Université de Bretagne-Sud

STA 2209 : Statistique Bayésienne

Problème 4 : Processus Power Law

On considère un processus de Poisson non homogène $\{N(t), t \geqslant 0\}$ dont l'intensité est définie par :

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1}.$$

Soit T_i la date du $i^{\text{ème}}$ événement. On montre que la loi de T_1, la date du premier événement, est une loi de Weibull de paramètres (α, β). On considère un n-échantillon de dates d'événements ordonnées $(T_1, \ldots, T_n)$.

1. Montrer que la densité de la loi conditionnelle de T_i sachant $T_{i-1} = t_{i-1}, \cdots, T_1 = t_1$ est une Weibull tronquée de la forme :

$$\frac{\beta}{\alpha^\beta} t^{\beta-1} \exp\left\{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta + \left(\frac{t_{i-1}}{\alpha}\right)^\beta\right\}, \quad t \in [t_{i-1}, +\infty[.$$

   (Indication : On calculera $P(T_i > t \mid T_{i-1} = t_{i-1})$ à partir de la loi de $N(.)$)

2. En déduire que l'expression de la loi jointe de l'échantillon est :

$$f(\underline{t} \mid \alpha, \beta) = (\beta/\alpha)^n \left(\prod_{i=1}^n t_i/\alpha\right)^{\beta-1} e^{-(y/\alpha)^\beta}.$$

3. On veut proposer des estimateurs de Bayes. Pour ce faire, on considère une loi a priori de la forme : $\pi(\alpha, \beta) \propto 1/(\alpha\beta^\gamma)^{-1}$.
   Montrer que la loi jointe a posteriori est de la forme :

$$\pi(\alpha, \beta \mid \underline{t}) = c_\gamma(\underline{t})\ \beta^{n-\gamma}\left(\prod_{i=1}^n t_i\right)^\beta\ e^{-(t_n/\alpha)^\beta}/\alpha^{n\beta+1},$$

   avec

$$c_\gamma(\underline{t}) = \left(\log \prod_{i=1}^n y/t_i\right)^{n-\gamma}\Big(\Gamma(n)\Gamma(n-\gamma))\Big)^{-1}, \ \gamma = 0, 1.$$

4. Montrer que la loi marginale de $\beta \mid \underline{t}$ est une loi du χ^2.
5. On pose $\overline{\beta} = n/\sum_{i=1}^n \log y/t_i$, $\overline{\alpha} = y\ n^{1/\overline{\beta}}$ et on considère la statistique : $W = (\overline{\alpha}/\alpha)^{\overline{\beta}}$.
   Montrer que

$$P(W \leqslant w \mid \underline{t}) = \int_0^{+\infty} G\Big((nw)^{x/2n}\Big) g_\gamma(x) dx,$$

   où $g_\gamma(x) = (1/2)^{n-\gamma} x^{n-\gamma-1} e^{-x/2}/\Gamma(n-\gamma)$, $G(x) = \int_0^{+\infty} v^{n-1}e^{-v}/\Gamma(n) dv$.
   En déduire une méthode de construction d'intervalle de confiance pour α.

6. On suppose que le système a été observé jusqu'à y et l'on souhaite prédire le nombre d'événements dans un intervalle $(s_1, s_2]$, $y \leqslant s_1$.
Dans le cas où $s_1 = y$, montrer que :

$$P[N(y, s_2) = r \mid \underline{t}] = C_{n+r-1}^{r} \sum_{k=0}^{n} C_r^k (-1)^k \left[\frac{\log \prod_{i=1}^n y/t_i}{\log \prod_{i=1}^n s_2/t_i + \log(s_2/y)^k} \right]^{n-\gamma}, \; n > \gamma, \; r \in \mathbb{N}.$$

7. On s'intéresse au nombre d'événements dans $(0, s]$.
Montrer que :

$$P[N(0, s) = c_\gamma(\underline{t}) \frac{\Gamma(n+r)}{\Gamma(r+1)} \int_0^{+\infty} \beta^{n-\gamma-1} \left(\prod_{i=1}^n t_i/s \right)^\beta (1 + (y/s)^\beta)^{-(n+r)} d\beta, \; n > \gamma, \; r \in \mathbb{N}.$$

Que devient cette expression quand $s = y$?

8. On considère l'échantillon suivant :

$$\underline{t} = (55, 166, 205, 341, 488, 567, 731, 1308, 2050, 2453, 3115, 4017, 4596).$$

Il s'agit des dates de défaillances d'un générateur d'un type complexe dans un avion.
Donner une représentation de $P[N(0, y) = r \mid \underline{t}]$ obtenu à la question précédent.

D'après M. Guida, R. Calabria, G. Pulcini, "Bayesian Inference for the Power Law process", Ann. Inst. Statist. Math., Vol. 44, No.4, pp. 623–639 (1992).