Université de Bretagne-Sud

STA 2209 : Statistique Bayésienne

Problème 8 : Analyse Bayésienne semi-paramétrique en fiabilité

Soit un échantillon $(X_1, \cdots, X_n)$ de durées i.i.d. de loi $f(x)$ définie par :

$$f(x) = f_i \quad \text{pour} \quad x \in [t_{i-1}, t_i[, \quad i = 1, \cdots, m \quad \text{avec} \quad t_0 = 0 \quad \text{et} \quad t_m = +\infty.$$

Soit la fonction $\lambda(x)$ définie par :

$$\lambda(x) = \lim_{dx \to 0} \frac{P(X \leq x + dx | X > x)}{dx}$$

On note, pour $x \in [t_i - 1, t_i[$, $\lambda(x) = \lambda_i$ et $R(t_i) = P(X > t_i) = R_i$, $i = 1, \cdots, m$. On note $(k_1, \cdots, k_m)$ le vecteur du nombre d'observations dans chaque intervalle i.e. k_i est le nombre de durées dans dans l'intervalle $[t_i - 1, t_i[$. $\sum_{i=1}^{m} k_i = n$.

1. Montrer que $\lambda(x) = f(x)/(1 - F(x))$ où $F(x)$ est la fonction de répartition de X i.e. $\int_0^x f(t)dt$.
2. En considérant l'observation d'un vecteur de pannes, donner l'expression de la fonction de vraisemblance pour les paramètres $(f_1, \cdots, f_m)$.
3. Donner cette expression pour les paramètres $(\lambda_1, \cdots, \lambda_m)$.
4. En considérant une loi conjuguée pour le modèle obtenu précédemment, proposer un estimateur de Bayes du taux de survie. Commenter.
5. Construire une loi non informative (On pourra appliquer la règle de Jeffreys) et donner alors une estimation bayésienne du vecteur λ.

On souhaite maintenant introduire dans l'analyse l'idée a priori que le taux de survie est croissant. On pose $u_i = 1 - \lambda_i$. n.b. $u_i = P(X > t_i / X > t_{i-1})$. On se donne une loi a priori de type Dirichlet sur le vecteur $((y_1, \cdots, y_k)$ où $y_i = u_{i-1} - u_i$, $u_0 = 1$ et $y_{m+1} = 1 - \sum_{j=1}^{m} y_j = u_m$. Les paramètres $(\beta\alpha_1, \cdots, \beta\alpha_m)$ de cette loi sont tels que $\beta > 0$, $\alpha_i > 0$ pour tout i et $\sum_{j=1}^{m+1} \alpha_j = 1$.

1. Montrer que l'espérance mathématique des v.a. u_i est $\sum_{j=i+1}^{m+1} \alpha_j$.
2. En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer qu'une estimation Bayésienne des λ_i pour la loi a priori définie ci-dessus et sous l'hypothèse d'un coût quadratique a la forme suivante :

$$\tilde{\lambda}_i = \frac{C_{i,1}}{C_0}, \quad i = 1, \cdots, m$$

où $C_{i,1}$ est égal à C_0 où k_i est devenu $k_i + 1$, C_0 étant :

$$C_0 = \sum_{l_m=0}^{k_m} \cdots \sum_{l_1=0}^{k_1} \begin{matrix} k_i \\ l_i \end{matrix} \; (-1)^{l_i} B(\beta\alpha_i, \xi_i)$$

où B est le coefficient bêta.

T. Mazzuchi, N. D. Singpurwalla, "A Bayesian approach to inference for monotone failure rate", Statistics and Probability Letters 3, 1985.