Université de Bretagne-Sud

STA 2209 : Statistique Bayésienne

Problème 4 : Processus de Poisson non homogène

Pour décrire la succession d'un type d'événements donné dans le temps, on peut utiliser la théorie des processus stochastiques.
Ainsi, la suite d'entiers $\{N(t)\}$, nombre d'événements se produisant entre $[0, t[$ est un processus de Poisson non homogène d'intensité : $\lambda(t) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1}$ si, pour tout intervalle A de $\mathbb{R}^+$.

$$P(N(A) = k) = \frac{\left(\int_A \lambda(s)ds\right)^k}{k!} \exp\left\{-\int_A \lambda(s)ds\right\}.$$

Soit T_i la date du $i^{\text{ème}}$ événement. La loi de T_1 est une loi de Weibull de paramètres (α, β) dont la densité est :

$$\frac{\beta}{\alpha^\beta} t^{\beta-1} \exp\left\{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right\}, \quad \beta, \alpha > 0$$

On considère un n-échantillon de dates d'événements.

1. Montrer que la loi conditionnelle de T_i sachant $T_{i-1} = t_{i-1}, \cdots, T_1 = t_1$ est une loi de Weibull tronquée de la forme :

$$\frac{\beta}{\alpha^\beta} t^{\beta-1} \exp\left\{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta + \left(\frac{t_{i-1}}{\alpha}\right)^\beta\right\}, \quad t \in [t_{i-1}, +\infty[.$$

   (Indication : On calculera $P(T_i > t | T_{i-1} = t_{i-1})$ à partir de la loi de $N(.)$)

2. Ecrire la vraisemblance et donner les estimateurs du maximum de vraisemblance de (α, β).
3. On veut maintenant proposer des estimateurs de Bayes.
   En utilisant la règle de Jeffreys, calculer une loi non informative.
4. On considère la loi jointe a priori sur (β, α) de la forme $\pi(\beta, \alpha) \propto (\beta\alpha)^{-1}$.
   (a) Calculer la loi marginale a posteriori de β.
   (b) Montrer que le mode de cette distribution β_m est un estimateur sans biais de β.
   (c) Sous l'hypothèse d'un coût quadratique, donner un estimateur de Bayes de β.
5. On considère maintenant une loi a priori uniforme sur $[\beta_1, \beta_2]$ et une loi non informative $\pi(\alpha) \propto 1/\alpha$ ($\alpha > 0$) pour α.
   Calculer le mode et l'espérance mathématique a posteriori de β et α.
6. On se donne une loi a priori conditionnelle sur α sachant β de la forme

$$\pi(\alpha|\beta; (a, b)) = \frac{\beta b^a T^{\beta a}}{\Gamma(a)\alpha^{\beta a+1}} \exp\left\{-b\left(\frac{T}{\alpha}\right)^\beta\right\}, \quad a, b > 0, \ T > 0.$$

   Sous l'hypothèse d'un coût quadratique, proposer des estimateurs de Bayes de α et β.

M. Guida, R. Calabria, G. Pulcini, "Bayes Inference for a Non-Homogeneous Poisson Process with Power Intensity Law", IEEE Transactions on reliabilty, Vol. 38, 5, 1989.