Université de Bretagne-Sud

STA 2209 : Statistique Bayésienne

Problème 5 : Modèle de Pareto

Dans l'industrie deux types d'essais sont souvent mis en oeuvre pour étudier la fiabilité d'un équipement. Un premier type – essai de type I – consiste à observer les durées de fonctionnement de ces équipements pendant une période donnée, C. L'essai s'arrête au temps C et sur les n équipements mis en test, on enregistre les k équipements défaillants. Le second type d'essai – essai de type II – consiste à arrêter le test lorsqu'un nombre k fixé de pannes est survenu.
Soit $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, un $n-$ échantillon d'observations de durées de fonctionnement.

Pour un essai de type I, on disposera donc de réalisations $(x_1, \cdots, x_k)$ de la durée de fonctionnement et pour les $n-k$ durées restantes, la seule information disponible sera qu'elles sont supérieure à C.

Pour un essai de type II, on observera les k premières durées et les $n-k$ restantes seront supérieures à $x_{(k)}$.
On suppose que X suit la loi de Pareto définie par :

$$f(x|m,\theta) = \frac{\theta m^\theta}{x^{\theta+1}} \, \mathbb{1}_{[m,+\infty[}(x) \ , \quad \theta > 1$$

1. Ecrire la vraisemblance pour les deux types d'essai en remarquant que la contribution à la vraisemblance des données censurés i.e X supérieures à C ou à la date de la $k^{ème}$ panne, est $P(X > C)$ ou $P(X > x_{(k)})$. On note $x_{(1)} \leq x_{(2)} \cdots \leq x_{(k)}$, les observations de durées ordonnées.
2. On note $S_k = \sum_{i=1}^{k} \log x_{(i)} + (n-k) \log x_{(k)}$.
   Pour le type II, montrer que la vraisemblance est de la forme :
   $$L(\nu, \theta | S_k) \propto \exp[-\theta(S_k - n\nu)], \ \nu < \log x_{(1)} \ \ avec \ \ \nu = \log m.$$
3. On se donne les lois a priori $\nu \sim \Gamma(a_1, b_1)$ et $\theta \sim \Gamma(a_2, b_2) \, \mathbb{1}(\theta > 1)$.
   ν et θ sont supposés indépendants.
   Exprimer les lois a posteriori conditionnelles $\pi(\theta|\nu, S_k)$ et $\pi(\nu|\theta, S_k)$.
4. Décrire un algorithme pour générer des réalisations de la loi jointe : $\pi(\nu, \theta|S_k)$.
5. On considère maintenant une loi a priori uniforme sur $\mathbb{R}^+$ pour m et une loi Gamma de support $[1, +\infty[$ de paramètres (a_2, b_2) pour θ.
   Exprimer la loi a posteriori $\pi(\theta, m|S_k)$ et la loi conditionnelle de $\theta|\nu, S_k$.
6. Montrer que la loi de $m|\theta, S_k$ est une loi uniforme généralisée.
   On rappelle la densité d'une loi uniforme généralisée de paramètres (a, b, c) :
   $$f(t) = \frac{(a+1)t^a}{c^{a+1} - b^{a+1}} \, \mathbb{1}_{[b,c]}(t) \ , \quad a > 0.$$
7. Proposer un algorithme por générer des réalisations de la loi $\pi(\theta, m|S_k)$.

D'après R. C. Tiwari, Y. Yang, J. N. Zalkikar,"Bayes Estimation for the Pareto Failure-Model Using Gibbs Sampling", IEEE Transactions on Reliability, vol.45, 3, 1996.