Université de Bretagne-Sud

STA 2209 : Statistique Bayésienne

Problème 1 : Step Stress Simple

Soit T une variable aléatoire positive. On considère la v.a. Y définie de la manière suivante :

$$Y = \begin{cases} T & \text{si} \quad T \leq x \\ x + \alpha(T - x) & \text{si} \quad T > x \end{cases} \quad , \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad \alpha \in [0,1].$$

On suppose $T \sim \mathcal{E}(\theta)$. On considère un n-échantillon $(T_1, T_2, \cdots, T_n)$ et $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ les instants dits *de températion* associés. On cherche à estimer α.
On désigne par A l'ensemble des indices pour lesquels $T \leq x$. On note $CardA = M$.

1. Exprimer la fonction $R(y) = P(Y > y)$.
   En déduire la densité de la loi de probabilité de Y.
   Calculer et représenter la fonction définie par :
   $$\lambda(y) = \lim_{h \to 0} \frac{P(Y \leq y + h | Y > y)}{h}$$
2. On suppose $\theta = \theta_0$ connu. On pose $\alpha = 1/\beta$.
   Calculer la loi a posteriori de β si la loi a priori est une gamma de paramètres $(r, s\theta_0)$. Que peut-on dire de cette loi ?
   Que devient cette loi lorsqu'il n'y a pas de températion (*i.e.* $x_i \to +\infty$) ?
   Donner l'expression de l'estimateur de Bayes sous l'hypothèse d'un coût quadratique.
3. On considère les fonctions de coût de la forme :
   $$L_{(k)}(\delta(x), \beta) = \beta^l \delta(x)^k [\delta(x) - \beta]^2 \quad , \quad k \in [-2, 0], \quad l \in \mathbb{R}. \tag{1}$$
   (a) Calculer l'estimateur de Bayes de β sous le coût $L_{(-2)}$.
   (b) Montrer que l'estimateur de Bayes de β sous l'hypothèse d'un coût de la forme (1) avec $k \in]-2, 0]$ et pour une loi a priori proposée en 2. est :
   $$\tilde{\beta} = \frac{a + l}{b} \cdot \gamma_k(a + l)$$
   $$\text{où} \quad a = n - M + r \ , \quad b = \theta_0 \left[\sum_{i \in \bar{A}} (y_i - x_i \right] + s$$
   $$\text{et} \quad \gamma_k(x) = \frac{1}{k+2} \left(k + 1 + \sqrt{1 - \frac{k(k+2)}{x}} \right)$$
4. On suppose θ inconnu. Il s'agit maintenant d'estimer (β, θ). On utilise le conditionnement : $\pi(\beta, \theta) = \pi(\beta|\theta)\pi(\theta)$. On se donne comme lois a priori, pour β sachant θ une loi Gamma de paramètres $(r, s\theta)$ et pour θ, une loi Gamma de paramètres (r_0, s_0).
   Quelles sont les lois a posteriori de β et θ ?
   Calculer les estimateurs de Bayes de β et θ sous l'hypothèse d'un coût de la forme (1).

M. H. DeGroot, P. K. Goel, "Bayesian Estimation And Optimal Designs in Partially Accelerated Life Testing", Naval research Logistics Quaterly,1979, 26, Vol. 2, 223–235.