Simulation stochastique et méthodes bayésiennes pour le traitement du signal - 2018

TD3 : Estimation bayésienne
Yann Traonmilin

Exercice 1. Soit X une v.a. telle que $X \sim \mathcal{N}(\theta_0, \sigma^2)$ où θ_0 est un paramètre inconnu.

1. Donner l'estimateur de maximum de vraisemblance de θ_0. Déterminer le risque quadratique moyen de cet estimateur.
2. Si X_1 et X_2 sonts deux variables iid suivant la même loi $\mathcal{N}(\theta_0, \sigma^2)$. Donner l'estimateur de maximum de vraisemblance de θ_0. Déterminer le risque quadratique moyen de cet estimateur.
3. Généraliser à n v.a. iid gaussiennes.

Exercice 2. Soit X une v.a. suivant une loi Bernouilli de paramètre θ, où θ est une v.a dont la loi *a priori* est définie par

$$\mathbb{P}(\theta = \theta_1) = p \text{ et } \mathbb{P}(\theta = \theta_2) = 1 - p.$$

1. Exprimer la loi $\pi(\theta|X = x)$.
2. Pour la fonction de coût $C(x, y) = |x - y|^2$, et l'estimateur défini par $\Delta(0) = \mu_1$ et $\Delta(1) = \mu_2$. Donner l'expression la fonction $\rho_C(\pi, \Delta|X = x)$, c'est à dire des deux valeurs $\rho_C(\pi, \Delta|X = 0)$ et $\rho_C(\pi, \Delta|X = 1)$. On posera $\lambda = \pi(\theta = \theta_1|X = 1)$.
3. En déduire l'estimateur bayésien Δ^π.
4. On considère la fonction de coût définie par $C(x, y) = 0$ si $x = y$ et 1 sinon. Que vaut la fonction ρ_C si $\lambda > \frac{1}{2}$ et que vaut Δ^π ? Qu'en est il si $\lambda < \frac{1}{2}$? et si $\lambda = \frac{1}{2}$?.

Exercice 3. Soit X une v.a. suivant une loi normale $X \sim \mathcal{N}(\theta, 1)$ où la loi *a priori* sur θ est la même que dans l'exemple précédent.

1. Exprimer la loi $\pi(\theta|X = x)$.
2. Donner une expression de $\rho_C(\pi, \Delta|X = x)$ dans ce cas pour le coût $C(x, y) = |x - y|^2$. En déduire comme dans l'exemple précédent une expression de Δ^π.
3. Reprendre la question pour la fonction de coût dite $0 - 1$ de l'exemple précédent.

Exercice 4. Soit X suivant une loi de Bernoulli de paramètre θ où $\theta \sim \mathcal{U}[0, 1]$.

1. Exprimer la loi $\pi(\theta|X = x)$.
2. Donner une expression de $\rho_C(\pi, \Delta|X = x)$ dans ce cas pour le coût $C = |\cdot|^2$. En déduire comme dans les exemples précédents une expression de Δ^π.

Exercice 5. On considère le coût

$$C(x,y) = \|x-y\|_2^2. \tag{1}$$

Montrer que

$$\Delta^\pi(x) = \mathbb{E}_\pi(\theta|x).$$

Exercice 6. Calculer l'estimateur bayésien pour le coût quadratique dans les cas suivants :

1. $X \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$ et $\theta \sim \mathcal{N}(\mu, \tau^2)$.
2. $X \sim \mathcal{P}(\theta)$ et $\theta \sim Ga(\alpha, \beta)$.
3. $X \sim Ga(\nu, \theta)$ et $\theta \sim Ga(\alpha, \beta)$.
4. $X \sim B(n, \theta)$ et $\theta \sim Be(\alpha, \beta)$.

On rappelle que si $X \sim Ga(\alpha, \beta)$ alors $\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\beta}$ et si $X \sim Be(\alpha, \beta)$ alors $\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$

Exercice 7. Soit (on utilise le modèle linéaire du cours)

$$\hat{\theta} = \arg\max_\theta \pi(\theta|y) = \arg\min_\theta \frac{\|y-M\theta\|_2^2}{2\sigma^2} + \frac{\|\theta\|_2^2}{2\mu^2} \tag{2}$$

Montrer que

$$\hat{\theta} = (M^T M + \lambda^2 I)^{-1} M^T y \tag{3}$$

où l'on déterminera λ.