Exercice 1 : Forme canonique et poursuite de trajectoire

1. (a) On a toujours le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x_1} & = & \begin{pmatrix} -10 & 12 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} x_1 & + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} u \\ y_1 & = & \begin{pmatrix} 4 & -5 \end{pmatrix} x_1 \end{cases}$$

Et on a effectué le changement de variable suivant : $x_1(t) = Mx_c(t)x_c = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ On a donc le système équivalent :

$$\begin{cases} \dot{x_c} & = & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} x_c & + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} u \\ y & = & \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x_c \end{cases}$$

(b) On impose la trajectoire :

$$y_d(t) = 10\left(\frac{t}{T}\right)^3 - 15\left(\frac{t}{T}\right)^4 + 6\left(\frac{t}{T}\right)^5$$

Le système est équivalent à :

avec l'équation d'observation : $y(t) = z_2(t)$

et le système d"état donne : $\begin{cases} \dot{z_2} = -2z_1 - 3z_2 + u \\ \dot{z_1} = z_2 \end{cases}$

Et comme on impose la trajectoire sur $y(t) = y_d(t)$, on a :

$$z_2^d(t) = y_d(t)$$

donc $z_1^d(t)$ doit vérifier :

$$\begin{aligned} z_1^d(t) &= \int_0^t y_d(\tau) d\tau \\ &= \frac{10T}{4}\left(\frac{t}{T}\right)^4 - \frac{15T}{5}\left(\frac{t}{T}\right)^5 + \frac{6T}{6}\left(\frac{t}{T}\right)^6 \end{aligned}$$

(c) On note :

$$\epsilon_d(t) = z_1(t) - z_1^d(t)$$

On cherche a déterminer le vecteur de la formule de Bumowski qui annulera $\epsilon_d(t)$

$$v(t) = -a^T x_c(t) + u(t) \text{ avec, } a = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{z_1} = z_2 \\ \dot{z_2} = v \end{cases} \Rightarrow v = \ddot{z_1}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\epsilon_d} &= \ddot{z_1} - \ddot{z_1^d} \\ &= v - \ddot{z_1^d} \end{aligned}$$

On cherche donc à avoir $\epsilon_d(t)$ solution de $\ddot{\epsilon_d}(t)+h_1\dot{\epsilon_d}(t)+h_0\epsilon_d(t)=0$, où $(h_0,h_1)\in\mathbb{R}^2$ à déterminer et dépendant du vecteur v. Tel que l'équation caractéristique possède des racines à parties réelles négatives. Donc ssi $h_1>0$ et $h_0>0$.
La transformée de Laplace de cette équation donne donc :

$$p^2\epsilon_d(p)-p\epsilon_d(0^+)-\dot{\epsilon_d}(0^+)+h_1(p\epsilon_d-\epsilon_d(o^+))+h_0\epsilon_d(p)=0$$
$$\epsilon_d=\frac{\dot{\epsilon_d}(0^+)+(h_1+p)\epsilon_d(0^+)}{p^2+h_1p+h_0}$$
$$=\frac{\gamma_1 p+\gamma_0}{(p-p_1)(p-p_2)}$$

Exemple : $p^2+h_1p+h_0=(p+\frac{10}{T})^2=p^2+\frac{20p}{T}+\frac{100}{T^2}$

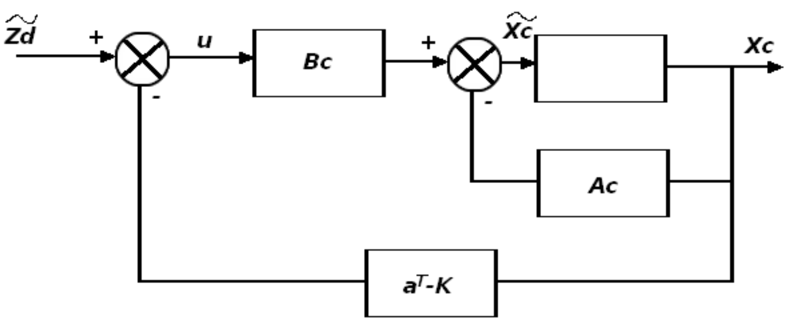
v doit vérifier d'après l'expression de $\ddot{\epsilon_d}$:

$$\begin{aligned}
v(t) &= \ddot{\epsilon_d}(t)+\ddot{z}_1^d(t)\\
&= \ddot{z}_1^d(t)-h_1(\dot{z}_1(t)-\dot{z}_1^d(t))-h_0(z_1(t)-z_1^d(t))\\
&= \begin{pmatrix} h_0 & h_1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\end{pmatrix}+(\ddot{z}_1^d(t)+h_1\dot{z}_1^d(t)+h_0z_1^d(t))\\
&= -Kx_c+\tilde{z}_d
\end{aligned}$$

or, $v=-a^Tx_c+u$, donc on obtient la loi de commande :

$$\begin{aligned}
u &= -Kx_c+\tilde{z}_d+a^Tx_c\\
&= (a^T-K)x_c+\tilde{z}_d
\end{aligned}$$

Loi de commande en BF par retour d'état :



Exercice 2 : Synthèse d'une loi de commande par retour d'état

1. On a ici, n=3. Déterminons la représentation d'état.
   On a avec la fonction de transfert :

$$A(p)Y(p)=B(p)U(p)$$

d'où l'équation dans le domaine temporelle :

$$y^{(3)} + 8y^{(2)} + 17y^{(1)} + 10y = u^{(1)} + 2u$$

On a donc la forme canonique de commandabilité :

$$\begin{aligned} \dot{x_c} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -17 & -8 \end{pmatrix} x_c + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ &= A_c x_c + B_c u \end{aligned}$$

et on a l'equation d'observation :

$$y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_c + 0.u$$

Attention : Le u de l'équation d'état et de la fonction de transfert ne sont PAS les mêmes, l'un est un scalaire l'autre un vecteur.

On a une forme canonique de commandabilité, donc le système est effectivement commandable. Cependant, l'observabilité n'est pas acquise.
La réalisation est observable ssi il n'y a pas de simplification d'un zéro par un pôle. Il suffit donc de vérifier que -2 n'est pas un zéro du numérateur.
Une représentation minimal est appelée réalisation d'état.

2. On impose pour la boucle fermée :

$$\begin{cases} u = -Kx_c + \eta e \\ K = \begin{pmatrix} k_0 & k_1 & k_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\nVdash \curvearrowleft \nVDash} \end{cases}$$

On a donc pour l'équation d'état :

$$\begin{aligned} \dot{x_c} &= A_c x_c + B_c u \\ &= (A_c - B_c K) x_c + \eta B_c e \\ &= A_{bf} x_c + \eta B_c e \end{aligned}$$

et pour l'éuation d'obersation :

$$y = C_c x_c$$

3. On impose les racines $P_1/P_2 = -m\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-m^2}$, donc on a le polynôme caractéristique : $\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2m}{\omega_0}p + 1$
Il est nécessaire de spécifier un troisième pôle $p_3 = -\lambda m\omega_0$, avec $\lambda >> 1$, car la système est d'ordre 3. Comment le choisir ? Stable, plus rapide que les autres pôles que l'on impose.

On a alors le polynôme à imposer :

$$\begin{aligned} \Pi_d(p) &= (p + \lambda m\omega_0)(p^2 + 2mp + \omega^2) \\ &= p^3 + (2+\lambda)m\omega_0 p^2 + (2\lambda m^2 + 1)\omega^2 p + \lambda m\omega_0^3 \end{aligned}$$

Pour la matrice A_{bf}, on a le polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned} P_{A_{bf}} &= det(p\mathbf{1_3} - A_{bf}) \\ &= p^3 + (8 + k_2)p^2 + (17 + k_1)p + (10 + k_0) \end{aligned}$$

Sachant qu'il y a une lien directe entre les coefficients de la matrice compagnon et son polynôme caractéristique.
On identifie donc les coefficients des deux polynômes :

$$\begin{cases} (8 + k_2) = (2 + \lambda)m\omega_0 \\ (17 + k_1) = (2\lambda m^2 + 1)\omega^2 \\ (10 + k_0) = \lambda m\omega_0^3 \end{cases}$$

4. Erreur statique nulle ssi le gain en p=0 vaut 1 (gain statique unitaire)
Or,

$$G_{bf}(p) = C_c(p\mathbf{1_3} - A_{bf})^{-1}B_c\eta$$

Donc ,

$$\eta = \frac{1}{-C_c(A_c - B - cK)^{-1}B_c}$$