subfiles

Exercice I : Gain complexe équivalent

1. Pour la fonction de seuil :

$$y = \begin{cases} 0 & \text{si } |X| \leq \frac{\Delta}{2} \\ x - \frac{\Delta}{2} & \text{si } X > \frac{\Delta}{2} \\ x + \frac{\Delta}{2} & \text{si } X < -\frac{\Delta}{2} \end{cases}$$

   On pose

$$N(X) = \frac{P + jQ}{X}$$

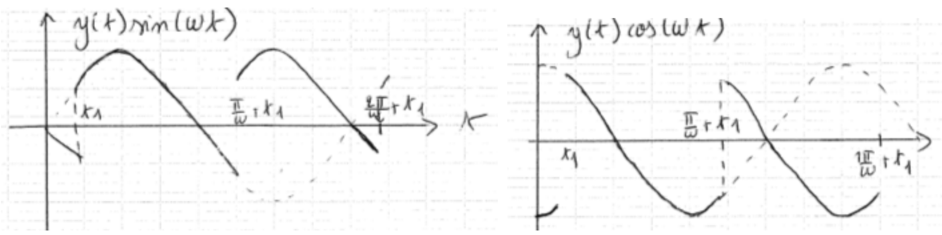
   avec

$$Q = 0$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{4\omega}{\pi} \int_{t_1}^{\frac{\pi}{2\omega}} (X sin(\omega t) - \frac{\Delta}{2}) sin(\omega t) dt \\ &= \frac{4\omega}{\pi} \int_{t_1}^{\frac{\pi}{2\omega}} (X sin^2(\omega t) - \frac{\Delta}{2} sin(\omega t)) dt \\ &= -\frac{2\Delta}{\pi} cos(\omega t_1) - \frac{4X\omega}{\pi} (\frac{t_1}{2} - \frac{\pi}{4\omega} - \frac{sin(2t_1\omega}{4\omega}) \\ \text{Or, } X sin(\omega t_1) &= \frac{\Delta}{2} \Rightarrow t_1 = \frac{1}{\omega} arcsin(\frac{\Delta}{2X}) \\ &\Rightarrow P = X(1 - \frac{2}{\pi}(arcsin(\frac{\Delta}{2X}) + \frac{\Delta}{2X}\sqrt{1 - (\frac{\Delta}{2X})^2} \end{aligned}$$

   On a alors $N(X) = \frac{P}{X}$.

2. Pour le relais avec hystérésis
   On pose $X \sin(\omega t_1) = \frac{h}{2}$ donc $t_1 = \frac{1}{\omega} arcsin(\frac{h}{2X})$



$$\begin{aligned} P &= \frac{\omega}{\pi} \int_{[T]} y(t) \sin(\omega t) dt \\ &= 2\frac{\omega}{\pi} \int_{t_1}^{\frac{\pi}{\omega}+t_1} M \sin(\omega t) dt \\ &= 2\frac{\omega}{\pi} M . \frac{-\cos(\pi + \omega t_1) + \cos(\omega t_1)}{\omega} \\ P &= \frac{4M}{\pi}\sqrt{1 - (\frac{h}{2X})^2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Q &= \frac{\omega}{\pi}\int_{[T]} y(t)\cos(\omega t)dt \\
&= 2\frac{\omega}{\pi}\int_{t_1}^{\frac{\pi}{\omega}+t_1} M\cos(\omega t)dt \\
&= 2\frac{\omega}{\pi}M.\frac{\sin(\pi+\omega t_1)-\sin(\omega t_1)}{\omega} \\
Q &= -\frac{4M}{\pi}\frac{h}{2X}
\end{aligned}
$$

$$
|N(X)| = \frac{\sqrt{P^2+Q^2}}{X} = \frac{4M}{\pi X}
$$

3. Pour le jeux sans inertie aval

$$
y(t) = \begin{cases} x(t)-\alpha & \text{sur } DA \\ M & \text{sur } AB \\ x(t)+\alpha & \text{sur } BC \\ -M & \text{sur } CD \end{cases}
$$

$$
|N(X)| = \frac{1}{2\pi}\sqrt{(1+\cos 2\beta)^2-(\pi+2\beta+\sin 2\beta)^2} \quad \text{avec} \quad \beta = \arcsin(1-2\frac{\alpha}{M})
$$

Exercice II : Asservissement avec boucle secondaire

1. Relations entre les différentes variables

$$
\begin{aligned}
s(p(1+T_2p)) = k_2 w &\Rightarrow \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + T_2\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = k_2 w(t) \\
w &= \phi(x) \\
x &= r - ks \\
r(1+T_1p) = -k_1 s &\Rightarrow r(t) + T_1\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -k_1 s(t)
\end{aligned}
$$

2. On exprime x en fonction de s et s en fonction de x :

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-k_1}{1+T_1p}s - ks \\
s &= \frac{k_2}{p(1+T_2p)}\phi(x)
\end{aligned}
$$

donc

$$
p(1+T_2p)(1+T_1p)x = -(k_1+k(1+T_1p))k_2\phi(x)
$$

$$
T_2T_1x^{(3)} + (T_1+T_2)x^{(2)} + x^{(1)} = -k_2(k_1+k)\phi(x) - kk_2T_1\frac{\mathrm{d}\phi(x)}{\mathrm{d}t}
$$

3. On peut appliquer l'approximation du 1er harmonique à la NL car :
   - La NL est statique
   - Un filtre passe-bas d'ordre relatif > 1 est en aval de la NL Si le filtre est $\frac{p+1}{p^2/\omega^2+2m/\omega p+1}$, on ne peut pas appliquer la méthode du 1er harmonique.

4. On a $Q = 0$ car la NL est impaire.

$$P = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\sin(\omega t)dt = \frac{2}{T}(\int_0^{T/2} M\sin(\omega t)dt - \int_{T/2}^{T} M\sin(\omega t)dt) = \frac{4M}{\pi}$$

5. Avec $x(t) = X\sin(\omega t)$, on a donc l'approximation $w(t) = N(X).x(t)$ avec $N(x) = \frac{4M}{\pi X}$.

6. Analyse harmonique en remplaçant $\frac{d}{dt} = j\omega$

$$-T_1T_2j\omega^3 - (T_1+T_2)\omega^2 + j(1 + kk_2T_1N(X))\omega + (k_1+k)k_2N(X) = 0$$

On en déduit les équations algébriques du cycle limite en prenant parties réelle et imaginaire :

$$\begin{aligned}(k_1+k)k_2N(X) - (T_1+T_2)\omega^2 = 0\\ (1 + kk_2T_1N(x))\omega - T_1T_2\omega^3 = 0\end{aligned}$$

7. Cycle limite.

Existence du cycle limite On cherche une solution aux équations algébriques :

$$\begin{aligned}Re = 0 \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{(k_1+k)k_2N(x)}{T_1+T_2}\\ Im = 0 \Rightarrow X_0 = \frac{4Mk_2T_1(k_1T_2-kT_1)}{\pi(T_1+T_2)}\end{aligned}$$

On peut alors réécrire

$$\omega_0^2 = \frac{k_1+k}{T_1(k_1T_2-kT_1)}$$

Stabilité du cycle limite

$$\frac{\partial R}{\partial X}|_0\frac{\partial I}{\partial \omega}|_0 - \frac{\partial I}{\partial X}|_0\frac{\partial R}{\partial \omega}|_0 > 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial X}|_0 = (k+k_1)k_2\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}X}|_0 < 0$$
$$\frac{\partial R}{\partial \omega}|_0 = -2(T_1+T_2)\omega_0 < 0$$
$$\frac{\partial I}{\partial X}|_0 = kk_2T_1\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}X}|_0\omega_0 < 0$$
$$\frac{\partial I}{\partial \omega}|_0 = 1 + kk_2T_1N(X_0) - 3T_1T_2\omega_0 = -2T_1T_2\omega_0^2 < 0$$

Le cycle limite est stable si $\frac{\partial R}{\partial X}|_0\frac{\partial I}{\partial \omega}|_0 - \frac{\partial I}{\partial X}|_0\frac{\partial R}{\partial \omega}|_0 > 0$

$$-2(k+k_1)k_2\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}X}T_1T_2\omega_0^2 + 2(T_1+T_2)\omega_0^2kk_2T_1\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}X} > 0$$

soit

$$T_2(k+k_1)\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}X}|_0 + (T_1+T_2)k\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}X}|_0 > 0$$

soit

$$T_1k - T_2k_1 < 0$$

Même condition que celle d'existence du cycle limite.

Exercice III : Contre-exemple

1. Voir Exercice I :

$$N(x) = \frac{4M}{\pi X}\sqrt{1-(\frac{h}{2X})^2} - j\frac{2Mh}{\pi X^2} = N_P(x) + jN_Q(X) \qquad \text{et} \qquad |N(X)| = \frac{4M}{\pi X}$$

Le lieu critique est défini par

$$-\frac{1}{N(x)} = \frac{-N_P(X) + jN_Q(X)}{|N(X)|^2} = -\frac{\pi X}{4M}\sqrt{1-(\frac{h}{2X})^2} - j\frac{\pi^2 h}{8M}$$

On trace le lieu de Nyquist de la fonction de transfert de $\frac{K}{1+\tau p}$ ainsi que celui de $-\frac{1}{N(X)}$: Il n'y a pas d'intersection entre les deux : d'après la méthode du 1er harmonique, il n'y a donc pas de cycle limite.

2. $KM > h/2$

L'entrée du filtre du 1er ordre $u = M$

$$y(t) = KM(1-e^{-t/\tau}) \Rightarrow \exists t_1 \text{ tq } y(t_1) > h/2 \text{ car } KM > h/2$$
$$x(t) = -y(t) < -h/2 \Rightarrow u = -M$$

et avec le même raisonnement,

$$\exists t_2 \text{ tq } y(t_2) < -h/2$$
$$x(t) > h/2$$

donc pour $KM > h/2$, il existe un cycle limite.

3. On obtient une contradiction car le filtre est de degré relatif égal à 1.