# Université de Bretagne-Sud

Statistique Bayésienne

Travaux dirigés 4

**Exercice 1** – Soit $X \sim \mathcal{N}(\theta, 1)$. On se donne $\pi(\theta) = 1$, loi a priori non informative sur $\theta$.
On considère le test :

$$H_0 : \theta = 0 \quad \text{versus} \quad H_1 : \theta \neq 0.$$

1. Ecrire la loi a posteriori $\pi(\theta = 0|x)$.
2. Calculer le facteur de Bayes.
3. Proposer une tabulation de cette loi.

**Exercice 2** – On souhaite comparer 2 traitements. On dispose de 2 échantillons de réponses : $(X_{1,1}, X_{1,2}, \cdots, X_{1,n_1})$ et $(X_{2,1}, X_{2,2}, \cdots, X_{2,n_2})$.
On suppose ces variables aléatoires indépendantes et de lois respectives : $\mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$ , $i = 1, 2$.
Il s'agit de tester :

$$\mathrm{H}_0 : m_1 = m_2 \text{ contre une certaine alternative.}$$

1. On suppose $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, $\sigma^2$ connu.
   On se donne des lois a priori indépendantes, normales sur les paramètres $m_i$, $i = 1, 2$ de paramètres $(\mu_i, \tau_i^2)$, $i = 1, 2$.
   (a) Rappeler la forme et les paramètres de la loi a posteriori de $m_1$ et de $m_2$.
   (b) On considère : $\delta = m_1 - m_2$. Calculer la loi a posteriori de $\delta$. En déduire l'écriture d'un test.
   (c) Que devient la loi a posteriori lorsque $\tau_i \to +\infty$, $i = 1, 2$ ? Commenter.
2. On suppose maintenant les variances égales mais inconnues.
   On considère une loi a priori pour $(m_1, m_2, \sigma^2)$ de la forme :

$$\pi(m_1, m_2, \sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2}.$$

   On rappelle les formules classiques :

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{i,j} \ , \ i = 1, 2 \ \text{ et } \ s^2 = \frac{1}{\nu} \left[ \nu_1 \sum_{j=1}^{n_1} (x_{1,j} - \bar{x}_1)^2 + \nu_2 \sum_{j=1}^{n_2} (x_{2,j} - \bar{x}_2)^2 \right]$$

avec $\nu_i = n_i - 1$, $i = 1, 2$ et $\nu = n_1 + n_2 - 2$
et la décomposition :

$$f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, s^2 | m_1, m_2, \sigma^2) = f(\bar{x}_1 | m_1, \sigma^2) f(\bar{x}_2 | m_2, \sigma^2) f(s^2 | \sigma^2)$$

où $s^2 | \sigma^2 \sim \frac{\sigma^2}{\nu} \chi^2(\nu) \sim \Gamma(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2\sigma^2})$

(a) Factoriser la loi a posteriori $\pi(m_1, m_2, \sigma^2 | \bar{x}_1, \bar{x}_2, s^2)$ en $\pi(m_1 | \bar{x}_1, \sigma^2)\ \pi(m_2 | \bar{x}_2, \sigma^2)\ \pi(\sigma^2 | s^2)$

(b) En déduire la loi a posteriori de $\delta$ et l'écriture d'un test.

**Problème –** – Soit le processus de Poisson $N(t)$, $t > 0$ ; $N(t)$ désigne le nombre d'événements se produisant dans l'intervalle $[0, t]$. L'intensité du processus $\lambda(s)$ a la forme suivante :

$$\lambda(s) = \begin{cases} \lambda_1 & \text{si} \quad 0 \leq s \leq \tau \\ \lambda_2 & \text{si} \quad s > \tau \end{cases}$$

Les trois paramètres inconnus $\lambda_1$, $\lambda_2$ et $\tau$ sont des réels positifs et $\tau \in [0, T]$.
Supposons que l'on observe $n$ dates d'événements $t = (t_1, t_2, \cdots, t_n)$ dans la fenêtre $[0, T]$. On a : $N(T) = n$.

1. En raisonnant sur les interarrivées qui suivent des lois exponentielles d'après la définition précédente de l'intensité du processus de Poisson, montrer que la vraisemblance, que l'on notera $f(t | \lambda_1, \lambda_2, \tau)$, a la forme suivante :

$$\lambda_1^{N(\tau)} e^{-\lambda_1 \tau} \lambda_2^{N(T) - N(\tau)} e^{-\lambda_2 (T - \tau)}$$

2. On suppose que $\lambda_1$, $\lambda_2$ et $\tau$ sont indépendants. On note $\pi(\tau)$ la loi a priori sur $\tau$. On se donne les lois a priori suivantes sur $\lambda_i$, $(i = 1, 2)$ :

$$\pi(\lambda_i) \propto \lambda_i^{b_i} e^{-a_i \lambda_i} \ , \quad (i = 1, 2).$$

   Exprimer la loi a posteriori de $(\lambda_1, \lambda_2, \tau)$.
   On notera : $N(\tau) + b_1 + 1 = r_1(\tau)$, $N(T) - N(\tau) + b_2 + 1 = r_2(\tau)$, $\tau + a_1 = S_1(\tau)$ et $(T - \tau) + a_2 = S_2(\tau)$.

3. Calculer la loi a posteriori de $\tau$.

4. Montrer que la loi a posteriori de $\lambda_1$ peut se mettre sous la forme :

$$\pi(\lambda_1 | t) \propto \sum_{i=0}^{n} \Gamma(r_{2i}) \lambda_1^{r_{1i} - 1} I_i^{(1)}$$

   avec

$$I_i^{(1)} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-\lambda_1 S_1(\tau)} S_2(\tau)^{-r_{2i}} \pi(\tau) d\tau$$

   $r_{1i} = i + b_1 + 1$, $r_{2i} = n - i + b_2 + 1$, $t_0 = 0$ et $t_{n+1} = T$
   Donner un résultat similaire pour $\lambda_2$.

5. On souhaite tester l'existence du point $\tau$ dit *point de rupture*. On note $M_0$ le modèle d'intensité constante et $M_1$ le modèle avec un point de rupture. On s'intéresse donc au test : $M_0$ contre $M_1$. Soit $\lambda_0$, l'intensité sous $M_0$.

En considérant une loi a priori sur $\lambda_0$ de la forme $\lambda_0^{b_0} e^{-a_0 \lambda_0}$, calculer le facteur de Bayes :

$$B_{01}^{(n)}(t,T) = \frac{f(t|M_0)}{f(t|M_1)}$$

en fonction de $\lambda_i$, $a_i$, $b_i$, $i=1,2$, $r_{ij}$, $i=1,2$, $j=1,\cdots,n$ et $I_i^{(3)}$.
N.B. :

$$\begin{aligned}
f(t|M_0) &= \int_0^{+\infty} f(t|\lambda_0)\pi(\lambda_0)d\lambda_0 \\
f(t|M_1) &= \int_0^T \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(t|\lambda_1,\lambda_2,\tau)\pi(\lambda_1,\lambda_2,\tau)d\lambda_1 d\lambda_2 d\tau \\
I_i^{(3)} &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} S_1(\tau)^{-r_{1i}} S_2(\tau)^{-r_{2i}} \pi(\tau)d\tau
\end{aligned}$$