FEITOSA, M., CALLIOLI, C. A., & CAROLI, A. (1984). Matrizes, vetores e geometria analítica. *São Paulo: Nobel*.

Capítulo 1: Matrizes

1. Noção de matriz

Matriz: tabela $A_{m\times n}$ com elementos dispostos em m linhas e n colunas, $m, n \geq 1$.

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Notação: $A = (a_{ij})(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$.

Igualdade: $A = B \leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \forall\ i, j$.

2. Adição de matriz

Sejam $A_{m\times n} = (a_{ij})$ e $B_{m\times n} = (b_{ij})$.

$$A + B = C_{m\times n} = (c_{ij}) : c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

- Matriz nula:

$$A = (a_{ij}) : a_{ij} = 0, \forall\ i, j \Rightarrow A = O$$

- Matriz oposta:

$$A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) : b_{ij} = -a_{ij}, \forall\ i, j \Rightarrow B = -A$$

- Diferença entre matrizes:

$$A - B = A + (-B) = C = (c_{ij}) : c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}, \forall\ i, j$$

Propriedades da adição:

1. $A + B = B + A$ (comutativa);
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (associativa);
3. $A + O = A$ (elemento neutro);
4. $A + (-A) = O$.

3. Produto de um número real por uma matriz

Sejam $A = (a_{ij})$ e $t \in \mathbb{R}$.

$$tA = B = (b_{ij}) : b_{ij} = t \cdot a_{ij}$$

Propriedades:

1. $a(bA) = (ab)A$;
2. $a(A + B) = aA + aB$;
3. $(a + b)A = aA + bA$;
4. $1 \cdot A = A$.

4. Somatórias

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ \ldots \ + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Propriedades:

1. $a \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} ab_i$;
2. $\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)$;
3. $\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i$;
4. $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \left(\sum_{j=1}^{m} b_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j$.

5. Produtos de matrizes

Sejam $A_{m\times n} = (a_{ij})$ e $B_{n\times p} = (b_{jk})$.

$$A \cdot B = C_{m\times p} = (c_{ik}) : c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} \cdot b_{jk})$$

- Matriz unidade de ordem n:

$$I_n = (\delta_{ij}) : \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \qquad 1 \leq i, j \leq n$$

  - δ_{ij} é o símbolo de Kronecker.

Propriedades:

1. $A_{m\times n}, B_{n\times p}, C_{p\times r} \Rightarrow (AB)C = A(BC)$ (associativa);
2. $A_{m\times n}, B_{m\times n}, C_{n\times p} \Rightarrow (A + B)C = AC + BC$ (distributiva à direita);
3. $A_{n\times p}, B_{n\times p}, C_{m\times n} \Rightarrow C(A + B) = CA + CB$ (distributiva à esquerda);
4. $A_{m\times n} \Rightarrow AI_n = A = I_m A$ (elemento neutro);
5. $A_{m\times n}, B_{n\times p}, t \in \mathbb{R} \Rightarrow (tA)B = A(tB) = t(AB)$;
6. $O_{m\times n} \cdot A_{n\times p} = O_{m\times p}$;
7. $\exists\ A, B : A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} = O_{m\times p}$.

6. Matriz transposta

Sejam $A_{m\times n} = (a_{ij})$ e $B_{n\times m} = (b_{ji})$.

$$b_{ji} = a_{ij}, \forall\ i, j \Rightarrow B = A^t$$

Propriedades:

1. $(A + B)^t = A^t + B^t$;
2. $(\lambda A)^t = \lambda A^t$;
3. $(AB)^t = B^t A^t$;
4. $(A^t)^t = A$.

- Matriz simétrica: $A^t = A$.

7. Matrizes inversíveis

Se a *matriz quadrada* $A_{m\times m}$ é inversível, então:

$$\exists\ B_{m\times m} : AB = BA = I_m \Rightarrow B = A^{-1}$$

- Uma matriz inversível é dita não singular. Uma matriz não inversível é chamada singular.
- Se A é inversível, sua inversa é única:

$$B = BI_n = B(AB') = (BA)B' = I_nB' = B'$$

- Se A é inversível, então, sua inversa também é inversível e $(A^{-1})^{-1} = A$.
- Se A e B são inversíveis, o produto é inversível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Determinante:

Cada matriz quadrada está associada a um número real chamado determinante: $\det A$.

Complemento algébrico (ou cofator):

Dada a *matriz quadrada* $A_{n\times n}$, chama-se cofator C_{ij} do elemento a_{ij} de A o produto de $(-1)^{i+j}$ pelo determinante da matriz obtida eliminando de A a linha i e a coluna j.

- $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij} = \det A$ (regra de Laplace);
- $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{kj} = 0 \quad (i \neq k)$;
- $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{kj} = \delta_{ik} \det A$ (linhas);
- $\sum_{j=1}^{n} a_{ji}C_{jk} = \delta_{ik} \det A$.

Matriz adjunta:

Seja a *matriz quadrada* $A_{m\times m} = (a_{ij})$.

Considere-se $\bar{A} = B = (b_{ij}) : b_{ij} = C_{ij}$ (cofator).

A transposta $(\bar{A})^t$ é dita matriz adjunta de A: $(\bar{A})^t = \text{adj}(A)$.

- $B = \text{adj}(A) \to AB = BA = (\det A) \cdot I_n$.
- $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.
    - $\exists\ A^{-1} \to \det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.
- Para que A seja inversível, é condição suficiente e necessária que $\det A \neq 0$.
    - Necessária: $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$;
    - Suficiente: $AB = BA = \det A \cdot I_n, \det A \neq 0 \to A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}B$.

Aplicação:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots \ + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots \ + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ \dots \ + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

pode ser escrito como:

$$Ax = b$$

onde:

$$A = (a_{ij}), \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

e, sendo A inversível, a solução é dada por: $x = A^{-1}b$.

Capítulo 2: Vetores

8. Segmentos orientados

Segmento orientado: par ordenado de pontos, origem e extremidade.

- Notação: AB (A é a origem, B é a extremidade).
- Observações: $AB = CD \Leftrightarrow A = C \wedge B = D$. $AB \neq BA$.

Segmento nulo: origem = extremidade. Ex.: AA.

Segmento oposto: BA é o segmento orientado oposto a AB.

Comprimento: número real não negativo associado a um segmento orientado que denota o comprimento daquele segmento em determinada unidade.

- Notação: $\overline{AB}$.
- Observações: $\overline{AB} = \overline{BA}$, $\overline{AA} = 0$.

Direção e sentido:

- Sejam os segmentos não nulos AB e CD.
  - Têm a mesma direção se $AB \parallel CD$ (paralelos).
  - Os sentidos só podem ser comparados se têm a mesma direção.
- AB e BA têm sentidos opostos (e mesma direção).

Segmentos equipolentes: AB e CD são equipolentes se têm o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido.

- Notação: $AB \sim CD$.
- Observações:
  - $AA \sim BB, \ \forall \ A, B$ (segmentos nulos sempre equipolentes).
  - Sejam AB e CD não nulos e não colineares. $AB \sim CD \equiv AB \parallel CD \wedge AC \parallel BD$ ($ABCD$ é um paralelogramo).

<u>Propriedades da equipolência</u>:

1. $AB \sim BA$ (reflexiva);
2. $AB \sim CD \rightarrow CD \sim AB$ (simétrica);
3. $AB \sim CD, CD \sim EF \Rightarrow AB \sim EF$ (transitiva);
4. Sejam o segmento orientado AB e o ponto C, $\exists! \ D : AB \sim CD$ (transporte);
5. $AA \sim BB, \ \forall \ A, B$;
6. $AB \sim CD \rightarrow BA \sim DC$;
7. $AB \sim CD \rightarrow AC \sim BD$ (regra do paralelogramo).

9. Vetores

Vetor determinado por um segmento orientado AB: conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a AB.

- Notação: $\overrightarrow{AB}$ ou $B - A$.
- Observações:
  - $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \leftrightarrow AB \sim CD$.
  - Os segmentos orientados equipolentes a AB são *representantes* do vetor $\overrightarrow{AB}$.
  - Todos os segmentos orientados nulos, equipolentes entre si, determinam um único vetor chamado vetor nulo $\vec{0}$.
  - Seja um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -\vec{v}$ é chamado de *vetor oposto* de $\vec{v}$. $\overrightarrow{BA}$ é representado por qualquer DC tal que CD seja representante de $\overrightarrow{AB}$.

Propriedades dos vetores:

1. $A - A = \vec{0}$;
2. $-(B - A) = A - B$;
3. $B - A = D - C \rightarrow C - A = D - B$.

10. Soma de um ponto com um vetor

Sejam um ponto A e um vetor $\vec{v}$: $\exists!\ B : B - A = \vec{v}$.

B chama-se soma do ponto A com o vetor $\vec{v}$: $B = A + \vec{v}$

- Observações: $A - \vec{v} = A + (-\vec{v})$.

Propriedades:

1. $A + \vec{0} = A$;
2. $(A - \vec{v}) + \vec{v} = A$;
3. $A + \vec{v} = B + \vec{v} \Rightarrow A = B$;
4. $A + \vec{v} = A + \vec{u} \Rightarrow \vec{v} = \vec{u}$;
5. $A + (B - A) = B$.

11. Adição de vetores

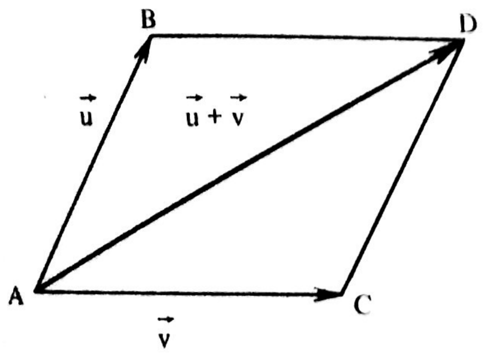
Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e A. Considerem-se $B = A + \vec{u}$ e $C = B + \vec{u}$.

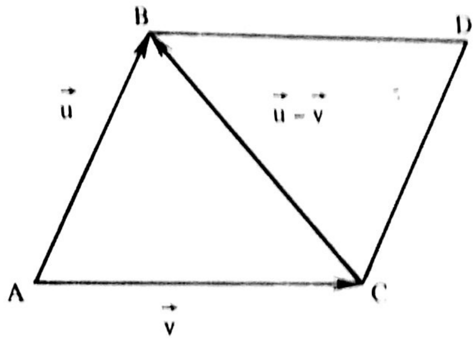
O vetor $\vec{w} = C - A = (A + \vec{u}) + \vec{v} - A = \vec{u} + \vec{v}$ não depende de A. $\vec{w}$ é a soma de $\vec{u}$ com $\vec{v}$.

Propriedades:

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (comutativa);
2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (associativa);
3. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ (elemento neutro);
4. $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

- Diferença de vetores: $\vec{w} = \vec{u} + (-\vec{v}) = \vec{u} - \vec{v}$ é a diferença de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
- Métodos gráficos:
  - Soma: "conectada" a extremidade de $\vec{u}$ à origem de $\vec{v}$, $\vec{u} + \vec{v}$ é dado pelo vetor que tem por origem a origem de $\vec{u}$ e por extremidade a extremidade de $\vec{v}$.
  - Diferença: "conectadas" as origens de $\vec{u}$ e de $\vec{v}$, $\vec{u} + (-\vec{v}) = \vec{u} - \vec{v}$ é dado pelo vetor que tem por origem a extremidade de $\vec{v}$ e por extremidade a extremidade de $\vec{u}$.





12. Módulo, direção e sentido

Módulo: o módulo $|\vec{v}|$ de um vetor $\vec{v}$ é o comprimento de qualquer um de seus representantes.

Direção e sentido: a direção e o sentido de $\vec{u} \neq \vec{0}$ (não nulo) são a direção e o sentido de qualquer um de seus representantes.

- Observações:
  - $\vec{u} = \vec{v}$ se e somente se têm o mesmo módulo, mesma direção e mesmo sentido.
    - Módulo, direção e sentido determinam univocamente um vetor.
  - Vetor unitário: um vetor $\vec{v}$ é dito unitário se $|\vec{v}| = 1$.
  - O *versor* de um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ é o vetor unitário de mesmo sentido que $\vec{v}$.
  - Dois vetores são paralelos se têm a mesma direção ou pelo menos um deles é nulo.

13. Produto de um número real por um vetor

Sejam $a \in \mathbb{R}^*$ (real não nulo) e $\vec{v} \neq \vec{0}$. O vetor $\vec{w} = a \cdot \vec{v}$, produto de a e $\vec{v}$, é definido por:

1. $|\vec{w}| = |a||\vec{v}|$;
2. $\vec{w} \parallel \vec{v}$ (mesma direção);
3. O sentido de $\vec{w}$ é o mesmo de de $\vec{v}$, se $a > 0$, e contrário ao de $\vec{v}$, se $a < 0$.

- Observações:
  - $a = 0 \vee \vec{v} = \vec{0} \to \vec{w} = a\vec{v} = \vec{0}$.
  - Se $\vec{v} \neq 0$, $\dfrac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}$ é o versor de $\vec{v}$.

Propriedades:

1. $a(b\vec{v}) = (ab)\vec{v}$;
2. $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$;
3. $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + a\vec{v}$;
4. $1\vec{v} = \vec{v}$.

Espaço vetorial:

"Um conjunto V munido de duas operações satisfazendo as propriedades de adição de vetores/matrizes e de multiplicação de um número real por vetor/matriz é o que se chama *espaço vetorial*".

14. Dependência linear

Sejam $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ $(n \geq 1)$. Diz-se que eles são *linearmente dependentes* se

$\exists\, a_i \neq 0 \in (a_1, a_2, \ldots, a_n) : \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \vec{v}_i = \vec{0}$.

- Para provar que $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ são *linearmente independentes*, basta provar $\sum a_i \vec{v}_i = \vec{0} \Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$ (solução trivial).

Combinação linear: $\vec{v} = \sum a_i \vec{v}_i$ é dita combinação linear dos vetores $\vec{v}_i$ com coeficientes a_i.

Teoremas:

- Sejam $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$. Se existe $\vec{v}_i$ que é uma combinação linear dos outros, então eles são linearmente dependentes.
- Sejam $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$. Se k $(1 \leq k \leq n)$ desses vetores são linearmente dependentes, eles são linearmente dependentes.
- $\vec{v}$ é linearmente dependente se e somente se $\vec{v} = \vec{0}$.
- Para que dois vetores sejam linearmente dependentes, é condição necessária e suficiente que eles sejam paralelos:
  - $\vec{v} \neq 0,\ \vec{u} \parallel \vec{v} \Rightarrow \exists\, t : \vec{u} = t\vec{v}$.
- Três vetores são coplanares se podem ser representados por segmentos orientados paralelos a um mesmo plano.
  - Para que três vetores sejam linearmente dependentes, é condição necessária e suficiente que sejam coplanares.
    - Existência: se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares, $\exists\,(a, b, c),\ a \neq 0 \vee b \neq 0 \vee c \neq 0 : a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = 0$. Sendo que $c \neq 0$, então $\vec{w} = -\dfrac{a}{c}\vec{u} - \dfrac{b}{c}\vec{v}$.
    - Unicidade: $\vec{w} = m\vec{v} + n\vec{u} = m'\vec{v} + n'\vec{u} \Rightarrow (m - m')\vec{v} + (n - n')\vec{u} = \vec{0}$. Dado que $\vec{u} \perp \vec{v}$ (linearmente independentes), estão $m - m' = 0 \wedge n - n' = 0 \Rightarrow m = m' \wedge n = n'$.
  - Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são linearmente independentes, todo vetor $\vec{w}$ coplanar a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ se exprime *de forma única* como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$:
    - $\exists!\ (m, n) : \vec{w} = m\vec{v} + n\vec{u}$.
- Quatro vetores sempre linearmente dependentes.
  - Se $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ e $\vec{u}_3$ são linearmente independentes, todo $\vec{v}$ se exprime de forma única como combinação linear de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ e $\vec{u}_3$.
    - $\exists!\ (a_1, a_2, a_3) : \vec{v} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3$.

15. Bases

Base no espaço: terna $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de vetores linearmente independentes.

Base no plano: tupla $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ de vetores linearmente independentes.

Base na reta: $\vec{e} \neq \vec{0} \in r$.

Se $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ formam uma base, então todo vetor $\vec{v}$ se exprime unicamente como combinação linear de $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

- $\exists!\ (a_1, a_2, a_3) : \vec{v} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$.

a_1, a_2, a_3 são *coordenadas* (ou *componentes*) de $\vec{v}$ em relação à base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

- $\exists!\ \vec{v} : \vec{v} = \sum a_i \vec{e}_i$.

Fixada uma base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, costuma-se representar $\vec{v}$ por meio da terna (a_1, a_2, a_3) ou da matriz-coluna $\vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$.

Teoremas:

- $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3), \vec{v} = (b_1, b_2, b_3) \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$.
- $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$ são linearmente dependentes se e somente se a matriz $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ tem característica (ou posto) menor do que 2 (número de linhas).
  - Determinantes dos menores: $\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$.
  - $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são linearmente independentes se e somente se M tem posto igual a 2 (ou seja, um dos menores tem determinante diferente de zero).
  - Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são linearmente dependentes, então $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$ $(\vec{v} \neq \vec{0})$ (ou seja, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são proporcionais).
- $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$ e $\vec{w} = (c_1, c_2, c_3)$ são linearmente dependentes se e somente se $\det M = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$.
  - $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são linearmente dependentes se e somente se $\exists (x, y, z),\ x \neq 0 \vee y \neq 0 \vee z \neq 0 : x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = 0$.
  - Noutros termos, se somente se $x(a_1, a_2, a_3) + y(b_1, b_2, b_3) + z(c_1, c_2, c_3) = (0, 0, 0)$ ou se e somente se há solução não trivial para o sistema:
$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = 0 \end{cases}$$
  - Para que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sejam linearmente independentes é necessário e suficiente que $\det M \neq 0$.

Mudança de base:

Sejam duas bases $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$.

Os vetores $\vec{f}_i$ são combinações lineares dos vetores $\vec{e}_i$, ou seja:

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3 \\ \vec{f}_3 = a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3 \end{cases}$$

A matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ chama-se *matriz de mudança de base E* para base F.

- Note que as coordenadas de $\vec{f}_i$ aparecem como *colunas* de d A.
- Como $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ e $\vec{f}_3$ são linear independentes, $\det A \neq 0$.
- A matriz de mudança de uma base B para B é a matriz unidade I_n.
- Seja um vetor $\vec{v}$. Considerem-se (x_1, x_2, x_3) as coordenadas de $\vec{v}$ em relação à base E e (y_1, y_2, y_3) as coordenadas de $\vec{v}$ em relação a F.
  - $x_j = \sum_{i=1}^{3} (a_{ji} \cdot y_i), \quad j = 1, 2, 3.$
  - $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, ou seja, a matriz de coordenadas de $\vec{v}$ na base E é igual ao produto da matriz de mudança de base E para F pela matriz das coordenadas de $\vec{v}$ em F.

- Sejam as bases E, F e G. A matriz de mudança de base de E para G é igual ao produto da matriz de mudança de base de E para F pela matriz de mudança de base de F para G.
- A matriz de mudança de base de F para E é a inversa da de E para F.