Exercice 1 : Analyse et synthèse par une approche (pseudo-)continue

On considère la fonction de transfert

$$H(p) = \frac{1}{p(1+\tau p)} \qquad \text{avec} \qquad \tau = 0,2$$

La période d'échantillonnage est $T_e = 0,2s$ et l'on souhaite régler le correcteur PI pour satisfaire le cahier des charges suivants en boucle fermée :

- marge de phase de 45 degrés
- erreur en vitesse ϵ_v nulle

1. Synthèse d'un correcteur à temps continu
   (a) On considère le BOZ $B_0(p) = \frac{1-e^{-T_ep}}{p}$ que l'on cherche a approché par un retard pur équivalent :

$$\begin{aligned} B_0(p) &= \frac{1-e^{-T_ep}}{p} \\ &= e^{-\frac{T_ep}{2}} \frac{e^{\frac{T_ep}{2}} - e^{-\frac{T_ep}{2}}}{p} \end{aligned}$$

   Or, le développement limité à l'odre 1 $e^{-T_ep} = 1 - T_ep$ donne :

$$\tilde{B}_0(p) = e^{-\frac{T_ep}{2}} \frac{1 + \frac{T_ep}{2} - (1 - \frac{T_ep}{2})}{p}$$

$$\boxed{\tilde{B}_0(p) = T_e e^{\frac{-T_ep}{2}}}$$

   (b) On se propose de régler le correcteur PI en utilisant le tracé de la fonction de transfert en boucle ouverte du système.
   Le correcteur a donc la forme :

$$C(p) = K_p(1 + \frac{1}{T_ip})$$

   et on pose

$$L(p) = \tilde{B}_0(p)H(p) = \frac{T_e e^{\frac{-T_ep}{2}}}{p(1+\tau p)}$$

   On s'intéresse dans un premier temps à l'erreur en vitesse. On prend donc pour entrée $e(t) = t$ d'où $E(p) = \frac{1}{p^2}$

   On a donc comme écart $\epsilon(p) = \frac{E(p)}{1+L(p)C(p)}$, et on va appliquer le théorème de la valeur finale :

$$\begin{aligned} \epsilon_v &= \lim_{t\to\infty} \epsilon(t) \\ &= \lim_{p\to 0} p\epsilon(p) \\ &= \lim_{p\to 0} p\frac{1}{p^2}\frac{1}{1+L(p)C(p)} \\ &= \lim_{p\to 0} \frac{T_ip(1+\tau p)}{T_ip^2(1+\tau p) + T_e e^{\frac{-T_ep}{2}} K_p(1+T_ip)} & = 0 \end{aligned}$$

L'erreur statique de vitesse est bien nulle avec ce modèle du retard pur pour le BOZ.

Intéressons-nous maintenant au réglage du correcteur, on relève le gain lorsque la phase est de -135 degrés et on cherche à annuler ce gain pour imposer le marge de phase à 45 degrés. On relève un gain de -35dB, il faut donc relever le gain de 35dB :

$$20log(K_p) = 25 \Rightarrow K_p = 10^{\frac{25}{20}} = 18$$

De plus, pour régler T_i, on fait en sorte que la phase du correcteur n'influence pas trop celle du système dans la bande passante, donc que la phase du correcteur seul soit à zéro quand celle du système est proche du point critique -1. Il est une bonne approximation de prendre T_i de sorte que $\frac{1}{T_i}$ soit une décade plus tôt que la pulsation de coupure du système ou d'annulation du gain (choix effectué ici). Donc :

$$\frac{1}{T_i} = \frac{\omega_{0dB}}{10} \Rightarrow T_i = \frac{10}{3} = 3.3s$$

(c) On utilise l'approximation $z = e^{pT_e} \approx 1 + pT_e$ pour écrire la fonction de transfert en z du correcteur échantillonné, on a donc $p = \frac{z-1}{T_e}$, d'où :

$$\begin{aligned} C(p)|_{p=\frac{z-1}{T_e}} &= C(z) \\ &= K_p(1 + \frac{1}{\frac{T_i}{T_e}(z-1)}) \\ &= K_p\frac{z + \frac{T_e}{T_i} - 1}{z-1} \end{aligned}$$

La fonction de transfert en z du système + BOZ est :

$$\begin{aligned} T(z) &= (1 - z^{-1})Z\{^*L^{-1}\{\frac{H(p)}{p}\}\} \\ &= \frac{b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0} \\ \text{avec} \quad b_0 &= (1-D)\tau - T_e D \\ b_1 &= T_e + (D-1)\tau \\ a_0 &= D \\ a_1 &= -D - 1 \\ D &= e^{-T_e/\tau} \end{aligned}$$

(d) Déterminons si le système échantillonné est stable si asservi de la sorte (correcteur numérique) :
On peut appliquer le critère de Routh à $1 + C(z)T(z)$, avec $T(z)$ la fonction de transfert de l'asservissement échantillonné, CF TD précédent.

2. Synthèse "pseudo-continue"

(a) Déterminons la fonction de transfert en w du système échantillonné :

$$T(z)|_{z=\frac{1+w}{1-w}} = \tilde{T}(w) = \frac{b_1\frac{1+w}{1-w} + b_0}{(\frac{1+w}{1-w})^2 + a_1\frac{1+w}{1-w} + a_0}$$
$$= \frac{b_1(1-w^2) + b_0(1-2w+w^2)}{(w^2+w+1) + a_1(1-w^2) + a_0(1-2w+w^2}$$

$$\boxed{\tilde{T}(w) = \frac{(b_0-b_1)w^2 - 2b_0w + b_0 + b_1}{(1-a_1+a_0)w^2 + 2(1-a_0)w + 1 + a_1 + a_0}}$$

Comment se traduit le cahier des charges pour le système transformé ?

$$z = \frac{1+w}{1-w} \Leftrightarrow w = \frac{z-1}{z+1} \text{ avec } z = e^{T_e p}$$

La réponse fréquentielle est valable pour $p = j\omega$ avec $\omega \in [0, \frac{\pi}{T_e}]$, donc pour :

$$w = \frac{e^{j\omega T_e} - 1}{e^{j\omega T_e} + 1} = \frac{2j\sin(\omega\frac{T_e}{2})}{2\cos(\omega\frac{T_e}{2})} = j\tan(\frac{\omega T_e}{2})$$

Ainsi, quand ω varie de 0 à $\frac{\pi}{T_e}$ alors w varie de 0 à l'infini sur l'axe des imaginaires. On pose donc $w = j\tilde{\omega}$ et $\tilde{\omega} \in [0; +\infty[$

En quoi on répond à la question ? ? ?

(b) On va régler ici le correcteur PI en la variable w : On a $C(w) = K_p(1 + \frac{1}{T_i w}$ et $\epsilon(w) = \frac{1}{1+C(w)\tilde{T}(w)}E(w)$

On applique une entrée en rampe $t \to nT_e \to \frac{T_e z}{(z-1)^2}$, on a donc :

$$E(w) = E(z)|_{z=\frac{1+w}{1-w}} = \frac{T_e(1+w)}{(1-w)(\frac{1+w-1+w}{1-w})^2}$$
$$= \frac{T_e(1-w^2)}{4w^2}$$

Intéressons nous maintenant à l'écart statique en vitesse avec el théorème de la valeur finale :

$$\epsilon_v = \lim_{z\to 1}(z-1)E(z)$$
$$z \to 1 \Leftrightarrow w \to 0 \text{ car, } z - 1 = \frac{2w}{1-w}$$
$$\epsilon_v = \lim_{w\to 0}\frac{2w}{1-w}\epsilon(w)$$
$$= \lim_{w\to 0}\frac{2w}{1-w}\frac{1}{1+K_p(1+\frac{1}{T_i w}\frac{\beta_2 w^2+\beta_1 w+\beta_0}{\alpha_2 w^2+\alpha_1 w+\alpha_0}\frac{T_e(1-w^2)}{4w^2})}$$
$$= ...$$
$$= 0$$

Caractérisons maintenant le correcteur en fonction du cahier des charges. Comme précedemment on relève le gain lorsque la phase est à -135 degrés et on a : $K_p = 10^{\frac{10}{20}} = 3.3$ et le choix de T_i est le même fait comme précedemment donc : $T_i = \frac{10}{\tilde{\omega}_{0dB}} = 33.3s$

(c) La transformée en z ainsi, obtenue est :

$$\begin{aligned} C(z) &= C(w)|_{w=\frac{z-1}{z+1}} \\ &= K_p(1 + \frac{z+1}{T_i(z-1)} \\ &= \frac{C_p}{T_i} \frac{T_i z + 1 - T_i}{z-1} \end{aligned}$$