Université de Bretagne-Sud

STA 2209 : Statistique Bayésienne

Problème 7 : Modèle de Gauss-Inverse et Simulations

On considère la loi de Gauss-Inverse de paramètre (μ, λ) dont la densité a pour expression :

$$f_X(x) = \left(\frac{\lambda}{2\pi x^3}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}\right\}, \quad x \in \mathbb{R}^+$$

1. Montrer que cette loi appartient à la famille exponentielle.
2. En déduire une loi conjuguée en appliquant le théorème du cours.
3. En appliquant la règle de Jeffreys, construire une loi non informative.
4. Montrer le résultat suivant :
   Si X suit une loi de Gauss-Inverse de paramètres (μ, λ) alors la densité de la loi de la v.a. Y défnie par $Y = \sqrt{\frac{\lambda}{X}}\left(\frac{X}{\mu} - 1\right)$ est donnée par :
   $$f_Y(y) = \left(1 - y/\sqrt{\frac{4\lambda}{\mu} + y^2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-y^2/2}\right).$$
5. En déduire que l'expression de la fonction de répartition de X s'exprime par :
   $$F(x) = \phi(\alpha(x)) + e^{2\lambda/\mu}\, \phi(\beta(x)),$$
   avec $\alpha(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{x}}\left(\frac{x}{\mu} - 1\right)$ et de $\beta(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{x}}\left(\frac{x}{\mu} + 1\right)$, ϕ désignant la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
   Indication : on effectuera le changement de variable $u = \sqrt{4\lambda/\mu + z^2}$.

II. Soit maintenant Y une v.a. telle que $f_Y(y) = y \cdot f_X(y)/\mu$, X étant une v.a. de loi inverse-gaussienne. On considère Z une v.a. dont la densité est un mélange des densités des lois précédemment définies :

$$f_Z(z) = (1-p)f_X(z) + pf_Y(z)\ ,\ p \in [0, 1].$$

1. Exprimer la fonction de répartition F_Z de Z en fonction de $\alpha(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{x}}\left(\frac{x}{\mu} - 1\right)$ et de $\beta(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{x}}\left(\frac{x}{\mu} + 1\right)$.
2. Soit $(z_1, \cdots, z_n)$ un n-échantillon de F_Z. On pose $\phi = \lambda/\mu$.
   On suppose $\pi(\mu, \phi, p) = \pi(\mu|\phi)\pi(\phi)\pi(p)$ et on se donne les lois a priori suivantes :
   - $\pi(\mu|\phi)$ est une loi de Gauss-Inverse de paramètres $(\eta, \phi w)$,

- $\pi(\phi)$ est une loi Gamma de paramètres (γ, a),
- $\pi(p)$ est une loi Bêta de paramètres (α, β).

Donner la loi a posteriori de (μ, ϕ, p).

On posera :

$$\nu = 1/2(n + 2\gamma - 1),$$
$$\nu' = \frac{n\bar{x} + w\eta}{2\mu} - (n + w - a) + \frac{1}{2}\mu(\mu n\tilde{x} + w\eta)$$
$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ et } \tilde{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1/x_i$$

3. Décrire l'algorithme d'acceptation-rejet pour obtenir des réalisations de $\pi(\mu, \phi, \beta|z)$.
4. Proposer une technique d'estimation de F_Z.

O. Akman, L. Huwang,"Bayes Computation for Reliability Estimation", IEEE Transaction on Reliabilty, Vol. 46, 1, 1997.