3 páros számjegy és 4 páratlan, vagyis $\binom{7}{3}$-féleképpen lehetnek a páros és páratlan számjegyek elosztva, és ezekre $5^3 * 5^4 = 5^7$ módon jöhetnek a számjegyek. Vagyis az összes kedvező lehetőség:

$$\binom{8}{4} * 5^8 - \binom{7}{3} * 5^7 = 5^7 * \left(5 * \binom{8}{4} - \binom{7}{3}\right)$$

A keresett valószínűség:

$$\frac{5^7 * \left(5 * \binom{8}{4} - \binom{7}{3}\right)}{9 * 10^7} = 0{,}273 = 27{,}3\%$$

6. 8-an állnak a parton. Kenuzni szeretnének, de csak 3-an tapasztalt kenusok, 5-en nem.

a. Kaptak egy ötszemélyes kenut. Ha kisorsolják, ki mehet kenuzni, mennyi a valószínűsége, hogy

   i. nem lesz köztük tapasztalt kenus?
   Ez akkor történik, ha a 3 tapasztalt kenusból 0-t sorsolunk ki és az 5 újoncból 5-öt, vagyis összesen $\binom{3}{0} * \binom{5}{5} = 1$ ilyen eset van, és az összes eset 56 (ld. kombinatorika 2. feladat) – a valószínűség 1/56 = 0,018 = 1,8%

   ii. éppen egy tapasztalt kenus lesz közöttük?
   Kedvező esetek száma: $\binom{3}{1} * \binom{5}{4} = 15$, ezért a valószínűség 15/56 = 0,267 = 26,8%

   iii. éppen két tapasztalt kenus lesz közöttük?
   $\binom{3}{2} * \binom{5}{3} = 30$, a valószínűség 30/56 = 53,6%

   iv. éppen három tapasztalt kenus lesz közöttük?
   $\binom{3}{3} * \binom{5}{2} = 10$, a valószínűség 10/56 = 17,9%

   v. legalább egy tapasztalt kenus lesz közöttük?
   Ezt megkaphatjuk úgy, hogy összeadjuk az éppen 1, éppen 2 és éppen 3 esetek valószínűségeit (mivel ezek egymást kizáró alternatívák): 55/56 = 98,2%
   A másik lehetőség, hogy ennek a komplementer eseményét (nincs tapasztalt kenus velük) kivonjuk 1-ből: 1 – 1/56 = 98,2%

   vi. legfeljebb egy tapasztalt kenus lesz közöttük?
   Ez két alesetből áll: nincs tapasztalt, illetve éppen egy tapasztalt van. Ezek egymást kizáró alternatívák, vagyis az esetek száma összeadódik. Mivel az összes eset ugyanannyi, ezért a valószínűségeket is összeadhatjuk: 16/56 = 28,6%

b. Kaptak egy három- és egy kétszemélyes kenut. Ha kisorsolják, ki üljön az egyes kenukba, mennyi a valószínűsége, hogy

   i. mindkét kenuban éppen egy tapasztalt kenus lesz?
   Előbb rakjuk össze a nagykenuba ülő csapatot: $\binom{3}{1} * \binom{5}{2} = 30$. Ezt követően rakjuk össze a kiskenut a fennmaradó emberekből: $\binom{2}{1} * \binom{3}{1} = 6$. Vagyis összesen 30*6 = 180 lehetőség van. Úgy is gondolkodhatunk, hogy előbb kiválasztjuk az egyik kenuba ülő tapasztaltat, majd a másik kenuba ülő tapasztaltat (vagy először a két tapasztaltat, majd közülük, hogy ki ül a nagyobb kenuba), és az újoncokat csak ezután osztjuk be, akár kenunként, akár előbb kiválasztva őket, majd a kiválasztottakat beosztva az egyes kenukba, mindenképpen ennyit kapunk.
   Az összes lehetőség: 560 (ld. Kombinatorika 2. feladat)
   A valószínűség: 180/560 = 32,1%

   ii. az egyik kenuban (bármelyikben) lesz, a másikban nem lesz tapasztalt kenus?

Két egymást kizáró alternatívával van dolgunk: vagy a nagyobb kenuban lesz a tapasztalt, vagy a kisebben. Az első esetnek vannak alesetei: a nagykenuban 1, 2 vagy 3 tapaszalt van, ezért ezeknek az eseteknek a száma (az alternatívákat összeadjuk, az alternatívákon belül szorzunk, a zöld a nagy kenu, kék a kis kenu feltöltése): $\binom{3}{1} * \binom{5}{2} * \binom{2}{0} * \binom{3}{2} + \binom{3}{2} * \binom{5}{1} * \binom{1}{0} * \binom{4}{2} + \binom{3}{3} * \binom{5}{0} * \binom{0}{0} * \binom{5}{2} = 90 + 90 + 10 = 190.$ A második eset 2 alesetből áll (1 vagy mindkettő tapasztalt a kis kenuban), valószínűsége: $\binom{3}{0} * \binom{5}{3} * \binom{3}{1} * \binom{2}{1} + \binom{3}{0} * \binom{5}{3} * \binom{3}{2} * \binom{2}{0} = 60 + 30 = 90,$ vagyis összesen 190+ 90 = 280 kedvező lehetőség van.
A valószínűség 280/560 = 50%.

iii. egyik kenuban sem lesz tapasztalt kenus?
Vagyis az első kenuba választhatunk $\binom{3}{0} * \binom{5}{3} = 10$-féleképpen, a másik kenuba pedig ezek után adódik, hogy a fennmaradó 2 újoncból választunk 2-t, amit egyféleképpen tudunk megtenni. Az összes kedvező lehetőség 10.
A valószínűség 1,8%.

iv. legalább az egyik kenuban nem lesz tapasztalt kenus?
Ez annak az eseménynek a komplementere (tagadása), hogy mindkét kenuban lesz tapasztalt. Vagyis, ha előbb kiszámolnánk az V. alfeladatot, akkor a kapott valószínűséget csak ki kellene vonni 1-ből.
Másik megoldás, hogy az egymást kizáró alternatívákat vesszük: egyrészt lehetséges, hogy az egyik kenuban van, a másikban nincs – ez volt a ii. alfeladat. Emellett kedvező még az az eset, amikor egyik kenuban sincs tapasztalt kenus (iii. alfeladat): Vagyis a valószínűség: 280/560 + 10/560 = 290/560 = 51,8%.

v. mindkét kenuban legalább egy tapasztalt kenus lesz?
Az egyik lehetőség, hogy 1-ből kivonjuk a iv. feladat megoldását: 48,2%.
A másik lehetőség az egymást kizáró alternatívák összeszámolása:
Lehetséges, hogy mindkét kenuban éppen egy tapasztalt kenus van (i. feladat): 180/560 = 32,1% valószínűséggel. Emellett lehetséges, hogy az egyik kenuban 2-en vannak: ennek egyik alesete, hogy a nagy kenuban vannak ketten, a másik aleset, hogy a kis kenuban – ezek egymást kizárják:

$$\binom{3}{2} * \binom{5}{1} * \binom{1}{1} * \binom{4}{1} + \binom{3}{1} * \binom{5}{2} * \binom{2}{2} * \binom{3}{0} = 60 + 30 = 90$$

Összesen tehát 180/560 + 90/560 = 270/560 = 48,2%.