Exercice 1 : Stabilité en non linéaire

1. LE bout de l'autre génie.

$$x(t) = x_0 \frac{1+t_0}{1+t}$$
$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tq } ||x_0|| \leq \delta \Rightarrow ||x(t)|| \leq \epsilon$$

contraposée

$$\exists \epsilon \text{ tq } \forall \delta > 0, ||x_0|| \leq \delta \quad \text{et} \quad ||x(t)|| \geq \epsilon$$

$$\begin{aligned} |x(t)| = |x_0| \frac{1+t_0}{1+t} &> \frac{|x_0| t_0}{1+t} \\ &> |x_0| = \epsilon \text{ si } t_0 \to \infty \end{aligned}$$

Exercice 2 : Pendule simple

1. (a) On applique le PFD selon l'axe u_θ :

$$m\ddot{\theta} l = -mg.sin(\theta)$$
$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} sin(\theta)$$

(b) On pose le vecteur $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$, on a donc le système d'état :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} sin(x_1) \end{pmatrix}$$

(c) On a $E = \frac{1}{2} m v^2$ avec $v = l\dot{\theta}$:

$$\boxed{E = \frac{ml^2}{2} x_2^2}$$

Et $P = mgl(1 - cos(\theta))$:

$$\boxed{P = mgl(1 - cos(x_1))}$$

(d) On pose $V(x) = E + P$ d'où en zéro :

$$V(0) = \frac{ml^2}{2} x_{20}^2 + mgl(1 - cos(x_{10})) = 0$$

si $x \neq 0$ et $|x_1| < 2\pi$, alors $cos(x_1) < 1$ donc $E + P > 0$

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = mgl.sin(x_1)$$
$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = ml^2 x_2$$
$$\dot{V}(x) = \dot{x_1} mglsin(x_1) + ml^2 x_2 \dot{x_2}$$
$$\dot{V}(x) = \dot{x_1} mglsin(x_1) + ml^2 x_2 (-\frac{g}{l} sin(x_1)) = 0$$

Pour $|x_1| < \pi$, l'origine sera stable
Il n'existe pas de Q(x) tel que $V(\dot{x}) \leq -Q(x)$
Barhashin : $\dot{V}(x) = \{x_2 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad |x_1| < 2\pi\}$
Pas de stabilité asymptotique

2. (a) On applique le PFD selon l'axe u_θ :

$$m\ddot{\theta}l = -mg.sin(\theta) - \alpha l\dot{\theta}$$
$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}sin(\theta) - \alpha\frac{1}{m}\dot{\theta}$$

(b) On pose le vecteur $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$, on a donc le système d'état :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l}sin(x_1) - \frac{\alpha}{m}x_2 \end{pmatrix}$$

(c) On a $E = \frac{1}{2}mv^2$ avec $v = l\dot{\theta}$:

$$\boxed{E = \frac{ml^2}{2}x_2^2}$$

Et $P = mgl(1 - cos(\theta))$:

$$\boxed{P = mgl(1 - cos(x_1))}$$

(d) On pose $V(x) = E + P$ d'où en zéro :

$$V(0) = \frac{ml^2}{2}x_{20}^2 + mgl(1 - cos(x_{10})) = 0$$

si $x \neq 0$ et $|x_1| < 2\pi$, alors $cos(x_1) < 1$ donc $E + P > 0$

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = mgl.sin(x_1)$$
$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = ml^2x_2$$
$$\dot{V}(x) = \dot{x_1}mglsin(x_1) + ml^2x_2\dot{x_2}$$
$$\dot{V}(x) = \dot{x_1}mglsin(x_1) + ml^2x_2(-\frac{g}{l}sin(x_1)) - \frac{\alpha}{m}x_2 - l^2\alpha x_2^2 \leq 0$$

Pour $|x_1| < \pi$, l'origine sera stable

Il n'existe pas de Q(x) tel que $V(\dot{x}) \leq -Q(x)$
Barhashin :

$$V(\dot{x}) = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow \dot{x_1} = 0$$
$$\text{pour } |x_1 - < \pi \Rightarrow x_2 = 0$$
$$\text{donc } \dot{x_2} = 0 \Rightarrow sin(x_1) = 0$$

Si $x_1 = 0, \pi\ , -\pi$ il n'y a pas de stabilité asymptotique.

L'origine est stable asymptotiquement pour $(x_1, x_2)\ in] - \pi; \pi[\times\mathbb{R}$

$$V(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2}{2m^2} & \frac{\alpha}{2m} \\ \frac{\alpha}{2m} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{g}{l}(1 - cos(x_1))$$

$$V(0) = 0$$

$$V(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{g}{l}(1 - cos(x_1))$$

Or, $P > 0$ car :

$$\frac{\alpha^2}{2m^2} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\alpha^2}{2m^2} - \frac{\alpha}{4m^2} > 0 \quad \text{et} \quad |x_1| < 0\pi$$

donc :

$$P \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{pmatrix} > 0 \Leftrightarrow (LemmedeSchur)P_{11} > 0 \quad \text{et} \quad (peutetre)P_{11} - P_{12}P_{22}^{+}P_{12}^T > 0(P^{+}estlap$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= -\frac{1}{2}(\frac{g\alpha}{lm})x_1 sin(x_1) - \frac{\alpha}{2m}x_2^2 \leq 0 \\ &\leq -\frac{g\alpha}{4lm}x_1 sin(x_1) - \frac{\alpha}{4m}x_2^2 = Q(x) \end{aligned}$$

L'origine est localement asymptotiquement stable.

Exercice 3 : Exemple de systèmes

(a) On pose $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$, et on a bien $V(0) = 0$. $\dot{V}(x) = x_1\dot{x_1} + x_2\dot{x_2} = -(x_1^2 + x_2^2)$.
On a alors $V(x) \leq -Q(x)$ avec $Q(x) = \frac{x_1^2+x_2^2}{2}$, donc l'origine est globalement asymptotiquement stable.

Vérifions la stabilité exponentielle : $\exists \alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, et $x > 1$ tel que $\dot{V} \leq -\gamma||x - -^c$ et $\alpha||x||^c \leq V(x) \leq \beta||x||^c$
Pour la norme euclidienne, on prend $c = 2$ et avec $\gamma = 1$
$\dot{V} \leq -\gamma||x||^2$
Avec $\alpha = \frac{1}{4}$ et $\beta = 1$ la condition 2 est respectée donc on a la stabilité exponentielle.

(bi) On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 + x_3^4 \\ \dot{x_2} = -5sin(x_1) - x_2 + u_1 \\ \dot{x_3} = -kx_3 + u_2 \end{cases}$$

i. Pour $u_1 = u_2 = 0$, l'origine est stable car $\dot{x} = 0$.

ii. Pour linéariser, on passe par la matrice du jacobien prise en (0,0,0) :

$$\begin{pmatrix} \delta\dot{x_1} \\ \delta\dot{x_2} \\ \delta\dot{x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -k \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \end{pmatrix}$$

$$det(\lambda I - A) = (\lambda + k)(\lambda^2 + \lambda + 5)$$

La stabilité suivant le critère de Routh donne que c'est stable si $k > 0$

iii.

$$V(x) = 5(1 - cos(x_1)) + \frac{1}{2}\dot{x_2}^2 + \frac{3}{2k}x_3^4 |x_1| < 2\pi$$

$$\dot{V}(x) = 5x_3^4 sinx_1 - x_2^2 \leq -x_3^4 - x_2^2 \leq 0 (\text{ne marche pas car ne dépend pas de } x_1)$$

$$\dot{V}(x) \leq \frac{5}{2}x_3^4 sinx_1 - \frac{1}{2}x_2^2 - 3x_3^4 \leq -\frac{1}{2}x_3^4 - \frac{1}{2}x_2^2$$

$$Q(x) = -\frac{5}{2}x_3^4 sinx_1 + \frac{1}{2}x_2^2 + 3x_3^4 \geq 0 \text{ a condition que } |x_1| < \pi$$