Université de Bretagne-Sud

Statistique Bayésienne

Travaux Pratiques R

Exercice 1 – Montrer la proposition suivante :

$$\text{Si } U \sim \mathcal{U}_{[0,1]} \text{ alors } F^{-1}(U) \sim F.$$

En déduire une méthode de simulation pour la loi exponentielle, pour la loi de Weibull.

Exercice 2 – On se propose de générer des réalisations x d'une v.a. de loi bêta de paramètres (α, β) dont on note la densité

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1},\ x \in [0,1],\ \alpha,\ \beta > 0.$$

1. Calculer le mode m de f.
2. Mettre en oeuvre l'algorithme suivant :
   - 1. générer $u \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$ et $y \sim \mathcal{U}_{[0,f(m)]}$.
   - 2. Si $y < f(u)$ on "accepte" et $x = y$ sinon on "rejette"

Exercice 3 – Mettre en oeuvre l'algorithme d'augmentation des données (TW) pour l'exemple de la répartition donnée en cours.

Exercice 4 – Considérons un couple de v.a. (X, Y) dont la loi jointe est donnée par :

$$f(x,y) \propto C_n^x y^{x+\alpha-1}(1-y)^{n-x+\beta-1}\ ,\ x = 0, 1, \cdots, n\ ,\quad 0 < y < 1.$$

On se propose de générer des réalisations de X suivant sa marginale $f(x)$.

1. Calculer les lois conditionnelles $f(x|y)$ et $f(y|x)$.
2. Décrire un algorithme de Gibbs pour obtenir des réalisations de X suivant $f(x)$.
3. Construire un histogramme de $f(x)$ à partir des simulations.
4. Calculer analytiquement $f(x)$. Représenter et comparer avec l'histogramme obtenu à la question précédente.

Exercice 5 – Soit la loi $\pi = (1/6, 1/2, 1/3)$. Ecrire un algorithme qui simule une chaîne de Markov dont la loi stationnaire est π.

Exercice 6 – On considère un couple de variables aléatoires (X_1, X_2) de lois binomiales indépendantes de paramètres respectifs (n_1, λ_1) et (n_2, λ_2).

1. Calculer $P(X_1, X_2 \mid X_1 + X_2 = n)\,;\, n \leq n_1 + n_2$.
2. Représenter cette loi pour $n_1 = 10$, $n_2 = 15$, $n = 7$, $\lambda_1 = 0,3$ et $\lambda_2 = 0,5$.
3. Mettre en oeuvre un algorithme de Metropolis pour simuler des couples (X_1, X_2). Comparer avec la distribution théorique.

Exercice 7 – Un avantage de l'algorithme de Metropolis-Hasting (M-H) est que la distribution, que l'on cherche à simuler, n'a besoin d'être connue qu'à une constante près. Mettre en oeuvre un algorithme M-H pour simuler une loi du χ^2 à n dégrés de liberté en omettant la constant de normalisation. Faire un graphique de l'histogramme des résultats et comparer avec la densité exacte.

Exercice 8 – Proposer un algorithme M-H pour simuler une gaussienne bivariée.