Université de Bretagne-Sud

STA 2209 : Statistique Bayésienne

Problème 3 : Modèle de Rasch

I. On considère une loi binomiale de paramètres (n, p). On suppose n connu.

1. Rappeler la forme de la loi conjuguée pour p. Proposer une loi non informative.
2. Considérons l'échantillon de taille 2 (X_1, X_2) de v. a. indépendantes mais non identiquement distribuées suivant des lois binomiales de paramètres respectifs (n_1, p_1), (n_2, p_2), $(p_1 < p_2)$. On suppose n_1 et n_2 connus.

   On considère la loi a priori suivantes sur (p_1, p_2) définie par :

   $$\pi(p_1, p_2 | r_1, s_1, r_2, s_2) \propto \begin{cases} p_1^{r_1-1}(1-p_1)^{s_1-1}p_2^{r_2-1}(1-p_2)^{s_2-1} & \text{si } \; 0 < p_1 < p_2 < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Calculer la loi a posteriori et proposer des estimateurs de Bayes de p_1 et p_2 sous l'hypothèse d'un coût quadratique.

II. Soient les variables aléatoires de Bernoulli X_{ij}, $(i = 1, \cdots, n)$, $(j = 1, \cdots, k)$ définies de la manière suivante :

$$X_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{avec probabilité} \quad p_{ij}, \\ 0 & \text{avec probabilité} \quad 1 - p_{ij}. \end{cases}$$

On rencontre de telles v.a. dans l'analyse de questionnaires. $X_{i,j}$ désigne la réponse de l'individu i à la question j. En général, l'événement $\{X_{ij} = 1\}$ correspond à l'événement *le "questionné" i répond correctement à la question j.*

1. Soit $X = \{x_{ij}\}$ l'ensemble des réponses de n individus aux k questions d'un questionnaire. Généraliser le cas de l'échantillon de taille 2 vu précédemment pour obtenir une loi a priori conjuguée dans ce cas.
2. On peut caratériser les probalilités de réponses $p_{i,j}$ en utilisant un modèle logistique. On écrit :

   $$p_{ij} = \frac{\exp[\alpha_i(\theta_i - \beta_j)]}{1 + \exp[\alpha_i(\theta_i - \beta_j)]}$$

   Le paramètre θ_i désigne l'habilité du "questionné" i et le paramètre β_j désigne la difficulté de la question j.

   Ecrire la vraisemblance. (On notera $x_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{k} x_{ij}$ et $x_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}$.)

3. On pose $\alpha_i = 1$ pour tout i. Montrer que le modèle appartient à la famille exponentielle.
4. En déduire la forme de la loi conjuguée. (appliquer le théorème du cours).
5. Ecrire le système d'équations à résoudre pour obtenir un estimateur de Bayes en considérant le mode de la loi a posteriori.
6. Montrer que le second terme s'écrit comme une combinaison convexe d'une statistique et d'une fonction des paramètres de la loi a priori.

Rappel

$$\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}du = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = B(\alpha,\beta) \quad \text{et, notation :} \quad B(x;\alpha,\beta) = \int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}du$$

R. K. Tsutakawa, H. Y. Lin, "Bayesian Estimation of Item Response Curves", Psychometrika Vol.51,2,251–267.