Projet de Modele Linéaire

Mor Diouf
Marie Thiam Mbengue

Exercice 3

$y_i = \beta + \varepsilon_i \quad , \quad i = 1, \dots, n$

ε_i sont i.i.d de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$

- Proposition de deux Estimateurs de β

* Par la méthode des moindres Carrés Ordinaires

$$\hat{\beta} = \underset{\beta \in \mathbb{R}^{p+1}}{\arg\min} \| Y - \beta \|^2$$

Or $\| a \|^2 = \langle a, a \rangle = a^t a$

$$\langle a, b \rangle = a^t b = b^t a = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

$$S(\beta) = \| Y - \beta \|^2 = \langle Y - \mathbb{1}\beta , Y - \mathbb{1}\beta \rangle$$

$$= (Y - \mathbb{1}\beta)^t (Y - \mathbb{1}\beta)$$

$$= (Y^t - \mathbb{1}^t \beta^t)(Y - \mathbb{1}\beta)$$

$$= Y^t Y - \mathbb{1}^t \beta^t Y - \mathbb{1}^t \beta^t Y + \mathbb{1}^t \beta^t \times \mathbb{1}\beta$$

$$S(\beta) = \| Y \|^2 - 2 Y^t \beta + \beta^t \beta$$

$$\Delta S(\beta) = -2 Y^t + 2 \hat{\beta} = 0$$

donc $\boxed{\hat{\beta} = Y}$

* Par le maximum de vraisemblance

$$\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \Rightarrow y_i = \beta + \varepsilon_i \sim \mathcal{N}(\beta, \sigma^2)$$

$$L(Y, \beta, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f_Y(y_i) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \beta)^2\right]$$

$$\log L(Y, \beta, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{n}{2}\log \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\|Y - \beta\|^2$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \beta} = \left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \beta)^2\right]' = 0$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \beta} = \frac{2}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \beta) = 0$$

donc $y_i = \beta \Rightarrow \hat{\beta} = Y$ par supposition

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \beta} = -\frac{n}{\sigma^2} < 0$$

alors $\boxed{\hat{\beta} = Y}$