(X, Y) est un couple de variables aléatoires uniformément réparti sur un disque D centré en 0 et de rayon R_{max}.

1. Donner la densité de probabilité conjointe des VA X et Y.

   Les variables aléatoires X, Y sont uniformément réparties sur le disque donc $\forall (x, y) \in D$, $f_{XY}(x, y) = A$ constante.

   Or, $\int\int_{\mathbb{R}^2} f_{XY}(x, y)dxdy = 1$ donc $\int\int_D f_{XY}(x, y)dxdy = 1$ d'où $\pi R_{max}^2 A = 1$

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R_{max}^2} & \text{si} \quad (x, y) \in D \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Discuter de l'indépendance de X et Y.
   - Est-ce qu'une information sur X implique une information sur Y ?

     Pour la réalisation x_1 de X, on voit que

$$y_1 \in [y_1^-, y_1^+] = [-\sqrt{R_m^2 - x_1^2}, \sqrt{R_m^2 - x_1^2}]$$

     Ainsi, X et Y ne peuvent pas être indépendantes.
   - On sait que : si X et Y sont indépendantes, alors la ddp est séparable.

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R_{max}^2} & \text{si} \quad x^2 + y^2 \leq R_{max}^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

     On ne peut pas l'écrire sous la forme (fonction de x) x (fonction de y) à cause de la condition $x^2 + y^2 \leq R_{max}^2$ donc X et Y ne sont pas indépendantes.
   - On sait que : si X et Y sont indépendantes, alors $f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$. Exhibons un contre-exemple.

     Prenons un point donné par

$$|x| \leq R_{max}, |y| \leq R_{max}, \text{ tel que } x^2 + y^2 > R_{max}^2$$

     (Dans le carré mais pas dans le cercle). Ainsi, $f_{XY}(x, y) = 0$ alors que $f_X(x) \neq 0$ et $f_Y(y) \neq 0$, donc X et Y ne sont pas indépendantes.
   - On sait que : si X et Y sont indépendantes, alors $F_{XY}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$.

$$F_{XY}(-\frac{R_{max}}{\sqrt{2}}, \frac{R_{max}}{\sqrt{2}}) = P(X < -\frac{R_{max}}{\sqrt{2}}, Y < \frac{R_{max}}{\sqrt{2}}) = 0$$

     alors que $F_X(x) \neq 0$ et $F_Y(y) \neq 0$, donc X et Y ne sont pas indépendantes.

   Valeur moyenne de x : on peut voir que par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, $m_X = 0$. (Ne pas oublier de vérifier que l'intégrale existe.)

$$\begin{aligned} m_X = E_X[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)dx &= \int_{\mathbb{R}} x(\int_{\mathbb{R}} f_{XY}(x, y)dy)dx \\ &= \int\int_{\mathbb{R}^2} x f_{XY}(x, y)dxdy \\ &= \int\int_D \frac{x}{\pi R_{max}^2} dxdy = 0 \end{aligned}$$

Coefficient de corrélation : $\rho_{XY} = \frac{E[(X-m_X)(Y-m_Y)]}{\sigma_X \sigma_Y}$
Le coefficient de corrélation détermine le degré de linéarité entre X et Y. Ici, il n'y a pas de direction privilégiée, donc $\rho_{XY} = 0$.
Par le calcul, $\rho_{XY} = \frac{E[XY]}{\sigma_X \sigma_Y}$ car les moyennes sont nulles.

$$\begin{aligned}
E[XY] &= \int\int_{\mathbb{R}^2} xyf_{XY}(x,y)dxdy \\
&= \int\int_{Q_{++}} xyf_{XY}(x,y)dxdy + \int\int_{Q_{+-}} xyf_{XY}(x,y)dxdy \\
&\quad + \int\int_{Q_{-+}} xyf_{XY}(x,y)dxdy + \int\int_{Q_{--}} xyf_{XY}(x,y)dxdy \\
&= 0
\end{aligned}$$

3. $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{XY}(x,y)dy, \forall x \in \mathbb{R}$
   - $$\forall x/|x| \leq R_{max}, f_X(x) = \int_{-\sqrt{R_{max}^2-x^2}}^{\sqrt{R_{max}^2-x^2}} \frac{1}{\pi R_{max}^2} dy = \frac{2\sqrt{R_{max}^2 - x^2}}{\pi R_{max}^2}$$
     $$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{R_{max}^2-x^2}}{\pi R_{max}^2} & \text{si} \quad |x| < R_{max} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   - $$\begin{aligned} P[x \leq X < x + \Delta x] &= f_X(x)\Delta x \\ &= P[(X,Y) \in D_x] \\ &= \frac{AireD_x}{\pi R_{max}^2} \end{aligned}$$

   On calcule de même $f_Y(y)$ et on remarque que $f_{XY}(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y), \forall (x,y) \in D$.
   X et Y ne sont pas indépendantes.
4. On pose $X = R\cos(\Phi)$ et $Y = R\sin(\Phi)$ avec $R \geq 0$ et $Pphi \in]-\pi, \pi[$.
   La répartition est isotrope : $f_{R\Phi}(r,\phi)$ ne dépend pas de ϕ si $|\phi| < \pi$. Ainsi,
   $$f_{R\Phi}(r,\phi) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad r \notin [0, R_{max}] \text{ ou } \phi \notin]-\pi,\pi[\\ g_R(r) & \text{sinon} \end{cases}$$
   La fonction est séparable donc R et Φ sont indépendantes.
   Expliciter $f_\Phi(\phi)$.
   - On voit que Φ suit une loi uniforme sur $]-\pi, \pi[$.
   - $$\begin{aligned} P[\phi \leq \Phi < \phi + \Delta\phi] &= f_\Phi(\phi)\Delta\phi \\ &= P[(R,\Phi)] \in D_\phi = P[(X,Y) \in D_\phi] \\ &= \frac{\frac{\Delta\phi}{2\pi}\pi R_{max}^2}{\pi R_{max}^2} = \frac{\Delta\phi}{2\pi} \end{aligned}$$

Expliciter $f_R(r)$. Attention, la loi n'est pas uniforme ! On applique le même raisonnement que ci-dessus avec un domaine D_r en couronne.

$$\begin{cases} f_R(r) = \frac{2r}{R_{max}^2} & \text{si} \quad r \notin [0, R_{max}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

5. En utilisant les formules de changement de variables, on exprime $f_{R\Phi}(r, \phi)$

$$f_{R\Phi}(r,\phi) = f_{XY}(x,y)|J| \text{ avec } |J| = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & r\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & r\cos(\phi) \end{pmatrix}$$

$$f_{R\Phi}(r,\phi) = \begin{cases} f_{XY}(r\cos(\phi), r\sin(\phi))|r| & \text{si} \quad r \in [0, R_{max}[\text{ et } \phi \in]-\pi,\pi] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{Or, } f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R_{max}^2} & \text{si} \quad x^2 + y^2 \leq R_{max}^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{Donc } f_{R\Phi}(r,\phi) = \begin{cases} \frac{r}{\pi R_{max}^2} & \text{si} \quad r \in [0, R_{max}[\text{ et } \phi \in]-\pi,\pi] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut écrire $f_{R\Phi}(r,\phi) = g_R(r)g_\Phi(\phi)$, $f_{R\Phi}(r,\phi)$ est séparable donc R et Φ sont indépendantes.

Si $r \in [0, R_{max}[$,

$$\begin{aligned} f_R(r) &= \int_{\mathbb{R}} f_{R\Phi}(r,\phi)d\phi \\ &= \frac{r}{\pi R_{max}^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \\ &= \frac{2r}{R_{max}^2} \end{aligned}$$

Si $\phi \in]-\pi,\pi]$,

$$\begin{aligned} f_\Phi(\phi) &= \int_{\mathbb{R}} f_{R\Phi}(r,\phi)dr \\ &= \int_0^{R_{maxint}} \frac{r}{\pi R_{max}^2} dr \\ &= \frac{1}{2\pi} \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} m_R &= E[R] \\ &= \int_{\mathbb{R}} r f_R(r) dr \\ &= \int_0^{R_{max}} \frac{2r^2}{R_{max}} dr \\ &= \frac{2}{3} R_{max} \end{aligned}$$