Projet Statistique-Mathématique:

Plan:

Exercice 1 :
Exercice 2 :
Exercice 3 :

Groupe 15 :

Papa Samba Dia

Mor Diouf

Mamadou Ngom

Professeur: Mr Lucien Gning

Exercice 1 : **(Suite)**

9. **On suppose que la variables cas suit une loi binomiale négative $X \sim \mathcal{N}B(\theta, p)$ θ > 0 et 0 < p < 1. Calculer les estimations de θ et p en utilisant la méthode des moments.**

$$X \sim \mathcal{N}B(\theta, p), \qquad \theta > 0 \ et \ 0 < p < 1$$

$$E(X) = \frac{\theta(1-p)}{p} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{\theta(1-p)}{p^2}$$

$$\theta = \frac{p}{1-p} E(X)$$

$$V(X) = \frac{p(1-p)E(X)}{(1-p)p^2} = \frac{E(X)}{p}$$

$$p = \frac{E(X)}{V(X)} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\hat{p} = \frac{\overline{X}}{S_n^2}}$$

$$\theta = \frac{\frac{E(X)^2}{V(X)}}{1 - \frac{E(X)}{V(X)}} = \frac{E(X)^2}{V(X) - E(X)}$$

$$\boxed{\hat{\theta} = \frac{\overline{X}^2}{S_n^2 - \overline{X}}}$$

10. **Même question avec la méthode du maximum de vraisemblance**

Les estimateurs de $\theta \ et \ p$.

$$f(x, \theta, p) = C_{x+\theta-1}^{x} p^{\theta} (1-p)^x$$

$$L(x_1, x_2, \dots \dots, \theta, p) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta, p) = \prod_{i=1}^{n} C_{x_i+\theta-1}^{x_i} p^{\theta} (1-p)^{x_i}$$

$$= p^{n\theta} \prod_{i=1}^{n} C_{x_i+\theta-1}^{x_i} p^{\theta} (1-p)^{x_i}$$

$$\ln(L) = n\theta \ln(p) + \sum \ln \left[C_{x_i+\theta-1}^{x_i} (1-p)^{x_i}\right]$$

$$\ln(L) = n\theta \ln(p) + \sum \ln \left(C_{x_i+\theta-1}^{x_i}\right) + \sum \ln (1-p)^{x_i}$$

$$C_{x_i+\theta-1}^{x_i} = \frac{(x_i+\theta-1)!}{x_i!\,(x_i+\theta-1-x_i)!}$$

$$C_{x_i+\theta-1}^{x_i} = \frac{(x_i+\theta-1)!}{x_i!\,(\theta-1)!}$$

$$\ln(L) = n\theta\ln(p) + \sum \ln\,(x_i+\theta-1)! - \sum \ln\,(x_i!\,(\theta-1)! + \ln\,(1-p)^{\sum x_i}$$

$$= n\theta\ln(p) + \sum \ln\,(x_i+\theta-1)! - \sum \ln\,(x_i!\,(\theta-1)! + \sum x_i\,ln\,(1-p)$$

$$\frac{\partial \ln\,(L)}{\partial p} = \frac{n\theta}{p} - \frac{1}{1-p}\sum x_i$$

$$\frac{\partial \ln\,(L)}{\partial p} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{n\theta}{p} = \frac{1}{1-p}\sum x_i$$

$$\Longrightarrow \quad p = \frac{n\theta}{n\theta + \sum x_i} = \frac{\theta}{\theta + \frac{1}{n}\sum x_i} = \frac{\theta}{\theta + \overline{X}}$$

$$\frac{\partial^2 \ln\,(L)}{\partial^2 p} = -\frac{n\theta}{p^2} - \frac{1}{(1-p)^2}\sum x_i < 0.$$

Donc $\boxed{\hat{\boldsymbol{p}} = \frac{\boldsymbol{\theta}}{\boldsymbol{\theta} + \overline{\boldsymbol{X}}}}$

Exercice 2:

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes dont la loi de probabilité est indiquée dans le tableau ci-après :

a) **Déterminer les lois marginales de X et Y et indiquer si ces variables aléatoires sont indépendantes.**

Y / X	1	2	3	4
1	0,08	0,04	0,16	0,12
2	0,04	0,02	0,08	0,06
3	0,08	0,04	0,16	0,12

❖ Tableau de la loi marginale de X et Y

Y / X	1	2	3	4	Total
1	0,08	0,04	0,16	0,12	0,4
2	0,04	0,02	0,08	0,06	0,2
3	0,08	0,04	0,16	0,12	0,4
Total	0,2	0,1	0,4	0,3	1

❖ Tableau de la loi marginale de X

X	1	2	3
P(X= x_i)	0,4	0,2	0,4

❖ Tableau de la loi marginale de Y

Y	1	2	3	4
P(Y= y_i)	0,2	0,1	0,4	0,3

Montrons si ces variables sont indépendantes.
On doit montrer que

$$P(X = x_i, Y = y_i) = P(X = x_i).P(Y = y_i)$$

$P(X = 1, Y = 1) = P(X = 1).P(Y = 1) = 0{,}08$
$P(X = 1, Y = 2) = P(X = 1).P(Y = 2) = 0{,}04$
$P(X = 1, Y = 3) = P(X = 1).P(Y = 3) = 0{,}16$
$P(X = 1, Y = 4) = P(X = 1).P(Y = 4) = 0{,}12$
$P(X = 2, Y = 1) = P(X = 2).P(Y = 1) = 0{,}04$
$P(X = 2, Y = 2) = P(X = 2).P(Y = 2) = 0{,}02$
$P(X = 2, Y = 3) = P(X = 2).P(Y = 3) = 0{,}08$
$P(X = 2, Y = 4) = P(X = 2).P(Y = 4) = 0{,}06$
$P(X = 3, Y = 1) = P(X = 3).P(Y = 1) = 0{,}08$
$P(X = 3, Y = 2) = P(X = 3).P(Y = 2) = 0{,}04$
$P(X = 3, Y = 3) = P(X = 3).P(Y = 3) = 0{,}16$
$P(X = 3, Y = 4) = P(X = 3).P(Y = 4) = 0{,}12$

Donc X et Y sont indépendantes.

b) Calculer $Cov(X,Y)$:

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Comme X et Y sont indépendantes $\Longrightarrow E(X,Y) = E(X).E(Y)$.

Donc

$$\boxed{\boldsymbol{Cov(X,Y) = 0.}}$$

c) Déterminer la loi du couple [inf(X,Y),sup(X,Y)].

Posons $Z = \inf(X,Y) \in \{1,2,3\}$ $T = \sup(X,Y) \in \{1,2,3,4\}$

$P(Z = 1, T = 1) = P(X = 1, Y = 1)$=0,08

$P(Z = 1, T = 2) = P(X = 1, Y = 2) + P(X = 2, Y = 1)$=0,04+0,04=0,08

$P(Z = 1, T = 3) = P(X = 1, Y = 3) + P(X = 3, Y = 1)$=0,16+0,08=0,24

$P(Z = 1, T = 4) = P(X = 1, Y = 4)$=0,12

$P(Z = 2, T = 1) = 0$

$P(Z = 2, T = 2) = P(X = 2, Y = 2)$=0,02

$P(Z = 2, T = 3) = P(X = 2, Y = 3) + P(X = 3, Y = 2)$=0,08+0,04=0,12

$P(Z = 2, T = 4) = P(X = 2, Y = 4)$=0,06

$P(Z = 3, T = 1)$ =0

$P(Z = 3, T = 2)$ =0

$P(Z = 3, T = 3) = P(X = 3, Y = 3)$=0,16

$P(Z = 3, T = 4) = P(X = 3, Y = 4)$=0,12

Z \ T	1	2	3	4	Total
1	0,08	0,08	0,24	0,12	0,52
2	0	0,02	0,12	0,06	0,2
3	0	0	0,16	0,12	0,28
Total	0,08	0,1	0,52	0,3	1

Exercice 3 :

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si \;\; x \geq 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. **Une variable aléatoire X est dite « sans mémoire », ou « sans vieillissement », si elle vérifie la propriété suivante :**

$$P(X > x + x_0 | X > x_0) = P(X > x),$$

pour tous x, $x_0$positifs.
Montrer que la durée de vie de ces lampes de vidéoprojecteur est sans mémoire.

$$F_X(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f_x(t)\,dt + \int_{0}^{x} f_x(t)\,dt$$

On a $\int_{-\infty}^{0} f_x(t)\,dt = 0$ donc

$$P(X < x) = \int_{0}^{x} f_x(t)\,dt = \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t}\,dt$$

$$P(X < x) = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$P(X > x) = 1 - 1 - e^{-\lambda x} = e^{-\lambda x}$$

Determinons $P(X > x + x_0 | X > x_0)$:

$P(X > x + x_0 | X > x_0) = \frac{P(X > x + x_0\,,\; X > x_0)}{P(X > x_0)}$ or

$$P(X > x + x_0\,, X > x_0) = P(X > x + x_0 \cap X > x_0) = P(X > x + x_0)$$

$$P(X > x + x_0 | X > x_0) = \frac{P(X > x + x_0)}{P(X > x_0)} = \frac{e^{-\lambda(x + x_0)}}{e^{-\lambda x_0}} = \frac{e^{-\lambda x}.e^{-\lambda x_0}}{e^{-\lambda x_0}}$$

$$\boldsymbol{P(X > x + x_0 | X > x_0) = e^{-\lambda x} = P(X > x)}$$

Donc la durée de vie de la lampe est sans mémoire.

2. **Déterminer la durée de vie moyenne d'une lampe en fonction de λ ?**

$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} xf(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} xf(x)\,dx$

On a : $\int_{-\infty}^{0} xf(x)\,dx = 0$ donc

$E(X) = \int_{0}^{+\infty} xf(x)\,dx = \int_{0}^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda t}\,dx$

On pose $u = x \quad \Longrightarrow. \quad u' = 1$

$v' = \lambda e^{-\lambda x} \quad \Longrightarrow \quad v = -e^{-\lambda x}$

$$E(X) = \left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (-e^{-\lambda x})\,dx$$

$E(X) = 0 - \int_0^{+\infty}(-e^{-\lambda x})\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx = \left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} = -(-\frac{1}{\lambda}) = \frac{1}{\lambda}$

3. **Un fabriquant de lampes annonce à son client que la durée de vie moyenne des lampes qu'il produit est d'au moins 10000 heures alors que, dans les faits, une lampe sur deux a une durée de vie de moins de 7000 heures. Est-il honnête ? Justifier.**

$$E(X)=10000 \Longrightarrow \frac{1}{\lambda}=10000$$

$$\boldsymbol{\lambda = \frac{1}{10000}}$$

On cherche d'abord $P(X < 7000) = 1 - e^{-7000\lambda}$

On remplace λ par sa valeur $\Longrightarrow$ $P(X < 7000) = 1 - e^{-7000*\frac{1}{10000}} = 0{,}503 \approx \frac{1}{2}$.

Si $E(X)$=10000, on peut conclure que le fabricant **est honnête** .

Fin

Professeur: Mr Lucien Gning