Université de Bretagne-Sud

STA2209 : Statistique Bayésienne

Problème 2 : Rupture

Soit le processus de Poisson $N(t)$, $t > 0$; $N(t)$ désigne le nombre d'événements se produisant dans l'intervalle $[0, t]$. L'intensité du processus $\lambda(s)$ a la forme suivante :

$$\lambda(s) = \begin{cases} \lambda_1 & \text{si} \quad 0 \leq s \leq \tau \\ \lambda_2 & \text{si} \quad s > \tau \end{cases}$$

Les trois paramètres inconnus λ_1, λ_2 et τ sont des réels positifs et $\tau \in [0, T]$.
Supposons que l'on observe n dates d'événements $t = (t_1, t_2, \cdots, t_n)$ dans la fenêtre $[0, T]$.
On a : $N(T) = n$.

1. En raisonnant sur les interarrivées qui suivent des lois exponentielles d'après la définition précédente de l'intensité du processus de Poisson, montrer que la vraisemblance, que l'on notera $f(t|\lambda_1, \lambda_2, \tau)$, a la forme suivante :

$$\lambda_1^{N(\tau)} e^{-\lambda_1 \tau} \lambda_2^{N(T)-N(\tau)} e^{-\lambda_2 (T-\tau)}$$

2. On suppose que λ_1, λ_2 et τ sont indépendants. On note $\pi(\tau)$ la loi a priori sur τ. On se donne les lois a priori suivantes sur λ_i, $(i = 1, 2)$:

$$\pi(\lambda_i) \propto \lambda_i^{b_i} e^{-a_i \lambda_i} \ , \quad (i = 1, 2).$$

   Exprimer la loi a posteriori de $(\lambda_1, \lambda_2, \tau)$.
   On notera : $r_1(\tau) = N(\tau) + b_1 + 1$, $r_2(\tau) = N(T) - N(\tau) + b_2 + 1$, $S_1(\tau) = \tau + a_1$ et $S_2(\tau) = (T - \tau) + a_2$.

3. Calculer la loi a posteriori de τ.

4. Montrer que la loi a posteriori de λ_1 peut se mettre sous la forme :

$$\pi(\lambda_1|t) \propto \sum_{i=0}^{n} \Gamma(r_{2i}) \lambda_1^{r_{1i}-1} I_i^{(1)}$$

   avec

$$I_i^{(1)} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-\lambda_1 S_1(\tau)} S_2(\tau)^{-r_{2i}} \pi(\tau) d\tau$$

   $r_{1i} = i + b_1 + 1$, $r_{2i} = n - i + b_2 + 1$, $t_0 = 0$ et $t_{n+1} = T$
   Donner un résultat similaire pour λ_2.

5. On souhaite tester l'existence du point τ dit *point de rupture*. On note M_0 le modèle d'intensité constante et M_1 le modèle avec un point de rupture. On s'intéresse donc au test : M_0 contre M_1. Soit λ_0, l'intensité sous M_0.
   En considérant une loi a priori sur λ_0 de la forme $\lambda_0^{b_0} e^{-a_0 \lambda_0}$, calculer le facteur de Bayes :

$$B_{01}^{(n)}(t, T) = \frac{f(t|M_0)}{f(t|M_1)}$$

en fonction de λ_i, a_i, b_i, $i = 1, 2$, r_{ij}, $i = 1, 2$, $j = 1, \cdots, n$ et $I_i^{(3)}$.
N.B. :

$$\begin{aligned}
f(t|M_0) &= \int_0^{+\infty} f(t|\lambda_0)\pi(\lambda_0)d\lambda_0 \\
f(t|M_1) &= \int_0^T \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(t|\lambda_1, \lambda_2, \tau)\pi(\lambda_1, \lambda_2, \tau)d\lambda_1 d\lambda_2 d\tau \\
I_i^{(3)} &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} S_1(\tau)^{-r_{1i}} S_2(\tau)^{-r_{2i}} \pi(\tau)d\tau
\end{aligned}$$

A.E. Raftery, V. E. Akman,“Bayesian analysis of a Poisson process with a change-point”, Biometrika (1986), 73.1. pp. 85-89.