Université de Bretagne-Sud

STA2111 – Statistique Bayésienne

Loi Gamma – Loi Bêta

Exercice 1 – Soit la fonction appelée **fonction gamma** qui, à tout réel strictement positif α, associe l'intégrale :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\ e^{-x} dx.$$

1. Montrer que :
   (a) $\Gamma(1) = 1$
   (b) $\Gamma(1/2) = \pi$
   (c) $\forall x > 0,\ \Gamma(\alpha+1) = \alpha\ \Gamma(\alpha)$. Que devient ce résultat si α est un entier ?
2. On dit qu'une variable aléatoire continue X suit une **loi Gamma** de paramètres (α, β) si elle admet pour densité de probabilité la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\ x^{\alpha-1}\ e^{-\beta x} \quad \text{pour} \quad x > 0\ , \quad f(x) = 0 \qquad \text{sinon.}$$

   (a) Vérifier qu'il s'agit bien d'une densité.
   (b) Calculer $E(X)$, l'espérance mathématique et $Var(X)$, la variance de X.

Exercice 2 – On considère l'intégrale :

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx \quad , \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$$

1. En intégrant par partie, écrire la relation qui existe entre $I(\alpha, \beta)$ et $I(\alpha-1, \beta+1)$.
2. Exprimer $I(\alpha, \beta)$ en fonction de $\Gamma(\alpha)$, $\Gamma(\beta)$ et $\Gamma(\alpha+\beta)$.
   Rappel : si α est un entier, $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$ (voir exercice 1).
3. Soit X une v.a. à valeurs dans $[0, 1]$, dont la loi a pour densité

$$\frac{1}{I(\alpha, \beta)}\ x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \text{ où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont des réels positifs.}$$

   On dit que X suit une **loi bêta** de paramètres (α, β).
   (a) Vérifier que l'on a bien une densité.
   Indication : on calculera $\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)$ en effectuant le changement de variables : $x = r^2 \cos^2\theta$ et $y = r^2 sin^2\theta$.
   (b) Calculer $E(X)$ et $Var(X)$.