subfiles

Exercice I : Platitude

1. On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x_1} & = x_2 - x_1 cos x_1 \\ \dot{x_2} & = (x_2^2 + u)(5 + sin x_1) \end{cases}$$

Montrons que x_1 est une sortie plate, pour cela, il faut exprimer u en fonction de x_1 et ses dérivées uniquement :

$$\begin{aligned} x_2 &= \dot{x_1} + x_1 cos x_1 \\ u &= \frac{\dot{x_2}}{5 + sin x_1} - x_2^2 \\ &= \frac{\ddot{x_1} + \dot{x_1} cos x_1 - \dot{x_1} x_1 sin x_1}{5 + sin x_1} - (\dot{x_1} + x_1 cos x_1)^2 \end{aligned}$$

x_1 est bien une sortie plate.

2. On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x_1} & = -x_1^2 + x_2 \\ \dot{x_2} & = x_2 x_1 + u_1 \\ \dot{x_3} & = u_2 \end{cases}$$

Montrons que x_1 et x_3 sont des sorties plates :

$$\begin{aligned} x_2 &= \dot{x_1} - x_1^2 \\ u_1 &= \dot{x_2} - x_2 x_1 \\ &= \ddot{x_1} - 3 x_1 \dot{x_1} + x_1^3 \\ u_2 &= \dot{x_3} \end{aligned}$$

On a bien les commandes en fonctions de x_1,x_3 et leurs dérivées uniquement.

Exercice II : Planification

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x_1} & = x_2 \\ \dot{x_2} & = \alpha \dot{x_1} + u \end{cases}$$

1. Trouvons la sortie plate y. On remarque que pour $y = x_1$ on a $u = \ddot{y} - \alpha \dot{y}$, donc ce y convient (est une sortie plate) et on a alors le système :

$$\begin{cases} \dot{x_1} & = y \\ \dot{x_2} & = \dot{y} \\ u & = \ddot{y} - \alpha \dot{y} \end{cases}$$

2.

$$\begin{aligned} y_c(t) &= a(T-t)^3 + b(T-t)^2 + c(T-t) + d \\ y_c(0) &= y_0 \Rightarrow aT^3 + bT^2 + cT + d = y_0 \\ y_c(T) &= y_T \Rightarrow d = y_T \\ \dot{y_c}(T) &= 0 \Rightarrow -c = 0 \\ \ddot{y_c}(T) &= 0 \Rightarrow b = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow aT^3 = y_0 - y_T \\ &\Rightarrow a = \frac{y_0 - y_T}{T^3} \end{aligned}$$

$u = \ddot{y} - \alpha \dot{y}$

Exercice III : Suspension magnétique

On peut appliquer le backstepping car le système est de forme triangulaire :

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= x_2 \\ \dot{x_2} &= -g + \frac{k}{m}\frac{x_3^2}{(c-x_1)^2} \\ \dot{x_3} &= \frac{-x_3+k_v u}{\tau} \end{cases}$$

On a u^* qui permet d'avoir x_3 qui via α_3 donne x_3^* qui lui donne x_2 qui via α_2 donne x_2^* qui donne x_1 qui lui donne x_1^* via α_1. Peut-être.

Etape 1 :

On pose $V_1(x_1) = \frac{1}{2}(x_1 - x_1^*)^2$ avec $x_1^* = z_*$, et, $\dot{V_1} = \alpha_1(x_1 - x_1^*)^2$. En égalisant les deux termes, on trouve après simplification que :

$$x_2^* = \alpha_1(x_1 - x_1^*) + \dot{x_1}^* \text{avec, } \alpha_1 < 0$$

Etape 2 :

On pose :

$$V_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1 - x_1^*)^2 + \frac{1}{2}(x_2 - x_2^*)^2$$
$$\dot{V_2}(x_1, x_2) = \alpha_1(x_1 - x_1^*)^2 + \alpha_2(x_2 - x_2^*)^2 \text{avec, } \alpha_2 < \alpha_1 < 0$$

On dérive, on égalise et on injecte $\dot{x_2}$ pour trouver

$$x_3^2 = \hat{x_3}^* = (\alpha_2(x_2 - x_2^*) + g + \dot{x_2}^*)\frac{m}{k}(c - x_1)^2$$

Etape 3 :

On s'intéresse ici à $\hat{x_3}$ plutot que x_3^2. On pose :

$$V_3(x_1, x_2, \hat{x_3}) = V_2(x_1, x_2) + \frac{1}{2}(\hat{x_3} - \hat{x_3}^*)^2$$
$$\dot{V_3}(x_1, x_2, \hat{x_3}) = \dot{V_2}(x_1, x_2) + \alpha_3(\hat{x_3} - \hat{x_3}^*)^2$$

On dérive, on égalise et on injecte $\dot{x_3}$ pour trouver

$$u = \frac{2x_3 + \alpha_3\tau(x_3 - \hat{x_3}^*/x_3) + \tau\dot{\hat{x}}_3^*}{2k_v}$$

Il faut éviter que $x_3 = 0$ pour avoir i non nul ?

Exercice IV : Commande par modes glissants

$\alpha_0 = 1.5, \alpha(t) = \alpha_0 + \Delta\alpha avec|\Delta\alpha| \leq 0.5$ $S = \dot{\epsilon} + \beta_0\epsilon$

$\dot{S} = \ddot{\epsilon} + \beta_0\dot{\epsilon}$ Poursuite assymptotique $u = (\alpha_0 x_2^2 + \ddot{y}_c + \dot{S} + \alpha K sign(S))$ Premier terme : mode linéarisant Terme 3 et 4 : mode glissant

$\alpha > 1 K telque |\Delta\alpha x_2^2| < K$