On considère une variable aléatoire scalaire et réelle Y de densité de probabilité :

$$f_Y(y) = \frac{1}{X} e^{-\frac{y}{X}} u(x)$$

où $u(y)$ est la fonction échelon d'Heaviside et X un paramètre réel, inconnu, positif et supposé certain dans un premier temps.

1. Calcul de la valeur moyenne et de l'écart type de la VA Y

$$\begin{aligned}
m_Y = E[Y] &= \int_{\mathbb{R}} y f_Y(y) dy \\
&= \int_0^{\infty} y \frac{1}{X} e^{-\frac{y}{x}} dy \\
&= [y(-e^{-\frac{y}{X}})]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-e^{-\frac{y}{X}}) dy \\
&= \int_0^{\infty} (-e^{-\frac{y}{X}}) dy \\
&= [-X e^{-\frac{y}{X}}]_0^{\infty} \\
m_Y &= X
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\sigma_Y^2 &= E[(Y - m_Y)^2] \\
&= E[Y^2] - m_Y^2 \\
E[Y^2] &= \int_0^{\infty} y^2 \frac{1}{X} e^{-\frac{y}{X}} dy \\
&= [y^2(-e^{-\frac{y}{X}})]_0^{\infty} + 2X \int_0^{\infty} y \frac{1}{X} e^{-\frac{y}{X}} dy \\
&= 2X m_Y = 2X^2 \\
\sigma_Y^2 &= 2X^2 - X^2 = X^2 \\
\sigma_Y &= X
\end{aligned}$$

$$\boxed{m_Y = \sigma_Y = X}$$

2. On considère N VA $Y_n, n = 1..N$ indépendantes et identiquement distribuées.
   On note $(y_1, ...y_N)$ les réalisations de $(Y_1, ...Y_N)$.

   Grâce au résultat précédent $m_Y = X$, on peut estimer

$$\hat{x} = \frac{\sum_{n=1}^{N} y_n}{N}$$

$$\hat{X} = \frac{\sum_{n=1}^{N} Y_n}{N}$$

   De plus, l'estimateur est non biaisé car

$$E[\hat{X}] = \frac{\sum_{n=1}^{N} E[Y_n]}{X} = X$$

3. On souhaite exprimer la ddp conjointe des VA $Y_1, ...Y_N$

$$\begin{aligned}
f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) &= f_{Y_1,...Y_N}(y_1, ...y_N) \\
&= \prod_{n=1}^{N} f_{Y_n}(y_n) \text{ par indépendance de } Y_1, ...Y_N \\
&= \frac{1}{X^N} \exp(-\frac{\sum_{n=1}^{N} Y_n}{X}) u(y_1)...u(y_N)
\end{aligned}$$

4. On utilise l'estimateur du maximum de vraisemblance

$$\hat{x}_{MV} = \arg\max_X f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$$

$\hat{x}_{MV}$ est la valeur de x qui rend les valeurs $y_1, ...y_N$ les plus probables.
Condition nécessaire (non suffisante) :

$$\begin{aligned}
\frac{df_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})}{dX}|_{X=\hat{x}_{MV}} = 0 \Leftrightarrow ... \\
&\Leftrightarrow (-\frac{N}{X} + \frac{\sum_{n=1}^{N} y_n}{X^2}) f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})|_{X=\hat{x}_{MV}} = 0 \\
&\Rightarrow \frac{-N}{\hat{x}_{MV}} + \frac{\sum_{n=1}^{N} y_n}{\hat{x}_{MV}^2} = 0 \\
&\Rightarrow \hat{x}_{MV} = \frac{\sum_{n=1}^{N} y_n}{N} \\
&\Rightarrow \hat{X}_{MV} = \frac{\sum_{n=1}^{N} Y_n}{N}
\end{aligned}$$

Vérifier que c'est un maximum :

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})}{dX^2} &> \text{ ou } < 0? \\
\frac{df_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})}{dX} &> 0 \text{ pour } x \to 0^+
\end{aligned}$$

Calculons la moyenne et l'écart type de $\hat{X}_{MV}$

$$\begin{aligned}
E[\hat{X}_{MV}] &= ... = X \\
\sigma_{MV}^2 &= E[(\hat{X}_{MV} - X)^2] \\
&= E[(\frac{\sum_{n=1}^{N} Y_n}{N} - \frac{NX}{N})^2] \\
&= E[(\frac{\sum_{n=1}^{N} (Y_n - X)}{N})^2] \\
&= \frac{1}{N^2}(\sum_{n=1}^{N} E[(Y_n - X)^2] + \sum_{i \neq j} E[(Y_i - X)(Y_j - X)] \\
&= \frac{NX^2}{N^2} \\
\sigma_{MV} &= \frac{X}{\sqrt{N}}
\end{aligned}$$

5. On a beaucoup plus d'*a priori* (d'informations sur X sans faire l'expérience) avec $\alpha = 1$ qu'avec $\alpha = 10$.
La courbe pour $\alpha = 10$ est beaucoup plus étalée :

$$\sigma_{X,\alpha=1} < \sigma_{X,\alpha=10}$$

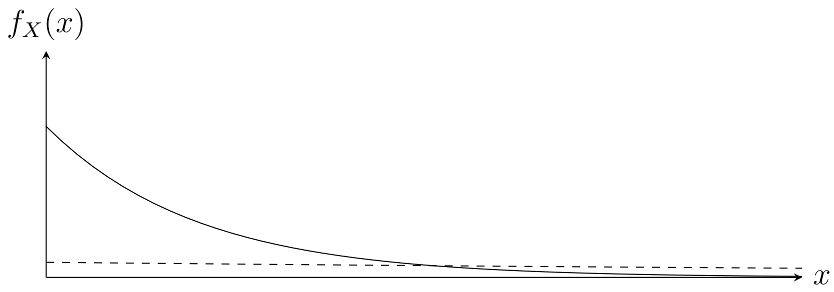

FIGURE 1 – Tracé de $f_X(x)$ pour $\alpha = 1$ (–) et $\alpha = 10$ (- -)

6. $\hat{x}_{MAP} = \arg\max_X f_{X/\mathbf{Y}=\mathbf{y}}(x)$
   Or,

$$\begin{aligned} f_{X/\mathbf{Y}=\mathbf{y}}(x) &= f_{\mathbf{Y},X=x}(\mathbf{y})\frac{f_X(x)}{f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})} \\ &= \prod_{n=1}^{N} f_{Y_i,X=x(y_i)}\frac{f_X(x)}{f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})} \\ &= g(x)u(y_1)...u(y_N)\frac{1}{f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})} \end{aligned}$$

   Ainsi,

$$\hat{x}_{MAP} = \arg\max_X f_{X/\mathbf{Y}=\mathbf{y}}(x) = \arg\max g(x)$$

   Condition nécessaire :

$$\begin{aligned} \frac{dg(x)}{dx}|_{x=\hat{X}_{MAP}} = 0 \Leftrightarrow \hat{X}_{MAP} &= \frac{-N\alpha + \sqrt{\alpha^2N^2 + 4\alpha\sum_{n=1}^{N} y_n}}{2} \\ \Leftrightarrow \hat{X}_{MAP} &= \frac{-N\alpha + \alpha N\sqrt{1 + \frac{4}{\alpha N^2}\sum_{n=1}^{N} y_n}}{2} \end{aligned}$$

7. Si $\alpha \to +\infty$,

$$\begin{aligned} \hat{X}_{MAP} &\approx \frac{-N\alpha + \alpha N(1 + \frac{1}{2}\frac{4}{\alpha N^2}\sum_{n=1}^{N} y_n}{)}2 \\ \hat{X}_{MAP} &\approx \frac{\sum_{n=1}^{N} Y_n}{N} = \hat{X}_{MV} \end{aligned}$$

   On n'a pas d'a priori sur X, on n'a que les observations.

   Si $\alpha \to 0$, m_X et $\sigma_X \to 0$: $\hat{X}_{MAP} \to 0$.
   L'a priori est fort.