Inférence Bayésienne

1. (1) Qu'est-ce qu'une loi conjuguée ?

Une loi conjuguée si pi(x θ) appartient à une famille de fonction alors pi(teta¶x) appartient aussi à cette famille ; en d'autre terme la fonction à posteriori appartient à la même famille que la fonction apriori

2. (2) À quoi servent les méthodes de Monte Carlo en général et les méthodes de Markov Chain Monte Carlo en particulier ?

Les méthodes de MC permettent d'approximer les intégrales notamment :

…~~$\pi(\theta_1, \ldots, \theta_n|x)d\theta_2$~~…$d\theta_n$.

{intégrale sur grand théta}$\int_\Theta h(\theta)\, g(\theta)d\theta$

Le principe de MC est de simuler des θ en tant que variable aléatoire (θ 1, θ 2,etc.) et d'approcher l'espérance $E[h(\theta)|x]$ avec la loi des grand nombre.

La chaine de Markov définit les $\theta_1, \ldots, \theta_n$ comme étant corrélés

(3) Dans le modèle ci-dessus, quels sont les paramètres ? Et les hyper-paramètres ?

Les hyper paramètres sont : α,β

les paramètres sont : n, p

3.

4. (4) Quel est la loi a posteriori du paramètre p (la proportion de gens qui votent pour le candidat A) ?

$\pi(\theta) = (\Gamma(\alpha+\beta) \exp(\alpha-1) / \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta))\ \theta\ (1-\theta) \exp(\beta-1)$

$f(K|p) = \binom{\alpha}{k} p^{k}(1-p)^{m-k}$

$f(p|k) \propto f(k|p)\pi(p)$

$\propto p^{k+\alpha-1}(1-p)^{\alpha-k+\beta-1}$

$\propto B(k+\alpha, \alpha-k+\beta)$

5. (5) Notons F (x; α, β), la fonction de répartition de la loi beta. Quelle est la probabilité que le paramètre p soit compris entre 0.2 et 0.45 (donnez la forme analytique de la solution) ?

$F(0.2 < p < 0.45) = F(0.2; \alpha; \beta) - F(0.45, \alpha; \beta)$

6. (6) Gardons F (x; α, β), la fonction de répartition de la loi beta. De quelle manière celle-ci est-elle reliée à la densité de probabilité de la loi beta $f_{beta}(x;\alpha,\beta)$?

$$F(x;\alpha;\beta) = \frac{f(x;\alpha,\beta)\pi(x)}{\int f(x;\alpha,\beta)\pi(x)\,dx}$$