1 Stabilité de Lagrange

Le premier a avoir introduit la notion de stabilité est Lagrange. Le concept est basé sur l'énergie potentielle V. Puisque les points d'équilibre du système correspondent aux points tels que $\frac{\partial V}{\partial q} = 0$ avec q les coordonnées généralisées du mouvement, alors un point d'équilibre est stable suivant Lagrange si $\frac{\partial^2 V}{\partial q^2} > 0$

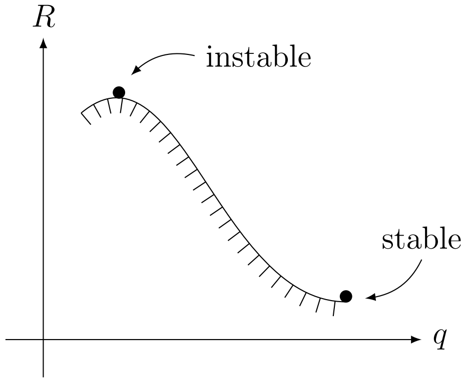

FIGURE 1 – Stabilité au sens de Lagrange

Suivant Lagrange, un point d'équilibre est stable si pour toutes conditions initiales, la trajectoire reste bornée.

- On contrôle la variation sur la trajectoire par celle sur la condition initiale.
- des petites variation sur la condition initiale implique de petite variation sur la trajectoire.

Remarque: La notion de stabilité en non linéaire concerne les points d'équilibre et non le système. Mathématiquement, Dirichlet a formalisé la stabilité au sens de Lagrange avec les trajectoires.

Définition

Un point d'équilibre x^* est stable au sens de Lagrange si et seulement si

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall t \in \mathbb{R}, ||x_0 - x^*|| \leq \delta \Rightarrow ||\chi(t, \chi(t_0, x_0)) - x^*|| \leq \varepsilon$$

Ainsi la stabilité suivant Lagrange est qu'un petit changement borné sur x^* implique un petit changement borné sur la trajectoire.

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } ||\chi(t_0, x_0)|| \leq \delta \Rightarrow ||\chi(t, \chi(t_0, x_0))|| \leq \varepsilon$$

Sans perte de généralité, on considère le point d'équilibre $x^* = 0$.

Remarque: La stabilité suivant Lagrange n'implique pas la convergence mais seulement la bornitude [1] (la trajectoire reste bornée), ce n'est pas suffisant pour faire de l'automatique, il faut pouvoir garantir la convergence. On utilise donc la stabilité au sens de Lyapounov

2 Stabilité au sens de Lyapunov

Définition

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } ||\chi(t_0, x_0)|| \leq \delta \Rightarrow ||\chi(t, \chi(t_0, x_0))|| \leq \varepsilon$$

Attention : il n'y a pas d'implication entre les deux.

Remarque: C'est ε qui contrôle δ.

Remarque: La condition de Lagrange est sur la bornitude de la trajectoire (quelles que soient les conditions initiales, on borne la solution). Par contre, la condition de Lyapunov est sur la convergence dans un voisinage (il existe des conditions initiales pour lesquelles les trajectoires convergent vers x^*).

Exemple: *Oscillateur de Van der Pol*

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= x_2 \\ \dot{x_2} &= -x_1 + (1 - x_1^2) x_2 \end{cases}$$

Point d'équilibre $x^* = (0, 0)$

Remarque: Il n'existe pas de solution analytique aux équations de Van der Pol, mais numériquement on trouve un cycle limite stable.

1. sic.

$\exists\varepsilon$ tel que le cycle limite $\subset$ cercle de centre (0,0) et de rayon ε : stable au sens de Lagrange. Par contre, pas stable au sens de Lyapunov car on a

$$\forall\delta > 0, \nexists\varepsilon > 0 \text{ tel que } ||\chi(t, \chi(t_0, x_0))|| < \varepsilon$$

Exemple: *Pendule sans frottement* L'origine est stable suivant Lyapunov avec $\delta = \varepsilon$.

Elle n'est pas stable suivant Lagrange

$$x_0 = (x_1 = \pi, x_2 = 0) : \nexists\varepsilon > 0 \text{ tel que } \|\chi(t, \chi(0, s_0))\| < \varepsilon$$

2.1 Stabilité uniforme

Définition

Le point d'équilibre $x^*(x^* = 0)$ est dit point d'équilibre uniformément stable si, pour la condition de Lyapunov, δ peut être choisi indépendamment des conditions initiales t_0, x_0

Définition

On définit les *fonctions de caractérisations* suivantes :

1. Si $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est continue et strictement croissante, α est dite de classe $\mathcal{K}$.
   Si α croit indéfiniment (i.e. $\alpha(s) \to \infty$), alors $\alpha \in \mathcal{K}_\infty$
2. ϕ est dite de classe $\mathcal{L}$ si $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue, strictement décroissante et $\phi(s) \to 0$
3. β est dite de classe $\mathcal{KL}$ si $\beta : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ si $\beta(., r) \in \mathcal{L}$ et $\beta(s, .) \in \mathcal{K}$
   Typiquement $\beta(s, r) = \alpha(s).\phi(r)$ avec $\alpha \in \mathcal{K}, \phi \in \mathcal{L}$.

Exemple: $\beta(\|x_0\|, |t|) = \|x_0\|e^{-\lambda|t|}$ avec $\lambda > 0$

Ainsi le but est d'arriver à vérifier pour une trajectoire du système $\|\chi(t, x_0)\| \leq \beta(\|x_0\|, t), t \geq 0$ (enveloppe)

Proposition

L'origine est uniformément stable si et seulement si

$$\exists c > 0, \alpha \in \mathcal{K} \text{ tel que } \|\chi(t_0, x_0)\| \leq c \Rightarrow \|\chi(t, \chi(t_0, x_0))\| \leq \alpha(\|\chi(t_0, x_0)\|)$$

Démonstration : Condition suffisante.

Soit $\alpha \in \mathcal{K}$ (strictement croissante et continue, donc α^{-1} existe).

Pour $\varepsilon > 0, \exists\delta$ dépendant de ε tel que $\delta = \alpha^{-1}(\varepsilon)$.

Si $\|\chi(t_0, x_0)\| \leq \delta \Rightarrow \|\chi(t, \chi(t_0, x_0))\| \leq \alpha(\alpha^{-1}(\varepsilon)) \leq \varepsilon$

Condition nécessaire.
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta$ dépendant de ε tel que $\|s_0\| \leq \delta \Rightarrow \|s\| \leq \varepsilon$
Si $\varepsilon_2 > \varepsilon_1 \Rightarrow \delta_2 \geq \delta_1$ (suivant Lyapunov). On définit $\delta' \in \mathcal{K}$ tel que $\delta' < \delta$.
Pour $\varepsilon > 9, \exists \delta > 0$ tel que

$$\|s_0\| \leq \delta \Rightarrow \|\delta\| \leq \varepsilon$$
$$\|s_0\| \leq \delta' \Rightarrow \|\delta\| \leq \varepsilon \text{ car } \delta' < \delta$$

Si on définit $\alpha(\|.\|) = (\delta')^{-1}$, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta'(\varepsilon)$ où $\|s_0\| = \delta'(\varepsilon) \Rightarrow \varepsilon = (\delta')^{-1}(\|s_0\|)$
Suivant Lyapunov, cela implique $\|s\| \leq \varepsilon \leq \alpha(\|s_0\|)$ ■

3 Attractivité (convergence)

Définition

$\exists r > 0, \forall \sigma > 0, \exists T > 0$ tel que $\|\chi(t_0, x_0)\| \leq r \Rightarrow \|\chi(t, \chi(t_0, x_0))\| \leq \sigma, \forall t \geq T$
Autrement dit : $\|s_0\| \leq r \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \|\chi_t\| = 0$.
On parle d'attractivité uniforme si T ne dépend pas de t_0.

Proposition ***(Stabilité asymptotique)***

L'origine est asymptotiquement stable si et seulement si

- stabilité au sens de Lyapunov et attractivité
- $\|s_0\| \leq r \Rightarrow \|s\| \leq \beta(\|s_0\|, t), \quad \beta \in \mathcal{KL}$

Proposition ***(Stabilité exponentielle)***

L'origine est exponentiellement stable si et seulement si

- stabilité au sens de Lyapunov et attractivité
- $\exists \alpha, \lambda, r > 0$ tel que $\|s_0\| \leq r \Rightarrow \|s\| \leq \alpha\|s_0\|e^{-\lambda t}$

Proposition ***(Stabilité locale et globale)***

- L'origine est globalement stable si la stabilité (asymptotique, exponentielle,...) ne dépend pas de la condition initiale, i.e. $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et dit localement stable (asymptotiquement, exponentiellement,...)
- Si la stabilité dépend de la CI, i.e. $\exists V_t \subset \mathbb{R}$ ou $V_x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\forall t_0 \in V_t$ et $\forall x_0 \in V_x$, l'origine est stable.

Problème Généralement, on n'a pas de solution analytique de l'équation différentielle. Ainsi, la stabilité ne peut pas être vérifiée via la trajectoire.

Définition

V est une *fonction de Lyapunov* si :

1. $V : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto V(x) \end{cases}$ telle que $V(0) = 0$ et $V(x) \geq 0$ (définie semi-positive) ou telle que $V(0) = 0$ et $V(x) > 0$ si $x \neq 0$ (définie positive)
2. V est radialement non bornée, i.e. $V(x) \to_{\|x\| \to \infty} \infty$

Théorème ***(Stabilité au sens de Lyapunov)***

Soit $\dot{x}(t) = f(x(t))$ et $f(0) = 0$ (origine est un point d'équilibre). On suppose qu'il existe V (fonction de Lyapunov) continue et différentiable tel que

$$\exists D \subset \mathbb{R}^n, 0 \in \mathcal{D} \text{ où } \forall x \in \mathcal{D}, \quad \dot{V}(x) = (\frac{\partial V}{\partial x})^T f(x) \leq 0$$

Alors l'origine est stable au sens de Lyapunov sur $\mathcal{D}$.
Si $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$, 0 est globalement stable au sens de Lyapunov.

Démonstration : Si $x = 0$ est stable, alors $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $\|s_0\| \leq \delta \Rightarrow \|s\| \leq \varepsilon$.

Pour $\varepsilon > 0$ on définit $0 < r \leq \varepsilon$ avec $B_r(0) = \{x \in \mathcal{D} \text{ tel que } \|x\| \leq r\}$

Soit $\alpha = \min_{\|x\|=r} V(x)$ et on choisit β tel que $\beta < \alpha$ et on définit $\Omega_\beta = \{x \in B_r(0) \text{ tel que } V(x) \leq \beta\}$.

$0 \in \Omega_\beta$ car $V(0) = 0$ et $\Omega_\beta \subset B_r(0)$.

Soit $x_0 \in \Omega_\beta \subset \mathcal{D}$: $\dot{V}(x) \leq 0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow V(x(t) - V(x_0) \leq 0 \quad (\text{ car } \in \mathcal{D}) \\ &\Rightarrow V(x(t)) \leq V(x_0) \leq \beta \quad (\text{ car } x_0 \in \Omega_\beta) \\ &\Rightarrow x(t) \in \Omega_\beta \subset B_r(0) \\ &\Rightarrow \|x(t)\| \leq \varepsilon \quad r \leq \varepsilon \end{aligned}$$

(Autrement dit si on part de Ω_β on reste dans Ω_β)

$\delta(\varepsilon)$ est le rayon de la boule de centre O et $\subset \Omega_\beta$ ■

Théorème ***(Stabilité asymptotique au sens de Lyapounov)***

Soient le système $G : \dot{x} = f(x)$ et $f(0) = 0$ et $V : \mathcal{D} \to \mathbb{R}_+$ une fonction de Lyapunov continue et différentiable telle que

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad \dot{V}(x) = (\frac{\partial V}{\partial x})^T f(x) \leq -Q(x), \qquad \text{où } Q(x) \text{ est définie positive}$$

Alors l'origine est asymptotiquement stable.

Remarque: $Q(x)$ dépend de toutes les variables d'état. Sinon la convergence asymptotique n'est vérifié que pour certaine direction.

Exemple: *Cas linéaire*

$\dot{x} = Ax$ avec $x \in \mathbb{R}^n$

Soit P une matrice semi définie positive ($P^T = P$ et $\lambda(P) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n, x^T P x \geq 0$)

On définit $V(x) = x^T P x$ fonction de Lyapunov

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\ &= x^T A P x + x^T P A x \\ &= x^T (A^T P + PA) x\end{aligned}$$

Suivant Lyapunov, A est Hurwitz si et seulement si $Re(\lambda(A)) < 0$.

$\exists P > 0$ tel que $A^T P + PA$ définie négative.

On pose $P = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt$ avec Q définie positive. On a donc P définie positive.

$$\int_0^\infty (A^T e^{A^T t} Q e^{At} + e^{A^T t} Q e^{At} A) dt = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d} e^{A^T t} Q e^{At}}{\mathrm{d}t} dt = \left[e^{A^T t} Q e^{At} \right]_0^\infty$$

Si A est Hurwitz : $e^{At} \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$

$$A^T P + PA = -Q \text{ définie négative (équation de Lyapunov)}$$

Pour le système linéaire

$$\dot{V}(x) = x^T (A^T P + PA) x \leq -x^T Q x$$

$\Rightarrow$ Stabilité de Lyapunov $\Leftrightarrow$ Stabilité asymptotique

Théorème ***(Stabilité exponentielle)***

Soient le système $G : \dot{x} = f(x)$ et $f(0) = 0$, $\exists V : \mathcal{D} \to \mathbb{R}_+$ fonction de Lyapunov continue et différentiable telle que

1. $\exists \alpha > 0, \beta > 0$ et $c \geq 1$ tel que

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad \alpha \|x\|^c \leq V(x) \leq \beta \|x\|^c$$

2. $\exists \gamma > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathcal{D}, \dot{V} \leq -\gamma V \leq -\gamma \|x\|^c$$

Alors l'origine est exponentiellement stable. Si $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$, on a aussi la stabilité globale.

Démonstration : $\dot{V} \leq -\gamma V \Rightarrow V(x(t)) \leq V(x(0)) e^{-\gamma t}$

si $\dot{\hat{V}} = -\gamma \hat{V}$

$$\begin{aligned} V(x(0)) &\leq \beta \|x(0)\|^c \\ \text{et } V(x(t)) &\geq \alpha \|x(t)\|^c \\ V(x(0))e^{-\gamma t} &\geq \\ \beta \|x(0)\|^c e^{-\gamma t} &\geq \qquad \Rightarrow \|x(t)\| \leq (\frac{\beta}{\alpha})^{1/c} \|x(0)\| e^{-\frac{\gamma}{c} t} \end{aligned}$$

■

Corollaire

Le syst linéaire est aussi exponentiellement stable :

$$V = x^T P x \implies \alpha \|x\| \leq V(x) \leq \beta \|x\|^c$$

Avec α plus petite valeur propre de P et β plus grande valeur propre de P.

si on a la stabilité asymptotique

$$\dot{V} = x^T (A^T P + PA) x x^T R x \leq -\gamma V x^T R x \leq -\gamma \|x\|^2$$

Exemple: $\begin{cases} \dot{x_1} &= -x_1^3 + x_2^3 + x_1 x_2^2 \\ \dot{x_2} &= -x_2^2 x_1 - 5x_2^3 \end{cases}$

$(x_1, x_2) = (0, 0), f(0) = 0$ est-il asymptotiquement stable ?

On pose $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$. $V(0) = 0$ et $V(x) > 0, \forall x \neq 0$.

$$\dot{V}(x) = x_1 \dot{x_1} + x_2 \dot{x_2} = -x_1^4 + x_1^2 x_2^2 - 5x_2^4 \leq -\frac{1}{2} x_1^4 - \frac{9}{2} x_2^4 \leq -Q(x) \text{ tel que } Q(x) \geq 0$$

L'origine est globalement asymptotiquement stable.

Est-il exponentiellement stable ?

$$\alpha \|x(t)\|^c \leq V(x(t)) \leq \beta \|x(t)\|^c$$

$\beta = 1, \alpha = \frac{1}{4}$

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} x_1^4 - \frac{9}{2} x_2^4 \leq -\frac{9}{2}(x_1^4 + x_2^4)$$

Pour $\mathcal{D} = \{\|x\| \leq 1\}, x_1^2 + x_2^2 \geq x_1^4 + x_2^4$ donc $-(x_1^2 + x_2^2) \leq -(x_1^4 + x_2^4)$: on ne peut pas borner $\dot{V}$ par V.

Avec ce $V(x)$ on ne peut décider de la convergence exponentielle.

Si on arrive pas a vérifier la stabilité alors le point d'équilibre (ou l'origine) peut-être instable. Dans ce cas, comment vérifier l'instabilité du point d'équilibre (origine) ?

Théorème ***(Théorème de Lyapunov d'instabilité)***

Soit le système G : $x = f(x)$, $f(0) = 0$ et $t \geq 0$. Si $\exists V : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ continue, différentiable et définie positive ($0 \in \mathcal{D}$), tel que

$$\forall x \in \mathcal{D}^*, \quad \dot{V}(x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T f(x) > 0$$

alors l'origine est instable.

Le système accumule de l'énergie et deviens instable

Démonstration : Instable $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall \delta > 0$, alors $\|x_0\| \leq \delta$ et $\|x\| \geq \varepsilon$

$\forall \delta > 0$ soit $r \in]0; \delta[$ tel que :
$B_r(0) = \{x \in \mathcal{D}$ tel que $\|x\| \leq r\}$ est compact.
On pose $\alpha = max_{B_r(0)} V(x)$ et $x_0 \in B_r(0)$
$V(x_0) = \alpha$, ainsi $V(x) - V(x_0) > 0$:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow V(x) > \alpha \\
&\Rightarrow x \notin B_r(0) \\
&\Rightarrow x \in B_r^c(0) \\
&\Rightarrow \|x\| > r
\end{aligned}$$

Donc $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\|x\| \geq \varepsilon > r$ ■

3.1 Théorème simplifiant l'analyse de la stabilité

Théorème ***(Théorème de Barbashin-Krasovsky (Stabilité asymptotique))***

Soit $\{0\}$ un point d'équilibre du système $\dot{x} = f(x)$, où $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$, localement lipschitzienne. On suppose qu'il existe V continue, différentiable et définie positive telle que

$$\dot{V} \leq 0$$

Soit $S = \{x \in \mathcal{D}$ tel que $\dot{V(x)} = 0\}$.
Si $x = 0$ est le seul élément de S, alors l'origine est asymptotiquement stable.

Exemple: Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= -x_1^3 + 2x_2^3 \\ \dot{x_2} &= -2x_1 x_2^2 \end{cases}$$

L'origine est un point d'équilibre.

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 > 0 \\ \dot{V(x)} &= x_1\dot{x_1} + x_2\dot{x_2} = -x_1^4 \leq 0 \end{aligned}$$

On ne peut pas conclure sur la stabilité asymptotique car $Q(x) = \frac{1}{2}x_1^4$ ne dépend pas de x_2.

On utilise le théorème de Barbashin :

$$\begin{aligned} S = \{x \in \mathcal{D} \text{ tel que } \dot{V(x)} = 0\} \Rightarrow x_1 &= 0 \\ \Rightarrow & \dot{x_2} = 0 \\ \Rightarrow & x_2 = 0 \\ \Rightarrow & S = \{0\} \\ \Rightarrow & \text{Stabilité asymptotique} \end{aligned}$$

Théorème ***(Principe d'invariance de LaSalle)***

Soient $\dot{x} = f(x)$ avec $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$, Ω un compact positivement invariant tel que $\Omega \subset \mathcal{D}$, $V : \mathcal{D} \to \mathbb{R}_+$ continue, différentiable tel que $\dot{V} \leq 0$ dans Ω, $E = \{x \in \Omega \text{ tel que } \dot{V} = 0\}$ et M le plus grand ensemble positivement invariant inclus dans E.
Alors toute solution x tel que $x_0 \in \Omega$ converge vers M quand $t \longrightarrow \infty$.
Autrement dit $\overline{M}$ est l'attracteur.

Exemple: *Barbashin* Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= x_2 \\ \dot{x_2} &= -h(x_1) - g(x_2) \end{cases}$$

où $h, g : [-a, a] \to \mathbb{R}$ avec $h(0) = g(0) = 0$
et $\forall x \neq 0, \quad x.h(x) > 0$ et $x.g(x) > 0$.

L'origine est un point d'équilibre.

Fonction de Lyapunov candidate :

$$V(x) = \int_0^{x_1} h(s)ds + \frac{1}{2}x_2^2$$

$x_1 = 0$ et $x_2 = 0 \Rightarrow V(x) = 0$
$x_1 \neq 0$ ou $x_2 \neq 0 \Rightarrow V(x) > 0$
donc V est définie positive.

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= h(x_1)\dot{x_1} + x_2\dot{x_2} \\ &= h(x_1)x_1 - x_2h(x_1) - g(x_1)x_2 \\ &= -g(x_2)x_2 \leq -Q(x) \text{ définie positive, dépend de } x_1 \text{ et } x_2\end{aligned}$$

Barbashin :
$E = \{x \in \mathbb{R}^2, \dot{V}(x) = 0\}$
$\dot{V}(x) = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow \dot{x_1} = 0$
$\dot{x_2} = 0 + x_2 = 0 \Rightarrow h(x_1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$
Alors $E = \{0\}$ stabilité asymptotique globale.

Exemple: *Invariance de La Salle* Soit le système $\dot{x} = ax + u$, a inconnu mais borné.
$u = -kx$ et $\dot{k} = \gamma x^2, \gamma > 0$
On pose $x_1 = x$ et $x_2 = k$

$$\begin{cases}\dot{x_1} &= ax_1 - x_2x_1 \\ \dot{x_2} &= \gamma x_1^2\end{cases}$$

La fonction de Lyapunov candidate

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2\gamma}(x_2 - b)^2, \qquad \text{avec } b > a \text{ car } a \text{ est borné}$$

$V(0, b) = 0$ et non pas l'origine
$V(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= x_1\dot{x_1} + \frac{1}{\gamma}(x_2 - b)\dot{x_2} \\ &= ax_1^2 - x_1^2x_2 + (x_2 - b)x_1^2 \\ &= x_1^2(a - b) \leq 0\end{aligned}$$

$E = \{x \in \mathbb{R}^2, \dot{V} = 0\} = \{x_1 = 0\}$: attracteur
Pour le système de départ, on veut montrer que $x \to 0$ ie..e. $x_1 \to 0$ donc (attracteur) $x_1 \to 0$

4 Extension du théorème de Lyapunov aux systèmes non autonomes, i.e. $\dot{x} = f(t, x)$

Définition

On considère *un système non autonome*

$$G : \dot{x}(t) = f(t, x)$$

, $x(t_0 = x_0, \forall t \geq t_0$ avec $f(t, 0) = 0, \forall t \geq 0 \Rightarrow x = 0$ est un point d'équilibre.
L'origine est stable au sens de Lyapunov si et seulement si

$\forall \varepsilon > 0$ et $t_0 \geq 0, \exists \delta > 0$ tel que $\|S(t_0, x_0)\| \leq \delta \Rightarrow \|S(t, S(t_0, x_0))\| \leq \varepsilon, \forall t \geq t_0$

Théorème ***(Théorème de Lyapunov)***

L'origine du système G est stable au sens de Lyapunov s'il existe une $V : [0, +\infty[\times\mathcal{D} \to \mathbb{R}_+$ continue et différentiable telle que :

- $V(t, 0) = 0, \forall t \geq 0$
- $V(t, x) > 0, \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{D} \setminus \{0\}$
- $\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + (\frac{\partial V(t,x)}{\partial x})^T f(t, x) \leq 0$, $\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{D}$

S'il existe $Q(t, x)$ tel que

- $Q(t, 0) = 0, \forall t \geq 0$
- $Q(t, x) > 0, \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{D} \setminus \{0\}$
- $\dot{V}(t, x) \leq -Q(t, x), \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{D}$

Alors l'origine est asymptotiquement stable.

Si $\exists \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$ et $c \geq 1$ tel que

- $\alpha \|x\|^c \leq V(t, x) \leq \beta \|x\|^c$
- $\dot{V}(, x) \leq -\gamma \|x\|^c$

Alors l'origine est exponentiellement stable.

Remarque: Si $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$: l'origine est globalement stable

Les démonstrations sont calquées sur celles du cas autonome, avec $x_1 = t \in \mathbb{R}_+$, $x_2 = x \in \mathbb{R}^n$, $x_2 = x \in \mathbb{R}^n$ donc $\dot{x_1} = 1$ et $\dot{x_2} = f(x_1, x_2)$

Exemple: *Système linéaire non stationnaire* $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ et $x(0) = x_0, t \geq 0$
Soit $V(t, x) = x^T P(t)x$ où $P(t) > 9, \forall t \in \mathbb{R}_+$
$V(t, 0) = 0, \forall t \in \mathbb{R}_+$ et $V(t, x) > 0, \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned}
&\dot{V}(t, x) = x^T(t)\dot{P}(t)x(t) + x^T(t)A^T(t)P(t)x(t) + x^T(t)P(t)A(t)x(t) \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \dot{P}(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) \leq 0
\end{aligned}$$

Inégalité de Lyapunov dynamique

Stabilité asymptotique :

$$P(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) = -Q(t)$$

Équation de Lyapunov dynamique

$$\lambda_{min}(P(t))\|x\|^{1=c} \leq V(t, x) \leq \lambda_{max}(P(t))\|x\|^{1=c}$$

$\forall t \in \mathbb{R}_+, \exists \gamma > 0$

$$\dot{V}(t, x) \leq -\lambda_{min}(Q(t))\|x\|$$

stabilité exponentielle

Remarque: Dans le cas non autonome, la fonction de Lyapunov candidate peut ne pas dépendre du temps, mais elle doit dépendre de toutes les variables d'état.

Exemple: Soit le système non-linéaire

$$\begin{aligned} \dot{x_1}(t) &= -x_1^3(t) + \sin \omega t x_2(t) \\ \dot{x_2}(t) &= -\sin \omega t x_1(t) - x_2^3(t) \end{aligned}$$

avec $x_1(0) = x_{10}, x_2(0) = x_{20}$ et $t \geq 0$

L'origine est bien un point d'équilibre. Est-il asymptotiquement stable ?

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 \\ \dot{V}(x) &= x_1(-x_1^3 + \sin \omega t x_2) + x_2(-\sin \omega t x_1 - x_2^3) \\ &= -x_1^4 - x_2^4 \leq 0 \text{ : stable} \\ &\leq -\frac{1}{2}(x_1^4 + x_2^4) = -Q(x) \text{ : globalement asymptotiquement stable} \end{aligned}$$

5 Stabilité entrées-états (SEE)/ Input-States Stability (ISS)

Soit le système $G : \dot{x} = f(x, u)$ où $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ (m désigne le nombre d'entrées)

Soit l'origine un point d'équilibre :

1. S'il est globalement stable, alors on peur analyser la SEE
2. S'il est localement stable, alors la SEE est locale ($\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$)

Dans le cas 1, on analyse la stabilité du système en SEE. Dans le cas 2, on analyse localement ($\mathcal{D}$) la stabilité du système en SEE.

Définition

Le système est dit SEE si $\forall u(t)$ et $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ bornées, il existe une solution $x(t, x_0), \forall t \geq 0$ et $\exists \alpha \in \mathcal{KL}$ et $\exists \gamma \in \mathcal{K}_\infty$ tels que :

$$\|x(t, x_0)\| \leq \alpha(\|x_0\|, t) + \gamma(\|u\|_\infty)$$

où $\|u\|_\infty = \sup_{t\geq 0} \|u(t)\| = \sup_{t\geq 0}(u^T u)^{1/2}$

Proposition

Par définition :

- Pour $u = 0$, l'origine est asymptotiquement stable.
- Pour u bornée, la trajectoire est bornée.

Remarque:

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t, x_0)\| \leq \gamma(\|u\|_\infty)$$

γ gain asymptotique du système

Cette définition dépend de la trajectoire, alors il faut trouver une condition suffisamment indépendante de la trajectoire.

Exemple: Soit le système $\dot{x} = Ax + Bu$

A Hurwitz implique que l'origine est stable.

Le système est-il SEE ?

$$x(t, x_0) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d e\tau$$

$$\|x(t, x_0)\| \leq e^{\lambda_{min}(A)t}\|x_0\| + \frac{1}{k}\|B\|.\|u\|_\infty = \frac{1}{k}\gamma(\|u\|_\infty) \text{ où } k = -\lambda_{max}(A)$$

$\|B\| = \sup_{\|v\|=1} \|Bv\|$, on a bien un SEE

Théorème *(Condition suffisante de SEE)*

> Le système $\dot{x} = f(x, u)$ est SEE si f est lipschitzienne et l'origine (pour $\dot{x} = f(x, 0)$) est globalement exponentiellement stable.

Exemple: Pour le système $\dot{x} = -x + (1 + x^2)u$:

- $f(x, 0)$ origine exp stable. (car sys linéaire)
- f n'est pas lipschitzienne pour les deux variables. En effet pour $u = 1$ on a $\dot{x} = -x + 1 + x^2 > 0; \forall x_0$

6 Attracteur

Définition

Un ensemble $M \subset D$ est positivement invariant du système

$$G : \dot{x}(t) = f(x(t)), x(0) = x_0, t \in \mathbb{R} \qquad (*)$$

si $\chi_t(M) \subseteq M$ pour $t \geq 0$ où $\chi_t(M) = \{\chi_t(x), x \in M\}$.

Il est négativement invariant suivant la dynamique (**??**) si $\chi_t(M) \subseteq M$ pour $t < 0$. Ainsi M est un ensemble invariant suivant (**??**) si $\chi_t(M) \subseteq M, \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Proposition

> Si $M \subset D$ est un ensemble invariant suivant (**??**), alors $\overline{M}$ l'adhérence de M est invariant.

Démonstration : Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ tel que $x_n \to x$ avec $x \in \overline{M}$.

Puisque M est invariant, alors $(\chi_t(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset M$. De plus, $\chi_t(x_n) \to \chi_t(x) \in \overline{M}$ car c'est un fermé.

Ainsi, $\overline{M}$ est invariant suivant (**??**). ■

Définition

Un ensemble invariant fermé $M \subset D$ est un *attracteur* du système (**??**), s'il existe un voisinage N de M tel que $\forall x \in N, \exists t \in \mathbb{R}$ tel que $\chi_t(x) \in M$

Remarque: Un cycle limite stable ou semi-stable est un attracteur.

Exemple: Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) = -x_2(t) + x_1(t)(1 - x_1^2(t) - x_2^2(t)) \\ \dot{x_2}(t) = x_1(t) + x_2(t)(1 - x_1^2(t) - x_2^2(t)) \end{cases}$$

En utilisant les coordonnées polaires, on trouve l'attracteur de M.

On a en effet $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ et $\theta = \arctan \frac{x_2}{x_1}$
donc $\dot{r} = \frac{\partial r}{\partial x_1}\dot{x_1} + \frac{\partial r}{\partial x_2}\dot{x_2} = r(1 - r^2)$ et $\dot{\theta} = \frac{\partial \theta}{\partial x_1}\dot{x_1} + \frac{\partial \theta}{\partial x_2}\dot{x_2} = 1$

Ainsi,
$r > 1 \quad \dot{r} < 0 \Rightarrow r \to 1$
$r < 1 \quad \dot{r} > 0 \Rightarrow r \to 1$
$r = 1$ un fermé $\Rightarrow$ Attracteur où $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2/\{(0,0)\}$ car $x_1 = x_2 = 0$ est un point d'équilibre, les trajectoires convergent vers le cercle unité. Suivant le théorème de Poincaré-Bendixon le cercle unité est un cycle limite, car c'est un compact et ne contient pas de point d'équilibre.