Simulation stochastique et méthodes bayésiennes pour le traitement du signal - 2018

Corrigé TD3 : Estimation bayésienne

Yann Traonmilin

Exercice 1. Soit X une v.a. telle que $X \sim \mathcal{N}(\theta_0, \sigma^2)$ où θ_0 est un paramètre inconnu.

1. $L(\theta, x) \propto e^{-|x-\theta^2|/(2\sigma^2)}$.
2. $\hat{\theta} = x$.
$$\mathbb{E}[\|\hat{\theta} - \theta_0\|_2^2] = \mathbb{E}[\|X - \theta_0\|_2^2] = \sigma^2 \tag{1}$$
3. $\hat{\theta} = (X_1 + X_2)/2$.
$$\mathbb{E}[\|\hat{\theta} - \theta_0\|^2] = \mathbb{E}[\frac{1}{4}\|X_1 + X_2 - 2\theta_0\|_2^2] = 2\frac{\sigma^2}{4} = \frac{\sigma^2}{2} \tag{2}$$
4. $$\mathbb{E}[\|\hat{\theta} - \theta_0\|^2] = \frac{\sigma^2}{n} \tag{3}$$

Exercice 2. Soit X une v.a. suivant une loi binomiale de paramètre θ ($\mathbb{P}(X = 1|\theta) = \theta$) , où θ est une v.a dont la loi *a priori* est définie par

$$\mathbb{P}(\theta = \theta_1) = p \text{ et } \mathbb{P}(\theta = \theta_2) = 1 - p.$$

1. $\mathbb{P}(\theta = \theta_1|X = 0) = \dfrac{(1-\theta_1)p}{(1-\theta_1)p + (1-\theta_2)(1-p)}$, $\mathbb{P}(\theta = \theta_1|X = 1) = \dfrac{\theta_1 p}{\theta_1 p + \theta_2(1-p)}$
2. $$\begin{aligned}\rho_C(\pi, \Delta|X = 0) &= (\theta_1 - \mu_1)^2\mathbb{P}(\theta = \theta_1|X = 0) + (\theta_2 - \mu_1)^2\mathbb{P}(\theta = \theta_2|X = 0)\\ &= (\theta_1 - \mu_1)^2\lambda + (\theta_2 - \mu_1)^2(1-\lambda) \text{ avec } \lambda = \frac{(1-\theta_1)p}{(1-\theta_1)p + (1-\theta_2)(1-p)}\end{aligned}$$
$$\rho_C(\pi, \Delta|X = 1) = (\theta_1 - \mu_2)^2\lambda' + (\theta_2 - \mu_2)^2(1-\lambda') \text{ avec } \lambda' = \frac{\theta_1 p}{\theta_1 p + \theta_2(1-p)}$$
3. On cherche μ_1, μ_2 qui minimisent ρ_C: on a
$$\begin{aligned}\rho_C(\pi, \Delta|X = 0) &= \mu_1^2 - 2(\theta_1\lambda + \theta_2(1-\lambda))\mu_1 + \theta_1^2\lambda + \theta_2^2(1-\lambda)\\ &= (\mu_1 - (\theta_1\lambda - \theta_2(1-\lambda)))^2 + ...\\ \hat{\mu}_1 &= \theta_1\lambda - \theta_2(1-\lambda)\\ \hat{\mu}_2 &= \theta_1\lambda' - \theta_2(1-\lambda')\end{aligned}$$
4. On remplace dans le résultat précédent la nouvelle expression du coût. Pour $\Delta^\pi(0) = \theta_1$ si $\lambda < 1/2$, θ_2, si $\lambda > 1/2$, et θ_1 ou θ_2 sinon. On a alors pas unicité.

Exercice 3.

1. $\mathbb{P}(\theta = \theta_1 | X = x) = \frac{e^{|x-\theta_1|^2/2} p}{e^{|x-\theta_1|^2/2} p + e^{|x-\theta_2|^2/2}(1-p)}$

2. $$\begin{aligned} \rho_C(\pi, \Delta | X = 0) &= (\theta_1 - \mu_1)^2 \mathbb{P}(\theta = \theta_1 | X = 0) + (\theta_2 - \mu_1)^2 \mathbb{P}(\theta = \theta_2 | X = 0) \\ &= (\theta_1 - \mu_1)^2 \lambda + (\theta_2 - \mu_1)^2 (1 - \lambda) \text{ avec } \lambda = \frac{e^{|x-\theta_1|^2/2} p}{e^{|x-\theta_1|^2/2} p + e^{|x-\theta_2|^2/2}(1-p)} \end{aligned}$$

   Même calcul pour l'estimateur de Bayes.

3. Même calcul que précédemment.

Exercice 4.

1. $\pi(\theta | X = x) \propto P(X = x | \theta) \chi_{[0,1]}$.

2. $\rho_C(\pi, \Delta | X = 1) \propto \int_{\theta=0,1} |\theta - \hat{\theta}|^2 \theta d\theta = \int \theta^3 - 2\hat{\theta}\theta^2 + \theta\hat{\theta}^2 = [\theta^4/4 - \frac{2}{3}\hat{\theta}\theta^3 + \theta^2\hat{\theta}^2/2]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{2}{3}\hat{\theta} + \hat{\theta}^2/2$. on dérive par rapport à $\hat{\theta}$: on trouve $\hat{\theta} - 2/3 = 0$

Exercice 5 On dérive sous le signe intégral.

Exercice 6.

1. $\rho_C(\pi, \Delta | x) = \mathbb{E}_{\pi(\theta|x)}[(\theta - \hat{\theta})^2] = var(\pi(\theta|x))^2 - 2moy(\pi(\theta|x))\hat{\theta} + \hat{\theta}^2$ donc $\hat{\theta} = moy(\pi(\theta|x))$

Exercice 7. $\lambda = \mu/\sigma$