Corrigé TD1 : Introduction aux Statistiques Bayésiennes

Yann Traonmilin

Janvier 2018

Rappel On rappelle les définitions des lois usuelles :

1. La loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ sur $\mathbb{R}$ est définie par sa densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

2. La loi Beta de paramètres α et β et $B(\alpha, \beta)$ a pour densité

$$f_{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{(\beta-1)}\chi_{[0,1]}(x).$$

où la constante $\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} = \int_0^1 u^{(\alpha-1)}(1-u)^{(\beta-1)}du$ est une constante de renormalisation. On peut remarquer que la loi de densité uniforme sur $[0, 1]$ est un cas particulier de la loi Beta pour les paramètres $\alpha = \beta = 1$.

Exercice 1. Dans ces deux cas:

1. Cas 1 :

$$L(\theta, k) = C_n^k \lambda^k (1-\lambda)^{n-k} \tag{1}$$

Cas 2 :

$$L(\lambda, k_1, k_2, \cdots, k_n) = \prod_{i=1,n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k_i}}{k_i!} = e^{-n\lambda}\lambda^s \prod_{i=1,n} \frac{1}{k_i!} \tag{2}$$

2. cas 1 : on retombe sur la calcul de la loi Bernouilli

3. cas 2 : On prend le log de L, ce qui revient à calculer

$$\hat{\lambda} = \arg\max_{\lambda\in\mathbb{R}^+} -n\lambda + slog(\lambda) + C = \arg\max_{\theta\in\mathbb{R}} G(\lambda) \tag{3}$$

On cherche $\hat{\lambda}$ tel que $G'(\hat{\lambda}) = 0$, ce qui donne $\frac{s}{\hat{\lambda}} = n$ et $\hat{\theta} = \frac{s}{n}$

Exercice 2.

1. Formule de Bayes avec proba totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\theta = \theta_1 | X_i = a) &= \frac{\mathbb{P}(X_i = a|\theta = \theta_1)\mathbb{P}(\theta = \theta_1)}{\mathbb{P}(X_i = a|\theta = \theta_1)\mathbb{P}(\theta = \theta_1) + \mathbb{P}(X_i = a|\theta = \theta_2)\mathbb{P}(\theta = \theta_2)} \\ &= \frac{\theta_1 p_1}{\theta_1 p_1 + \theta_2(1 - p_1)}\end{aligned} \tag{4}$$

2. Formule de Bayes avec proba totales + indépendance (conditionnelle) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\theta = \theta_2 | (X_1 = a, X_2 = b)) &= \frac{\mathbb{P}((X_1 = a, X_2 = b)|\theta = \theta_2)\mathbb{P}(\theta = \theta_2)}{\mathbb{P}((X_1 = a, X_2 = b)|\theta = \theta_2)\mathbb{P}(\theta = \theta_2) + \mathbb{P}((X_1 = a, X_2 = b)|\theta = \theta_1)\mathbb{P}(\theta =} \\ &= \frac{\theta_2(1 - \theta_2)(1 - p_1)}{\theta_2(1 - \theta_2)(1 - p_1) + \theta_1(1 - \theta_1)p_1}\end{aligned} \tag{5}$$

3. La fonction $p_1/(1 - p_1)$ est croissante sur $[0, 1]$. Ainsi $\mathbb{P}(\theta = \theta_2|(X_1 = a, X_2 = b))$ décroit en fonction de p_1. Plus l'*a priori* sur θ_2 est fort, plus la probabilité a postériori sur θ_2 est forte.

4. Soit k le nombre de a. Formule de Bayes avec proba totales :

$$\mathbb{P}(\theta = \theta_1 | X = x) = \frac{\theta_1^k(1 - \theta_1)^{n-k}(1 - p_1)}{\theta_1^k(1 - \theta_1)^{n-k}(1 - p_1) + \theta_2^k(1 - \theta_2)^{n-k}(1 - p_1)} \tag{6}$$

Exercice 3.

1. $$\pi(\theta|(X_1 = a, X_2 = a, X_3 = b) \propto \theta^2(1 - \theta)\chi_{[0,1]} \tag{7}$$

   Pour déterminer la constante, on remarque que c'est une loi Beta $B(3, 2)$

2. on dérive $f(\theta) = \theta^2(1 - \theta)$ $f'(\hat{\theta}) = 0 = 2\hat{\theta} - 3\hat{\theta}^2$ ce qui donne $\hat{\theta} = 2/3$

3. on note k le nombre de a

   $$\pi(\theta|X = x) \propto \theta^k(1 - \theta)^{n-k}\chi_{[0,1]} \tag{8}$$

   Pour déterminer la constante, on remarque que c'est une loi Beta $B(k + 1, n - k + 1)$

4. on dérive $f(\theta) = log(\theta^k(1 - \theta)^{n-k})$ $f'(\hat{\theta}) = 0 = k/\hat{\theta} - (n - k)/(1 - \hat{\theta})$ ce qui donne $\hat{\theta} = \left(\frac{k}{n}\right)$

Exercice 4.

1. $$\pi(\theta|(X_1 = a, X_2 = a, X_3 = b) \propto \theta^2(1 - \theta)\theta^{\alpha-1}(1 - \theta)^{\beta-1} = \theta^{\alpha+1}(1 - \theta)^{\beta} \tag{9}$$

   Pour déterminer la constante, on remarque que c'est une loi Beta $B(\alpha + 2, \beta + 1)$

2. on dérive $f(\theta) = log(\theta^{\alpha+1}(1-\theta)^{\beta})$ $f'(\hat{\theta}) = 0 = (\alpha+1)/\hat{\theta} - \beta/(1-\hat{\theta})$ ce qui donne $\hat{\theta} = \frac{\alpha+1}{\beta+\alpha+1}$.

3. on note k le nombre de a

   $$\pi(\theta|X = x) \propto \theta^{\alpha+k-1}(1 - \theta)^{\beta+n-k-1}\chi_{[0,1]} \tag{10}$$

   Pour déterminer la constante, on remarque que c'est une loi Beta $B(\alpha + k, \beta + n - k)$

4. on dérive $f(\theta) = log(\theta^{\alpha+k-1}(1 - \theta)^{\beta+n-k-1})\chi_{[0,1]}$, $f'(\hat{\theta}) = 0 = (\alpha + k - 1)/\hat{\theta} - (\beta + n - k - 1)/(1 - \hat{\theta})$ ce qui donne $\hat{\theta} = \frac{\alpha+k-1}{\beta+\alpha+n-2}$.

Exercice 5.

1. Comme la constante de normalisation d'une Gaussienne ne dépend pas de la moyenne, on a

$$\mathbb{P}(\theta=\theta_1|X_1)=\frac{e^{-\frac{(X_1-\theta_1)^2)}{2\sigma^2}}p_1}{e^{-\frac{(X_1-\theta_1)^2)}{2\sigma^2}}p_1+e^{-\frac{(X_1-\theta_2)^2)}{2\sigma^2}}(1-p_1)} \tag{11}$$

2.

$$\mathbb{P}(\theta=\theta_1|X)=\frac{e^{-\frac{\sum_i(X_i-\theta_1)^2)}{2\sigma^2}}p_1}{e^{-\frac{\sum_i(X_i-\theta_1)^2)}{2\sigma^2}}p_1+e^{-\frac{\sum_i(X_1-\theta_1)^2)}{2\sigma^2}}(1-p_1)} \tag{12}$$

Exercice 6.

1. $\pi(\theta|x)=\mathcal{N}(\frac{\sigma^2\theta_0+\tau^2x}{\sigma^2+\tau^2},\frac{\sigma^2\tau^2}{\sigma^2+\tau^2})$.
2. $\pi(\theta|x)=\mathcal{N}(\frac{\sigma^2\theta_0+\tau^2\sum_i x_i}{\sigma^2+\tau^2},\frac{\sigma^2\tau^2}{\sigma^2+n\tau^2})=\mathcal{N}(\frac{\sigma^2\theta_0+\tau^2n(\frac{1}{n}\sum_i x_i)}{\sigma^2+\tau^2},\frac{\sigma^2\tau^2}{\sigma^2+n\tau^2})$.
3. Etude en fonction de n. Le max est la moyenne qui est une pondération entre la moyenne empirique et l'a priori