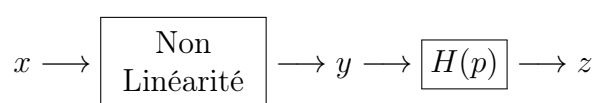


1 Hypothèses

- la non-linéarité est statique et n'évolue pas dans le temps. On peut la séparer de la dynamique du système. Par exemple, la saturation (ou la zone morte) est une non-linéarité statique.
- la partie dynamique (linéaire) est un filtre passe-bas *suffisamment efficace* pour négliger les harmoniques d'ordre supérieur à 1. Plus précisément, l'ordre relatif du filtre doit être supérieur strict à 1.

2 Schéma-blocs



La fonction de transfert $H(p)$ (fraction rationnelle) correspond à un filtre passe-bas de degré relatif ≥ 2 .

On prend $x = X \sin \omega t$. Dans le cas linéaire, seule la valeur de ω influe sur le tracé de la diagramme de Bode du système. Dans le cas non-linéaire, on a plusieurs tracés de réponses fréquentielles. Par exemple, avec une saturation, on obtient des réponses fréquentielles qui dépendent de l'amplitude d'entrée de X dès qu'elle devient trop élevée.

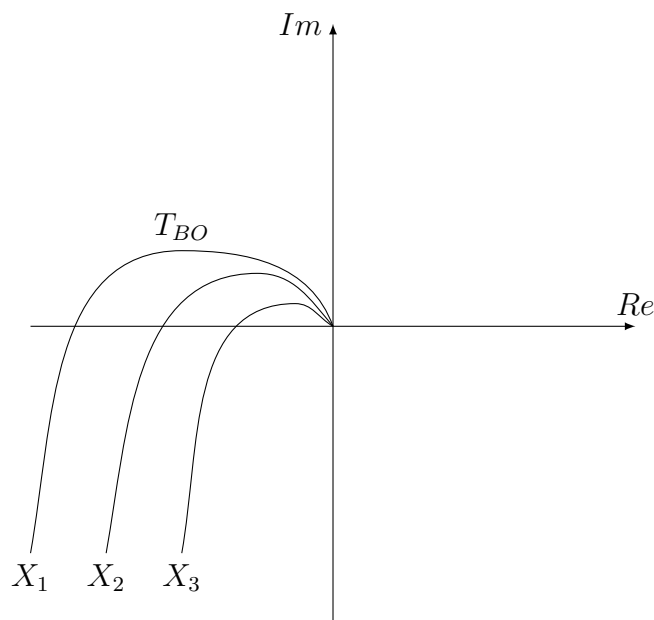


FIGURE 1 – Modification du lieu en fonction de l'amplitude

Puisque $H(p)$ rejette les harmoniques d'ordre supérieur à 1, on peut donc décomposer

$$y(t) = P \sin \omega t + Q \cos \omega t$$

Dans le cas d'une NL symétrique, on a

$$P = \frac{2}{T} \int_{[T]} y(t) \sin \omega t dt$$
$$Q = \frac{2}{T} \int_{[T]} y(t) \cos \omega t dt \quad \text{avec } \omega T = 2\pi$$

Remarque: Si la NL est non-symétrique, $y(t) = Y + P \sin \omega t + Q \cos \omega t$ avec $Y = \frac{1}{T} \int_{[T]} y(t) dt$. La composante continue Y peut être négligée pour l'analyse de stabilité et modélisée par une perturbation constante à l'entrée de $H(p)$.

Définition

On définit le *gain complexe équivalent*:

$$N(X) = \frac{P + jQ}{X} \text{ qu'on note } N(X) = N_P(X) + jN_Q(X)$$

- $N_P(X) = \frac{P}{X}$ est la gain en phase,
- $N_Q(X) = \frac{Q}{X}$ est la gain en quadrature.

Remarque:

- À la différence du système linéaire, pour une même pulsation, on a plusieurs réponses fréquentielles qui dépendent de l'amplitude de l'entrée X . L'analyse de stabilité doit donc se faire par rapport à tous les tracés.
- Les manipulations de schéma-blocs doivent satisfaire les règles connues (principe de superposition) et s'assurer que le signal en amont du bloc NL est le même, et en aval, qu'il est suffisamment filtré pour ne garer que le 1er harmonique.

Exemple :

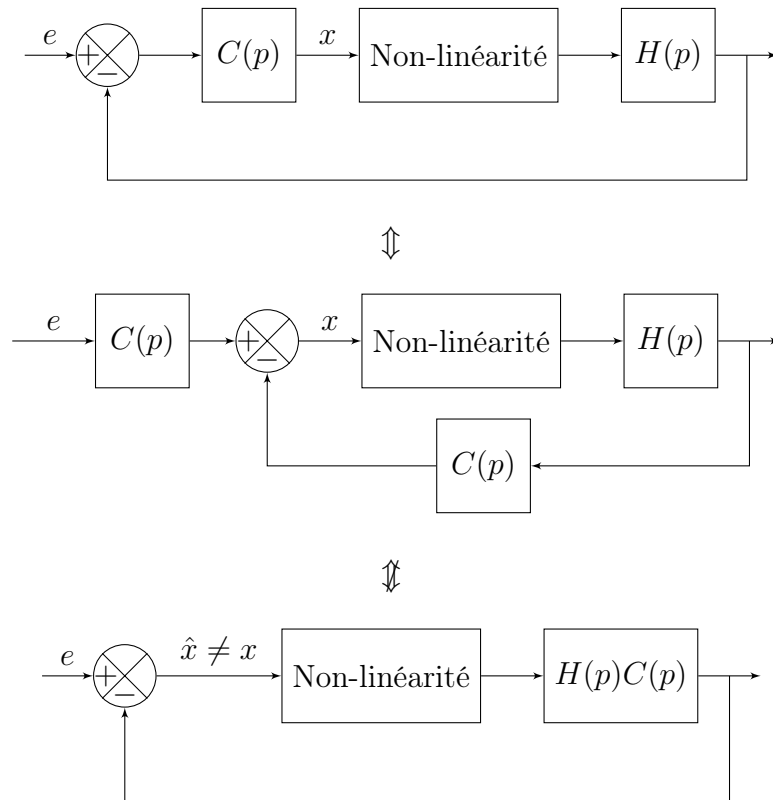
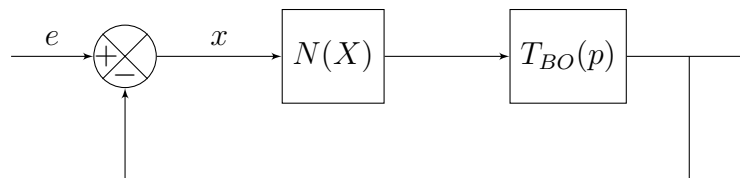


FIGURE 2 – Transformations de schéma-blocs

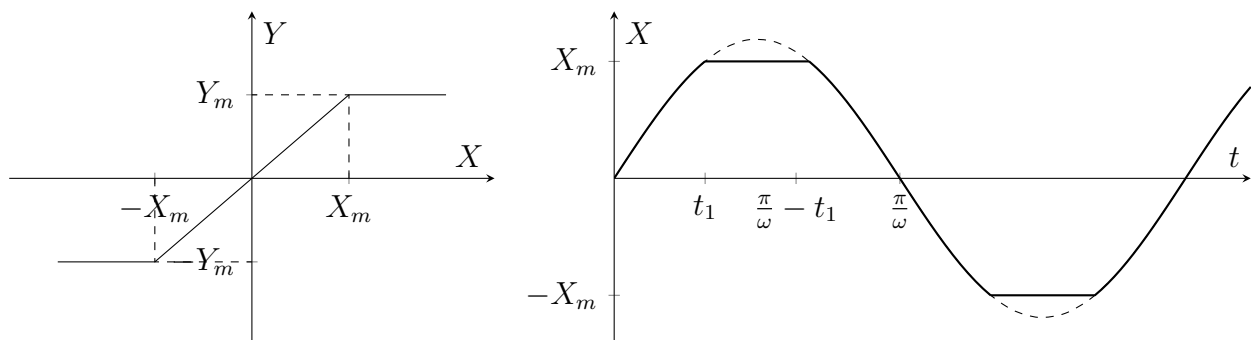
3 Analyse de la stabilité.

Système NL bouclé à retour unitaire



Dans l'analyse harmonique, la NL est modélisée par $N(X)$. Ainsi, il faut trouver l'expression de $N(X)$ en fonction de la NL :

Exemple: *saturation*



Calcul de $N(X)$:

Pour $0 \leq t \leq t_1$: $y(t) = X \sin \omega t$

$t_1 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega} - t_1$: $y(t) = X_m = X \sin \omega t_1$

$$\begin{aligned} P &= \frac{4\omega}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} y(t) \sin \omega t dt \\ &= \frac{4\omega}{\pi} \left[\int_0^{t_1} X \sin^2 \omega t dt + \int_{t_1}^{\frac{\pi}{2\omega}} X \sin \omega t_1 \sin \omega t dt \right] \\ &= \frac{2X}{\pi} \left[\omega t_1 + \frac{\sin 2\omega t_1}{2} \right] \end{aligned}$$

$t_1 = \arcsin(\frac{X_m}{X})$ et $Q = 0$

Ainsi

$$N(x) = \begin{cases} 1 & X \ll X_m \\ \frac{2}{\pi} \left[\arcsin \frac{X_m}{X} + \frac{X_m}{X} \sqrt{1 - \frac{X_m^2}{X^2}} \right] & X > X_m \end{cases}$$

Proposition

Le dénominateur de la BF, $1 + N(X)T_{BO}(p)$, donne la limite de stabilité :

$$T_{BO}(j\omega) = -\frac{1}{N(X)}$$

Le lieu critique remplace le point critique -1 .

On a donc pour notre exemple de saturation

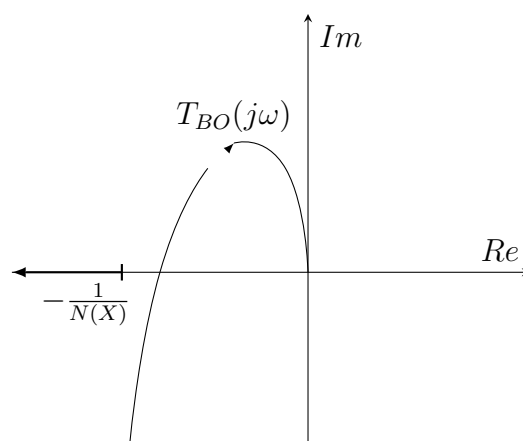


FIGURE 3 – INSTABLE

Ainsi dans le cas NL, on remplace le point critique -1 par le lieu critique $\frac{-1}{N(X)}$. Par conséquent, l'analyse de stabilité est réalisée par rapport à $\frac{-1}{N(X)}$. On a alors deux cas

1. Dans le cas où le tracé de Nyquist ne présente *pas d'intersection avec le lieu critique* on applique le critère de Nyquist ($N_{\frac{1}{N(Y)}} + = P_{T_{BO}}^T$) pour la stabilité ou celui du revers sur la FT, qui est alors stable, strictement propre et à déphasage minimal.
2. Si on a une ou plusieurs intersections, on a un régime auto-oscillant (cycle limite). $x(t) = X_0 e^{j\omega_0 t}$

4 Étude de la stabilité du cycle limite

Soit (X_0, ω_0) solution de $T_{B0}(j\omega_0) = -\frac{1}{N(X_0)}$ sur son cycle limite :

$$x(t) = X_0 e^{j\omega_0 t}$$

4.1 Critère analytique

On pose

$$T_{B0}(j\omega) + \frac{1}{N(X_0)} = R(\omega, X) + jI(\omega, X) = 0$$

Ainsi, on a

$$R(\omega_0, X_0) = 0 \text{ et } I(\omega_0, X_0) = 0$$

Pour analyser la stabilité on applique à t_0 une perturbation :

$$X_1 = X_0 + \delta X \text{ et } \omega_1 = \omega_0 + \delta\omega \quad \text{avec } \left| \frac{\delta X}{X_0} \right| \ll 1 \text{ et } \left| \frac{\delta\omega}{\omega_0} \right| \ll 1$$

$x(t)$ n'est plus périodique (plus d'intersection avec le lieu critique) et présente ainsi un amortissement $m > 0$ (stable) ou < 0 (instable).

$$x(t) = (X_0 + \delta X) e^{-mt} e^{j(\omega_0 + \delta\omega)t} = (X_0 + \delta X) e^{j(\omega_0 + \delta\omega + jm)t}$$

Ainsi la perturbation nous donne un régime auto-oscillant avec une amplitude $X_0 + \delta X$ et une *pulsation complexe* $\omega_0 + \delta\omega + jm$.

$$R(\omega_0 + \delta\omega + jm, X_0 + \delta X) + jI(\omega_0 + \delta\omega + jm, X_0 + \delta X) = 0$$

On applique un DL du 1er ordre autour de (ω_0, X_0) :

$$\left(\left. \frac{\partial R}{\partial X} \right|_{(\omega_0, X_0)} + j \left. \frac{\partial I}{\partial X} \right|_{(\omega_0, X_0)} \right) \delta X + \left(\left. \frac{\partial R}{\partial \omega} \right|_{(\omega_0, X_0)} + j \left. \frac{\partial I}{\partial \omega} \right|_{(\omega_0, X_0)} \right) (\delta\omega + jm) \approx 0$$

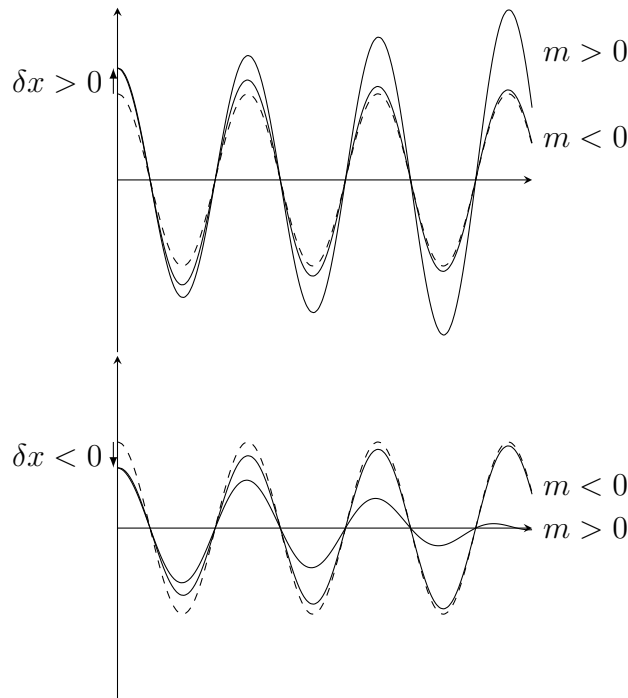
i.e. en notant $\left. \frac{\partial}{\partial X} \right|_{(\omega_0, X_0)} = \left. \frac{\partial}{\partial X} \right|_0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \omega} \Big|_0 \cdot \delta\omega + \frac{\partial R}{\partial X} \Big|_0 \cdot \delta X - \frac{\partial I}{\partial \omega} \Big|_0 \cdot m &= 0 \\ \text{et } \frac{\partial I}{\partial \omega} \Big|_0 \cdot \delta\omega + \frac{\partial I}{\partial X} \Big|_0 \cdot \delta X + \frac{\partial R}{\partial \omega} \Big|_0 \cdot m &= 0 \end{aligned}$$

Élimination de $\delta\omega$:

$$\underbrace{\left(\left(\frac{\partial R}{\partial \omega} \Big|_0 \right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial \omega} \Big|_0 \right)^2 \right)}_{\geq 0} m = \left(\frac{\partial R}{\partial X} \Big|_0 \cdot \frac{\partial I}{\partial \omega} \Big|_0 - \frac{\partial R}{\partial \omega} \Big|_0 \cdot \frac{\partial I}{\partial X} \Big|_0 \right) \delta X$$

Différents types de perturbation



- $m > 0$ et $\delta X > 0$: CL est stable
- $m < 0$ et $\delta X > 0$: CL est instable
- $\delta X < 0$ et $m < 0$: CL est stable
- $\delta X < 0$ et $m > 0$: CL est instable

Proposition (Condition de stabilité du cycle limite dans le plan de Nyquist)

le cycle limite est stable si et seulement si $\delta X \cdot m > 0$

Pour que $\delta X \cdot m > 0$:

$$\left. \frac{\partial R}{\partial X} \right|_0 \cdot \left. \frac{\partial I}{\partial \omega} \right|_0 - \left. \frac{\partial R}{\partial \omega} \right|_0 \cdot \left. \frac{\partial I}{\partial X} \right|_0 > 0$$

On pose $T_{B0}(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$ et $-\frac{1}{N(X)} = L(X) + jM(X)$
On a un cycle limite si

$$T_{B0}(j\omega_0) = -\frac{1}{N(x)} \Rightarrow \begin{cases} R(\omega, X) = U(\omega) - L(X) \\ I(\omega, X) = V(\omega) - M(X) \end{cases}$$

d'où d'après la condition de stabilité du cycle limite :

$$-\left. \frac{\partial L}{\partial X} \right|_0 \cdot \left. \frac{\partial V}{\partial \omega} \right|_0 + \left. \frac{\partial U}{\partial \omega} \right|_0 \cdot \left. \frac{\partial M}{\partial X} \right|_0 > 0$$

4.2 Critère graphique

On repart de l'équation caractéristique du cycle limite :

$$T_{BO}(j\omega) + \frac{1}{N(X)} = 0$$

On note alors :

$$\begin{cases} T_{BO}(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) \\ -\frac{1}{N(X)} = P(X) + jQ(X) \end{cases} \implies \begin{cases} \Re(X, \omega) = U(\omega) - P(X) \\ \Im X, \omega = V(\omega) - Q(X) \end{cases}$$

La condition de stabilité du cycle limite devient :

$$\left. \frac{\partial Q}{\partial X} \right|_0 \left. \frac{\partial U}{\partial \omega} \right|_0 - \left. \frac{\partial V}{\partial \omega} \right|_0 \left. \frac{\partial P}{\partial X} \right|_0 > 0$$

Si on se place dans \mathbb{R}^3 , on a 2 vecteurs : $\begin{bmatrix} U \\ V \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} P \\ Q \\ 0 \end{bmatrix}$ qui décrivent respectivement T_{BO} et $-\frac{1}{N}$.

Les tangentes aux courbes T_{BO} et $-\frac{1}{N}$ sont colinéaires aux vecteurs :

$$\vec{v}_T = \frac{\partial}{\partial \omega} \begin{bmatrix} U \\ V \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \vec{u}_N = \frac{\partial}{\partial X} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ 0 \end{bmatrix} \text{ alors } \vec{v}_T \wedge \vec{u}_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\partial P}{\partial X} \cdot \frac{\partial V}{\partial \omega} + \frac{\partial U}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial Q}{\partial X} \end{bmatrix}$$

Ainsi, la condition $-\frac{\partial P}{\partial X} \cdot \frac{\partial V}{\partial \omega} + \frac{\partial U}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial Q}{\partial X} > 0 \implies (\vec{v}_T, \vec{u}_N)$ dans le sens direct.

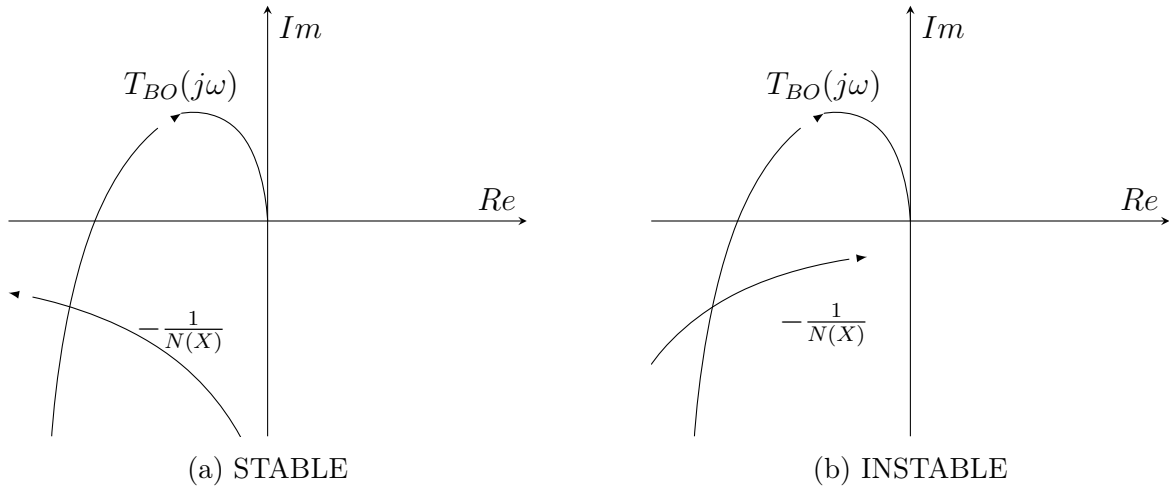


FIGURE 4 – Critère géométrique de stabilité

Théorème (Critère de Loeb)

Le cycle limite est stable si l'intersection de $T_{BO}(j\omega)$ et de $-\frac{1}{N(X)}$ est telle qu'en parcourant le lieu de Nyquist $T_{BO}(j\omega)$ dans le sens des ω croissants, on laisse à gauche la direction des X croissant sur le lieu critique.