

On considère un système à k composants, exposé à la défaillance. On observe que lorsqu'une défaillance se produit sur le système, plusieurs de ses composants peuvent être constatés simultanément défaillants. On parle alors de défaillances de causes communes (DCC). Si j composants sont impliqués, on dira que la DCC est d'ordre j , $j = 1, \dots, k$. Pour chaque DCC, plusieurs scénarios sont possibles. Par exemple, pour un système à $k = 3$ composants, A , B et C . Les DCC d'ordre 1 sont A , B , C . Les DCC d'ordre 2 sont AB , AC , BC . Il y a une DCC d'ordre 3 : ABC . On suppose que quels que soient les composants, les probabilités d'occurrence des DCC sont les mêmes pour un ordre donné. On note Q_j la probabilité d'une DCC d'ordre j i.e d'un DCC impliquant exactement j composants.

1. On note Q_t (t comme total), la probabilité qu'un composant donné soit impliqué dans la défaillance du système.
Donner l'expression de Q_t en fonction de Q_1, Q_2, Q_3 dans le cas $k = 3$, puis l'expression pour k quelconque.
2. Montrer que α_j , la probabilité qu'exactly j composants parmi les k soient impliqués dans une défaillance du système, est donnée par :

$$\alpha_j = \frac{C_k^j Q_j}{\sum_{\ell=1}^k C_k^\ell Q_\ell}, \quad j = 1, \dots, k.$$

3. Etablir la relation :

$$Q_j = \left[C_{k-1}^{j-1} Q_j \right]^{-1} \frac{j \alpha_j}{\sum_{\ell=1}^k \ell \alpha_\ell} Q_t, \quad j = 1, \dots, k.$$

4. Supposons que l'on enregistre N défaillances sur le système que l'on a pu identifier en terme de DCC, i.e. que l'on dispose du vecteur d'observation $\underline{n} = (n_1, \dots, n_k)$ où n_j est le nombre de DCC d'ordre j , $j = 1, \dots, k$.
 - (a) Exprimer la vraisemblance en considérant le paramètre $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$.
(On établira proprement qu'il s'agit d'une loi multinomiale).
 - (b) Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de $\underline{\alpha}$.
5. On souhaite calculer un estimateur de Bayes pour $\underline{\alpha}$.
 - (a) Quelle loi a priori peut-on proposer ?
 - (b) On considère la loi a priori de Dirichlet de paramètres $s \underline{t}$ avec $\underline{t} = (t_1, \dots, t_k)$ tel que $\sum_{j=1}^k t_j = 1$. Calculer un estimateur de Bayes de $\underline{\alpha}$ que l'on écrira comme une combinaison convexe à déterminer. Commenter.
 - (c) Etudier cet estimateur à partir de simulations.
6. On souhaite maintenant estimer Q_t . On note $N(T)$, le nombre de défaillances qui est survenu dans une fenêtre de temps de longueur T .
 - (a) Quelle est la loi de $N(T)$?
 - (b) Calculer un estimateur de Bayes de Q_t en choisissant une loi a priori conjuguée.
 - (c) Etudier et commenter cet estimateur à partir de simulations.