M1 E3A - Voie André Ampère

Module 421

Correction de TD

Version du 25 novembre 2023

Un cours de:
Samy Tliba

Rédigé et amélioré par:
Pierre-Antoine Comby
(basé sur le travail de ?)

école normale supérieure paris—saclay

université PARIS-SACLAY

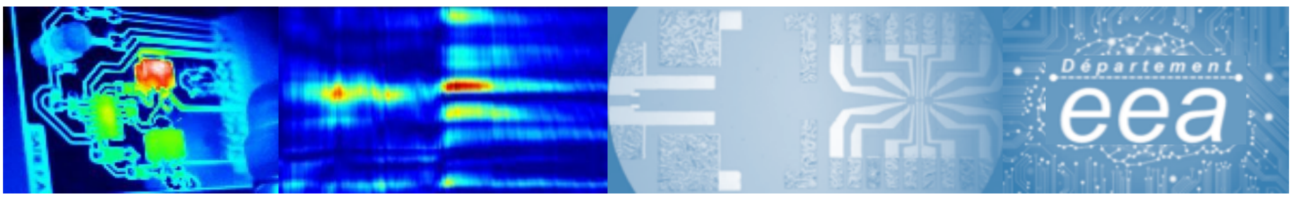


Table des matières

TD1 Systèmes échantillonés

Exercice 1

- Montrer que $U(z) = \frac{z}{z-1}E(z)$, avec $u_k = \sum_{j=0}^{k} e_j$ et $Z(e_j) = E(z)$

$$u_{k-1} = \sum_{j=0}^{k-1} e_j$$
$$u_k = e_k + u_{k-1}$$

Donc en appliquant la transformée en z et en utilisant le théorème du retard,

$$U(z) = E(z) + z^{-1}U(z)$$
$$U(z) = \frac{z}{z-1}E(z)$$

- Montrer que $Z\{ke_k\} = -z\frac{d}{dz}(E(z))$

$$\begin{aligned}
-z\frac{d}{dz}(E(z)) &= -z\frac{d}{dz}(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e_k z^{-k}) \\
&= -z \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e_k(-k)z^{-k-1} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} ke_k z^{-k} \\
&= Z\{ke_k\}
\end{aligned}$$

Exercice 2 :

Méthode : on effectue la transformée inverse pour obtenir le signal temporel. Puis on l'échantillonne avant de passer à sa transformée en Z, où l'on obtient une suite géométrique que l'on simplifie.

1. $$Y(p) = L[y(t)] = \frac{1}{p(p+a)} = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p+a}$$

   On identifie

   $$\alpha = \frac{1}{a} \text{ et } \beta = \frac{-1}{a}$$

   donc par transformée inverse de Laplace,

   $$y(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})\mathbf{1}(t)$$

Puis on échantillonne avec $t = k.t_e$ avec $k \in \mathbb{N}$, et on a $y_k = \frac{1}{a}(1 - e^{-a.k.T_e})$
On a donc :

$$\begin{aligned} Z\{y_k\} &= Z\{\frac{1}{a}\} - Z\{\frac{1}{a}(e^{-aT_e})^k\} \\ &= \frac{1}{a}(\frac{z}{z-1} - \frac{1}{1 - e^{-aT_e}z^{-1}}) \\ Y(z) &= \frac{1}{a}(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-aT_e}}) \end{aligned}$$

2. On pose $Y(p) = \frac{a}{p^2+a^2} = L\{\sin(at)\}$:
On a donc,

$$y_k = \sin(akT_e) = \frac{e^{jakT_e} - e^{-jakT_e}}{2j}$$

Or ,

$$Z\{e^{jakT_e}\} = \frac{1}{1 - e^{jaT_e}z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{jaT_e}}$$

et ,

$$Z\{e^{-jakT_e}\} = \frac{1}{1 - e^{-jaT_e}z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-jaT_e}}$$

d'où :

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{z}{2j}(\frac{1}{z - e^{jaT_e}} - \frac{1}{z - e^{-jaT_e}}) \\ &= \frac{z}{2j}(\frac{e^{jaT_e} - e^{-jaT_e}}{z^2 - z(2\cos(aT_e) + 1)}) \\ Y(z) &= \frac{z\sin(aT_e)}{z^2 - z(2\cos(aT_e) + 1)} \end{aligned}$$

3. On procède de même que ci-dessus avec $Y(p) = \frac{p}{p^2+a^2} = L\{\cos(at)\}$:
On a donc,

$$y_k = \cos(akT_e) = \frac{e^{jakT_e} + e^{-jakT_e}}{2}$$

D'où

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{z}{2}(2z - \frac{e^{jaT_e} - e^{-jaT_e}}{z^2 - z(2\cos(aT_e) + 1)}) \\ Y(z) &= \frac{z(z - \cos(aT_e))}{z^2 - z(2\cos(aT_e) + 1)} \end{aligned}$$

4. Ici, les échantillons sont définis par :

$$y_0 = 0, y_1 = 1, y_2 = -1 \text{ et } \forall k > 2, y_k = 0$$

On a alors :

$$\begin{aligned} Z\{y_k\} &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y_k.z^{-k} \\ Y(z) &= z^{-1} - z^{-2} \end{aligned}$$

5. $\forall k \in \mathbb{N}, y_{2k} = 0$ et $y_{2k+1} = 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} Z\{y_k\} &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 1.z^{-(2k+1)} \\ &= z^{-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z^{-2k} \\ &= \frac{z}{z^2-1} \end{aligned}$$

6. $forall l \in \mathbb{N}, y_k = (-1)^{k+1}\mathbf{1}_k$. Ainsi,

$$\begin{aligned} Z\{y_k\} &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^{k+1} z^{-k} \\ &= -\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k (z^{-1})^k \\ &= -\frac{1}{1+z^{-1}} \\ &= -\frac{z}{z+1} \end{aligned}$$

Exercice 3 :

Méthode : dans le cas général, on réécrit $\frac{Y(z)}{z}$ en décomposant en éléments simples puis on repasse Y(z) sous forme de série pour effectuer la transformée en Z inverse. De plus, pour les fractions rationnelles dont le dénominateur est d'ordre deux ou plus, on utilise la propriété de multiplication par une variable d'évolution :

$$TZ: \quad k^n x[k] \rightarrow (-z\frac{d}{dz})^n X(z)$$

1. Pour $h > 0$ et $a \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{z}{z-a^h} \\ &= \frac{1}{1-\frac{a^h}{z}} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (a^h.z^{-1})^k \\ Y(z) &= Z\{(a^h)^k\} \end{aligned}$$

2. $Y(z) = \frac{z+1}{(z-3)^2}$
On pose

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z+1}{z(z-3)^2} = \frac{\alpha}{z} + \frac{\beta}{z-3} + \frac{\gamma}{(z-3)^2}$$

On identifie ensuite $\alpha = \frac{1}{9}$, $\gamma = \frac{4}{3}$ et pour β on peut multiplier l'égalité par $(z-3)$ puis faire tendre z vers $+\infty$ pour obtenir que $0 = \alpha + \beta$. D'où $\beta = \frac{-1}{9}$, et ainsi :

$$Y(z) = \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\frac{z}{z-3} + \frac{4}{3}\frac{z}{(z-3)^2}$$

La transformée inverse donne alors en utilisant la propriété de multiplication :

$$y_k = \frac{1}{9}.\delta_k - \frac{1}{9}.3^k.\mathbf{1}_k + \frac{4}{3}.k.3^{k-1}.\mathbf{1}_k$$

3. $Y(z) = \frac{z+3}{z^2-3z+2} = \frac{z+3}{(z-1)(z-2)}$ On pose

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{\alpha}{z} + \frac{\beta}{z-1} + \frac{\gamma}{z-2}$$

On identifie ensuite $\alpha = \frac{3}{2}$, $\gamma = 5$, $\beta = -4$, d'où :

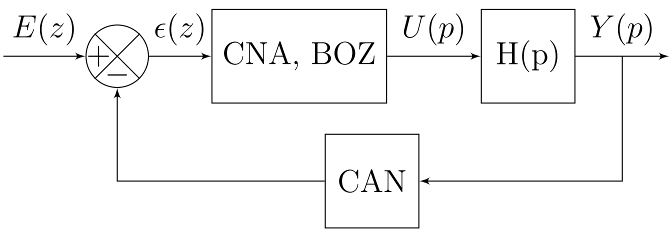
$$Y(z) = \frac{3}{2} - 4\frac{z}{z-1} + 5\frac{z}{z-2}$$

La transformée inverse donne alors :

$$y_k = \frac{3}{2}.\delta_k - 4.\mathbf{1}_k + 5.2^k.\mathbf{1}_k$$

Exercice 5 :

L'asservissement analogique considéré est le suivant, où $H(p) = \frac{C}{p(1+0.2p)}$ et $B_0(p) = \frac{1-e^{-T_e p}}{2}$, avec $T_e = 0.2s$ et $C = 5rad.s^{-1}$.



1. Par propriété du cours, on a :

$$T(z) = (1-z^{-1}).Z\{{}^{*}L^{-1}\{\frac{H(p)}{p}\}\}$$

On commence par poser $A(p) = \frac{H(p)}{p} = L\{a(t)\}$ et $a_n = a(n.T_e)$, donc

$$T(z) = (1-z^{-1}).Z\{a_n\}$$

On a alors :

$$A(p) = \frac{C}{p^2(1+0.2p)} = C(\frac{\alpha}{p^2} + \frac{\beta}{p} + \frac{\gamma}{1+0.2p})$$

On trouve, $\gamma = 0.04$, $\alpha = 1$ et $\beta = -0.2$. Donc en repassant dans le domaine réel on a :

$$A(t) = C(t - 0.2 + 0.2e^{-5t})u(t)$$

Donc en échantillonnant avec $a_n = A(nT_e)$:

$$a_n = A(nT_e) = C(n.T_e - 0.2 + 0.2e^{-5nT_e})$$

Ainsi, avec la transformée en Z on a :

$$Z\{a_n\} = C(T_e\frac{z}{(z-1)^2} - 0.2\frac{z}{z-1} + 0.2\frac{z}{z-\chi}) \text{ avec } \chi = e^{-5T_e}$$

d'où avec la formule initiale, on obtient :

$$\begin{aligned}
T(z) &= \frac{z-1}{z}Z\{a_n\} \\
&= C\frac{z-1}{z}(\frac{T_e z}{(z-1)^2} - \frac{0.2z}{z-1} + \frac{0.2z}{z-\chi}) \\
&= C(\frac{T_e}{z-1} - 0.2 + 0.2\frac{z-1}{z-\chi}) \\
&= C.\frac{T_e(z-\chi) - 0.2(z^2 - (1+\chi)z + \chi) + 0.2(z^2 - 2z + 1)}{z^2 - (1+\chi)z + \chi} \\
T(z) &= C.\frac{(T_e + 0.2(1+\chi) - 0.4)z + (-\chi T_e - 0.2\chi + 0.2)}{z^2 - (1+\chi)z + \chi}
\end{aligned}$$

On pose :

- $b_1 = C(T_e + 0.2(1+\chi) - 0.4)$
- $b_0 = C(0.2 - \chi T_e - 0.2\chi)$
- $a_1 = -(1+\chi)$
- $a_0 = \chi$

Ainsi, on a :

$$T(z) = \frac{b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

Remarque :
Les pôles analogiques sont : $p_1 = 0$, $p_2 = -5$.
Les pôles discrétisés sont : $p_{z_1} = 1$ et $p_{z_2} = \chi$.
(On peut le vérifier avec la relation $p_{z_i} = e^{p_i T_e}$.)
Les zéros du temps discret dépendent de T_e.

2. On a donc en boucle fermée :

$$\begin{aligned}
Y(z) = \frac{T(z)}{1+T(z)}E(z) &= \frac{B(z)}{A(z)+B(z)}E(z) \\
&= \frac{b_1 z + b_0}{z^2 + (a_1+b_1)z + a_0} = F(z)E(z)
\end{aligned}$$

Les zéros de T(z) sont aussi les zéros de F(z).

D'autre part, on cherche $G(z) = \frac{\epsilon(z)}{E(z)}$. Or :

$$\begin{aligned}
\epsilon(z) &= E(z) - Y(z) \\
&= (1 - F(z))E(Z) \\
&= \frac{1}{1 + T(z)} E(z) \\
&= \frac{A(z)}{A(z) + B(z)} \\
&= G(z)E(z)
\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$G(z) = \frac{z^2 + a_1 z + a_0}{z^2 + (a_1 + b_1)z + (a_0 + b_0)}$$

3. a – Déterminons la relation de récurrence entrée-sortie du système en boucle fermée. On a en factorisant par z^2 :

$$Y(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}}{1 + (a_1 + b_1)z^{-1} + (a_0 + b_0)z^{-2}} E(z)$$

$$Y(z)(1 + (a_1 + b_1)z^{-1} + (a_0 + b_0)z^{-2}) = E(z)(b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2})$$

d'où, avec la transformée inverse, la relation de récurrence suivante :

$$y_k + (a_1 + b_1)y_{k-1} + (a_0 + b_0)y_{k-2} = b_1 e_{k-1} + b_0 e_{k-2}$$

b – Déterminons la réponse à un échelon $E(z) = \frac{z}{z-1}$:

$$Y(z) = \frac{z}{z-1} \frac{b_1 z + b_0}{z^2 + (a_1 + b_1)z + (a_0 + b_0)} \quad \frac{Y(z)}{z} = \frac{\alpha}{z-1} + \frac{\beta}{z - p_1} + \frac{\alpha}{z - p_2}$$

d'où :

$$y_k = (\alpha + \beta p_1^k + \gamma p_2^k).\mathbf{1}_k$$

TD2 Stabilité

Exercice I : Stabilité d'un asservissement avec retour unitaire

On considère l'asservissement analogique où :

$$H(p) = \frac{C}{p(1+\tau p)} \text{avec } \tau = 0.2$$

On place un CNA (BOZ) en amont de $H(p)$ et un CAN dans la boucle de retour.

1. Pour passer de l'analogique au numérique, on utilise la formule suivante :

$$T(z) = (1 - z^{-1})Z[^*L^{-1}[\frac{H(p)}{p}]]$$

On a donc successivement :

$$\begin{aligned}
A(p) &= \frac{H(p)}{p} = \frac{C/\tau}{p^2(p+1/\tau)} \\
&= \frac{C}{\tau}(\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p^2} + \frac{\gamma}{p+1/\tau}) \\
&= C(\frac{-\tau}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{\tau}{p+1/\tau}) \\
a(t) &= C[-\tau + t + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}] \\
a_k &= C[-\tau + kT_e + \tau e^{-\frac{T_e}{\tau}k}] \\
A(z) &= C[-\frac{\tau z}{z-1} + \frac{T_e z}{(z-1)^2} + \tau\frac{z}{z-D}] \text{ où } D = e^{-\frac{T_e}{\tau}} \\
T(z) &= (1 - z^{-1})A(z) \\
&= \frac{z-1}{z}C[-\frac{\tau z}{z-1} + \frac{T_e z}{(z-1)^2} + \tau\frac{z}{z-D}] \\
&= C[-\tau + \frac{T_e}{z-1} + \frac{\tau(z-1)}{z-D}] \\
T(z) &= C\frac{(\tau(1+D) + T_e - 2\tau)z + (-D\tau - T_e D + \tau)}{z^2 - (1+D)z + D}
\end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned}
T(z) &= \frac{b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0} \\
b_1 &= C(\tau(D-1) + T_e) \\
b_0 &= C(\tau(1-D) - T_e D) \\
a_1 &= -(1+D) \\
a_0 &= D
\end{aligned}$$

2. Mise en équation de l'asservissement

$$
\begin{aligned}
Y(z) &= \frac{T(z)}{1+T(z)}E(z) \\
&= \frac{B(z)}{A(z)+B(z)} \text{ avec } T(z) = \frac{A(z)}{B(z)}
\end{aligned}
$$

Le polynôme caractéristique s'écrit :

$$
\begin{aligned}
\Pi(z) &= B(z)+A(z) \\
&= c_2 z^2 + c_1 z + c_0 \\
\text{avec} \quad & c_2 = 1 \\
& c_1 = a_1 + b_1 = -(1+D) + C(T_e + \tau(D-1)) \\
& c_1 = -(1+D) + CT_eD \text{ car ici } \tau = T_e \\
& c_0 = a_0 + b_0 = D + C(\tau(1-D) - T_eD) \\
& c_0 = D + CT_e(1-2D)
\end{aligned}
$$

3. a) Critère de Routh-Hurwitz
Transformation en w : $z = \frac{1+w}{1-w}, \quad w = \frac{z-1}{z+1}$

On réécrit l'équation caractéristique en w :

$$
\begin{aligned}
c_2(\frac{1+w}{1-w})^2 \quad &+c_1(\tfrac{1+w}{1-w}) \quad +c_0 = 0 \\
C_2(w^2+2w+1) \quad &+c_1(1-w^2) \quad +c_0(w^2-2w+1) = 0 \\
(c_2 - c_1 + c_0)w^2 \quad &+2(c_2-c_0)w \quad +(c_2+c_1+c_0) = 0
\end{aligned}
$$

Tableau de Routh :

w^2	$c_2 - c_1 + c_0$	$c_2 + c_1 + c_0$
w	$2(c_2 - c_0)$	0
w^0	$c_2 + c_1 + c_0$	

On doit avoir tous les termes de la première colonne positifs : on retrouve le critère de Jury.

4. b) Critère de Jury :
   - $c_2 + c_1 + c_0 > 0$
   - $c_2 - c_1 + c_0 > 0$
   - $|c_0| < c_2 \Leftrightarrow -c_2 < c_0 < c_2$

   On traduit ces conditions
   - $c_2 + c_1 + c_0 > 0$

$$
\begin{aligned}
& 1 + (-(1+D) + CT_eD) + (D + CT_e(1-2D)) > 0 \\
& C(T_eD + T_e - 2DT_e) > 0 \\
& C(1-D) > 0 \\
& C > 0 \text{ car } D = e^{-1} < 1
\end{aligned}
$$

- $c_2 - c_1 + c_0 > 0$

$$\begin{aligned}
&1 - (-(1+D) + CT_eD) + (D + CT_e(1-2D)) > 0\\
&2 + 2D + cT_e(-3D+1) > 0\\
&CT_e(1-3D) > -2 - 2D\\
&C < -\frac{2+2D}{1-3D} \text{ car } 3D > 1
\end{aligned}$$

- $-c_2 < c_0 < c_2$

$$\begin{array}{rcl}
-1 < & D + CT_e(1-2D) & < 1\\
-1 - D < & CT_e(1-2D) & < 1 - D\\
\dfrac{-1-D}{T_e(1-2D)} < & C & < \dfrac{1-D}{T_e(1-2D)}
\end{array}$$

Le critère de Jury aboutit donc à :

$$\boxed{0 < C < \min\left(-\frac{2+2D}{(1-3D)T_e}, \frac{1-D}{(1-2D)T_e}\right)}$$

5. On s'intéresse à l'asservissement analogique du même système

$$Y(p) = \frac{H(p)}{1+H(p)}E(p)$$

L'équation caractéristique conduit à

$$\begin{aligned}
1 + H(p) &= 0\\
1 + \frac{C}{p(1+\tau p)} &= 0\\
\tau p^2 + p + C &= 0
\end{aligned}$$

Le système est stable si et seulement si $C > 0$.
En analogique, la marge de gain est infinie (la phase n'est jamais égale à -180^o. En numérique, le BOZ induit un déphasage qui conduit à une limitation supplémentaire pour C en terme de stabilité.

6. Pour approcher le comportement basse fréquence de la chaîne directe de l'asservissement de la figure 1, il faut tenir compte du BOZ. Il faut approximer l'expression de $B_0(p)$.

- Avec $\omega << \frac{1}{T_e}$, $e^{-T_ep} \approx 1 - T_ep$ et

$$\begin{aligned}
B_0(p) &= T_e\\
\tilde{H}(p) &= T_eH(p) = \frac{CT_e}{p(1+\tau p)}
\end{aligned}$$

On revient à la même condition $C > 0$.

- Suggestion : faire le développement à l'ordre 2 ?
  Avec $e^{-T_ep} \approx 1 - T_ep + \frac{(T_ep)^2}{2}$,

$$\begin{aligned} B_0(p) &= \frac{T_ep - T_e^2p^2/2}{p} \\ &= T_e - \frac{T_e^2}{2}p \text{ : non causal} \\ \tilde{H}(p) &= T_e(1 - \frac{T_e}{2}p)\frac{C}{p(1+\tau p)} \end{aligned}$$

  L'équation caractéristique $1 + \tilde{H}(p) = 0$ mène à

$$\tau p^2 + p + CT_e(1 - \frac{T_e}{2}p) = 0$$
$$\tau p^2 + (1 - C\frac{T_e^2}{2})p + CT_e = 0$$

  L'application du critère de Routh mène à : $0 < C < \frac{2}{T_e^2}$
- Approximation de Padé ($\omega << \frac{1}{2T_e}$) :

$$e^{-T_ep} = \frac{e^{-\frac{T_e}{2}p}}{e^{\frac{T_e}{2}p}} \text{ et } e^{-\frac{T_e}{2}p} \approx 1 - \frac{T_e}{2}p \Longrightarrow e^{-T_ep} \approx \frac{1 - \frac{T_e}{2}p}{1 + \frac{T_e}{2}p} \text{ : causal !}$$

$$\begin{aligned} B_0(p) &\approx \frac{1 - \frac{1 - \frac{T_e}{2}p}{1 + \frac{T_e}{2}p}}{p} \\ &= \frac{T_e}{1 + \frac{T_e}{2}p} \text{ : causal} \\ \tilde{H}(p) &= \frac{T_e}{1 + \frac{T_e}{2}p}.\frac{C}{p(1+\tau p)} \end{aligned}$$

  L'équation caractéristique $1 + \tilde{H}(p) = 0$ mène à

$$CT_e + p(1 + \frac{T_e}{2}p)(1 + \tau p) = 0$$
$$\tau\frac{T_e}{2}p^3 + (\tau + \frac{T_e}{2})p^2 + p + CT_e = 0$$

p^3	$\tau\frac{T_e}{2}$	1
p^2	$\tau + \frac{T_e}{2}$	CT_e
p	$1 - \frac{CT_e\tau}{2(\tau+\frac{T_e}{2})}$	0
p^0	CT_e	

  La condition est donc $C < \frac{2(\tau+T_e/2)}{T_e\tau} = \frac{3}{\tau}$

7. La discrétisation d'un asservissement en temps continu dégrade la stabilité.

TD3 Correcteurs numériques

Exercice 1 : Analyse et synthèse par une approche (pseudo-)continue

On considère la fonction de transfert

$$H(p) = \frac{1}{p(1+\tau p)} \quad \text{avec} \quad \tau = 0,2$$

La période d'échantillonnage est $T_e = 0,2s$ et l'on souhaite régler le correcteur PI pour satisfaire le cahier des charges suivants en boucle fermée :

- marge de phase de 45 degrés
- erreur en vitesse ϵ_v nulle

1. Synthèse d'un correcteur à temps continu

   (a) On considère le BOZ $B_0(p) = \frac{1-e^{-T_e p}}{p}$ que l'on cherche a approché par un retard pur équivalent :

   $$\begin{aligned} B_0(p) &= \frac{1-e^{-T_e p}}{p} \\ &= e^{-\frac{T_e p}{2}} \frac{e^{\frac{T_e p}{2}} - e^{-\frac{T_e p}{2}}}{p} \end{aligned}$$

   Or, le développement limité à l'odre 1 $e^{-T_e p} = 1 - T_e p$ donne :

   $$\tilde{B}_0(p) = e^{-\frac{T_e p}{2}} \frac{1 + \frac{T_e p}{2} - (1 - \frac{T_e p}{2})}{p}$$
   $$\boxed{\tilde{B}_0(p) = T_e e^{\frac{-T_e p}{2}}}$$

   (b) On se propose de régler le correcteur PI en utilisant le tracé de la fonction de transfert en boucle ouverte du système.
   Le correcteur a donc la forme :

   $$C(p) = K_p(1 + \frac{1}{T_i p})$$

   et on pose

   $$L(p) = \tilde{B}_0(p)H(p) = \frac{T_e e^{\frac{-T_e p}{2}}}{p(1+\tau p)}$$

   On s'intéresse dans un premier temps à l'erreur en vitesse. On prend donc pour entrée $e(t) = t$ d'où $E(p) = \frac{1}{p^2}$

On a donc comme écart $\epsilon(p) = \frac{E(p)}{1+L(p)C(p)}$, et on va appliquer le théorème de la valeur finale :

$$\begin{aligned}
\epsilon_v &= \lim_{t\to\infty} \epsilon(t) \\
&= \lim_{p\to 0} p\epsilon(p) \\
&= \lim_{p\to 0} p\frac{1}{p^2}\frac{1}{1+L(p)C(p)} \\
&= \lim_{p\to 0} \frac{T_i p(1+\tau p)}{T_i p^2(1+\tau p) + T_e e^{\frac{-T_e p}{2}} K_p(1+T_i p)} && = 0
\end{aligned}$$

L'erreur statique de vitesse est bien nulle avec ce modèle du retard pur pour le BOZ.

Intéressons-nous maintenant au réglage du correcteur, on relève le gain lorsque la phase est de -135 degrés et on cherche à annuler ce gain pour imposer le marge de phase à 45 degrés. On relève un gain de -35dB, il faut donc relever le gain de 35dB :

$$20log(K_p) = 25 \Rightarrow K_p = 10^{\frac{25}{20}} = 18$$

De plus, pour régler T_i, on fait en sorte que la phase du correcteur n'influence pas trop celle du système dans la bande passante, donc que la phase du correcteur seul soit à zéro quand celle du système est proche du point critique -1. Il est une bonne approximation de prendre T_i de sorte que $\frac{1}{T_i}$ soit une décade plus tôt que la pulsation de coupure du système ou d'annulation du gain (choix effectué ici). Donc :

$$\frac{1}{T_i} = \frac{\omega_{0dB}}{10} \Rightarrow T_i = \frac{10}{3} = 3.3s$$

(c) On utilise l'approximation $z = e^{pT_e} \approx 1 + pT_e$ pour écrire la fonction de transfert en z du correcteur échantillonné, on a donc $p = \frac{z-1}{T_e}$, d'où :

$$\begin{aligned}
C(p)|_{p=\frac{z-1}{T_e}} &= C(z) \\
&= K_p\left(1 + \frac{1}{\frac{T_i}{T_e}(z-1)}\right) \\
&= K_p\frac{z + \frac{T_e}{T_i} - 1}{z-1}
\end{aligned}$$

La fonction de transfert en z du système + BOZ est :

$$\begin{aligned}
T(z) &= (1-z^{-1})Z\{^*L^{-1}\{\frac{H(p)}{p}\}\} \\
&= \frac{b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0} \\
\text{avec} \quad b_0 &= (1-D)\tau - T_e D \\
b_1 &= T_e + (D-1)\tau \\
a_0 &= D \\
a_1 &= -D - 1 \\
D &= e^{-T_e/\tau}
\end{aligned}$$

(d) Déterminons si le système échantillonné est stable si asservi de la sorte (correcteur numérique) :
On peut appliquer le critère de Routh à $1 + C(z)T(z)$, avec $T(z)$ la fonction de transfert de l'asservissement échantillonné, CF TD précédent.

2. Synthèse "pseudo-continue"

(a) Déterminons la fonction de transfert en w du système échantillonné :

$$T(z)|_{z=\frac{1+w}{1-w}} = \tilde{T}(w) = \frac{b_1\frac{1+w}{1-w} + b_0}{(\frac{1+w}{1-w})^2 + a_1\frac{1+w}{1-w} + a_0}$$
$$= \frac{b_1(1-w^2) + b_0(1-2w+w^2)}{(w^2+w+1) + a_1(1-w^2) + a_0(1-2w+w^2}$$

$$\boxed{\tilde{T}(w) = \frac{(b_0-b_1)w^2 - 2b_0w + b_0 + b_1}{(1-a_1+a_0)w^2 + 2(1-a_0)w + 1 + a_1 + a_0}}$$

Comment se traduit le cahier des charges pour le système transformé ?

$$z = \frac{1+w}{1-w} \Leftrightarrow w = \frac{z-1}{z+1} \text{ avec } z = e^{T_e p}$$

La réponse fréquentielle est valable pour $p = j\omega$ avec $\omega \in [0, \frac{\pi}{T_e}]$, donc pour :

$$w = \frac{e^{j\omega T_e} - 1}{e^{j\omega T_e} + 1} = \frac{2j\sin(\omega\frac{T_e}{2})}{2\cos(\omega\frac{T_e}{2})} = j\tan(\frac{\omega T_e}{2})$$

Ainsi, quand ω varie de 0 à $\frac{\pi}{T_e}$ alors w varie de 0 à l'infini sur l'axe des imaginaires.
On pose donc $w = j\tilde{\omega}$ et $\tilde{\omega} \in [0; +\infty[$

En quoi on répond à la question ? ? ?

(b) On va régler ici le correcteur PI en la variable w : On a $C(w) = K_p(1 + \frac{1}{T_i w}$ et $\epsilon(w) = \frac{1}{1+C(w)\tilde{T}(w)}E(w)$
On applique une entrée en rampe $t \to nT_e \to \frac{T_e z}{(z-1)^2}$, on a donc :

$$E(w) = E(z)|_{z=\frac{1+w}{1-w}} = \frac{T_e(1+w)}{(1-w)(\frac{1+w-1+w}{1-w})^2}$$
$$= \frac{T_e(1-w^2)}{4w^2}$$

Intéressons nous maintenant à l'écart statique en vitesse avec el théorème de la valeur finale :

$$\begin{aligned}
\epsilon_v &= \lim_{z\to 1}(z-1)E(z) \\
z \to 1 \Leftrightarrow w \to 0 \text{ car, } z-1 &= \frac{2w}{1-w} \\
\epsilon_v &= \lim_{w\to 0} \frac{2w}{1-w}\epsilon(w) \\
&= \lim_{w\to 0} \frac{2w}{1-w} \frac{1}{1+K_p(1+\frac{1}{T_i w}\frac{\beta_2 w^2+\beta_1 w+\beta_0}{\alpha_2 w^2+\alpha_1 w+\alpha_0}\frac{T_e(1-w^2)}{4w^2})} \\
&= ... \\
&= 0
\end{aligned}$$

Caractérisons maintenant le correcteur en fonction du cahier des charges. Comme précedemment on relève le gain lorsque la phase est à -135 degrés et on a : $K_p = 10^{\frac{10}{20}} = 3.3$ et le choix de T_i est le même fait comme précedemment donc : $T_i = \frac{10}{\tilde{\omega}_{0dB}} = 33.3s$

(c) La transformée en z ainsi, obtenue est :

$$\begin{aligned}
C(z) &= C(w)|_{w=\frac{z-1}{z+1}} \\
&= K_p(1+\frac{z+1}{T_i(z-1)} \\
&= \frac{C_p}{T_i}\frac{T_i z+1-T_i}{z-1}
\end{aligned}$$

TD4 Correcteur RST

Exercice 1 : Asservissement par synthèse d'un correcteur RST

On considère la fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{1}{p(1+\tau p)}$$

Rappel : (TD précédent)

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{B(z)}{A(z)} \\ &= \frac{b_1 z + b_0}{(z-1)(z-D)} \qquad \text{avec} \qquad D = e^{-T_e/2} \\ &= \frac{b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0} \\ n &= deg(A) = 2 \\ m &= deg(B) = 1 \end{aligned}$$

1. Il y a plusieurs façon de représenter le correcteur RST :
   - $\nu(z) = -\frac{S(z)}{R(z)} Y(z) + \frac{T(z)}{R(z)} E(z)$
     Les conditions de causalité sont alors : $\tau \leq p$ et $\sigma \leq p$.
   - $\nu(z) = \frac{S}{R}[-Y(z) + \frac{T}{S} E(z)]$
     Causalité : $\tau \leq p$ et $\sigma \leq p$.
   - $\nu(z) = \frac{T}{R}[-\frac{S}{T} Y(z) + E(z)]$
     Causalité : $\tau \leq p$ et $\sigma \leq p$.
2. On a : $Y(p) = G(p)[\nu(p) + P(p)]$, $P(p) = \frac{P_0}{p}$ et $\nu(p) = B_0(p)\nu^*(p)$

$$\begin{aligned} Y(p) &= G(p)[\nu(p) + P(p)] \\ &= G(p)[B_0(p)\nu^*(p) + \frac{P_0}{p}] \\ &= \frac{1 - e^{-T_e p}}{p} G(p)\nu^*(p) + G(p)\frac{P_0}{p} \end{aligned}$$

On pose $A(p) = \frac{G(p)}{p}$, et on a après transformée inverse de Laplace :

$$y(t) = (a * \nu^*)(t) - (a * \nu^*)(t - T_e) + a(t)P_0$$

après discrétisation on obtient :

$$y_k = a_k * \nu_k - a_{k-1} * \nu_{k-1} + a_k P_0$$

après transformée en z on a alors :

$$\begin{aligned}
Y(z) &= A(z)\nu(z) - z^{-1}A(z)\nu(z) + A(z)P_0 \\
&= (1 - z^{-1})A(z)\nu(z) + A(z)P_0 \\
&= G(z)\nu(z) + (1 - z^{-1})A(z)(1 - z^{-1})^{-1}P_0 \\
&= G(z)\nu(z) + G(z)P_0\frac{z}{z-1} \\
Y(z) &= G(z)(\nu(z) + p(z))
\end{aligned}$$

3. Calcul de R et S.
   On considère l'exigence 1 du cahier des charges :
   $p_{1,2} = \omega_0(-\xi \pm j\sqrt{1-\xi^2})$, avec $\omega_0 = 1.5$ et $\xi = 0.7$
   $p_3 = -3\omega_0\xi$

   Comme $z_i = e^{T_e p_i}$, avec $\Omega = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$,
   $z_1 = e^{-T_e\omega_0\xi}(cos(\Omega T_e) + jsin(\Omega T_e))$
   $z_2 = \overline{z_1}$
   $z_3 = e^{-3\omega_0\xi T_e}$

   En boucle fermée, l'asservissement considéré donne en posant $G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$,

$$Y(z) = \frac{BT}{AR + BS}E(z) + \frac{BR}{AR + BS}p(z)$$

   On pose $H_d(z) = \frac{B_d(z)}{\Pi_d(z)} = \frac{BT}{AR+BS}$, avec $deg(\Pi_d) = q$ et $deg(B_d) = \mu$. Les pôles (continus) imposés par le cahier des charges conduisent à la forme suivante pour le polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned}
\Pi_d(z) &= (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \\
&= z^3 + C_2z^2 + C_1z + C_0
\end{aligned}$$

   avec

$$\begin{aligned}
C_0 &= z_1z_2z_1 = -e^{-5\omega_0\xi T_e} \\
C_1 &= z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = (e^{-2\xi\omega_0T_e} + 2e^{-4\xi\omega_0T_e}cos(\Omega T_e)) \\
C_2 &= -z_1 - z_2 - z_3 = -(e^{-3\xi\omega_0T_e} + 2e^{-\xi\omega_0T_e}cos(\Omega T_e))
\end{aligned}$$

   On s'intéresse à l'exigence 2 du cahier des charges : Pour $E(z) = 0$ i.e $e_k = 0$, et $P(z) = P_0\frac{z}{z-1}$,

$$\lim_{\to\infty} y_k = 0$$

Ainsi, avec le théorème de la valeur finale on a :

$$\lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z} Y(z) = \lim_{z\to 1} \frac{BR}{AR+BS} P_0 = 0 \Leftrightarrow \lim_{z\to 1} B(z)R(z) = 0$$
$$\Leftrightarrow R(z) = (z-1)^l \tilde{R}(z) \text{avec, } l \geq 1$$

Par simplicité, on prend donc $l = 1$.

$$\frac{B(z)T(z)}{A(z)R(z)+B(z)S(z)} = \frac{B_d(z)}{\Pi_d(z)}$$

donc $B(z)T(z) = B_d(z)$ et $A(z)(z-1)\tilde{R}(z) + B(z)S(z) = \Pi_d(z)$
donc avec $\tilde{A}(z) = (z-1)A(z)$,

$$\boxed{\tilde{A}(z)\tilde{R}(z) + B(z)S(z) = \Pi_d(z)}$$

Soit $\tilde{n} = deg(\tilde{A}) = n+1$ et $\tilde{\rho} = deg(\tilde{R})$

1) Égalité des degrés : $deg(\tilde{A}\tilde{R}) = deg(AR) < deg(BS)$ par causalité, donc

$$\tilde{n} + \tilde{\rho} = q = 3$$

2) Nombre d'inconnues = nombre d'équations :
$\tilde{R}$ monique $\to \tilde{\rho}$ inconnues
S non monique $\to \sigma + 1$ inconnues
Π_d monique $\to q$ inconnues
donc on a

$$\tilde{\rho} + \sigma + 1 = q$$

3) Causalité du correcteur $\frac{S(z)}{R(z)}$, donc on a nécessairement $\sigma \leq \rho = \tilde{\rho} + 1$ d'où on a

$$\sigma = \tilde{n} - 1 \leq \tilde{\rho} + 1 = q - \tilde{n} + 1$$

donc

$$q \geq 2\tilde{n} - 2 = 4$$

Or, on avait déterminé $q = 3$, donc il faut donc introduire $A_0(z)$ un polynôme auxiliaire/observable de degrés k qui doit être monique dans le numérateur et le dénominateur. Les racines de $A_0(z)$ sont choisies plus rapide que z_1, z_2, et z_3 (d'au moins une décade). On pose donc : $\frac{BT}{AR+BS} = \frac{B_d}{\Pi_d}\frac{A_0}{A_0}$ d'où :

$$AR + BS = \Pi_d A_0$$
$$\tilde{A}\tilde{R} + BS = \Pi_d A_0$$

1) Égalité des degrés

$$\tilde{n} + \tilde{\rho} = q + k \text{ avec, } q = 3 \text{ donné}$$

2) Nombre d'inconnues = nombre d'équations

$$\tilde{\rho} + \sigma + 1 = q + k$$

3) Causalité

$$\tilde{\rho} \geq \sigma - 1$$

Avec 1) et 2),

$$\sigma = \tilde{n} - 1 = 2$$

Avec 3) et 1)

$$-\tilde{n} + q + k \geq \tilde{n} - 2$$

$$k \geq 2\tilde{n} - 2 - q = k_{min} = 1$$

Bilan :
On a donc :

$$k \geq 1, \quad \sigma = 2, \quad \tilde{\rho} \geq 1$$

Idéalement, on prend $k = 1$ et la racine de A_0 doit être prise plus rapide (au moins une décade) que z_1, z_2 et z_3

$$A_0(z) = z - z_0 \quad \text{avec} \quad z_0 = e^{-30\xi\omega_0 T_e}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(z) &= z + r_0 \\
S(z) &= s_2 z^2 + s_1 z + s_0 \\
\tilde{\Pi}_d(z) &= \Pi_d(z) A_0(z) \\
&= (z^3 + C_2 z^2 + C_3 z + C_0)(z - z_0) \\
&= z^4 + \tilde{C}_3 z^3 + \tilde{C}_2 z^2 + \tilde{C}_1 z + \tilde{C}_0 \\
\text{avec} \quad \tilde{C}_3 &= C_2 - z_0 \\
\tilde{C}_2 &= C_1 - z_0 C_2 \\
\tilde{C}_1 &= C_0 - z_0 C_1 \\
\tilde{C}_0 &= -z_0 C_0
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\tilde{A}(z) &= (z-1)A(z) = (z-1)(z^2 + a_1 z + a_0) \\
&= z^3 + \tilde{a}_2 z^2 + \tilde{a}_1 z + \tilde{a}_0 \\
\text{avec} \quad \tilde{a}_2 &= a_1 - 1 \\
\tilde{a}_1 &= a_0 - a_1 \\
\tilde{a}_0 &= -a_0
\end{aligned}$$

L'équation $\tilde{A}\tilde{R} + BS = \Pi_d A_0$ peut donc se réécrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 \\ \tilde{a}_2 & b_0 & b_1 & 0 \\ \tilde{a}_1 & 0 & b_0 & b_1 \\ \tilde{a}_0 & 0 & 0 & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 \\ s_2 \\ s_1 \\ s_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_3 - \tilde{a}_2 \\ \tilde{C}_2 - \tilde{a}_1 \\ \tilde{C}_1 - \tilde{a}_0 \\ \tilde{C}_0 \end{bmatrix}$$

La résolution de cette équation donne les polynômes

$$R(z) = (z-1)(z+r_0)$$
$$S(z) = s_2 + z^2 + s_1 z + s_0$$

Il ne reste qu'à déterminer le polynôme $T(z)$.

$$\text{Rappel : } B(z)T(z) = B_d(z)A_0(z)$$
$$\frac{BT}{AR+BS} = \frac{B_d}{\Pi_d}\frac{A_0}{A_0}$$

On note : $\mu = degB_d$, et on a $k = degA_0$
Par causalité,

$$deg(B_dA_0) = \mu + k \leq deg(\Pi_d A_0) = q + k$$
$$\mu \leq k = 3$$

En boucle ouverte : on a le retard $n - m = 2 - 1 = 1$

$$q - \mu \geq 1 \longrightarrow \mu \leq q - 1 = 2$$

L'égalité des numérateurs donne alors $m + \tau = \mu + k$ donc

$$\mu = m + \tau - k = \tau$$

$$\tau \leq 2$$

Avec $B_d(z) = B(z)\tilde{B}(z)$,

$$BT = B_dA_0$$
$$B(z)T(z) = B(z)\tilde{B}(z)A_0(z)$$
$$T(z) = \tilde{B}(z)(z - z_0)$$

Solution la plus simple pour $\tau \leq 2$: $\tilde{B}(z) = 1$ donc $B_d(z) = B(z)$, et

$$T(z) = A_0(z)$$

4.

$$Y(z) = \frac{B_d(z)}{\Pi_d(z)}E(z) + \frac{B_p(z)}{\Pi_d(z)}P(z)$$

En l'absence de perturbation, on veut que pour

$$E(z) = \frac{E_0 z}{z-1}$$

on ait :

$$Y(z) = \frac{E_0 z T_e}{(z-1)^2}$$

donc

$$\frac{B_d(z)}{\Pi_d(z)} = \frac{T_e}{z-1} \longrightarrow \Pi_d(z) = z-1$$

Compensation du zéro de B(z) avec $B(z) = b_1 z + b_0 = b_1(z + \frac{b_0}{b_1})$ or, $b_0 = 0.2(1-2D)$, et $b_1 = 0.2D$, donc $\frac{b_0}{b_1} = \frac{1-2D}{D}$ avec $D = e{-}1$ donc $\frac{b_0}{b_1} = \frac{0.052848}{0.073576} < 1$ donc le zéro est stable et on peut le compenser.
$H_d(z) = \frac{T_e}{z-1} \rightarrow$ retard $= q - \mu = 1 \geq m - n$. OK.

Modèle admissible :

$$\frac{BT}{AR+BS} = \frac{B_d}{\Pi_d}\frac{A_0}{A_0}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} y_n = 0 &\Leftrightarrow \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z}\frac{BR}{AR+BS}p(z) = 0 \\
&\Leftrightarrow \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z}\frac{BR}{\Pi_d A_0}p(z) = 0 \\
&\Leftrightarrow \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z}\frac{BR}{(z-1)A_0(z)}\frac{p_0 z}{z-1} = 0
\end{aligned}$$

Il faut, $R(z) = (z-1)^l \tilde{R}(z)$ avec $l \geq 2$. On prend $l = 2$.

$$\begin{aligned}
B(z) &= b_1(z + \frac{b_0}{b_1}) \\
&= B_s(z) B_{ns}(z) \\
\text{avec} \quad B_s(z) &= (z + \frac{b_0}{b_1}) \\
\text{et} \quad B_{ns}(z) &= b_1
\end{aligned}$$

on a donc :

$$\frac{B_s B_{ns} T}{AR + B_s B_{ns} S} = \frac{B_d A_0}{\Pi_d A_0}$$

Comme $R = (z-1)^2 \tilde{R}(z)$, en posant $\tilde{R} = B_s \hat{R}$ ($\hat{R}$ monique) et $\tilde{A}(z) = (z-1)^2 A(z)$ on obtient

$$\frac{B_{ns} T}{\tilde{A}\hat{R} + B_{ns} S} = \frac{B_d A_0}{\Pi_d A_0}$$

D'où l'équation diophantine

$$\tilde{A}\hat{R} + B_{ns} S = \Pi_d A_0$$

On pose $\hat{\rho} = deg(\hat{R})$ et $\tilde{n} = deg(\tilde{A}) = n + l = 4$.

1) Égalité des degrés :

$$\tilde{n} + \hat{\rho} = q + k$$

2) Nombre d'inconnues = nombre d'équations :

$$r\hat{h}o + \sigma + 1 = q + k$$

3) Causalité :

$$\rho \geq \sigma$$

Avec 1) et 2),

$$\sigma = \tilde{n} - 1 = 3$$

Comme $\rho = l + \hat{\rho} + m_S$,

$$\sigma = \tilde{n} - 1 \ leql + m_S + \hat{\rho} = l + m_S + q + k - \tilde{n}$$

$$\rightarrow k \geq k_{min} = 3$$

On choisit $k = 3$, et on a alors $\hat{\rho} = 0$.
Par conséquent, on a $\hat{R}(z) = 1$ et on prend $S(z) = s_3 z^3 + s_2 z^2 + s_1 z^1 + s_0$.
L'équation se ramène donc à

$$\tilde{A} + B_{nS} S = \Pi_d A_0$$

$$S = \frac{1}{b_1}(\Pi_d A_0 - \tilde{A})$$

Comme $\Pi_d A_0 = (z-1)A_0$ avec $A_0 = (z-z_1)(z-z_2)(z-z_3) = z^3 + C_2 z^2 + C_1 z + C_0$

$$\Pi_d A_0 = z^4 + \gamma_3 z^3 + \gamma_2 z^2 + \gamma_1 z + \gamma_0$$

avec $\gamma_3 = c_2 - 1, \gamma_2 = c_1 - c_2, \gamma_1 = c_0 - c_1, \gamma_0 = -c_0$.

De plus, $\tilde{A}(z) = (z-1)^2 A(z) = z^4 + \tilde{a}_3 z^3 + \tilde{a}_2 z^2 + \tilde{a}_1 z^1 + \tilde{a}_0$
avec $\tilde{a}_3 = a_1 - 2, \tilde{a}_2 = 1 - 2a_1 + a_0, \tilde{a}_1 = a_1 - 2a_0, \tilde{a}_0 = a_0$

On a donc,

$$\forall j = 0, ..., 3, \quad s_j = \frac{\gamma_j - \tilde{a}_j}{b_1}$$

Il reste donc à déterminer le polynôme $T(z)$.

TD5 Modélisation par variable d'état

Exercice 1 : Représentation d'état de correcteurs analogiques

1- Correcteur à avance de phase On considère le circuit suivant :
a) Établissons les différentes relations entrée sorties de chaque composants :

- $u = Ri$
- $u_2 = R_2 i_2$
- $u_1 = R_1 i_1$
- $u_3 = R_3 i_3$
- $i_c = C\frac{du_c}{dt}$

On se propose ensuite de construire un modèle d'état de vecteur d'état $x \in \mathbb{R}^{\ltimes}$ tel que : $\dot{x}(t) = Ax(t) + Be(t)$ équation d'état.
Équation d'observation : $s(t) = Cx(t) + De(t)$

La loi des nœuds donne :

- $i_2 = i_1 + i_3$
- $i = i_2$
- $i_c = i_3$

La loi des mailles donne :

- $e = u$
- $u_2 + u_1 + s = 0$
- $u_2 + u_3 + u_c = 0$

On obtient en recoupant judicieusement l'équation d'état :
$\dot{u_C} = \frac{-1}{R_3 C} u_C - \frac{R_2}{RR_3} e = Au_C + Be$
Et l'équation d'observation : $s = \frac{-R_1}{R_3} u_C - (\frac{R_1 R_2}{RR_3} + \frac{R_1 + R_2}{R})e = Cu_C + De$
2 et 3 à faire .

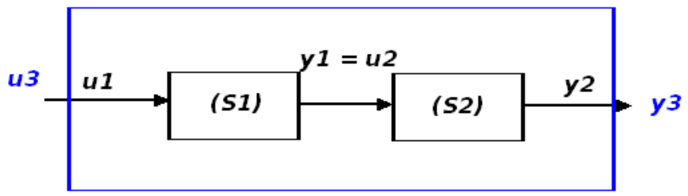
Exercice 2 : association de systèmes

On considère les deux systèmes (S1) et (S2) respectivement décrits par les représentation d'état :

$$(S1) \begin{cases} \dot{x_1} = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 x_1 + D_1 u_1 \end{cases}$$

$$(S2) \begin{cases} \dot{x_2} = A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y_2 = C_2 x_2 + D_2 u_2 \end{cases}$$

1. On place les deux systèmes (S1) et (S2) en série selon le schéma suivant :



On a donc la relation de connections : $y_1 = u_2$.
On en déduit les relations de connections suivantes :

$$\begin{aligned}
\dot{x_2} &= A_2x_2 + B_2(C_1x_1 + D_1u_1)\\
y_2 &= C_2x_2 + D_2(C_1x_1 + D_1u_1)\\
\dot{x_1} &= A_1x_1 + B_1u_1
\end{aligned}$$

On obtient donc l'équation d'état suivante :

$$\begin{pmatrix}\dot{x_1}\\ \dot{x_2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A_1 & 0\\ B_2C_1 & A_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}B_1\\ B_2D_1\end{pmatrix}u_1$$

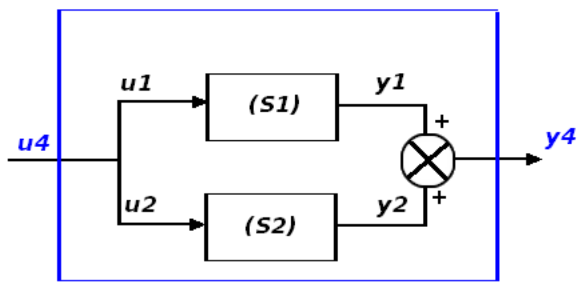
On pose donc :

$$x_3 = \begin{pmatrix}\dot{x_1}\\ \dot{x_2}\end{pmatrix}$$

Et on a donc comme équation d'observation avec $y_3 = y_2$

$$y_3 = \begin{pmatrix}D_2C_1 & C_2\end{pmatrix}x_3 + D_2D_1u_1$$

2. On place ensuite (S1) et (S2) en parallèle selon le schéma suivant :



On a donc comme relations de connections :

$$\begin{aligned}
u_4 &= u_1 = u_2\\
y_4 &= y_2 + y_4
\end{aligned}$$

On veut comme équation d'état une forme : $\dot{x_4} = A_4 x_4 + B_4 u_4$, avec x_4 à déterminer. Comme on a $\dot{x_1} = A_1 x_1 + B_1 u_1$ et $\dot{x_2} = A_2 x_2 + B_2 u_2$, et que $u_4 = u_1 = u_2$. On peut directement se ramener à :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\dot{x_1}\\ \dot{x_2}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}B_1\\ B_2\end{pmatrix} u_4\\ &= A_4 x_4 + B_4 u_4\end{aligned}$$

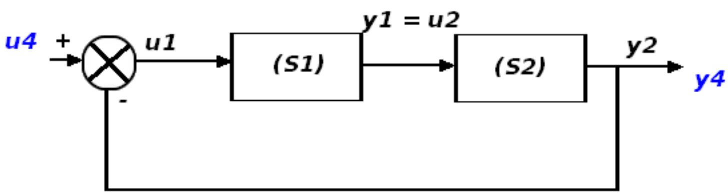
En posant $x_4 = \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$

De plus en sommant les equations sur y_1 et y_2 :

$$\begin{aligned}y_4 &= C_1 x_1 + C_2 x_2 + (D_1 + D_2) u_4\\ &= \begin{pmatrix}C_1 & C_2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} + (D_1 + D_2) u_4\\ &= C_4 x_4 + D_4 u_4\end{aligned}$$

On a donc une équation d'observation en x_4 et y_4

3. On asservie la structure (S3) précédente avec une retour unitaire comme sur le schéma suivant :



On a comme relation de connections :

$$\begin{aligned}u_3 &= u_5 - y_5\\ y_3 &= y_5\end{aligned}$$

on a donc en remplaçant dans l'équation d'observation du système 3 :

$$y_5 = C_3 x_3 + D_3 (u_5 - y_5)$$

ATTENTION ! Dans el cas général ce sont des matrices et non commutable :

$$(\mathbb{1} + D_3) y_5 = C_3 x_3 + D_3 u_5$$

si $\mathbb{1} + D_4$ est inversible :

$$\begin{aligned}y_5 &= (\mathbb{1} + D_3)^{-1} C_3 x_3 + (\mathbb{1} + D_3)^{-1} D_3 u_5\\ &= C_5 x_3 + D_5 u_5\end{aligned}$$

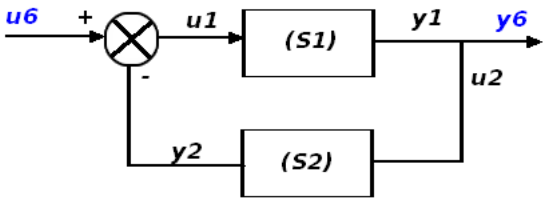
On parle ici de boucle de rétroaction bien posée. Ceci est notre équation d'observation si $x_3 = x_5$.
Si l'on remplace dans l'équation d'état de (S3) :

$$\begin{aligned}
\dot{x_3} &= A_3x_3 + B_3(u_5 - y_5) \\
&= A_3x_3 + B_3u_5 - B_3((\mathbb{1} + D_3)^{-1}C_3x_3 + (\mathbb{1} + D_3)^{-1}D_3u_5) \\
&= (A_3 - B_3(\mathbb{1} + D_3)^{-1}C_3)x_3 + B_3(\mathbb{1} - (\mathbb{1} + D_3)^{-1}D_3)u_5 \\
&= A_5x_5 + B_5u_5
\end{aligned}$$

On obtient donc l'équation d'état avec $x_5 = x_3$. Pour cette question, il ne reste plus qu'à exprimer les termes de (S3) en fonction de ceux de (S2) et (S1).

4. Dans celle-ci, on boucle le système (S4), il suffit donc de reprendre les mêmes calcules que dans la question précédent avec un changement d'indice. Il suffit ensuite d'exprimer les termes de (S4) en fonction de ceux de (S2) et (S1).

5. On place le système (S1) sur la chaine directe et (S2) sur la chaîne de retour comme le montre le schéma suivant :



On a les deux relations de connections :

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_6 = u_2 \\
u_1 &= u_6 - y_2
\end{aligned}$$

Puisque l'on a une expression de y_6 directement depuis l'équation d'observation de (S1) :

$$\begin{aligned}
y_6 = y_1 &= C_1x_1 + D_1(u_6 - y_2) \\
(\mathbb{1} + D_1D_2)y_6 &= C_1x_1 + D_1C_2x_2 + D_1u_6
\end{aligned}$$

donc si $(\mathbb{1} + D_1D_2)$ est inversible :

$$\begin{aligned}
y_6 &= (\mathbb{1} + D_1D_2)^{-1}C_1x_1 + (\mathbb{1} + D_1D_2)^{-1}D_1C_2x_2 + (\mathbb{1} + D_1D_2)^{-1}D_1u_6 \\
&= \left((\mathbb{1} + D_1D_2)^{-1}C_1 \quad (\mathbb{1} + D_1D_2)^{-1}D_1C_2\right) . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (\mathbb{1} + D_1D_2)^{-1}D_1u_6 \\
&= C_6x_6 + D_6u_6
\end{aligned}$$

On pose donc $x_6 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Déterminons alors l'équation d'état composante par composante :

$$\begin{aligned}
\dot{x_1} &= A_1x_1 + B_1u_1 \\
&= A_1x_1 + B_1(u_6 - y_2) \\
&= A_1x_1 - B_1C_2x_2 - B_1D_2y_6 + B_1u_6
\end{aligned}$$

En remplaçant par l'équation d'observation de (S6) :

$$\dot{x_1} = \begin{pmatrix} A_1 & -B_1C_2 \end{pmatrix} x_6 - B_1D_2C_6x_6 + (B_1 - D_6)u_6$$

Et pour la deuxième :

$$\begin{aligned}
\dot{x_2} &= A_2x_2 + B_2u_2 \\
&= A_2x_2 + B_2y_6 \\
&= \begin{pmatrix} A_1 - B_1C_2 \end{pmatrix} x_6 + B_2D_6u_6
\end{aligned}$$

Ainsi, en recoupant ces deux composantes on a le système d'état :

$$\begin{aligned}
\dot{x_6} &= \begin{pmatrix} A_1 + B_1D_2(\mathbb{1} + D_1D_2)^{-1}C_1 & -B_1C_2 - B_1D_2(\mathbb{1} + D_1D_2)^{-1}D_1C_2 \\ B_2(\mathbb{1} + D_1D_2)^{-1}C_1 & A_2 - B_2(\mathbb{1} + D_1D_2)^{-1}D_1C_2 \end{pmatrix} x_6 + \begin{pmatrix} B_1 - (\mathbb{1} + D_1D_2)^{-1} \\ B_2(\mathbb{1} + D_1D_2)^{-1}D \end{pmatrix} \\
&= A_6x_6 + B_6u_6
\end{aligned}$$

Attention : résultat risqué.

TD6 Représentation d'état et commandabilité

Exercice 1 :

Remarque : Avec ces notations on a : $i_q = -C\frac{dv}{dt}$
Lois des noeuds :

- $i = i_1 + i_2$
- $i = i_3 + i_4$
- $i_1 = i_q + i_3$
- $i_4 = i_q + i_2$

Lois des mailles :

- $R_1 i_1 - R_2 i_2 - v = 0$
- $R_3 i_3 + v - R_4 i_4 = 0$

$$\begin{aligned} R_1 i_q + R_1 i_3 - R_2 i_2 - v = 0 \\ R_3 i_3 + v - R_4 i_2 - R_4 i_q = 0 \end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned} -R_1 C\frac{dv}{dt} - v + R_1 i_3 - R_2 i_2 = 0 \\ R_4 C\frac{dv}{dt} + vR_3 i_3 - R_4 i_2 = 0 \end{aligned}$$

Posons $\Delta = R_1R_4 - R_2R_3$ On a donc :

$$\begin{aligned} i_3 &= \frac{1}{\Delta}(-(r_1 + r_2)R_4C\dot{v} - (R_2 + R_4)v) \\ i_2 &= \frac{1}{\Delta}(-(R_3 + R_4)R_1C\dot{v} - (R_1 + R_3)v) \end{aligned}$$

on a donc :

$$\begin{aligned} u &= L\frac{di}{dt} + R_1 i_1 + R_3 i_3 \\ &= L\frac{di}{dt} - (R_1 + R_3)i_3 + R_1 i_q \\ &\vdots \\ u &= L\frac{di}{dt} - \frac{(R_1R_2R_3 + R_1R_2R_4 + R_1R_3R_4 + R_2R_3R_4)C}{\Delta}\dot{v} - \frac{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}{\Delta}v \end{aligned}$$

Or, $i = i_1 + i_2$ donc $i = i_q + i_3 + i_2$, donc :

$$\begin{aligned} i &= -C\dot{v} - \frac{R_1+R_2+R_3+R_4}{\Delta}v - \frac{(R_1R_3+2R_1R_4+R_2R_4)C}{\delta}\dot{v} \\ &\vdots \\ i &= -\frac{(R_1+R_2)(R_3+R_4)}{\Delta}\dot{v} - \frac{R_1+R_2+R_3+R_4}{\Delta}v \end{aligned}$$

On pose :

- $\alpha_1 = R_1R_2R_3 + R_1R_2R_4 + R_1R_3R_4 + R_2R_3R_4$
- $\alpha_2 = (R_1+R_2)(R_3+R_4)$
- $\beta_1 = (R_1+R_3)(R_2+R_4)$
- $\beta_2 = R_1+R_2+R_3+R_4$

On a alors :

$$\begin{aligned} u &= L\frac{di}{dt} - \frac{\alpha_1 C}{\Delta}\dot{v} - \frac{\beta_1}{\Delta}v \\ i &= -\frac{\alpha_2 C}{\Delta}\dot{v} - \frac{\beta_2}{\Delta}v \end{aligned}$$

Posons $x_1 = i$ et $x_2 = v$:

$$\begin{aligned} u &= L\dot{x_1} - \frac{\alpha_1 C}{\Delta}\dot{x_2} - \frac{\beta_1}{\Delta}x_2 \\ x_1 &= -\frac{\alpha_2 C}{\Delta}\dot{x_2} - \frac{\beta_2}{\Delta}x_2 \end{aligned}$$

On a donc le système matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} L & -\frac{\alpha_1 L}{\Delta} \\ 0 & -\frac{\alpha_2 L}{\Delta} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\beta_1}{\Delta} \\ 1 & \frac{\beta_2}{\Delta} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

On en déduit alors pour $\frac{\alpha_2 CL}{\Delta} \neq 0$ l'équation d'état :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_1}{\alpha_2 L} & \frac{\beta_1}{\Delta} - \frac{\alpha_1\beta_2}{\alpha_2 L\Delta} \\ -\frac{\Delta}{\alpha_2 C} & -\frac{\beta_2}{\alpha_2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix} u$$

Sans oublier l'équation d'obeservation :

$$y = i = x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 0 * u$$

2- Théorème de caractérisation de la commandabilité :
On considère le système suivant :

$$(S) = \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu & x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

(S) est commandable $\Leftrightarrow$ rang[C(A,B)] = n (matrice de rang plein)
Où C(A,B) = $\begin{pmatrix} A^0B & AB & A^2B & ... & A^{n-1}B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n*n}$

Remarque : on est en monovariable $\Leftrightarrow det(C(A,B)) \neq 0$

On calcul donc :

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_1}{\alpha_2 L} & \frac{\beta_1}{\Delta} - \frac{\alpha_1\beta_2}{\alpha_2 L\Delta} \\ -\frac{\Delta}{\alpha_2 C} & -\frac{\beta_2}{\alpha_2} \end{pmatrix}$$

$$A^0B = \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_1}{\alpha_2 L^2} \\ -\frac{\Delta}{\alpha_2 LC} \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$C(A,B) = \begin{pmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{\alpha_1}{\alpha_2 L^2} \\ 0 & -\frac{\Delta}{\alpha_2 LC} \end{pmatrix}$$

On calcul alors le determinant :

$$det(C(A,B)) = \frac{-\Delta}{\alpha_2 L^2 C} \neq 0 \Leftrightarrow \Delta \neq 0$$
$$\Leftrightarrow R_1R_4 - R_2R_3 \neq 0$$

Remarque : si $R_1R_4 = R_2R_3$ le pont est équilibré et $v(t) = 0$ donc le système est non commandable.

Exercice 2 :

1-a)

$$
\begin{aligned}
P_a(\lambda) &= det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -3-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (-1-\lambda)(-3-\lambda)(-2-\lambda) + (-2-\lambda) \\
&= (-2-\lambda)(+3+\lambda+3\lambda+\lambda^2+1) \\
&= (-2-\lambda)^3
\end{aligned}
$$

1-b) $\lambda_0 = -2$ vecteur propre triple

1-c) Cherchons les vecteurs propres vérifiant $AX = \lambda X$:

$$
\begin{aligned}
-x_1 + x_2 &= -2x_1 \\
-x1 - 3x_2 &= -2x_2 \rightarrow x_1 + x_2 = 0 \\
x_1 + x_2 - 3x_3 &= -2x_3
\end{aligned}
$$

On choisit donc x_3 quelconque et $x_1 = -x_2$ ce qui correspond à un sous espace propre de dimension 2 et :

$$
Ker\{\lambda_0 \mathbb{1}_3 - A\} = Vect\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}
$$

La dimension de ce sous espace propre est $2 \leq 3$ donc A est non diagonalisable.
On a donc deux blocs de Jordan car la multiplicité des valeurs propres de 2 :

$$
J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \textbf{ ou alors } \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} = J
$$

Le but maintenant est de trouver un 3ème vecteur pour compléter la bases de vecteurs propres et avoir $V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$ tel que $V^{-1}AV = J$, avec J l'une des deux matrices contenant un bloc de Jordan.
En posant AV = VJ on a :

$$
\begin{pmatrix} Av_1 & Av_2 & Av_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 v_1 & \lambda_0 v_2 & v_2 + \lambda_0 v_3 \end{pmatrix}
$$

et on obtient le système :

$$
\begin{array}{lcc}
Av_1 & & \lambda_0 v_1 \\
Av_2 & = & \lambda_0 v_2 \\
Av_3 & & v_2 + \lambda_0 v_3
\end{array}
$$

on obtient donc en particulier pour le vecteur v_3 :

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

On constate qu'il n'est pas possible de déterminer v_3 de cette façon, on cherche donc a prendreà la place de v_2, $\tilde{v_2} = \alpha v_1 + \beta v_2$ de sorte à avoir $A\tilde{v_2} = \lambda_0 \tilde{v_2}$ (ce qui reste vrai car on prend une combinaison liéaire de 2 vecteur propre du ker) et surtout $(A - \lambda_0 \mathbb{1}_3)v_3 = \tilde{v_2}$. On a donc :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} v_3 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec , $\beta = \alpha = 1$

$$\tilde{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

on résoud alors pour trouver v_3 :

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

on a donc finalement trouvé V :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$V^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$J = V^{-1}AV = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

On a bien une matrice diagonale par bloc avec un bloc de Jordan. On pose $\xi \in \mathbb{R}^3$, $x = V\xi$, et on a le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu & x_0 \in \mathbb{R}^n \\ y = Cx + Du \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{\xi} = J\xi + V^{-1}Bu & = J\xi + \tilde{B}u \\ y = CV\xi + Du & = \tilde{C}\xi + \tilde{D}u \end{cases}$$

avec,

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\tilde{D} = 0$$

2-

$$\dot{\xi} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xi + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xi$$

$$C(A,B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & 8 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$det(C(A,B)) = 0$$

Non commandable.

TD7 Commandabilité et plannification de trajectoire

Exercice 1 :

On considère le système suivant :

$$(S) = \begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -10 & 12 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} u \\ y_1 = \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix} x_1 \end{cases}$$

1. (a) Base modale

Déterminons les valeurs propres de la matrice d'évolution :

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= det(A_1 - \lambda \mathbf{1}_2) \\ &= det \begin{pmatrix} -10-\lambda & 12 \\ -6 & 7-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (-10-\lambda)(7-\lambda) + 72 \\ &= -70 + 3\lambda + \lambda^2 + 72 \\ &= \lambda^2 + 3\lambda + 2 \\ &= (\lambda+1)(\lambda+2) \end{aligned}$$

Cherchons les vecteurs propres vérifiant $A_1 X = \lambda X$:
Pour $\lambda = -1$:

$$A_1 X = \lambda X \rightarrow -6x_1 + 8x_2 = 0$$

On a donc :

$$\begin{aligned} E_{-1} &= Ker\{-1.\mathbf{1}_3 - A\} \\ &= Vect\left\{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right\} \end{aligned}$$

Pour $\lambda = -2$:

$$A_1 X = \lambda X \rightarrow -6x_1 + 9x_2 = 0$$

On a donc :

$$\begin{aligned} E_{-2} &= Ker\{-2.\mathbf{1}_3 - A\} \\ &= Vect\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} \end{aligned}$$

La matrice de changement de base est donc : $P = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

(b) Le système est globalement asymptotiquement stable car les valeurs propres sont à $Re() < 0$.
On effectue alors le changement de base $x_1 = P\xi_1$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 + x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 x_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{\xi}_1 = \Lambda\xi_1 + V^{-1}B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 V \xi_1 \end{cases}$$

avec,

$$\Lambda = V^{-1}A_1 V = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\begin{cases} V^{-1}B_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = B_m \\ C_1 V = 1 \quad 2 = C_m \end{cases}$$

(c) Rappel : pour $\dot{x} = Ax + Bu$ avec $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ la solution est de la forme CI + régime forcé :

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Application :

$$\xi_1(t) = e^{\Lambda t}\xi_0 + \int_0^t e^{\Lambda(t-\tau)}B_m u_1(\tau)d\tau$$

$$e^{\Lambda t} = e^{\begin{pmatrix} -t & 0 \\ 0 & -2t \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$\xi_1(t) = \begin{pmatrix} \int_0^t -e^{-(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ \int_0^t e^{-2(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} y_1(t) &= C_m\xi_1(t) \\ &= \int_0^t -e^{-(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + \int_0^t 2e^{-2(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad = \int_0^t (2e^{-2(t-\tau)} - e^{-(t-\tau)})Bu_1(\tau)d\tau \end{aligned}$$

Pour une réponse indicielle $u_1(t) = 1 \ \forall t \geq 0$

(d) Commandabilité : C(A,B) = $\begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix}$

$$A = V\Lambda V^{-1}$$
$$B = VB_m$$

donc :

$$\begin{aligned} C(A,B) &= \begin{pmatrix} VB_m & V\Lambda V^{-1}VB_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} VB_m & V\Lambda B_m \end{pmatrix} \\ &= V\begin{pmatrix} B_m & \Lambda B_m \end{pmatrix} \\ &= VC(\Lambda, B_m) \end{aligned}$$

or,

$$C(\Lambda, B_m) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc, } det(C(\Lambda, B_m)) = 1 \neq 0$$

Ainsi, le système est commandable.

Remarque : Soit $x_1 \in \mathbb{R}^{\nvDash}$:

$$x_1(t) = e^{A_1 t}x_0 + \int_0^t e^{A_1(t-\tau)}B_1 u_1(\tau)d\tau \in \mathbb{R}^{\nvDash}$$

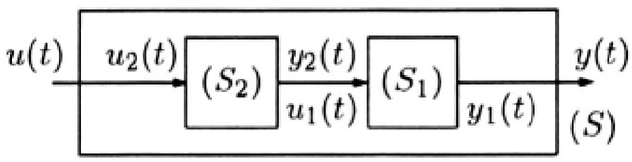
$$W_c(0,t) = \int_0^t e^{A_1(t-\tau)}B_1 B_1^T e^{A_1^T(t-\tau)}d\tau \in \mathbb{R}^{\nvDash * \nvDash}$$

$W_c(0,t_1)$ est inversible car commandable

$$\begin{aligned} x_1(t_1) &= e^{A_1 t_1}x_0 + \int_0^{t_1} e^{A_1(t_1-\tau)}B_1 B_1^T e^{A_1^T(t_1-\tau)}W_c(0,t_1)^{-1}d\tau(x_1 - e^{A_1 t_1}x_0) = x_1 \forall t_1 \geq 0 \\ &= B_1 e^{A(t_1-t)}W_c(0,t_1)^{-1}(x_1 - e^{A_1 t_1}x_0) \end{aligned}$$

2. On considère le système (S2) suivant :

$$(S2) = \begin{cases} \dot{x}_2 = -10x_2 + 4u_2 \quad x_2(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \\ y = -2x + u_2 \end{cases}$$



(a) La relation de connection est $u_1 = y_2$ et donne

$$\dot{\xi}_1 = \Lambda\xi_1 + B_m u_1 \text{ avec, } u_1 = y_2 = C_2 x_2 + D_2 u_2$$

D'où le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \Lambda\xi_1 + B_m C_2 x_2 + B_m D_2 u_2 \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2 \end{cases}$$

Posons x(t) $= \begin{pmatrix} \xi_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, on a alors :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \Lambda & B_m C_2 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} B_m D_2 \\ B_2 \end{pmatrix} u$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} u = Ax + Bu$$

On a donc pour l'équation d'observation :

$$\begin{aligned} y = y_1 &= C_m\xi_1 + D_1 u_1 \\ &= C_m\xi_1 + D_1 y_2 \text{ où } D_1 = 0 \\ &= C_m\xi_1 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \xi_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) On regarde alors la commandabilité :

$$\begin{aligned} C(A,B) &= \begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 9 & -89 \\ 1 & -10 & 100 \\ 4 & -40 & 400 \end{pmatrix} \\ rang(C(A,B)) &= 2 \text{ car } L_3 = 4L_2 \end{aligned}$$

(S1) est stable, (S2) est stable mais l'association des deux ne l'est pas !

(c) On considère le système (S) suivant :

$$(S) = \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu & x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

On introduit le vecteur :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \dot{x}_n \end{pmatrix}$$

et, sa transformée de Laplace

$$\begin{aligned} L\{x\} &= \begin{pmatrix} L\{x_1\} \\ L\{x_2\} \\ \vdots \\ L\{x_n\} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} X_1(p) \\ X_2(p) \\ \vdots \\ X_n(p) \end{pmatrix} = X(p) \end{aligned}$$

on a alors avec le système (S)

$$\begin{aligned} pX(p) - x_0 &= AX(p) + BU(p) \\ (p\mathbf{1_n} - A)X(p) &= x_0 + BU(p) \end{aligned}$$

d'où la relation :

$$X(p) = (p\mathbf{1_n} - A)^{-1}BU(p) + (p\mathbf{1_n} - A)^{-1}x_0$$

De même, on pose le vecteur :

$$\begin{aligned}Y(p) &= L\{y(t)\}\\ &= CX(p) + DU(p)\\ &= [C(p\mathbf{1_n} - A)^{-1}B + D]u(p) + C(p\mathbf{1_n} - A)^{-1}x_0\\ &= G(p)U(p) + C(p\mathbf{1_n} - A)^{-1}x_0\end{aligned}$$

et on a :

$$\begin{aligned}(p\mathbf{1_n} - A)^{-1} &= \frac{1}{det(p\mathbf{1_n} - A)}Adj(p\mathbf{1_n} - A)\\ G(p) &= \frac{C.Adj(p\mathbf{1_n} - A)B + DP_A(p)}{P_A(p)}\end{aligned}$$

Les pôles sont les modes. On calcul donc :

$$p\mathbf{1_n} - A = \begin{pmatrix} p+1 & 0 & -2\\ 0 & p+2 & 2\\ 0 & 0 & p+10\end{pmatrix}$$

puis,

$$(p\mathbf{1_n} - A)^{-1} = \frac{1}{(p+1)(p+2)(p+10)}\begin{pmatrix}(p+2)(p+10) & 0 & 0\\ 0 & (p+1)(p+10) & 0\\ 2(p+2) & -2(p+1) & (p+1)(p+2)\end{pmatrix}^T$$

ensuite,

$$C(p\mathbf{1_n} - A)^{-1} = \frac{1}{(p+1)(p+2)(p+10)}\big((p+2)(p+10) \quad 2(p+1)(p+10) \quad 2(p+2) - 4(p+$$

enfin on obtient l'ordre 2 :

$$C(p\mathbf{1_n} - A)^{-1}B = G(p) = \frac{p}{(p+1)(p+10)}$$

Remarque :

$$G(p) = G_1(p)G_2(p)$$

avec

$$\begin{aligned}G_1(p) &= C_1(p\mathbf{1_2} - A_1)B_1 = \frac{p}{(p+1)(p+2)}\\ G_2(p) &= C_2(p\mathbf{1_1} - A_2)B_2 + D_2 = \frac{p+2}{p+10}\end{aligned}$$

Un pôle de G_1 a été neutralisé par un zéro de G_2, on a donc une perte de commandabilité.
Réalisation minimale : un vecteur d'état de taille la plus petite. Ici, ordre 2 (on avait un ordre 3 qui n'était pas minimal).

3. On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= \begin{pmatrix} -10 & 12 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} x_1 &+ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ y_1 &= \begin{pmatrix} 4 & -5 \end{pmatrix} x_1 \end{cases}$$

(a) On impose une trajectoire polynomiale : $y_d(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \left(\frac{t}{T}\right)^k$
Avec les conditions initiales suivantes :

t=0	t=T
$y_1(0) = 0$	$y_1(T) = 1$
$\dot{y_1}(0) = 0$	$\dot{y_1}(T) = 0$
$\ddot{y_1}(0) = 0$	$\ddot{y_1}(T) = 0$

On a aussi :

$$\dot{y_1}(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{T} \alpha_k \left(\frac{t}{T}\right)^{k-1}$$
$$\ddot{y_1}(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{T^2} \alpha_k \left(\frac{t}{T}\right)^{k-2}$$

On a 6 contraintes donc 6 inconnues donc au maximum, $n = 5$

à $t = 0$:

$$y_1(0) = \sum_{k=0}^{5} \alpha_k \left(\frac{0}{T}\right)^k \Leftrightarrow \alpha_0 = 0$$
$$\dot{y_1}(0) = \sum_{k=0}^{5} \frac{k}{T} \alpha_k \left(\frac{0}{T}\right)^{k-1} \Leftrightarrow \alpha_1 = 0$$
$$\ddot{y_1}(t) = \sum_{k=0}^{5} \frac{k(k-1)}{T^2} \alpha_k \left(\frac{0}{T}\right)^{k-2} \Leftrightarrow \alpha_2 = 0$$

à $t = T$:

$$
\begin{aligned}
y_1(T) = 1 &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{5} \alpha_k = 1 \\
&\Leftrightarrow \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 1 \\
\dot{y_1}(T) = 0 &\Leftrightarrow \sum_{k=3}^{5} \frac{k}{T}\alpha_k = 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{T}(3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 5\alpha_5) = 0 \\
\ddot{y_1}(T) = 0 &\Leftrightarrow \sum_{k=3}^{5} \frac{k(k-1)}{T^2}\alpha_k = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{T^2}(6\alpha_3 + 12\alpha_4 + 20\alpha_5) = 0
\end{aligned}
$$

ce système est alors équivalent au calcul matriciel suivant :

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 12 & 20 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 12 & 20 \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Le calcul abouti à :

$$
\begin{cases} \alpha_3 = 10 \\ \alpha_4 = -15 \\ \alpha_5 = 6 \end{cases}
$$

Remarque : On a une matrice 3x3, on peut donc se permettre de calculer l'inverse à partir des cofacteurs $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$ avec M_{ij} la matrice obtenu en supprimant la ligne i et la colonne j.

Remarque : $\dddot{y}_1(t)$ représente la secousse, aussi appelé Jerk. Le quintique est la trajectoire à Jerk minimal.

(b) Passage à la forme canonique de commandabilité.
Il s'agit de trouver la matrice de passage M du système d'état vers celui correspondant a A_c une matrice compagnon horizontale de type 1 et B_c un vecteur de 0 avec 1 sur la dernière composante. Puis, une fois que l'on à M, on calcule $C_c = M.C$

On a le polynôme caractéristique $P_{A_1}(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$, dont on en déduit la matrice compagnon horizontale :

$$
A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}
$$

Et on a aussi :

$$B_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Changement de coordonnées $M \in \mathbb{R}^{2x2}$ avec $M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \end{pmatrix}$

$$M^{-1}AM = A_c \Leftrightarrow AM = MA_c$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} Am_1 & Am_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2m_2 & m_1 - 3m_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Am_1 = -2m_2 \\ Am_2 = m_1 - 3m_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Am_1 = -2m_2 \\ (A + 3\mathbf{1}_2)m_2 = m_1 \end{cases}$$

or, $M^{-1}B = B_c \Leftrightarrow B = MB_c = m_2$, donc :

$$M = \begin{pmatrix} B & (A + 3\mathbf{1}_2)B \end{pmatrix}$$

d'où :

$$M = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Il est inutile de calculer M^{-1} pour le calcul de la forme canonique. Car $C_c = C_1 M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ et, $D_c = D_1 = 0$

(c) On impose $y_1(t) = 10\left(\frac{t}{T}\right)^3 - 15\left(\frac{t}{T}\right)^4 + 6\left(\frac{t}{T}\right)^5$.
On cherche une commande du type : $u_1(t) = \sum_{k=0}^{m} \beta_k \left(\frac{t}{T}\right)^k$.

Forme de Browmovski :

$$\begin{pmatrix} \dot{z_1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{z_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \\ 0 & ... & ... & 1 & \\ -a_0 & ... & ... & -an-1 & \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

Ayant la forme canonique de commandabilité, la forme de Browmovski conciste à poser :

$$\boxed{v(t) = -a^T z + u}$$

où $a = \begin{pmatrix} a_0 & ... & a_{n-1} \end{pmatrix}^T$ d'où

$$\begin{pmatrix} \dot{z_1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{z_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \\ 0 & ... & ... & 1 & \\ 0 & ... & ... & 0 & \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v$$

Avec l'équation d'observation du système d'état $y = \begin{pmatrix} c_0 & ... & c_{n-1} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{pmatrix}$

Application : Avec l'équation d'observation :

$$y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = z_2$$

Puis, avec la forme de Brow*** :

$$\left\{ \begin{pmatrix} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = v \end{pmatrix} \right. \text{ où } v = -\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + u$$

On a donc comme commande, en remplaçant avec les expressions provenant de l'équation d'obersation :

$$u = v + \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \qquad = 2z$$

On calcul donc chaque terme :

$$\begin{aligned} z_1 &= \int_0^t z_2(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t y_1(\tau) d\tau \\ &= \frac{10T}{4} \left(\frac{t}{T}\right)^4 - \frac{15T}{5} \left(\frac{t}{T}\right)^5 + \frac{6T}{6} \left(\frac{t}{T}\right)^6 + cst(=0) \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} u(t) &= 2z_1 + 3y_1 + \dot{y}_1 \\ &= 2T \left(\frac{t}{T}\right)^6 + (18 - 6T) \left(\frac{t}{T}\right)^5 + (\frac{30}{T} - 45 + 5T) \left(\frac{t}{T}\right)^4 + (30 - \frac{60}{T}) \left(\frac{t}{T}\right)^3 + \frac{30}{T} \left(\frac{t}{T}\right)^2 \\ &= \beta_6 \left(\frac{t}{T}\right)^6 + \beta_5 \left(\frac{t}{T}\right)^5 + ... + \beta_2 \left(\frac{t}{T}\right)^2 \end{aligned}$$

Donc m=6 et $\beta_1 = \beta_2 = 0$. Commande en boucle ouverte non robuste au conditions initiales. Il faut donc commander en boucle fermée.

TD8 Poursuite de trajectoire avec retour d'état

Exercice 1 : Forme canonique et poursuite de trajectoire

1. (a) On a toujours le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x_1} & = & \begin{pmatrix} -10 & 12 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} x_1 & + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} u \\ y_1 & = & \begin{pmatrix} 4 & -5 \end{pmatrix} x_1 \end{cases}$$

Et on a effectué le changement de variable suivant : $x_1(t) = Mx_c(t)x_c = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ On a donc le système équivalent :

$$\begin{cases} \dot{x_c} & = & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} x_c & + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} u \\ y & = & \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x_c \end{cases}$$

(b) On impose la trajectoire :

$$y_d(t) = 10\left(\frac{t}{T}\right)^3 - 15\left(\frac{t}{T}\right)^4 + 6\left(\frac{t}{T}\right)^5$$

Le système est équivalent à :

avec l'équation d'observation : $y(t) = z_2(t)$

et le système d"état donne : $\begin{cases} \dot{z_2} = -2z_1 - 3z_2 + u \\ \dot{z_1} = z_2 \end{cases}$

Et comme on impose la trajectoire sur $y(t) = y_d(t)$, on a :

$$z_2^d(t) = y_d(t)$$

donc $z_1^d(t)$ doit vérifier :

$$\begin{aligned} z_1^d(t) &= \int_0^t y_d(\tau)d\tau \\ &= \frac{10T}{4}\left(\frac{t}{T}\right)^4 - \frac{15T}{5}\left(\frac{t}{T}\right)^5 + \frac{6T}{6}\left(\frac{t}{T}\right)^6 \end{aligned}$$

(c) On note :

$$\epsilon_d(t) = z_1(t) - z_1^d(t)$$

On cherche a déterminer le vecteur de la formule de Bumowski qui annulera $\epsilon_d(t)$

$$v(t) = -a^T x_c(t) + u(t) \text{ avec, } a = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{z_1} = z_2 \\ \dot{z_2} = v \end{cases} \Rightarrow v = \ddot{z_1}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\epsilon_d} &= \ddot{z_1} - \ddot{z_1^d} \\ &= v - \ddot{z_1^d} \end{aligned}$$

On cherche donc à avoir $\epsilon_d(t)$ solution de $\ddot{\epsilon_d}(t)+h_1\dot{\epsilon_d}(t)+h_0\epsilon_d(t)=0$, où $(h_0,h_1)\in\mathbb{R}^2$ à déterminer et dépendant du vecteur v. Tel que l'équation caractéristique possède des racines à parties réelles négatives. Donc ssi $h_1>0$ et $h_0>0$.
La transformée de Laplace de cette équation donne donc :

$$\begin{aligned}p^2\epsilon_d(p)-p\epsilon_d(0^+)-\dot{\epsilon_d}(0^+)+h_1(p\epsilon_d-\epsilon_d(o^+))+h_0\epsilon_d(p)=0\\ \epsilon_d=\frac{\dot{\epsilon_d}(0^+)+(h_1+p)\epsilon_d(0^+)}{p^2+h_1p+h_0}\\ =\frac{\gamma_1p+\gamma_0}{(p-p_1)(p-p_2)}\end{aligned}$$

Exemple : $p^2+h_1p+h_0=(p+\frac{10}{T})^2=p^2+\frac{20p}{T}+\frac{100}{T^2}$

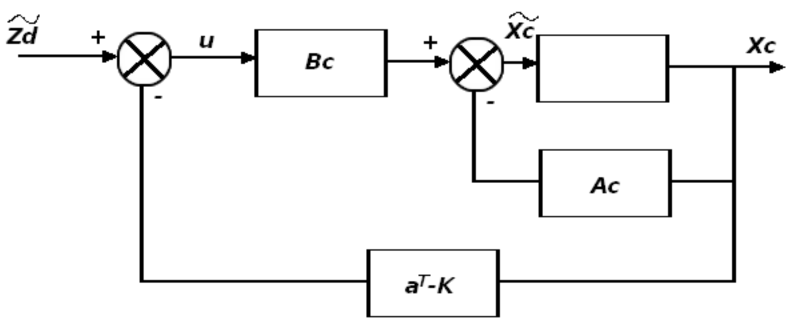
v doit vérifier d'après l'expression de $\ddot{\epsilon_d}$:

$$\begin{aligned}v(t)&=\ddot{\epsilon_d}(t)+\ddot{z}_1^d(t)\\ &=\ddot{z}_1^d(t)-h_1(\dot{z}_1(t)-\dot{z}_1^d(t))-h_0(z_1(t)-z_1^d(t))\\ &=\begin{pmatrix}h_0 & h_1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix}+(\ddot{z}_1^d(t)+h_1\dot{z}_1^d(t)+h_0z_1^d(t))\\ &=-Kx_c+\tilde{z}_d\end{aligned}$$

or, $v=-a^Tx_c+u$, donc on obtient la loi de commande :

$$\begin{aligned}u&=-Kx_c+\tilde{z}_d+a^Tx_c\\ &=(a^T-K)x_c+\tilde{z}_d\end{aligned}$$

Loi de commande en BF par retour d'état :



Exercice 2 : Synthèse d'une loi de commande par retour d'état

1. On a ici, n=3. Déterminons la représentation d'état.
   On a avec la fonction de transfert :

$$A(p)Y(p)=B(p)U(p)$$

d'où l'équation dans le domaine temporelle :

$$y^{(3)} + 8y^{(2)} + 17y^{(1)} + 10y = u^{(1)} + 2u$$

On a donc la forme canonique de commandabilité :

$$\begin{aligned}\dot{x_c} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -17 & -8 \end{pmatrix} x_c + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ &= A_c x_c + B_c u\end{aligned}$$

et on a l'equation d'observation :

$$y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_c + 0.u$$

Attention : Le u de l'équation d'état et de la fonction de transfert ne sont PAS les mêmes, l'un est un scalaire l'autre un vecteur.

On a une forme canonique de commandabilité, donc le système est effectivement commandable. Cependant, l'observabilité n'est pas acquise.
La réalisation est observable ssi il n'y a pas de simplification d'un zéro par un pôle. Il suffit donc de vérifier que -2 n'est pas un zéro du numérateur.
Une représentation minimal est appelée réalisation d'état.

2. On impose pour la boucle fermée :

$$\begin{cases} u = -Kx_c + \eta e \\ K = \begin{pmatrix} k_0 & k_1 & k_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\nVdash\frown\nVdash} \end{cases}$$

On a donc pour l'équation d'état :

$$\begin{aligned}\dot{x_c} &= A_c x_c + B_c u \\ &= (A_c - B_c K)x_c + \eta B_c e \\ &= A_{bf} x_c + \eta B_c e\end{aligned}$$

et pour l'éuation d'obersation :

$$y = C_c x_c$$

3. On impose les racines $P_1/P_2 = -m\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-m^2}$, donc on a le polynôme caractéristique : $\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2m}{\omega_0}p + 1$
Il est nécessaire de spécifier un troisième pôle $p_3 = -\lambda m\omega_0$, avec $\lambda >> 1$, car la système est d'ordre 3. Comment le choisir ? Stable, plus rapide que les autres pôles que l'on impose.

On a alors le polynôme à imposer :

$$\begin{aligned}\Pi_d(p) &= (p + \lambda m\omega_0)(p^2 + 2mp + \omega^2) \\ &= p^3 + (2+\lambda)m\omega_0 p^2 + (2\lambda m^2 + 1)\omega^2 p + \lambda m\omega_0^3\end{aligned}$$

Pour la matrice A_{bf}, on a le polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned} P_{A_{bf}} &= det(p\mathbf{1_3} - A_{bf}) \\ &= p^3 + (8+k_2)p^2 + (17+k_1)p + (10+k_0) \end{aligned}$$

Sachant qu'il y a une lien directe entre les coefficients de la matrice compagnon et son polynôme caractéristique.
On identifie donc les coefficients des deux polynômes :

$$\begin{cases} (8+k_2) = (2+\lambda)m\omega_0 \\ (17+k_1) = (2\lambda m^2+1)\omega^2 \\ (10+k_0) = \lambda m\omega_0^3 \end{cases}$$

4. Erreur statique nulle ssi le gain en p=0 vaut 1 (gain statique unitaire)
Or,

$$G_{bf}(p) = C_c(p\mathbf{1_3} - A_{bf})^{-1}B_c\eta$$

Donc ,

$$\eta = \frac{1}{-C_c(A_c - B - cK)^{-1}B_c}$$

TD9 Observateur

Exercice 1 : Système hydraulique

On rappelle la loi de Bernoulli : $\rho\frac{V_1^2}{2} + \rho g z_1 + p_1 = \rho\frac{V_2^2}{2} + \rho g z_2 + p_2$ Ce qui donne $q_1 \approx kh_i$
On a aussi la formule $k = \frac{S}{2}\sqrt{2gH_0}$

1. Cuve 1 :
   On a la relation de débit $q_e - q_1 = \frac{dv_1}{dt}$, le volume $V_1 = V_1^0 + v_1$, sachant que $v_1 = h_1 * S$, d'où :
   $q_e - q_1 = S\frac{dh_1}{dt}$, et puisque $q_1 = kh_1$ on aboutit à :
   $$q_e - kh_1 = S\frac{dh_1}{dt}$$
   Cuve 2 :
   On a ici, $q_1 - q_2 = \frac{dv_2}{dt} = S\frac{dh_2}{dt}$ donc :
   $$kh_1 - kh_2 = S\frac{dh_2}{dt}$$
2. On a les relations :
   $$\begin{aligned}\frac{dh_1}{dt} &= -\frac{k}{S}h_1 + \frac{1}{S}q_e \\ \frac{dh_2}{dt} &= \frac{k}{S}h_1 - \frac{k}{S}h_2\end{aligned}$$
   On pose $a = \frac{k}{S}$ et $b = \frac{1}{S}$, donc en posant $x = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$, on a :
   $$\dot{x} = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} q_e$$
3. $$\begin{aligned}P_A(\lambda) &= det(p\mathbf{1} - A) \\ &= (\lambda + a)^2\end{aligned}$$
   On a donc une racine double négative, le système est donc globalement asymptotique stable.
4. $$\begin{aligned}y &= h_1 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \\ &= Cx\end{aligned}$$

A-t-on observabilité du système ?

$$O(C,A) = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

Le système est non observable lorsque $y = h_1$.

Si $y = h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} x$

$$O(C,A) = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & -a \end{pmatrix}$$

Le système est observable lorsque $y = h_2$.

Rappel : Équation fondamentale de l'observateur asymptotique :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$$

Posons :

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= x - \hat{x} \\ \dot{\epsilon_x} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} \\ &= Ax + Bu - (A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \\ &= A(x - \hat{x}) - L(Cx + C\hat{x}) \\ &= A\epsilon_x - LC\epsilon_x \end{aligned}$$

donc :

$$\dot{\epsilon_x} = (A - LC)\epsilon_x$$

avec $\epsilon_x(0) = x_0 - \hat{x_0}$

$$\epsilon_x(t) = e^{(A-LC)t}\epsilon_{x0}$$

$$\hat{x} \longrightarrow_{t\longrightarrow\infty} x \Leftrightarrow \text{valeurs propres de A-LC à } Re() < 0$$

On cherche $L \in \mathbb{R}^{N*1}$ tel que $A - LC$ soit à valeurs propres à partie réelle négative.

Soit,

$$\begin{aligned} L &= \begin{pmatrix} l_1 \\ l2 \end{pmatrix} \\ A - LC &= \begin{pmatrix} -a & -l_1 \\ a & -a - l_2 \end{pmatrix} \\ P_{A-LC}(p) &= p^2 + (2a + l_2)p + a^2 + a(l_1 + l_2) \\ \Pi_0(p) &= (p - \xi(-a))^2 \\ &= (p + \xi a)^2 \\ &= p^2 + 2\xi ap + \xi^2 a^2 \end{aligned}$$

d'où, par identification :

$$\begin{cases} 2a + l_2 = 2\xi a \\ a^2 + a(l_1 + l_2) = \xi^2 a^2 \end{cases}$$

donc, on obtient :

$$l_2 = 2a(\xi - 1)$$
$$l_1 = a(\xi - 1)^2$$

Exercice 2 : système hydraulique avec perturbation

1. On a :

$$q_e + q_p - q_1 = S\frac{dh_1}{dt}$$
$$q_1 - q_2 = S\frac{dh_2}{dt}$$

d'ou la représentation d'état :

$$\begin{pmatrix} \dot{h_1} \\ \dot{h_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ a & -a \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} q_e + \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} q_p$$

2. On suppose que $q_p \approx cst$

Posons $x = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ q_p \end{pmatrix}$, on a alors :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} \dot{h_1} \\ \dot{h_2} \\ \dot{q_p} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -a & 0 & b \\ a & -a0 & \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ q_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 00 \end{pmatrix} q_e \\ &= Ax + Bq_e \end{aligned}$$

3. Déterminons les valeurs propres :

$$\begin{aligned} det(\lambda \mathbf{1} - A) &= \begin{vmatrix} \lambda + a & 0 & -b \\ -a & \lambda + a & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda(\lambda + a)^2 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \\
y = h_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x \\
O(C,A) &= \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -a & 0 \\ -2a^2 & a^2 & ab \end{pmatrix} \\
det(O(C,A)) &= -a^2 b
\end{aligned}$$

donc observable.