Université de Bretagne-Sud

STA 2209 : Statistique Bayésienne

Problème 6 : Modèle de Weibull

En analyse de survie, on rencontre fréquemment la loi de Weibull. Cette loi a pour densité de probabilité :

$$f(x \mid \theta, \xi) = (\xi/\theta)\, x^{\xi-1} \exp\left\{-(x^{\xi}/\theta)\right\} \quad \text{pour} \quad x \in \mathbb{R}^{+}, \theta, \xi > 0$$

On considère un n-échantillon de variables laéatoires durées. Supposons que k d'entre elles sont effectivement observées, c'est-à-dire que l'observation prend fin au $k^{\text{ème}}$ décès. On dispose donc de k temps $(x_{(1)}, \cdots, x_{(k)})$ ordonnés et on sait que $n-k$ durées sont supérieures à $x_{(k)}$. On montre dans ce cas que la vraisemblance est de la forme :

$$\prod_{i=1}^{k} f(x_{(i)}) \cdot [S(x_{(k)})]^{n-k}$$

où $f(x)$ est la densité de la loi de probabilité de la durée et $S(x)$ sa fonction survie définie par $S(x) = P(X > x)$.

1. Dans le cas d'une loi de Weibull, exprimer la vraisemblance.
   (On notera : $T(\xi) = \sum_{i=1}^{k} x_{(i)}^{\xi} + (n-k) x_{(k)}^{\xi}$)
2. Supposons ξ connu. On considère une loi uniforme sur $[0, \delta]$ pour θ.
   (a) Calculer la loi a posteriori pour θ.
   (On notera : $\Gamma(x; a, b) = b^{a} \int_{x}^{+\infty} u^{a-1}\, e^{-bu}\, du$, la fonction gamma incomplète à 2 paramètres.)
   (b) Sous l'hypothèse d'un coût quadratique, donner l'estimateur de Bayes de θ.
   (c) Exprimer la variance de θ a posteriori et proposer un intervalle de confiance.
3. On considère une loi a priori Gamma inverse sur θ :

$$\pi(\theta) = \frac{(\mu/\theta)^{\nu+1}}{\mu \Gamma(\nu)} \exp\left\{-\frac{\mu}{\theta}\right\} \quad \theta \in \mathbb{R}^{+}; \mu, \nu > 0.$$

   et une loi uniforme sur $[\alpha, \beta]$ pour ξ. On suppose θ et ξ indépendants.
   (a) Exprimer la loi jointe a posteriori $\pi(\theta, \xi \mid x)$.
   (b) Sous l'hypothèse d'un coût quadratique, proposer des estimateurs de Bayes de θ et ξ.
4. Construire une loi non informative. Commenter.

d'après G. C. Canavos, C. P. Tsokos, Bayesian Estimation of Life Parameters in the Weibull Distribution, *Operation Research*, Vol.21, 3, 755 – 763, 1973.