Université de Bretagne-Sud

STA 2111 – Statistique Bayésienne

Travaux dirigés 2

Exercice 1 – Soit X v.a. de loi binomiale de paramètres (n, p). On considère une loi a priori bêta de paramètres (α, β) sur p.

1. Trouver distributions a posteriori et marginale. En déduire l'estimateur de Bayes $\delta^\pi(x)$ sous l'hypothèse d'un coût quadratique.
2. Sous quelles conditions sur (α, β), $\delta^\pi(x)$ est-il sans biais ?
3. Si la loi a priori est $\pi(p) = [p(1-p)]^{-1}.\mathbb{I}_{]0,1[}(p)$, donner l'estimateur de Bayes sous l'hypothèse d'un coût quadratique.
4. Donner l'estimateur de Bayes sous le coût :

$$L(p, \delta(x)) = \frac{(\delta(x) - p)^2}{p(1-p)}$$

Exercice 2 – Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, un n-échantillon d'une loi normale de paramètres $(\mu, 1/\theta)$. On suppose que μ est connu et on cherche à estimer θ. On considère comme loi a priori sur ce dernier paramètre une loi Gamma de paramètres (α, β) :

$$\pi(\theta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\ \theta^{\alpha-1} \exp\{-\beta\theta\}\ , \quad \alpha, \beta > 0.$$

1. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance (emv) de θ.
2. Caculer la loi a posteriori de θ. Que peut-on dire de $\pi(\theta)$?
   Donner l'estimateur de Bayes de θ pour un coût quadratique.
3. Comparer l'emv et l'estimateur de Bayes.

Exercice 3 – Montrer qu'un estimateur de Bayes associé à un coût quadratique et à une loi a priori propre ne peut être sans biais.

Exercice 4 – On considère le modèle bayésien $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, P_\theta, \pi(\theta))$.

Soit $f(x|\theta)$ la densité de probabilité de la loi P_θ de X.

Soit $\mu(\theta)$ et $\sigma^2(\theta)$ respectivement l'espérance et la variance de X suivant $f(.|\theta)$.

On note $f(x)$ la loi marginale de X, c'est-à-dire $\int_\Theta f(x|\theta)\pi(\theta)d\theta$.

On note μ_f et σ_f, respectivement l'espérance et la variance de X relativement à $f(x)$. On supposera que ces quantités existent.

1. Montrer que $\mu_f = \mathbb{E}[\mu(\theta)]$ et $\sigma_f^2 = \mathbb{E}[\sigma^2(\theta)] + \mathbb{E}[(\mu(\theta) - \mu_f)^2]$.
2. Soit μ_π et σ_π^2 respectivement la moyenne et la variance de la loi a priori.
   Déduire de la question précédente que si $\mu(\theta) = \theta$ alors $\mu_\pi = \mu_f$
   et si $\sigma^2(\theta) = \sigma^2$ alors $\sigma_\pi^2 = \sigma_f^2 - \sigma^2$, ($\sigma^2$ est une constante ne dépendant pas de θ).
3. Ces résultats peuvent permettre de donner des valeurs aux paramètres de la loi a priori. Considérons une loi exponentielle :
   $$f(x|\theta) = \frac{1}{\theta}\exp\left\{-\frac{x}{\theta}\right\} \ , \quad x \in \mathbb{R}^+ \ , \quad \theta > 0.$$
   On cherche à déterminer une loi a priori dans la famille des lois Gamma-Inverse : $\mathcal{IG}(\alpha_\pi, \beta_\pi)$.
   Des observations du passé $(o_1, o_2, \cdots, o_n)$ permettent d'estimer empiriquement μ_f et σ_f^2.
   On a :
   $$\mu_f = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n o_i = \bar{o}_n \quad \text{et} \quad \sigma_f^2 = \hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (o_i - \bar{o}_n)^2$$
   Exprimer α_π et β_π en fonction de $\bar{o}_n$ et $\hat{\sigma}_n^2$.

Exercice 5 – Soit X une variable aléatoire de loi binomiale de paramètre (n, θ).

1. En appliquant la règle de Jeffreys, calculer et identifier la loi a priori non informative. Que peut-on dire de cette loi ?
2. Calculer un estimateur de Bayes de θ sous l'hypothèse d'un coût quadratique.
3. On considère maintenant que la loi de X est une loi binomiale négative de paramètre (n, θ).
   $$P(X = x \mid \theta) = C_{n+x-1}^x \theta^n (1-\theta)^x \ , \ x \in \mathbb{N}.$$
   Répondre aux précédentes questions dans ce cas. Que peut-on dire de la loi obtenue ?

Exercice 6 – On considère la loi binomiale négative de paramètres (n, p) dont on rappelle la définition :

$$P(X = x|p) = C_{n+x-1}^{n-1} p^x (1-p)^n \ , \quad 0 < p < 1 \ , \quad x \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer $E(X)$, l'espérance mathématique de X.
2. On suppose n fixé. En utilisant la règle de Jeffreys, construire une loi a priori non informative pour p.
3. Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ un N-échantillon de la loi binomiale négative de paramètres (n, p). Calculer la loi a posteriori de p pour la loi a priori obtenue ci-dessus.
4. Donner l'estimateur de Bayes de p pour un coût quadratique.

Exercice 7 –

1. On considère la loi multinomiale : $\mathcal{M}(N; p_1, p_2, \cdots, p_n)$

   $$\Pr(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n) = \frac{N!}{x_1! x_2! \cdots x_{n+1}!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_{n+1}^{x_{n+1}}$$

   avec $0 \leq p_i \leq 1$; $i = 1, \cdots, n+1$, $\sum_{j=1}^{n+1} p_j = 1$ et $\sum_{j=1}^{n+1} x_j = N$.
   Montrer que cette loi appartient à la famille exponentielle.
2. En appliquant le théorème du cours qui donne l'expression d'une famille de lois conjuguées pour la famille exponentielle, donner l'expression d'une famille de lois conjuguées pour la loi multinomiale.
3. On considère une loi a priori de Dirichlet de paramètres $(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n; \nu_{n+1})$ sur le paramètre $(p_1, p_2, \cdots, p_n)$.

   $$\pi(p_1, p_2, \cdots, p_k) = \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_2)\cdots\Gamma(\nu_{k+1})} p_1^{\nu_1 - 1} p_2^{\nu_2 - 1} \cdots p_k^{\nu_n - 1} (1 - \sum_{j=1}^{n} p_j)^{\nu_{n+1} - 1}$$

   avec $\nu = \sum_{j=1}^{n+1} \nu_j$.
   Vérifier que la loi de Dirichlet appartient à la famille des lois conjuguées.

   Exprimer et identifier la loi a posteriori.