M1 E3A - Voie André Ampère

Module 455

Correction de TD

Version du 25 novembre 2023

Un cours de:
Michel Kieffer

Rédigé et amélioré par:
Pierre-Antoine Comby

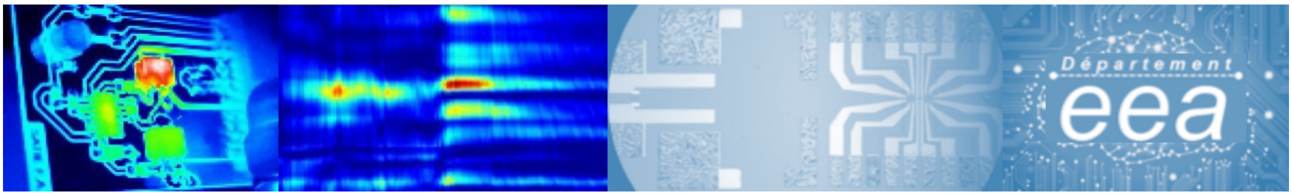

Table des matières

TD1

TD2

TD2.1 Quantification scalaire uniforme

1.

$$
\begin{aligned}
D &= E[(x-y)^2] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)(x_Q(x))^2 dx \\
&= \sum_{i=1}^{N} \int_{s_{i-1}}^{s_i} p_X(x)(x-y_i)^2 dx
\end{aligned}
$$

2. $N = 2$ $y_1 = -\frac{\Delta}{2}$, $\quad y_2 = \frac{\Delta}{2}$
On cherche Δ qui minimise D :

$$
\begin{aligned}
D &= \int_{-\infty}^{0} p_X(x)(x+\frac{\Delta}{2})^2 dx + \int_{0}^{\infty} p_X(x)(x-\frac{\Delta}{2})^2 dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} p_X(x)(x^2+\frac{\Delta^2}{4}+x\Delta)dx + \int_{0}^{\infty} p_X(x)(x^2+\frac{\Delta^2}{4}-x\Delta)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)(x^2+\frac{\Delta^2}{4})dx + \Delta(\int_{-\infty}^{0} p_X(x)dx - \int_{0}^{\infty} p_X(x)dx)
\end{aligned}
$$

Or, $\int_{-\infty}^{0} p_X(x)dx + \int_{0}^{\infty} p_X(x)dx = 0$ (X de valeur moyenne nulle)

$$
\begin{aligned}
D &= \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)(x^2+\frac{\Delta^2}{4})dx + 2\Delta \int_{0}^{\infty} p_X(x)dx \\
&= (\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)dx)\frac{\Delta^2}{4} - (2\int_{0}^{\infty} xp_X(x)dx)\Delta + \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_X(x)dx \\
&= \frac{\Delta^2}{4} - (2\int_{0}^{\infty} xp_X(x)dx)\Delta + \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_X(x)dx
\end{aligned}
$$

Ainsi,

$$
\frac{\partial D}{\partial \Delta} = 0 \Rightarrow \frac{1}{4}2\Delta - 2\int_{0}^{\infty} xp_X(x)dx = 0 \Rightarrow \Delta = 4\int_{0}^{\infty} xp_X(x)dx
$$

3. On a maintenant $\begin{cases} y_{i+1} - y_i & = \Delta \\ y_{N/2} = -\Delta/2, & y_{N/2+1} = \Delta/2 \end{cases}$
De plus, $y_{N/2} - y_1 = \Delta(N/2-1)$ donc $y_1 = y_{N/2} - \Delta(N/2-1) = -\Delta(N/2-1/2)$
$y_i = \Delta/2(-N+1) + (i-1)\Delta = (i-N/2-1/2)\Delta$
$S_i = y_i + \Delta/2 = \Delta(i-N/2)$

$$\begin{aligned}D = &\int_{-\infty}^{\Delta(1-N/2)} p_X(x)(x+\Delta(N/2-1/2))dx \\ &+ \sum_{i=2}^{N-1} \int_{\Delta(i-1-N/2)}^{\Delta(i-N/2)} p_X(x)(x-\Delta(i-\frac{N+1}{2})^2)dx \\ &+ \int_{\Delta(N/2-1)}^{\Delta(i-N/2)} p_X(x)(x-\Delta(N/2-1/2))dx\end{aligned}$$

Ensuite, on cherche Δ tel que $\frac{\partial D}{\partial \Delta} = 0$ mais c'est relou donc on va pas le faire.

4. (a) $\Delta = \frac{2A}{4} = \frac{A}{2}$
   (b)
   (c) $D = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{A^2}{3\times^{2R}}$

TD2.2 Quantification

TD2.3 Quantifiaction et codage entropique

1. On ne peut pas le dire directement parce que les couples (R, D) n'ont ni R, ni D connu pour QSU et QSNU.

2. Sans codeur entropique, on ne se réfère qu'on premier tableau. Pour le même débit, on a toujours $RSB_{QSU} \leq RSB_{SQNU}$, donc la QSNU est meilleure.

3. $D_{min} = \sigma^2 2^{-2R}$

$$RSB_{max} = 10\log_{10}\frac{\sigma^2}{D_{min}} = 6.02R$$

$$D(r) - D_{min}(R) = RSB_{max} - RSB(R) = 6R - RSB(R)$$

Avec un codeur entropique parfait, on a $R = H$ et donc :

$\log_2 M$	QSU	QSNU
1	1.6	1.6
2	2.174	2.166
3	2.296	2.33
4	2.232	2.37
5	2.124	2.36

4. C'est QSU + CE qui est meilleur.

R	D	Non scalable	Scalable 1	Scalable 2
0	σ^2	0	0	0
1	$\sigma^2 2^{-2}$	1	1	1
2	$\sigma^2 2^{-4}$	2	1+2	2
3	$\sigma^2 2^{-6}$	3	1+2+3	3

FIGURE 1 – Débit

TD2.4 Codage scalable

1. (a) $M = 2^R$ donc $\Delta = \frac{2X_{max}}{M} = \frac{2X_{max}}{2^R} = X_{max}2^{1-R}$
   (b) $D = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{(X_{max}2^{1-R})^2}{12} = X_{max}^2\frac{1}{3}2^{-2R}$
   (c) $R = 3 \Rightarrow M = 8$
   (d)
   - $X_1 = 0.9X_{max} \Rightarrow 111$
   - $X_2 = -0.1X_{max} \Rightarrow 011$
   - $X_3 = -0.6X_{max} \Rightarrow 001$

2. Le train binaire classique est 111 0111 001. Si les six bits de la fin sont perdus, on ne peut que reconstruire X_1.

3.
   - Scalable 1 : on code d'abord $X_1X_2X_3$ avec un bit par X_i, puis on la quantifiée avec 2 puis 3 bits. Au final, on code donc $X_1X_2X_3$ sur un train de 3+6+9=18 bits. Si on n'a que les 3 premiers 100, on peut reconstituer $X_1 = 0.5X_{max}$, $X_2 = X_3 = -0.5X_{max}$.
   - Scalable 2 : on envoie les premiers bits de X_1, X_2 et X_3 à la suite, puis les deuxièmes bits, puis les troisièmes. Le train fait donc 9 bits.

4. Codage d'image, codage vidéo. *Because why ? Because fuck you that's why.*

TD2.5 Codage avec information adjacente au décodeur

1. Un exemple de compression d'une sourceX en se servant d'une information adjacente supposée disponible au codeur et au décodeur :
   En codage vidéo, le codeur dispose de l'image n-1 (compressée et décompressée) pour coder l'image n.
   Le décodeur dispose également de l'image n-1.

2. On fabrique $\tilde{X}$ à partir de X et de Y :

$$\tilde{X} = X - Y$$

   Au décodeur, $\tilde{X}$ sera utilisé pour calculer $\hat{X}$ (l'estimé de X).

3. On suppose que Y et donc Z suivent une loi normale de moyenne nulle et d'écart-type respectif σ_Y et σ_Z.

(a)

$$\begin{aligned} E(X) &= E(Y+Z) = E(Y) + E(Z) = 0 \\ \sigma_X^2 &= E((X - E(X))^2) = E(X^2) = E(Y^2 + Z^2 + 2YZ) \\ &= E(Y^2) + 2E(Y)E(Z) + E(Z^2) \\ &= \sigma_Y^2 + \sigma_Z^2 \end{aligned}$$

(b) On ne tient compte de Y ni au codeur, ni au décodeur, $\tilde{X} = X$ et $D_1(R) = \sigma_X^2 2^{-2R}$.

(c) Si on compresse $\tilde{X} = X - Y = Z$, alors $D_2(R) = \sigma_{\tilde{X}}^2 2^{-2R} = (\sigma_X^2 - \sigma_Y^2)2^{-2R}$. Donc :

$$D_2(R) \leq D_1(R)$$

4. On n'utilise pas Y au codeur, donc à priori, les performances devraient être moins bonnes. Tout d'abord, X est quantifié à l'aide d'un quantificateur scalaire uniforme de pas Δ_1, centré en 0. X appartient à un intervalle de quantification répété par un index q_1, cet intervalle est alors découpé en M sous-intervalle, $m \in \{0, 1, ..., M-1\}$.

5.
$$\Delta_1 = M\Delta_2 \Rightarrow \Delta_2 = \frac{\Delta_1}{M}$$

6. Les m(s) sont équiprobables donc :

$$H = \sum_{i=1}^{\Delta_2} \frac{1}{\Delta_2} log_2 (\frac{1}{\frac{1}{\Delta_2}} = log_2(\Delta_2)$$

C'est le nombre de bits nécessaire.

Première méthode :
On quantifie Y au décodeur avec Δ_1 :

7. Il faut :

$$\begin{cases} k\Delta_1 - \frac{\Delta_1}{2} \leq Y \leq k\Delta_1 + \frac{\Delta_1}{2} \\ k\Delta_1 - \frac{\Delta_1}{2} \leq X \leq k\Delta_1 + \frac{\Delta_1}{2} \end{cases}$$

On suppose que $Y = k\Delta_1$ donc, on a $k\Delta_1 - \frac{\Delta_1}{2} \leq k\Delta_1 + Z \leq k\Delta_1 + \frac{\Delta_1}{2}$. Ce qui implique que :

$$-\frac{\Delta_1}{2} \leq Z \leq \frac{\Delta_1}{2}$$

8. Lorsque Y est très proche de la limite de l'intervalle, on a une distorsion de l'ordre de Δ_1^2, même lorsque $Z << Y$.

9. Deuxième méthode : On découpe l'intervalle de largeur Δ_1 en 0, en M sous-intervalle, et on sélectionne le milieu 0' du sous-intervalle indexé par m. Ensuite, Y est quantifié avec Δ_1 mais centré en 0'.

Première étape : on reconstruit $\hat{\omega}$ à partir de m et $-\frac{\Delta_1}{2} \leq \tilde{\omega} \leq \frac{\Delta_1}{2}$.
Seconde étape : $Y \rightarrow \hat{Y}$

$$\begin{aligned} \hat{X} &= Y \hat{+} \hat{\omega} \text{ et,} X = Y + Z \\ \text{donc, } (\hat{X} - X) &= (\hat{Y} - Y) + (\hat{\omega} - Z) \\ (\hat{Y} - Y)^2 &\leq \frac{\Delta_1^2}{4} \end{aligned}$$

Si $Z \in [-\frac{\Delta_1}{2}; \frac{\Delta_1}{2}]$ alors, $(Z - \hat{\omega})^2 \leq \Delta_1^2$, sinon $(z - \hat{\omega})^2$ peut être large.

10. Δ_1 assez grand pour que $|Z| \leq \frac{\Delta_1}{2}$.
    D(R) augmente aussi et $(\hat{m} - m)$ augmente.
11. Montrons que $Pr(|Z| > \frac{\Delta_1}{2}) = \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma_Z^2}} \int_{\frac{\Delta_1}{2}}^{+\infty} exp(-\frac{z^2}{2\sigma_z^2})dz$, dont la distribution de probabilité est : On peut aussi montrer que :

$$\begin{aligned} Pr(|Z| > \frac{\Delta_1}{2}) &= 2Pr(Z > \frac{\Delta_1}{2}) \\ &= 2\sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma_Z^2}} \int_{\frac{\Delta_1}{2}}^{+\infty} exp(-\frac{z^2}{2\sigma_z^2})dz \end{aligned}$$

On suppose que $\Delta_2 << \Delta_1$, et $\Delta_2 << \sigma_Z$.
On peut montrer que $|Z| \leq \frac{\Delta_2}{2} \Rightarrow D_1 = \frac{\Delta_2^2}{12}$ et que $|Z| > \frac{\Delta_2}{2} \Rightarrow D_2 = \Delta_2^2$.

$$\begin{aligned} D &= D_1 Pr(|Z| \leq \frac{\Delta_1}{2}) + D_2 Pr(|Z| > \frac{\Delta_1}{2}) \\ &= \frac{\Delta_2^2}{12} \int_{-\frac{\Delta_1}{2}}^{\frac{\Delta_1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Z^2}} exp(-\frac{z^2}{2\sigma_Z^2})dz + \Delta_1^2 \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma_Z^2}} \int_{\frac{\Delta_1}{2}}^{+\infty} exp(-\frac{z^2}{2\sigma_Z^2})dz \\ &= \sqrt{\frac{2}{pi\sigma_z^2}} \left(\frac{\Delta_2^2}{12} \int_0^{\frac{\Delta_1}{2}} exp(-\frac{z^2}{2\sigma_Z^2})dz + \Delta_1^2 \int_{\frac{\Delta_1}{2}}^{+\infty} exp(-\frac{z^2}{2\sigma_Z^2})dz \right) \end{aligned}$$

12. R est fixé donc M est fixé, et $\Delta_2 = \frac{\Delta_1}{M}$.
    On calcul $\frac{\partial D}{\partial \Delta_1}$ et par magie on trouve 0.

TD3