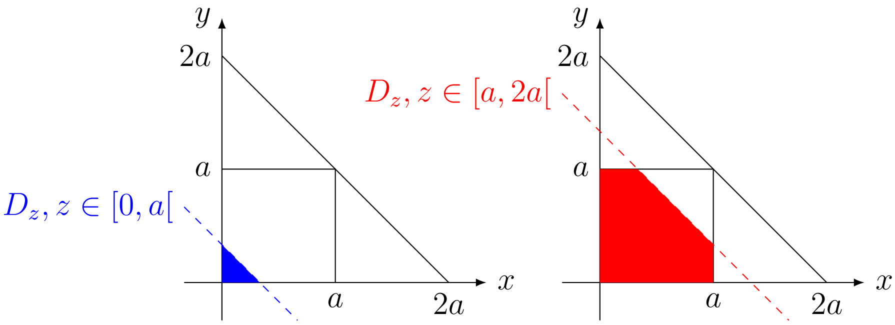
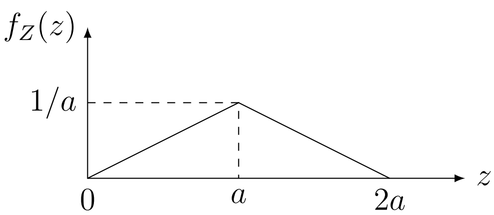
1. À l'extérieur du carré, $f_{XY}(x,y) = 0$. À l'intérieur, le couple (X,Y) est uniformément réparti donc :
$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{a^2} & \text{si} \quad x \in [0,a[, y \in [0,a[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
$f_{XY}(x,y) = g_X(x)g_Y(x)$, f_{XY} est séparable donc X et Y sont indépendantes.

2. On considère la VA $Z = X + Y$. Comme $X \in [0,a[$ et $Y \in [0,a[$, $Z \in [0,2a[$
Calculons la fonction de répartition de la VA Z.
$$F_Z(z) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad z > 2a \\ ? & \text{si} \quad z \in [0,2a] \\ 0 & \text{si} \quad z < 0 \end{cases}$$
Si $z \in [0,2a[$, l'expression de la fonction de répartition n'est pas immédiate :
$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P[Z < z] \\ &= P[(X,Y) \in D_z] \\ &= \begin{cases} \frac{z^2/2}{a^2} & \text{si} \quad z \in [0,a] \\ \frac{a^2 - \frac{(2a-z)^2}{2}}{a^2} & \text{si} \quad z \in [a,2a] \end{cases} \end{aligned}$$



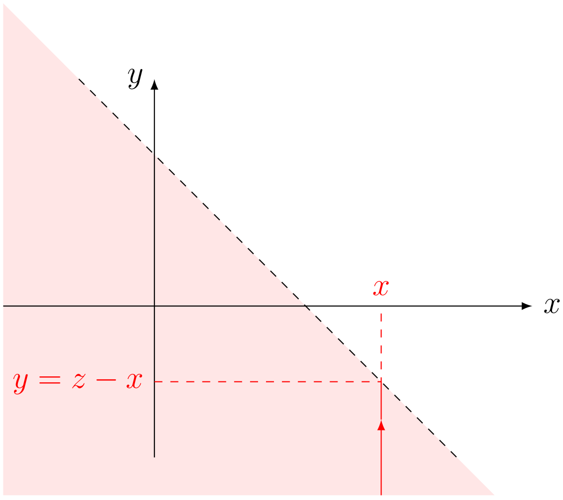
On peut donc résumer les résultats comme suit :

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad z < 0 \\ \frac{z^2/2}{a^2} & \text{si} \quad z \in [0,a] \\ \frac{a^2 - \frac{(2a-z)^2}{2}}{a^2} & \text{si} \quad z \in [a,2a] \\ 1 & \text{si} \quad z > 2a \end{cases} \qquad f_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad z < 0 \text{ ou } z > 2a \\ \frac{z}{a^2} & \text{si} \quad z \in [0,a] \\ \frac{2a-z}{a^2} & \text{si} \quad z \in [a,2a] \end{cases}$$



3. On commence par expliciter $F_Z(z)$ en fonction de $f_{XY}(x,y)$:

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P[Z < z] = \int_{-\infty}^{z} f_Z(w)dw \\ &= P[(X,Y) \in D_z] \\ &= \int\int_{D_z} f_{XY}(x,y)dxdy \\ F_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\int_{-\infty}^{z-x} f_{XY}(x,y)dy)dx \end{aligned}$$



On en déduit $f_Z(z)$

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \frac{dF_Z(z)}{dz} = \frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{+\infty} (\int_{-\infty}^{z-x} f_{XY}(x,y)dy)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial z}(\int_{-\infty}^{z-x} f_{XY}(x,y)dy)dx \\ f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, z-x)dx \end{aligned}$$

4. Les VA X et Y indépendantes donc la ddp $f_{XY}(x,y)$ est séparable :

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, z-x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx \\ f_Z(z) &= (f_X * f_Y)(z) \end{aligned}$$

5. Par définition de la fonction caractéristique de la VA Z :

$$\begin{aligned} \phi_Z(u) &= E[e^{juZ}] \\ &= \int_{\mathbb{R}} f_Z(z)e^{juz}dz \end{aligned}$$

Ainsi, on peut réécrire

$$\begin{aligned}\phi_Z(u) &= TF[f_Z(z)]_{f=-\frac{u}{2\pi}} \\ &= E[e^{ju(X+Y)}] = E[e^{juX}e^{juY}]\end{aligned}$$

Et par indépendance de X et Y,

$$\begin{aligned}\phi_Z(u) &= \phi_X(u)\phi_Y(u) \\ f_Z(z) &= TF^{-1}[\phi_Z(u)](z) \\ &= (TF^{-1}[\phi_X(u)] * TF^{-1}[\phi_Y(u)])(z) \\ f_Z(z) &= (f_X * f_Y)(z)\end{aligned}$$

6. $X_1, ...X_n$ indépendantes dans leur ensemble

$$\begin{array}{rcl} Y_{12} = & X_1 + X_2 & \to f_{Y_{12}}(y) = (f_{X_1} * f_{X_2})(y) \\ Y_{123} = & X_1 + X_2 + X_3 = Y_{12} + X_3 & \to f_{Y_{123}}(y) = (f_{Y_{12}} * f_{X_3})(y) = (f_{X_1} * f_{X_2} * f_{X_3})(y) \end{array}$$

Par récurrence, on montre alors que pour $Y = X_1 + ... + X_n$,

$$f_Y(y) = (f_{X_1} * ... * f_{X_n})(y)$$

On montre que pour $X_n, n = 1, ..., N$ VA réelles et scalaires indépendantes et identiquement distribuées, centrées et d'écart-type σ,

$$Z_N = \frac{\sum_{n=1}^N X_n}{\sqrt{N}} \text{ tend vers une VA gaussienne quand N tend vers } +\infty$$

7. Par linéarité de l'espérance, et comme les variables X_N sont centrées ($E[X_N] = 0$),

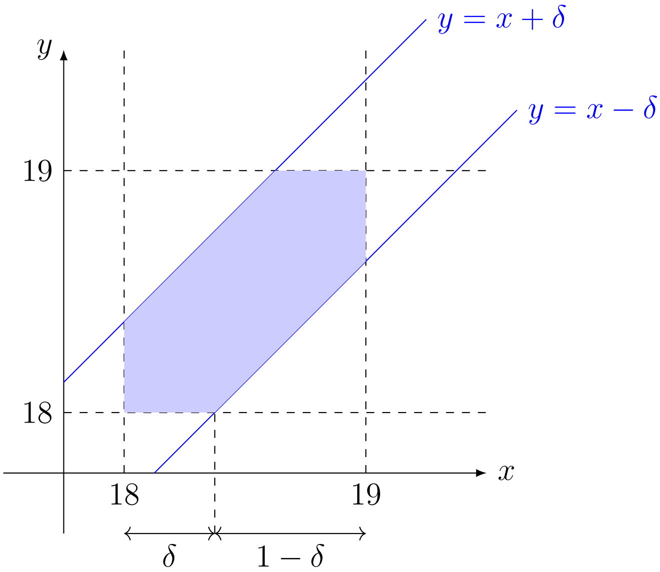
$$E[Z_N] = E[\frac{\sum_{n=1}^N X_n}{\sqrt{N}}] = \frac{\sum_{n=1}^N E[X_n]}{\sqrt{N}} = 0$$

De plus,

$$\begin{aligned}\sigma_Z^2 &= E[(Z_N - m_{Z_N})^2] = E[Z_N^2] \\ &= \frac{1}{N}E[(\sum_{n=1}^N X_n)^2] \\ &= \frac{1}{N}E[\sum_{n=1}^N X_n^2 + \sum_{i\neq j} X_i X_j] \\ &= \frac{1}{N}(\sum_{n=1}^N E[X_n^2] + \sum_{i\neq j} E[X_i X_j]) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N \sigma^2 \\ &= \sigma^2\end{aligned}$$

8. Deux personnes se donnent rendez-vous entre 18h et 19h. On associe aux deux instants d'arrivées deux VA X et Y indépendantes, de ddp uniforme sur l'intervalle [18,19].
   On introduit la VA $\Delta = |Y - X|$. Calculons sa fonction de répartition.

$$\begin{aligned} F_\Delta(\delta) &= P[\Delta \leq \delta] \\ &= P[|Y - X| \leq \delta] \\ &= P[Y - X \leq \delta \quad \text{et} \quad X - Y \leq \delta] \\ &= P[Y \leq X + \delta \quad \text{et} \quad Y \geq X - \delta] \end{aligned}$$



Ainsi,

$$F_\Delta(\delta) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \delta < 0 \\ 1 - (1 - \delta)^2 & \text{si} \quad 0 \leq \delta < 1 \\ 1 & \text{si} \quad \delta \geq 1 \end{cases}$$

Donc

$$f_\Delta(\delta) = \begin{cases} 2 - 2\delta & \text{si} \quad 0 \leq \delta < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$