Simulation stochastique et méthodes bayésiennes pour le traitement du signal - 2018

TD1 : Introduction aux Statistiques Bayésiennes

Yann Traonmilin

Rappel On rappelle les définitions des lois usuelles :

1. La loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ sur $\mathbb{R}$ est définie par sa densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

2. La loi Beta de paramètres α et β et $B(\alpha, \beta)$ a pour densité

$$f_{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{(\beta-1)}\chi_{[0,1]}(x).$$

   où la constante $\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} = \displaystyle\int_0^1 u^{(\alpha-1)}(1-u)^{(\beta-1)} du$ est une constante de renormalisation. On peut remarquer que la loi de densité uniforme sur $[0, 1]$ est un cas particulier de la loi Beta pour les paramètres $\alpha = \beta = 1$.

Exercice 1. On considère les modèles suivants :

- Soit $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ n variables aléatoires discrètes iid à valeur dans $[1, n]$ suivant une loi binomiale $X \sim \mathcal{B}(n, \theta)$:
$$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k \theta^k (1-\theta)^{n-k}$$
On considère que n est fixé et $\theta \in [0, 1]$ est un paramètre.

- Soit $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ n variables aléatoires discrètes iid à valeur dans $\mathbb{N}$ suivant une loi de Poisson de paramètre $\theta = \lambda$:
$$\mathbb{P}(X_1 = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Dans ces deux cas :

1. Exprimer la fonction de vraisemblance $L(\theta, k_1, k_2, \cdots, k_n)$, où on pourra noter $s = \sum_{i=1}^n k_i$.

2. Déterminer le maximum de vraisemblance :
$$\hat{\theta} = \arg\max_{\theta\in\Theta} L(\theta, x).$$

Exercice 2. Soit X_i des v.a. iid telle que $\mathbb{P}(X_i = a|\theta) = \theta$ et $\mathbb{P}(X_i = b|\theta) = 1 - \theta$ où θ est une v.a. suivant la loi *a priori* définie par $\mathbb{P}(\theta = \theta_1) = p_1$ et $\mathbb{P}(\theta = \theta_2) = 1 - p_1$.

1. Déterminer $\mathbb{P}(\theta = \theta_1|X_i = a)$.

2. Déterminer $\mathbb{P}(\theta = \theta_2|(X_1 = a, X_2 = b))$.

3. Etudier les variations de $\mathbb{P}(\theta = \theta_2|(X_1 = a, X_2 = b))$ en fonction de p_1. Interpréter.

4. Déterminer $\mathbb{P}(\theta = \theta_1|X = x)$ où $X = (X_i)_{i\leqslant n}$ et $x \in \{a, b\}^n$.

Exercice 3. Soit X_i des v.a. iid telles que $\mathbb{P}(X_i = a|\theta) = \theta$ et $\mathbb{P}(X_i = b|\theta) = 1 - \theta$ où θ est une v.a. suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$

1. Déterminer $\pi(\theta|(X_1 = a, X_2 = a, X_3 = b)$.
2. Déterminer le maximum de cette loi *a posteriori*
3. Déterminer $\pi(\theta|X = x)$ où $X = (X_i)_{i\leqslant n}$ et $x \in \{a, b\}^n$.
4. Déterminer le maximum de cette loi *a posteriori* .

Exercice 4. Reprendre les questions précédentes dans le cas où θ est une v.a. suivant la loi Beta de paramètres α et β.

Exercice 5. Soit X_1 une v.a suivant une loi normale $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$ où la variance σ^2 est fixée et où θ est une variable aléatoire prenant uniquement deux valeurs

$$\mathbb{P}(\theta = \theta_1) = p_1 \qquad \mathbb{P}(\theta = \theta_2) = 1 - p_1.$$

1. Déterminer l'expression de $\mathbb{P}(\theta = \theta_1|X_1)$.
2. Si on suppose que les v.a $(X_i)_{i\leqslant n}$ sont iid et suivent la loi de X_1, que l'on note $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ et que x est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, déterminer l'expression de $\mathbb{P}(\theta = \theta_1|X)$.

Exercice 6. Soit X_1 une v.a. suivant une loi gaussienne $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$, où la variance σ^2 est fixée et où θ suit la loi normale $\mathcal{N}(\theta_0, \tau^2)$.

1. Donner une expression de la loi *a posteriori* $\pi(\theta|X_1)$.
2. Que pouvez vous dire de cette loi ?
3. Même question si on considère une variable $X = (X_i)_{i\leqslant n}$.
4. Que pouvez vous dire de cette loi ? En quelle valeur est-elle maximale ?