

Capítulo 1: Matrizes

1. Noção de matriz

Matriz: tabela $A_{m \times n}$ com elementos dispostos em m linhas e n colunas, $m, n \geq 1$.

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Notação: $A = (a_{ij})(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$.

Igualdade: $A = B \leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j$.

2. Adição de matriz

Sejam $A_{m \times n} = (a_{ij})$ e $B_{m \times n} = (b_{ij})$.

$$A + B = C_{m \times n} = (c_{ij}) : c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

- Matriz nula:

$$A = (a_{ij}) : a_{ij} = 0, \forall i, j \Rightarrow A = O$$

- Matriz oposta:

$$A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) : b_{ij} = -a_{ij}, \forall i, j \Rightarrow B = -A$$

- Diferença entre matrizes:

$$A - B = A + (-B) = C = (c_{ij}) : c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}, \forall i, j$$

Propriedades da adição:

1. $A + B = B + A$ (comutativa);
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (associativa);
3. $A + O = A$ (elemento neutro);
4. $A + (-A) = O$.

3. Produto de um número real por uma matriz

Sejam $A = (a_{ij})$ e $t \in \mathbb{R}$.

$$tA = B = (b_{ij}) : b_{ij} = t \cdot a_{ij}$$

Propriedades:

1. $a(bA) = (ab)A$;
2. $a(A + B) = aA + aB$;
3. $(a + b)A = aA + bA$;
4. $1 \cdot A = A$.

4. Somatórias

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

Propriedades:

1. $a \sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n ab_i$;
2. $\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)$;
3. $\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i$;
4. $\left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{j=1}^m b_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j$.

5. Produtos de matrizes

Sejam $A_{m \times n} = (a_{ij})$ e $B_{n \times p} = (b_{jk})$.

$$A \cdot B = C_{m \times p} = (c_{ik}) : c_{ik} = \sum_{j=1}^n (a_{ij} \cdot b_{jk})$$

- Matriz unidade de ordem n :

$$I_n = (\delta_{ij}) : \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad 1 \leq i, j \leq n$$

- δ_{ij} é o [símbolo de Kronecker](#).

Propriedades:

1. $A_{m \times n}, B_{n \times p}, C_{p \times r} \Rightarrow (AB)C = A(BC)$ (associativa);
2. $A_{m \times n}, B_{m \times n}, C_{n \times p} \Rightarrow (A + B)C = AC + BC$ (distributiva à direita);
3. $A_{n \times p}, B_{n \times p}, C_{m \times n} \Rightarrow C(A + B) = CA + CB$ (distributiva à esquerda);
4. $A_{m \times n} \Rightarrow AI_n = A = I_m A$ (elemento neutro);
5. $A_{m \times n}, B_{n \times p}, t \in \mathbb{R} \Rightarrow (tA)B = A(tB) = t(AB)$;
6. $O_{m \times n} \cdot A_{n \times p} = O_{m \times p}$;
7. $\exists A, B : A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = O_{m \times p}$.

6. Matriz transposta

Sejam $A_{m \times n} = (a_{ij})$ e $B_{n \times m} = (b_{ji})$.

$$b_{ji} = a_{ij}, \forall i, j \Rightarrow B = A^t$$

Propriedades:

1. $(A + B)^t = A^t + B^t$;
2. $(\lambda A)^t = \lambda A^t$;
3. $(AB)^t = B^t A^t$;
4. $(A^t)^t = A$.

- Matriz simétrica: $A^t = A$.

7. Matrizes inversíveis

Se a matriz quadrada $A_{m \times m}$ é inversível, então:

$$\exists B_{m \times m} : AB = BA = I_m \Rightarrow B = A^{-1}$$

- Uma matriz inversível é dita não singular. Uma matriz não inversível é chamada singular.
- Se A é inversível, sua inversa é única:

$$B = BI_n = B(AB') = (BA)B' = I_n B' = B'$$

- Se A é inversível, então, sua inversa também é inversível e $(A^{-1})^{-1} = A$.
- Se A e B são inversíveis, o produto é inversível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Determinante:

Cada matriz quadrada está associada a um número real chamado determinante: $\det A$.

Complemento algébrico (ou cofator):

Dada a *matriz quadrada* $A_{n \times n}$, chama-se cofator C_{ij} do elemento a_{ij} de A o produto de $(-1)^{i+j}$ pelo determinante da matriz obtida eliminando de A a linha i e a coluna j .

- $\sum_{j=1}^n a_{ij}C_{ij} = \det A$ (regra de Laplace);
- $\sum_{j=1}^n a_{ij}C_{kj} = 0 \quad (i \neq k)$;
- $\sum_{j=1}^n a_{ij}C_{kj} = \delta_{ik} \det A$ (linhas);
- $\sum_{j=1}^n a_{ji}C_{jk} = \delta_{ik} \det A$.

Matriz adjunta:

Seja a *matriz quadrada* $A_{m \times m} = (a_{ij})$.

Considere-se $\bar{A} = B = (b_{ij}) : b_{ij} = C_{ij}$ (cofator).

A transposta $(\bar{A})^t$ é dita [matriz adjunta](#) de A : $(\bar{A})^t = \text{adj}(A)$.

- $B = \text{adj}(A) \rightarrow AB = BA = (\det A) \cdot I_n$.
- $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.
 - $\exists A^{-1} \rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.
- Para que A seja inversível, é [condição suficiente e necessária](#) que $\det A \neq 0$.
 - Necessária: $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$;
 - Suficiente: $AB = BA = \det A \cdot I_n, \det A \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A}B$.

Aplicação:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

pode ser escrito como:

$$Ax = b$$

onde:

$$A = (a_{ij}), \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

e, sendo A inversível, a solução é dada por: $x = A^{-1}b$.

Capítulo 2: Vetores

8. Segmentos orientados

Segmento orientado: par ordenado de pontos, origem e extremidade.

- Notação: AB (A é a origem, B é a extremidade).
- Observações: $AB = CD \Leftrightarrow A = C \wedge B = D$. $AB \neq BA$.

Segmento nulo: origem = extremidade. Ex.: AA .

Segmento oposto: BA é o segmento orientado oposto a AB .

Comprimento: número real não negativo associado a um segmento orientado que denota o comprimento daquele segmento em determinada unidade.

- Notação: \overline{AB} .
- Observações: $\overline{AB} = \overline{BA}$, $\overline{AA} = 0$.

Direção e sentido:

- Sejam os segmentos não nulos AB e CD .
 - Têm a mesma direção se $AB \parallel CD$ (paralelos).
 - Os sentidos só podem ser comparados se têm a mesma direção.
- AB e BA têm sentidos opostos (e mesma direção).

Segmentos equipolentes: AB e CD são equipolentes se têm o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido.

- Notação: $AB \sim CD$.
- Observações:
 - $AA \sim BB$, $\forall A, B$ (segmentos nulos sempre equipolentes).
 - Sejam AB e CD não nulos e não colineares. $AB \sim CD \equiv AB \parallel CD \wedge AC \parallel BD$ ($ABCD$ é um paralelogramo).

Propriedades da equipolência:

1. $AB \sim BA$ (reflexiva);
2. $AB \sim CD \rightarrow CD \sim AB$ (simétrica);
3. $AB \sim CD, CD \sim EF \Rightarrow AB \sim EF$ (transitiva);
4. Sejam o segmento orientado AB e o ponto C , $\exists! D : AB \sim CD$ (transporte);
5. $AA \sim BB$, $\forall A, B$;
6. $AB \sim CD \rightarrow BA \sim DC$;
7. $AB \sim CD \rightarrow AC \sim BD$ (regra do paralelogramo).

9. Vetores

Vetor determinado por um segmento orientado AB : conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a AB .

- Notação: \overrightarrow{AB} ou $B - A$.
- Observações:
 - $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \leftrightarrow AB \sim CD$.
 - Os segmentos orientados equipolentes a AB são *representantes* do vetor \overrightarrow{AB} .
 - Todos os segmentos orientados nulos, equipolentes entre si, determinam um único vetor chamado vetor nulo $\vec{0}$.
 - Seja um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -\vec{v}$ é chamado de *vetor oposto* de \vec{v} . \overrightarrow{BA} é representado por qualquer DC tal que CD seja representante de \overrightarrow{AB} .

Propriedades dos vetores:

1. $A - A = \vec{0}$;
2. $-(B - A) = A - B$;
3. $B - A = D - C \rightarrow C - A = D - B$.

10. Soma de um ponto com um vetor

Sejam um ponto A e um vetor \vec{v} : $\exists! B : B - A = \vec{v}$.

B chama-se soma do ponto A com o vetor \vec{v} : $B = A + \vec{v}$

- Observações: $A - \vec{v} = A + (-\vec{v})$.

Propriedades:

1. $A + \vec{0} = A$;
2. $(A - \vec{v}) + \vec{v} = A$;
3. $A + \vec{v} = B + \vec{v} \Rightarrow A = B$;
4. $A + \vec{v} = A + \vec{u} \Rightarrow \vec{v} = \vec{u}$;
5. $A + (B - A) = B$.

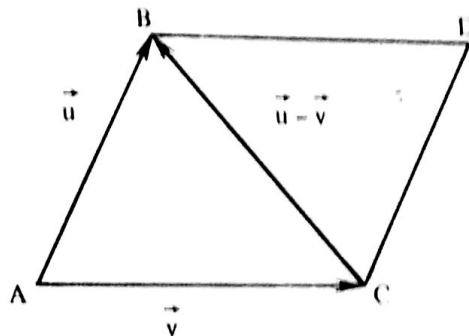
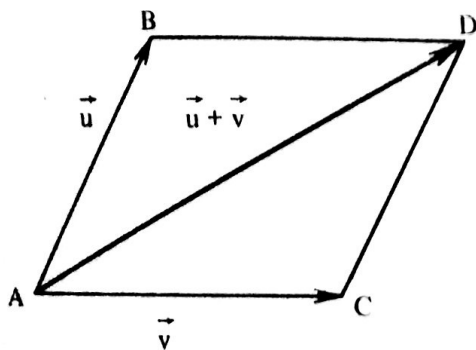
11. Adição de vetores

Sejam \vec{u}, \vec{v} e A . Considerem-se $B = A + \vec{u}$ e $C = B + \vec{v}$.

O vetor $\vec{w} = C - A = (A + \vec{u}) + \vec{v} - A = \vec{u} + \vec{v}$ não depende de A . \vec{w} é a soma de \vec{u} com \vec{v} .

Propriedades:

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (comutativa);
 2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (associativa);
 3. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ (elemento neutro);
 4. $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.
- Diferença de vetores: $\vec{w} = \vec{u} + (-\vec{v}) = \vec{u} - \vec{v}$ é a diferença de \vec{u} e \vec{v} .
 - Métodos gráficos:
 - Soma: "conectada" a extremidade de \vec{u} à origem de \vec{v} , $\vec{u} + \vec{v}$ é dado pelo vetor que tem por origem a origem de \vec{u} e por extremidade a extremidade de \vec{v} .
 - Diferença: "conectadas" as origens de \vec{u} e de \vec{v} , $\vec{u} + (-\vec{v}) = \vec{u} - \vec{v}$ é dado pelo vetor que tem por origem a extremidade de \vec{v} e por extremidade a extremidade de \vec{u} .



12. Módulo, direção e sentido

Módulo: o módulo $|\vec{v}|$ de um vetor \vec{v} é o comprimento de qualquer um de seus representantes.

Direção e sentido: a direção e o sentido de $\vec{u} \neq \vec{0}$ (não nulo) são a direção e o sentido de qualquer um de seus representantes.

- Observações:
 - $\vec{u} = \vec{v}$ se e somente se têm o mesmo módulo, mesma direção e mesmo sentido.
 - Módulo, direção e sentido determinam univocamente um vetor.
 - Vetor unitário: um vetor \vec{v} é dito unitário se $|\vec{v}| = 1$.
 - O versor de um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ é o vetor unitário de mesmo sentido que \vec{v} .
 - Dois vetores são paralelos se têm a mesma direção ou pelo menos um deles é nulo.

13. Produto de um número real por um vetor

Sejam $a \in \mathbb{R}^*$ (real não nulo) e $\vec{v} \neq \vec{0}$. O vetor $\vec{w} = a \cdot \vec{v}$, produto de a e \vec{v} , é definido por:

1. $|\vec{w}| = |a||\vec{v}|$;
2. $\vec{w} \parallel \vec{v}$ (mesma direção);
3. O sentido de \vec{w} é o mesmo de \vec{v} , se $a > 0$, e contrário ao de \vec{v} , se $a < 0$.

- Observações:
 - $a = 0 \vee \vec{v} = \vec{0} \rightarrow \vec{w} = a\vec{v} = \vec{0}$.
 - Se $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}$ é o versor de \vec{v} .

Propriedades:

1. $a(b\vec{v}) = (ab)\vec{v}$;
2. $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$;
3. $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$;
4. $1\vec{v} = \vec{v}$.

Espaço vetorial:

"Um conjunto V munido de duas operações satisfazendo as propriedades de adição de vetores/matrizes e de multiplicação de um número real por vetor/matriz é o que se chama *espaço vetorial*".

14. Dependência linear

Sejam $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ ($n \geq 1$). Diz-se que eles são *linearmente dependentes* se

$$\exists a_i \neq 0 \in (a_1, a_2, \dots, a_n) : \sum_{i=1}^n a_i \vec{v}_i = \vec{0}.$$

- Para provar que $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ são *linearmente independentes*, basta provar $\sum a_i \vec{v}_i = \vec{0} \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ (solução trivial).

Combinação linear: $\vec{v} = \sum a_i \vec{v}_i$ é dita combinação linear dos vetores \vec{v}_i com coeficientes a_i .

Teoremas:

- Sejam $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$. Se existe \vec{v}_i que é uma combinação linear dos outros, então eles são linearmente dependentes.
- Sejam $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$. Se k ($1 \leq k \leq n$) desses vetores são linearmente dependentes, eles são linearmente dependentes.
- \vec{v} é linearmente dependente se e somente se $\vec{v} = \vec{0}$.
- Para que dois vetores sejam linearmente dependentes, é condição necessária e suficiente que eles sejam paralelos:
 - $\vec{v} \neq 0, \vec{u} \parallel \vec{v} \Rightarrow \exists t : \vec{u} = t\vec{v}$.
- Três vetores são coplanares se podem ser representados por segmentos orientados paralelos a um mesmo plano.
 - Para que três vetores sejam linearmente dependentes, é condição necessária e suficiente que sejam coplanares.
 - Existência: se \vec{u}, \vec{v} e \vec{w} são coplanares, $\exists (a, b, c), a \neq 0 \vee b \neq 0 \vee c \neq 0 : a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$. Sendo que $c \neq 0$, então $\vec{w} = -\frac{a}{c}\vec{u} - \frac{b}{c}\vec{v}$.
 - Unicidade: $\vec{w} = m\vec{v} + n\vec{u} = m'\vec{v} + n'\vec{u} \Rightarrow (m - m')\vec{v} + (n - n')\vec{u} = \vec{0}$. Dado que $\vec{u} \perp \vec{v}$ (linearmente independentes), estão $m - m' = 0 \wedge n - n' = 0 \Rightarrow m = m' \wedge n = n'$.
 - Se \vec{u} e \vec{v} são linearmente independentes, todo vetor \vec{w} coplanar a \vec{u} e \vec{v} se exprime de forma única como combinação linear de \vec{u} e \vec{v} :
 - $\exists! (m, n) : \vec{w} = m\vec{v} + n\vec{u}$.
- Quatro vetores sempre linearmente dependentes.
 - Se \vec{u}_1, \vec{u}_2 e \vec{u}_3 são linearmente independentes, todo \vec{v} se exprime de forma única como combinação linear de \vec{u}_1, \vec{u}_2 e \vec{u}_3 .
 - $\exists! (a_1, a_2, a_3) : \vec{v} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3$.

15. Bases

Base no espaço: terna $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de vetores linearmente independentes.

Base no plano: dupla (\vec{e}_1, \vec{e}_2) de vetores linearmente independentes.

Base na reta: $\vec{e} \neq \vec{0} \in r$.

Se $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ formam uma base, então todo vetor \vec{v} se exprime unicamente como combinação linear de $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

- $\exists! (a_1, a_2, a_3) : \vec{v} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$.

a_1, a_2, a_3 são *coordenadas* (ou *componentes*) de \vec{v} em relação à base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

- $\exists! \vec{v} : \vec{v} = \sum a_i \vec{e}_i$.

Fixada uma base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, costuma-se representar \vec{v} por meio da terna (a_1, a_2, a_3) ou da

matriz-coluna $\vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$.

Teoremas:

- $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3), \vec{v} = (b_1, b_2, b_3) \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$.
- $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$ são linearmente dependentes se e somente se a matriz $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ tem característica (ou posto) menor do que 2 (número de linhas).
 - Determinantes dos menores: $\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$.
 - \vec{u} e \vec{v} são linearmente independentes se e somente se M tem posto igual a 2 (ou seja, um dos menores tem determinante diferente de zero).
 - Se \vec{u} e \vec{v} são linearmente dependentes, então $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$ ($\vec{v} \neq \vec{0}$) (ou seja, \vec{u} e \vec{v} são proporcionais).
- $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3), \vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$ e $\vec{w} = (c_1, c_2, c_3)$ são linearmente dependentes se e somente se $\det M = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$.
 - \vec{u}, \vec{v} e \vec{w} são linearmente dependentes se e somente se $\exists(x, y, z), x \neq 0 \vee y \neq 0 \vee z \neq 0 : x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0}$.
 - Noutros termos, se somente se $x(a_1, a_2, a_3) + y(b_1, b_2, b_3) + z(c_1, c_2, c_3) = (0, 0, 0)$ ou se e somente se há solução não trivial para o sistema:
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$$
 - Para que \vec{u} e \vec{v} e \vec{w} sejam linearmente independentes é necessário e suficiente que $\det M \neq 0$.

Mudança de base:

Sejam duas bases $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$.

Os vetores \vec{f}_i são combinações lineares dos vetores \vec{e}_i , ou seja:

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3 \\ \vec{f}_3 = a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3 \end{cases}$$

A matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ chama-se *matriz de mudança de base* E para base F .

- Note que as coordenadas de \vec{f}_i aparecem como *colunas* de A .
- Como \vec{f}_1, \vec{f}_2 e \vec{f}_3 são linear independentes, $\det A \neq 0$.
- A matriz de mudança de uma base B para B é a matriz unidade I_n .
- Seja um vetor \vec{v} . Considerem-se (x_1, x_2, x_3) as coordenadas de \vec{v} em relação à base E e (y_1, y_2, y_3) as coordenadas de \vec{v} em relação a F .
 - $x_j = \sum_{i=1}^3 (a_{ji} \cdot y_i), \quad j = 1, 2, 3$.
 - $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, ou seja, a matriz de coordenadas de \vec{v} na base E é igual ao produto da matriz de mudança de base E para F pela matriz das coordenadas de \vec{v} em F .

- Sejam as bases E , F e G . A matriz de mudança de base de E para G é igual ao produto da matriz de mudança de base de E para F pela matriz de mudança de base de F para G .
- A matriz de mudança de base de F para E é a inversa da de E para F .