Modelo de Solow (1956)

Características:

1. Modelo com agregações (sem micro-fundamentação);
2. Baseado em uma função de produção;
3. Remuneração dos fatores equivale a sua produtividade marginal;
4. Rendimentos marginais decrescentes.

> Característica 3 se dá em um contexto de concorrência perfeita (em que as firmas não têm lucro).
>
> Características 3 e 4 estão relacionadas com a homogeneidade da função de produção.

Crescimento do produto:

- Acumulação dos fatores de produção:
    - K: capital (físico ou humano);
    - L: trabalho.
- Progresso tecnológico.

> O progresso tecnológico em Solow é exógeno.

Hipóteses do modelo:

- Função de produção: $Y(t) = f\big[K(t), A(t)L(t)\big] \quad \mathbf{(1)}$.
    - $A \cdot L$: trabalho efetivo (progresso técnico incorporado ao trabalho).
    - Função com retornos constantes de escala.
    - Função homogênea de grau 1: $f(cK, cAL) = c \cdot f(K, AL),\ c \geq 0 \quad \mathbf{(2)}$.
        - Exemplo: Cobb-Douglas.

$$Y = f(K, AL) = K^\alpha (AL)^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad \mathbf{(3)}$$

Homogeneidade:

$$\begin{aligned} f(cK, cAL) &= (cK)^\alpha (cAL)^{1-\alpha} \\ &= c^\alpha K^\alpha c^{1-\alpha} (AL)^{1-\alpha} \\ &= cK^\alpha (AL)^{1-\alpha} \end{aligned}$$

- Na forma intensiva: seja $c = \dfrac{1}{AL}$, subst. em $\mathbf{(2)}$:

$$f\left(\frac{K}{AL}, 1\right) = \frac{1}{AL} f(K, AL) \quad \mathbf{(5)}$$

Subst. em $\mathbf{(1)}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{AL} Y &= \frac{1}{AL} f(K, AL) \\ \frac{Y}{AL} &= f\left(\frac{K}{AL}, 1\right) \end{aligned}$$

definam-se: $\dfrac{Y}{AL} = y;\ k = \dfrac{K}{AL}$.

Na forma intensiva: $y = f(k, 1) \Leftrightarrow y = f(k) \quad \mathbf{(6)}$.

- Propriedades de $\mathbf{(6)}$:
    1. $f(0) = 0$ (começa na origem).

2. $f'(k) > 0$ (sempre crescente).
3. $f''(k) < 0$ (cresce a taxas decrescentes).

> As propriedades 2 e 3 garantem a existência de um ponto máximo.

- Limites de variações do estoque de capital na forma intensiva:

1. $\lim_{k \to 0} f'(k) = \infty$.
2. $\lim_{k \to \infty} f'(k) = 0$.

> São chamadas condições de Inada.

- Exemplo: Cobb-Douglas.

Forma intensiva:

$$
\begin{aligned}
Y &= K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha} \\
\frac{Y}{AL} &= y = f(k) = \left(\frac{K}{AL}\right)^{\alpha}\left(\frac{AL}{AL}\right)^{1-\alpha} \Leftrightarrow y = k^{\alpha} \qquad \mathbf{(7)}
\end{aligned}
$$

1. $y(k=0) = 0 \quad \checkmark$
2. $y'(k) = \alpha k^{\alpha-1} > 0 \quad \checkmark$
3. $y''(k) = -\alpha(1-\alpha)k^{\alpha-2} < 0 \quad \checkmark$
4. $\lim_{k \to 0} y'(k) = \lim_{k \to 0} \alpha k^{\alpha-1} = \infty \ (\because 0 < \alpha < 1) \quad \checkmark$
5. $\lim_{k \to \infty} y'(k) = \lim_{k \to \infty} \alpha k^{\alpha-1} = 0 \quad \checkmark$

Fatores de produção:

Trabalho + tecnologia: cresce a uma taxa constante.

- $\frac{d}{dt}L(t) = \dot{L}(t) = nL(t) \quad \mathbf{(8)}$
  - "A força de trabalho é determinada por uma taxa constante e exógena": n.
- $\frac{d}{dt}A(t) = \dot{A}(t) = gA(t) \quad \mathbf{(9)}$
  - g: taxa de "crescimento" do progresso tecnológico (constante e exógena).
- Podemos calcular essas taxas a partir dos logaritmos:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\big(\ln L(t)\big) &= \frac{d}{dL(t)}\big(\ln L(t)\big) \cdot \frac{d}{dt}L(t) \\
&= \frac{1}{L(t)}\dot{L}(t) \Rightarrow \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = n \qquad \mathbf{(10)}
\end{aligned}
$$

ou seja: $d \ln L(t) = n\, dt$.

Se a diferença do log natural é igual à taxa de crescimento $\Big(\ln L(1) - \ln L(0) = n\Big)$,

podemos aplicar isso para qualquer período:

$$\begin{aligned}
&\ln L(1) = \ln L(0) + n \\
&\ln L(2) = \ln L(1) + n = \ln L(0) + 2n \\
&\ldots \\
&\ln L(t) = \ln L(0) + n \cdot t \quad \textbf{(11)} \\
\\
&\ln A(t) = \ln A(0) + g \cdot t \quad \textbf{(12)}
\end{aligned}$$

Voltando aos valores em nível de variáveis:

$$\begin{aligned}
L(t) &= L(0) \cdot \exp\{nt\} \quad \textbf{(13)} \\
A(t) &= A(0) \cdot \exp\{gt\} \quad \textbf{(14)}
\end{aligned}$$

Conclusão: trabalho e conhecimento crescem exponencialmente a partir de valores iniciais.

Capital: depende do investimento e da depreciação.

- Poupança: $S = sY(t)$.
  - s: taxa de poupança (exógena e constante).
- Vale a lei de Say: $S = I$ (poupança é iguala investimento).
  - Modelo de Solow pressupõe causalidade: *investimento depende de poupança prévia*.
- Taxa de depreciação δ: constante e exógena.
  - $n + g + \delta > 0$.
- Dinâmica do modelo:

$$\frac{d}{dt}K(t) = \dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t) \quad \textbf{(15)}$$

Na forma intensiva $k = \dfrac{K}{AL}$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{K}{AL}\right) = \dot{k}(t) &= \frac{K'(t)\big(A(t)L(t)\big) - K(t)\big(A(t)L(t)\big)'}{\big(A(t)L(t)\big)^2} \\
&= \frac{\dot{K}(t)}{A(t)L(t)} - \frac{K(t)}{\big(A(t)L(t)\big)^2}\left[A(t)\dot{L}(t) + \dot{A}(t)L(t)\right] \\
&= \frac{\dot{K}(t)}{A(t)L(t)} - \frac{K(t)}{A(t)L(t)} \cdot \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} - \frac{K(t)}{A(t)L(t)} \cdot \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} \quad \textbf{(16)}
\end{aligned}$$

Subst. $\textbf{(8)}$, $\textbf{(9)}$ e $\textbf{(10)}$ em $\textbf{(16)}$:

$$\begin{aligned}\dot{k}(t) &= \frac{sY(t)-\delta K(t)}{A(t)L(t)} - k(t)\cdot n - k(t)\cdot g \\ &= \frac{sY(t)}{A(t)L(t)} - \delta k(t) - nk(t) - gk(t) \\ &= sy(t) - (n+g+\delta)k(t) \quad \mathbf{(18)}\end{aligned}$$

onde $y(t) = f\big(k(t)\big) = \dfrac{Y}{AL}$.

Leituras complementares:

- ACEMOGLU, Daron. Economic Growth and Economic Development: The Questions. In: . "**Introduction to Modern Economic Growth**“. Department of Economics, Massachusetts Institute of Technology, 2007. p. 3-25.
- SIMON, Carl P. et al. Homogeneous and Homothetic Functions. In: . **Mathematics for economists**. New York: Norton, 1994. p. 483-504.