Université de Bretagne-Sud

Statistique Bayésienne

Travaux dirigés 3

Exercice 1 – On considère la loi binomiale négative de paramètres (n, p) dont on rappelle la définition :

$$P(X = x \mid p) = C_{n+x-1}^{n-1} p^x (1-p)^n \ , \quad 0 < p < 1 \ , \quad x \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer $E(X)$, l'espérance mathématique de X.
   (Remarque : $\displaystyle\sum_{x=0}^{+\infty} C_{n+x-1}^{n-1} p^x = [1/(1-p)]^n$.)
2. On suppose n fixé. En utilisant la règle de Jeffreys, construire une loi a priori non informative pour p.
3. Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ un N-échantillon de la loi binomiale négative de paramètres (n, p). Calculer la loi a posteriori de p pour la loi a priori obtenue ci-dessus.
4. Donner l'estimateur de Bayes de p pour un coût quadratique.

Exercice 2 – On considère le modèle bayésien $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, P_\theta, \pi(\theta))$.
Soit $f(x|\theta)$ la densité de probabilité de la loi P_θ de X.
Soit $\mu(\theta)$ et $\sigma^2(\theta)$ respectivement l'espérance et la variance de X suivant $f(.|\theta)$.
On note $f(x)$ la loi marginale de X, c'est-à-dire $\int_\Theta f(x|\theta)\pi(\theta)d\theta$.
On note μ_f et σ_f^2, respectivement l'espérance et la variance de X relativement à $f(x)$.
On supposera que ces quantités existent.

1. Montrer que $\mu_f = E[\mu(\theta)]$ et $\sigma_f^2 = E[\sigma^2(\theta)] + E[(\mu(\theta) - \mu_f)^2]$.

2. Soit μ_π et σ_π^2 respectivement la moyenne et la variance de la loi a priori. Déduire de la question précédente que si $\mu(\theta) = \theta$ alors $\mu_\pi = \mu_f$ et si $\sigma^2(\theta) = \sigma^2$ alors $\sigma_\pi^2 = \sigma_f^2 - \sigma^2$, ($\sigma^2$ est une constante ne dépendant pas de θ).

3. Ces résultats peuvent permettre de donner des valeurs aux paramètres de la loi a priori. Considérons une loi exponentielle :

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\theta} \exp\left\{-\frac{x}{\theta}\right\} \ , \quad x \in \mathbb{R}^+ \ , \quad \theta > 0.$$

On cherche à déterminer une loi a priori dans la famille des lois Gamma-Inverse : $\mathcal{IG}(\alpha_\pi, \beta_\pi)$.
Des observations du passé $(o_1, o_2, \cdots, o_n)$ permettent d'estimer empiriquement μ_f et σ_f^2.
On a :

$$\mu_f = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} o_i = \bar{o}_n \quad \text{et} \quad \sigma_f^2 = \hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(o_i - \bar{o}_n)^2$$

Exprimer α_π et β_π en fonction de $\bar{o}_n$ et $\hat{\sigma}_n^2$.

Rappel : Loi Gamma-Inverse

$$(Y \sim \mathcal{IG}(\alpha, \beta)) \Leftrightarrow f(y|\alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{1}{y^{\alpha+1}} \cdot \exp\left\{-\frac{\beta}{y}\right\}$$

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{\beta}{\alpha - 1} \quad (\alpha > 1) \ \text{ et } \ Var(Y) = \frac{\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} \quad (\alpha > 2).$$

Exercice 3 – Montrer qu'un estimateur de Bayes δ^π associé à un coût quadratique et à une loi a priori π tels que $r(\pi, \delta^\pi) > 0$ ne peut être sans biais. (Indication : on raisonnera par l'absurde)