Simulation stochastique et méthodes bayésiennes pour le traitement du signal - 2018

TD3 : Estimation bayésienne
Yann Traonmilin

Exercice 1. On représente une image par un vecteur concaténant ses colonnes.

1. Donner la forme de H, lorsque H est un sous-échantillonnage par 2 vertical et horizontal.
2. Donner la forme de H, lorsque H est la convolution par un noyau de convolution h de taille 3×3 tel que $h(i) = 1$.

Exercice 2. On considère le modèle d'observation du cours. On suppose $m < n$, A une matrice de taille $m' \times n$ telle que $m + m' \geq 0$, on considère le modèle bayésien suivant:

$$\begin{aligned} v &\sim f(v|u_0)\mathcal{N}(Hu_0, \sigma) \\ u_0 &\sim \pi(u) = e^{-\|Au\|_2^2} \end{aligned} \tag{1}$$

1. Calculer l'estimateur du maximum a posteriori de u_0.
2. On suppose $H = I$ et $A = \lambda I$. On appelle u_λ l'estimateur du maximum a posteriori. Montrer que $u_\lambda \rightarrow_{\lambda \to \infty} 0$.
3. Pour cette question on suppose que u est une fonction différentiable dans L^2, on considère $H = I$ et $Au = \lambda \nabla u$: ∇ désigne la dérivée verticale et horizontale de u. En exprimant la fonction objectif à minimiser dans l'espace de Fourier, donner une expression du maximum a posteriori.

Exercice 3. On considère le cas du débruitage multi-image.

1. Proposer une méthode de débruitage basée sur le maximum de vraisemblance. Donner la variance de cet estimateur en fonction du nombre d'image.
2. Pour cette question on suppose que u est une fonction différentiable dans L^2 et $Au = \nabla u$: ∇ désigne la dérivée verticale et horizontale de u. En exprimant la fonction objectif à minimiser dans l'espace de Fourier, donner une expression du maximum a posteriori.