M1 E3A - Voie André Ampère

Module 424

Correction de TD

Version du 25 novembre 2023

Un cours de:
Mohamed Abbas Turki

Rédigé et amélioré par:
Pierre-Antoine Comby
(basé sur le travail de ?)

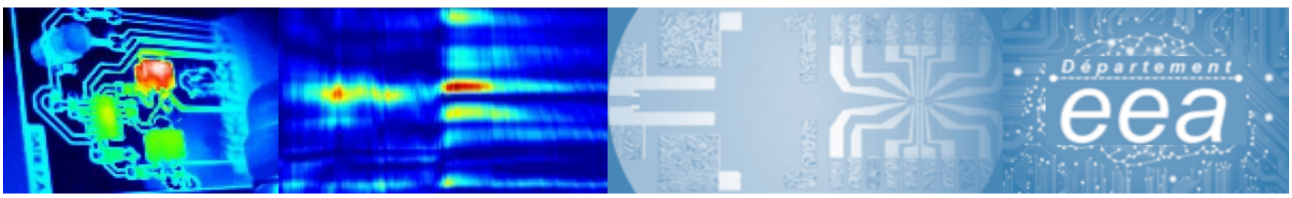


Table des matières

TD1 Espace de phase et stabilité

Exercice 1

1. Pour trouver les points d'équilibres, on annuler les dérivées des positions :

$$\begin{cases} 0 = \sigma(x_2 - x_1) \\ 0 = \rho x_1 - x_2 - x_1 x_3 \\ 0 = -\beta x_3 + x_1 x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1(\rho - 1 - x_3) = 0 \\ \beta x_3 = x_1^2 \end{cases}$$

Si $x_1 = 0$, alors :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si $x_1 \neq 0$, alors

$$\begin{cases} x_3 = \rho - 1 \\ \text{si } \rho > 1,\ x_1 = \pm\sqrt{\beta(\rho - 1)} = x_2 \end{cases} \text{ ou alors } \begin{cases} x_3 = \rho - 1 \\ \text{si } \rho < 1,\ x_1 = \pm j\sqrt{\beta(1 - \rho)} = x_2 \end{cases}$$

2. Donnons la linéarisation tangente du système autour du point d'équilibre en $\rho = 1$:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = \sigma(x_2 - x_1) \\ \dot{x_2} = x_1 - x_2 - x_1 x_3 \\ \dot{x_3} = -\beta x_3 + x_1 x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x_1} = f_1(x)) \\ \dot{x_2} = f_2(x) \\ \dot{x_3} = f_3(x) \end{cases}$$

Ainsi, on a en linéarisant autour de 0 :

$$\delta\dot{x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Big|_0 & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\Big|_0 & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\Big|_0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\Big|_0 & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\Big|_0 & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\Big|_0 \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\Big|_0 & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}\Big|_0 & \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\Big|_0 \end{pmatrix} \delta x \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix}$$

Stabilité en linéaire de $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ On calcule $det(\lambda I - A) = 0$, ie :

$$\begin{aligned} det \begin{pmatrix} \lambda + \sigma & -\sigma & 0 \\ -1 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + \beta \end{pmatrix} &= (\lambda + \beta)((\lambda + \sigma)(\lambda + 1) - \sigma) \\ &= (\lambda + \beta)(\lambda^2 + (1 + \sigma)\lambda \end{aligned}$$

On a donc les trois équations suivantes :

$$\begin{aligned} \lambda &= -\beta \\ \lambda &= 0 \\ \lambda &= -(\sigma + 1) \end{aligned}$$

Il n'existe pas de point d'équilibre en linéaire ce qui contredit le résultat en N.L où nous avons pour seul point d'équilibre $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 : Asservissement à relais

On considère le système constitué d'un moteur a courant continu asservie en position avec une correction tachymétrique, donné par la figure ci-dessous. R(.) représente la caractéristique d'un relais symétrique avec seuil Δ et hystérésis h.

1. On pose $e(t) = 0$, la transformée inverse donne donc, d'une part :

   $$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

   Ce qui conduit à :

   $$\begin{aligned}\omega(t) + \tau\frac{d\omega(t)}{dt} &= \frac{d\theta(t)}{dt} + \tau\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}\\ &= KR(-L\frac{d\theta(t)}{dt} - \theta(t))\\ &= -KR(L\frac{d\theta(t)}{dt} + \theta(t))\end{aligned}$$

   avec comme condition initiale :

   $$\begin{aligned}\theta(t=0) &= 0\\ \omega(t=0) &= 0\end{aligned}$$

   Si l'on pose maintenant $e = e_0 u(t)$, on a simplement :

   $$\frac{d\theta(t)}{dt} + \tau\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -KR(L\frac{d\theta(t)}{dt} + \theta(t) - e)$$

   avec comme condition initiale $\theta(0) = -e_0$ et $\dot{\theta} = \omega_0 = 0$.

   Remarque : si on pose $\theta' = \theta - e_0$ on retrouve la même équation différentielle et cela n'influence pas la transformée de Laplace, les deux sont donc équivalent.

2. On a pour le temps réduit $\bar{t} = \frac{t}{\tau}$.
   Attention ! La fonction R(.) fait sortir un U_0 a ne pas oublier.
   Et on pose en identifiant après avoir injecté le τ provenant de la normalisation du temps, $\overline{\theta} = \frac{\theta}{KU_0\tau}$.
   On trouve alors simplement $\overline{\omega} = \frac{d\overline{\theta}}{d\bar{t}} = \frac{\omega}{KU_0}$. Reste plus qu'à identifier les constantes :
   On a simplement $\beta = \frac{L}{\tau}$.
   Et d'une façon presque obscure $a = \frac{\Delta+h}{2KU_0\tau}$ et $\alpha a = \frac{\Delta-h}{2KU_0\tau}$.

3. On pose $\frac{d\overline{\theta}}{d\bar{t}} + \frac{d^2\overline{\theta}}{d\bar{t}^2} = \lambda$ avec $\lambda = 1$, 0 ou -1 en fonction de ϵ ou de $\frac{d\epsilon}{dt}$.

   On a comme condition initiale : $\overline{\theta}(t=0) = \overline{\theta_0}$ et $\overline{\omega}(t=0) = \overline{\omega_0}$. Ce qui conduit à :

   $$\overline{\omega}(t) + \frac{d\overline{\omega}}{d\bar{t}} = \lambda \Rightarrow \overline{\omega}(t) = \overline{\omega_0}e^{-\bar{t}} + \lambda(1 - e^{-\bar{t}})$$

On a donc en variable $\overline{\theta}$

$$\frac{d\overline{\theta}}{d\overline{t}} = \overline{\omega_0}e^{-\overline{t}} + \lambda(1 - e^{-\overline{t}})$$

d'où :

$$\overline{\theta}(t) - \overline{\theta_0} = \overline{\omega_0} - \overline{\omega_0}e^{-\overline{t}} + \lambda\overline{t} - \lambda(1 - e^{-\overline{t}})$$

4. Pour décrire l'espace des phases, on pose $x_1 = \overline{\theta}$ et $x_2 = \overline{\omega}$.Par élimination de $\overline{t}$, en utilisant la méthode explicite on a :

$$x_2(t) + x_1(t) = \overline{\omega_0} + \overline{\theta_0} + \lambda\overline{t}$$

d'où :

$$x_2 - \lambda = (\overline{\omega_0} - \lambda)e^{-\overline{t}}$$

et ainsi :

$$\overline{t} = ln\left(\frac{\overline{\omega_0} - \lambda}{x_2 - \lambda}\right)$$

ainsi, en remplaçant de façon explicite le temps réduit :

$$x_2(t) + x_1(t) = \overline{\omega_0} + \overline{\theta_0} + \lambda ln\left(\frac{\overline{\omega_0} - \lambda}{x_2 - \lambda}\right)$$

Avec la méthode implicite on a $\frac{dx_2}{d\overline{t}} = \lambda - x_2$ et $\frac{dx_1}{d\overline{t}} = x_2$. Ainsi on a $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\lambda - x_2}{x_2}$ et en intégrant, on retrouve le résultat précédent.

5. L'allure de l'espace de phase dépend de la valeur de λ.

Pour $\lambda = 0$ on a directement $x_1 + x_2 = \overline{\theta_0} + \overline{\omega_0}$
Pour λ on a
Comportement asymptotique

$$\overline{t} \leftarrow \infty \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \pm\infty \\ x_2 = \lambda \end{cases}$$

$$\overline{t} \leftarrow -\infty \Rightarrow \begin{cases} x_1 \approx -\overline{\omega_0}e^{-\overline{t}} + \lambda e^{-\overline{t}} \\ x_2 \approx \overline{\omega_0}e^{-\overline{t}} - \lambda e^{-\overline{t}} \end{cases}$$

On a dans le deuxième cas : $x_1(t) = -x_2(t)$ et $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\lambda - x_2}{x_2} =_{x_2=0} +\infty$

$$\frac{d^2x_2}{dx_1^2} = \frac{-\lambda(\lambda - x_2)}{x_2^3}$$

Selon la valeur de λ on a plusieurs solutions :

$$\lambda = -1 \text{ et, } x_2 > -1 \Rightarrow \text{concavité tournée vers } x_1 < 0$$
$$\lambda = 1 \text{ et, } x_2 < 1 \Rightarrow \text{concavité tournée vers } x_1 > 0$$

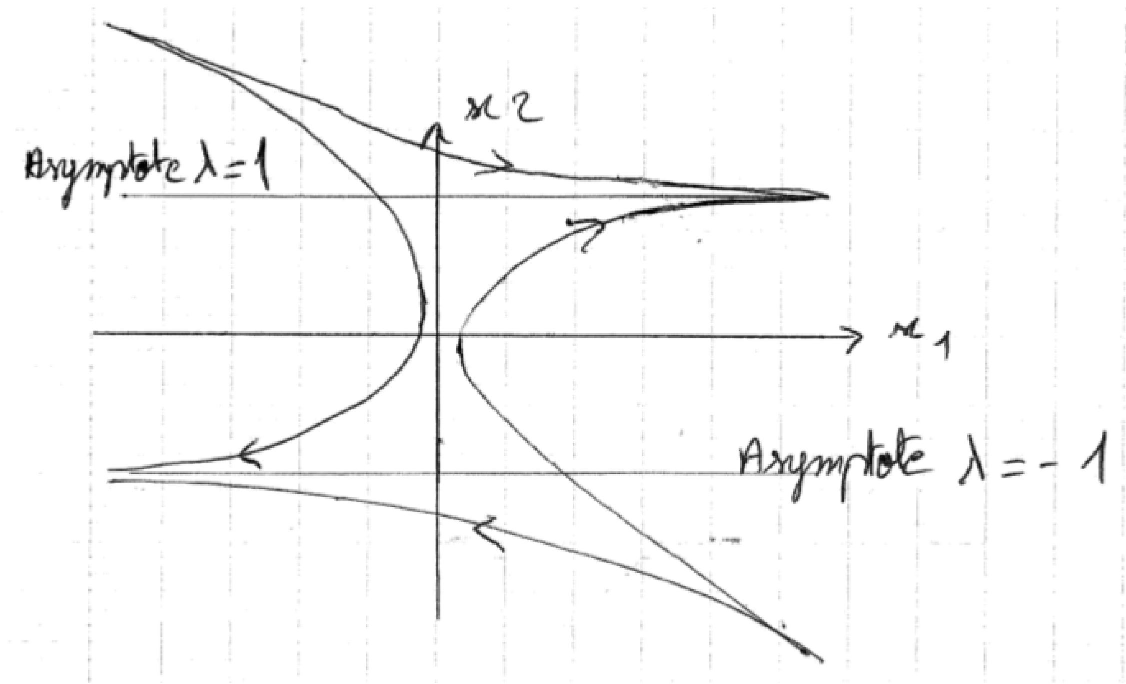


FIGURE 1 –

On a en sortie du comparateur : $\epsilon = x_1 + \beta x_2$ Sachant que l'on a la caractéristique : (attention, on a permuté avec $-R(\epsilon)$ On en déduit que :
Ainsi, selon la où l'on est, on va avoir différent λ, et on va pouvoir recouper ce graph avec celui de l'espace de phase précédent pour avoir le comportement du système dans l'espace de phase. On parcourt donc l'espace de phase en partant du point P, puis on se déplace vers le point Q par la droite de pente -1, puis de Q a R et S pour revenir vers T sur la portion de courbe ou se situe P. Si $x_{2T} < x_{2P}$, alors on a stabilité et on converge vers le point d'équilibre 0.
Si $x_{2T} > x_{2P}$, alors on a un comportement instable et le système diverge.
Si $x_{2T} = x_{2P}$, alors on est sur le cycle limite.

6. On étudie chaque portion du cycle.
Entre le point P et Q on a comme relation :

$$x_{1p} + \beta x_{2p} = -\alpha a$$
$$x_{1q} + \beta x_{2q} = a x_{1p} + x_{2p} \qquad = x_{1q} + x_{2q} \text{ (dynamique)}$$

Entre le point Q et R on a comme relation :

$$x_{1q} + \beta x_{2q} = a$$
$$x_{1r} + \beta x_{2r} = \alpha a$$
$$x_{1r} + x_{2r} = x_{1q} + x_{2q} - ln\left(\frac{1 + x_{2q}}{1 + x_{2r}}\right) \text{ (dynamique)}$$

Par symétrie, l'obtention du cycle limite vérifie $x_{2r} = -x_{2p}$. On a donc donc 6 inconnu et 6 équations différentes.

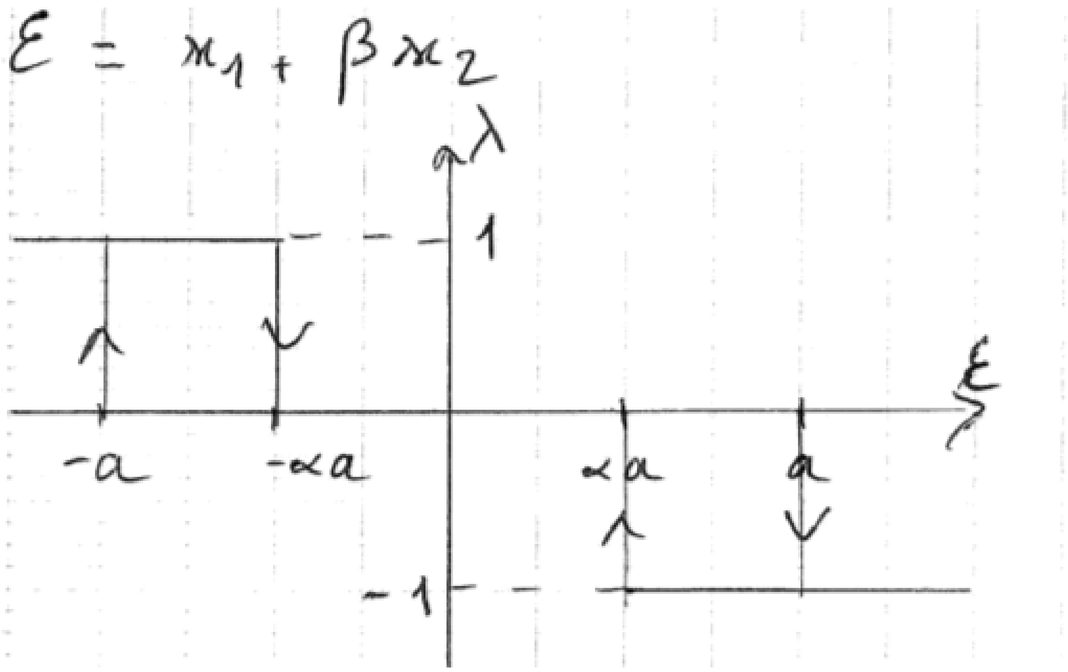


FIGURE 2 –

Ainsi, pour imposer le comportement du système, on fixe un cycle limite et l'on impose les valeurs de a et α pour l'obtenir.

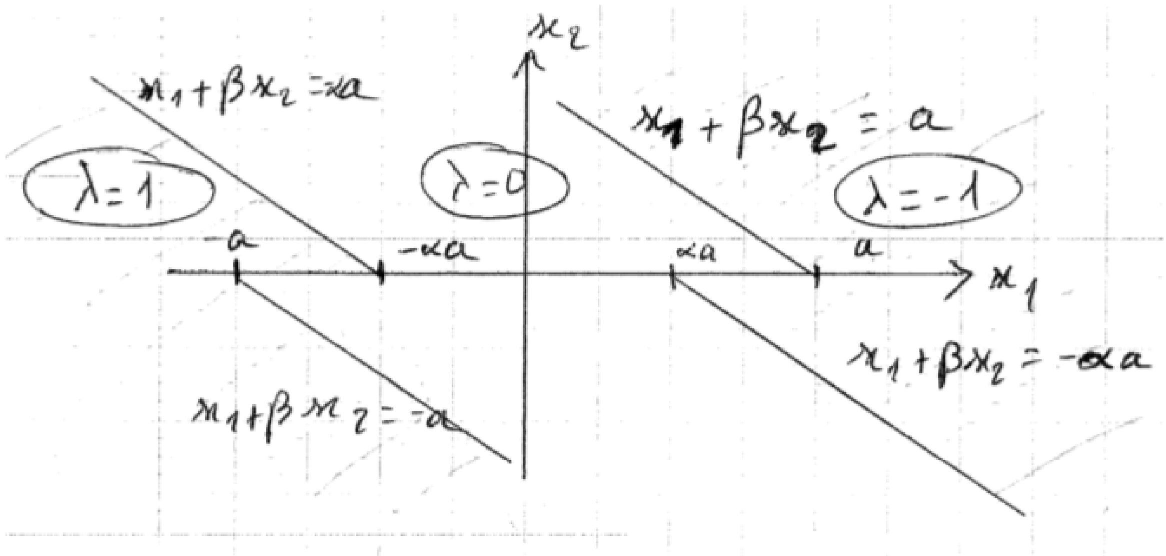


FIGURE 3 –

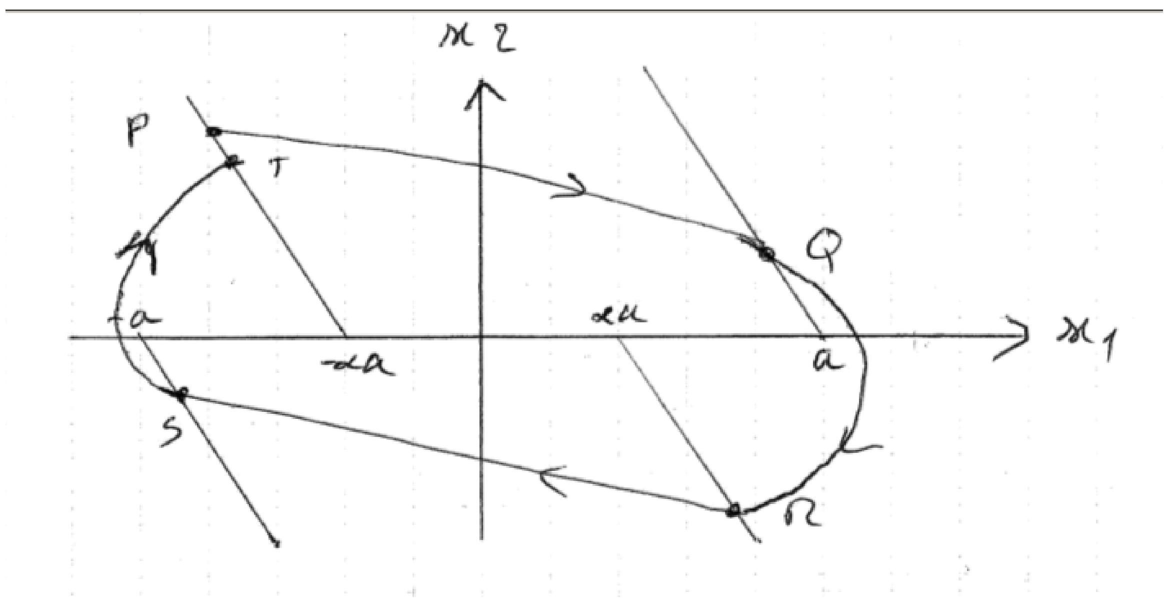


FIGURE 4 –

TD2 Methode du premier harmonique

Exercice I : Gain complexe équivalent

1. Pour la fonction de seuil :

$$y = \begin{cases} 0 & \text{si } |X| \leq \frac{\Delta}{2} \\ x - \frac{\Delta}{2} & \text{si } X > \frac{\Delta}{2} \\ x + \frac{\Delta}{2} & \text{si } X < -\frac{\Delta}{2} \end{cases}$$

   On pose

$$N(X) = \frac{P + jQ}{X}$$

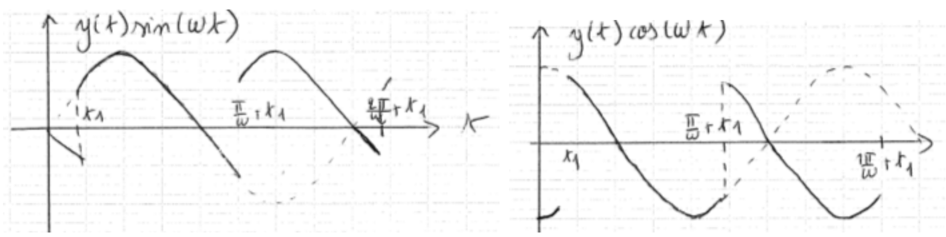
   avec

$$Q = 0$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{4\omega}{\pi} \int_{t_1}^{\frac{\pi}{2\omega}} (Xsin(\omega t) - \frac{\Delta}{2}) sin(\omega t) dt \\ &= \frac{4\omega}{\pi} \int_{t_1}^{\frac{\pi}{2\omega}} (Xsin^2(\omega t) - \frac{\Delta}{2} sin(\omega t)) dt \\ &= -\frac{2\Delta}{\pi} cos(\omega t_1) - \frac{4X\omega}{\pi} (\frac{t_1}{2} - \frac{\pi}{4\omega} - \frac{sin(2t_1\omega}{4\omega}) \\ \text{Or, } Xsin(\omega t_1) &= \frac{\Delta}{2} \Rightarrow t_1 = \frac{1}{\omega} arcsin(\frac{\Delta}{2X}) \\ &\Rightarrow P = X(1 - \frac{2}{\pi}(arcsin(\frac{\Delta}{2X}) + \frac{\Delta}{2X}\sqrt{1 - (\frac{\Delta}{2X})^2} \end{aligned}$$

   On a alors $N(X) = \frac{P}{X}$.

2. Pour le relais avec hystérésis
   On pose $X\sin(\omega t_1) = \frac{h}{2}$ donc $t_1 = \frac{1}{\omega} arcsin(\frac{h}{2X})$



$$\begin{aligned} P &= \frac{\omega}{\pi} \int_{[T]} y(t) \sin(\omega t) dt \\ &= 2\frac{\omega}{\pi} \int_{t_1}^{\frac{\pi}{\omega}+t_1} M \sin(\omega t) dt \\ &= 2\frac{\omega}{\pi} M . \frac{-\cos(\pi + \omega t_1) + \cos(\omega t_1)}{\omega} \\ P &= \frac{4M}{\pi} \sqrt{1 - (\frac{h}{2X})^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{\omega}{\pi}\int_{[T]} y(t)\cos(\omega t)dt \\
&= 2\frac{\omega}{\pi}\int_{t_1}^{\frac{\pi}{\omega}+t_1} M\cos(\omega t)dt \\
&= 2\frac{\omega}{\pi}M.\frac{\sin(\pi+\omega t_1)-\sin(\omega t_1)}{\omega} \\
Q &= -\frac{4M}{\pi}\frac{h}{2X}
\end{aligned}$$

$$|N(X)| = \frac{\sqrt{P^2+Q^2}}{X} = \frac{4M}{\pi X}$$

3. Pour le jeux sans inertie aval

$$y(t) = \begin{cases} x(t)-\alpha & \text{sur } DA \\ M & \text{sur } AB \\ x(t)+\alpha & \text{sur } BC \\ -M & \text{sur } CD \end{cases}$$

$$|N(X)| = \frac{1}{2\pi}\sqrt{(1+\cos 2\beta)^2-(\pi+2\beta+\sin 2\beta)^2} \quad \text{avec} \quad \beta = \arcsin(1-2\frac{\alpha}{M})$$

Exercice II : Asservissement avec boucle secondaire

1. Relations entre les différentes variables

$$\begin{aligned}
s(p(1+T_2p)) = k_2w &\Rightarrow \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + T_2\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} = k_2w(t) \\
w &= \phi(x) \\
x &= r-ks \\
r(1+T_1p) = -k_1s &\Rightarrow r(t)+T_1\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -k_1s(t)
\end{aligned}$$

2. On exprime x en fonction de s et s en fonction de x :

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-k_1}{1+T_1p}s - ks \\
s &= \frac{k_2}{p(1+T_2p)}\phi(x)
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
p(1+T_2p)(1+T_1p)x &= -(k_1+k(1+T_1p))k_2\phi(x) \\
T_2T_1x^{(3)}+(T_1+T_2)x^{(2)}+x^{(1)} &= -k_2(k_1+k)\phi(x) - kk_2T_1\frac{\mathrm{d}\phi(x)}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

3. On peut appliquer l'approximation du 1er harmonique à la NL car :
   - La NL est statique
   - Un filtre passe-bas d'ordre relatif > 1 est en aval de la NL Si le filtre est $\frac{p+1}{p^2/\omega^2+2m/\omega p+1}$, on ne peut pas appliquer la méthode du 1er harmonique.

4. On a $Q = 0$ car la NL est impaire.

$$P = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\sin(\omega t)dt = \frac{2}{T}(\int_0^{T/2} M\sin(\omega t)dt - \int_{T/2}^T M\sin(\omega t)dt) = \frac{4M}{\pi}$$

5. Avec $x(t) = X\sin(\omega t)$, on a donc l'approximation $w(t) = N(X).x(t)$ avec $N(x) = \frac{4M}{\pi X}$.

6. Analyse harmonique en remplaçant $\frac{d}{dt} = j\omega$

$$-T_1T_2j\omega^3 - (T_1+T_2)\omega^2 + j(1+kk_2T_1N(X))\omega + (k_1+k)k_2N(X) = 0$$

On en déduit les équations algébriques du cycle limite en prenant parties réelle et imaginaire :

$$\begin{aligned}(k_1+k)k_2N(X) - (T_1+T_2)\omega^2 = 0\\ (1+kk_2T_1N(x))\omega - T_1T_2\omega^3 = 0\end{aligned}$$

7. Cycle limite.

Existence du cycle limite On cherche une solution aux équations algébriques :

$$\begin{aligned}Re = 0 \Rightarrow \omega_0^2 &= \frac{(k_1+k)k_2N(x)}{T_1+T_2}\\ Im = 0 \Rightarrow X_0 &= \frac{4Mk_2T_1(k_1T_2-kT_1)}{\pi(T_1+T_2)}\end{aligned}$$

On peut alors réécrire

$$\omega_0^2 = \frac{k_1+k}{T_1(k_1T_2-kT_1)}$$

Stabilité du cycle limite

$$\frac{\partial R}{\partial X}|_0\frac{\partial I}{\partial \omega}|_0 - \frac{\partial I}{\partial X}|_0\frac{\partial R}{\partial \omega}|_0 > 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial X}|_0 = (k+k_1)k_2\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}X}|_0 < 0$$
$$\frac{\partial R}{\partial \omega}|_0 = -2(T_1+T_2)\omega_0 < 0$$
$$\frac{\partial I}{\partial X}|_0 = kk_2T_1\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}X}|_0\omega_0 < 0$$
$$\frac{\partial I}{\partial \omega}|_0 = 1 + kk_2T_1N(X_0) - 3T_1T_2\omega_0 = -2T_1T_2\omega_0^2 < 0$$

Le cycle limite est stable si $\frac{\partial R}{\partial X}|_0\frac{\partial I}{\partial \omega}|_0 - \frac{\partial I}{\partial X}|_0\frac{\partial R}{\partial \omega}|_0 > 0$

$$-2(k+k_1)k_2\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}X}T_1T_2\omega_0^2 + 2(T_1+T_2)\omega_0^2kk_2T_1\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}X} > 0$$

soit

$$T_2(k+k_1)\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}X}|_0 + (T_1+T_2)k\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}X}|_0 > 0$$

soit

$$T_1k - T_2k_1 < 0$$

Même condition que celle d'existence du cycle limite.

Exercice III : Contre-exemple

1. Voir Exercice I :

$$N(x) = \frac{4M}{\pi X}\sqrt{1-(\frac{h}{2X})^2} - j\frac{2Mh}{\pi X^2} = N_P(x) + jN_Q(X) \qquad \text{et} \qquad |N(X)| = \frac{4M}{\pi X}$$

Le lieu critique est défini par

$$-\frac{1}{N(x)} = \frac{-N_P(X)+jN_Q(X)}{|N(X)|^2} = -\frac{\pi X}{4M}\sqrt{1-(\frac{h}{2X})^2} - j\frac{\pi^2 h}{8M}$$

On trace le lieu de Nyquist de la fonction de transfert de $\frac{K}{1+\tau p}$ ainsi que celui de $-\frac{1}{N(X)}$: Il n'y a pas d'intersection entre les deux : d'après la méthode du 1er harmonique, il n'y a donc pas de cycle limite.

2. $KM > h/2$
L'entrée du filtre du 1er ordre $u = M$

$$y(t) = KM(1-e^{-t/\tau}) \Rightarrow \exists t_1 \text{ tq } y(t_1) > h/2 \text{ car } KM > h/2$$
$$x(t) = -y(t) < -h/2 \Rightarrow u = -M$$

et avec le même raisonnement,

$$\exists t_2 \text{ tq } y(t_2) < -h/2$$

$$x(t) > h/2$$

donc pour $KM > h/2$, il existe un cycle limite.

3. On obtient une contradiction car le filtre est de degré relatif égal à 1.

TD3 Stabilité en non linéaire

Exercice I : Stabilité au sens de Lagrange et de Lyapunov

1. (a) On défini le système par

$$\dot{x} = (6t\sin t - 2t)x$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{dx}{x} &= (6t\sin t - 2t)dt \\ [\ln(u)]_{x_0}^{x} &= 6([-\tau\cos\tau]_{t_0}^{t} + \int_{t_0}^{t}\cos\tau d\tau - [\tau^2]_{t_0}^{t} \\ \ln(x) - \ln(x_0) &= -6t\cos t + 6t_0\cos t_0 + 6\sin t - 6\sin t_0 - t^2 + t_0^2\end{aligned}$$

Donc on a la trajectoire :

$$x(t) = x_0\exp(-6t\cos t + 6t_0\cos t_0 + 6\sin t - 6\sin t_0 - t^2 + t_0^2)$$

(b) Stabilité au sens de Lyapunov :

$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0 \text{ tq } ||x_0|| \leq \delta \Rightarrow ||x|| \leq \epsilon$$

Soit $\epsilon > 0$ tq $|x(t)| \leq \epsilon$. Exprimons δ en fonction de ϵ tel que $|x_0| \leq \delta$.

$$\begin{aligned}|x(t)| &\leq |x_0|\exp(6t_0\cos t_0 - 6\sin t_0 + t_0^2 + 6 + 6t - t^2) \\ \text{Or, } 0 &< (3-t)^2 = 9 - 6t + t^2 \Rightarrow 6t - t^2 < 9 \\ \text{donc } |x(t)| &\leq |x_0|C \qquad \text{avec} \qquad C = \exp(6t_0\cos t_0 - 6\sin t_0 + t_0^2 + 12) > 0 \\ \Rightarrow \delta &= \frac{\epsilon}{C}\end{aligned}$$

Le fait que le δ dépende de t_0 n'empêche pas que l'origine soit stable au sens de Lyapunov. Cela montre que la stabilité n'est pas uniforme.

(c) Stabilité au sens de Lagrange :

$$\forall\delta > 0, \exists\epsilon > 0 \text{ tq } |x_0| \leq \delta \Rightarrow |x| \leq \epsilon$$

$t_0 = 2\pi n$ et $t = t_0 + \pi$

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0\exp(6.2\pi n + A\pi^2 n^2 - 6(2\pi n + \pi) - (2\pi n + \pi)^2) \\ &= x_0\exp((4n+1)\pi(6-\pi)) \to \infty \text{ si } n \to \infty\end{aligned}$$

$|x_0| \leq \delta$ alors que $\nexists\epsilon > 0$ tq $|x| \leq \epsilon$: l'origine n'est pas stable au sens de Lagrange.

2. (a) On définit le système par

$$\dot{x} = -\frac{x}{t+1}$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dt}{t+1}$$
$$\ln(\frac{x}{x_0}) = \ln(\frac{1+t_0}{1+t})$$

Donc on a la trajectoire :

$$x(t) = x_0 \frac{1+t_0}{1+t}$$

(b) Stabilité au sens de Lagrange :

$$\forall \delta > 0, \exists \epsilon > 0 \text{ tq } |x_0| \leq \delta \Rightarrow |x| \leq \epsilon$$

Soit $\delta > 0$ tq $|x_0| \leq \delta$, il faut exprimer ϵ en fonction de δ tq $|x(t)| \leq \epsilon$.

$$|x(t)| = |x_0| \frac{1+t_0}{1+t} \quad \text{avec} \quad t, t_0 > 0 \quad \text{et} \quad t \geq t_0 \text{ donc } \frac{1+t_0}{1+t} \leq 1$$

On prend $\epsilon = \delta$ et l'origine est stable au sens de Lagrange.

(c) Stabilité au sens de Lyapunov :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } |x_0| \leq \delta \Rightarrow |x| \leq \epsilon$$

Soit $\epsilon > 0$. On pose $\delta = \epsilon$

$$|x_0| \leq \delta = \epsilon \Rightarrow |x| = |x_0| \frac{1+t_0}{1+t} \leq \epsilon \frac{1+t_0}{1+t} \leq \epsilon$$

chibrage de l'exo

Exercice 1 : Stabilité en non linéaire

1. LE bout de l'autre génie.

$$x(t) = x_0 \frac{1+t_0}{1+t}$$
$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tq } ||x_0|| \leq \delta \Rightarrow ||x(t)|| \leq \epsilon$$

contraposée

$$\exists \epsilon \text{ tq } \forall \delta > 0, ||x_0|| \leq \delta \quad \text{et} \quad ||x(t)|| \geq \epsilon$$

$$|x(t)| = |x_0| \frac{1+t_0}{1+t} > \frac{|x_0| t_0}{1+t}$$
$$> |x_0| = \epsilon \text{ si } t_0 \to \infty$$

Exercice 2 : Pendule simple

1. (a) On applique le PFD selon l'axe u_θ :

$$m\ddot{\theta}l = -mg.sin(\theta)$$
$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}sin(\theta)$$

(b) On pose le vecteur $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$, on a donc le système d'état :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l}sin(x_1) \end{pmatrix}$$

(c) On a $E = \frac{1}{2}mv^2$ avec $v = l\dot{\theta}$:

$$\boxed{E = \frac{ml^2}{2}x_2^2}$$

Et $P = mgl(1 - cos(\theta))$:

$$\boxed{P = mgl(1 - cos(x_1))}$$

(d) On pose $V(x) = E + P$ d'où en zéro :

$$V(0) = \frac{ml^2}{2}x_{20}^2 + mgl(1 - cos(x_{10})) = 0$$

si $x \neq 0$ et $|x_1| < 2\pi$, alors $cos(x_1) < 1$ donc $E + P > 0$

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = mgl.sin(x_1)$$
$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = ml^2x_2$$
$$\dot{V}(x) = \dot{x_1}mglsin(x_1) + ml^2x_2\dot{x_2}$$
$$\dot{V}(x) = \dot{x_1}mglsin(x_1) + ml^2x_2(-\frac{g}{l}sin(x_1)) = 0$$

Pour $|x_1| < \pi$, l'origine sera stable
Il n'existe pas de Q(x) tel que $\dot{V}(x) \leq -Q(x)$
Barhashin : $\dot{V}(x) = \{x_2 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad |x_1| < 2\pi\}$
Pas de stabilité asymptotique

2. (a) On applique le PFD selon l'axe u_θ :

$$m\ddot{\theta}l = -mg.sin(\theta) - \alpha l\dot{\theta}$$
$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}sin(\theta) - \alpha\frac{1}{m}\dot{\theta}$$

(b) On pose le vecteur $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$, on a donc le système d'état :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} sin(x_1) - \frac{\alpha}{m} x_2 \end{pmatrix}$$

(c) On a $E = \frac{1}{2} m v^2$ avec $v = l\dot{\theta}$:

$$\boxed{E = \frac{ml^2}{2} x_2^2}$$

Et $P = mgl(1 - cos(\theta))$:

$$\boxed{P = mgl(1 - cos(x_1))}$$

(d) On pose $V(x) = E + P$ d'où en zéro :

$$V(0) = \frac{ml^2}{2} x_{20}^2 + mgl(1 - cos(x_{10})) = 0$$

si $x \neq 0$ et $|x_1| < 2\pi$, alors $cos(x_1) < 1$ donc $E + P > 0$

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = mgl.sin(x_1)$$
$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = ml^2 x_2$$
$$\dot{V}(x) = \dot{x_1} mglsin(x_1) + ml^2 x_2 \dot{x_2}$$
$$\dot{V}(x) = \dot{x_1} mglsin(x_1) + ml^2 x_2 (-\frac{g}{l} sin(x_1)) - \frac{\alpha}{m} x_2 - l^2 \alpha x_2^2 \leq 0$$

Pour $|x_1| < \pi$, l'origine sera stable

Il n'existe pas de Q(x) tel que $V(x) \dot{\leq} -Q(x)$
Barhashin :

$$V\dot{(}x) = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow \dot{x_1} = 0$$
$$\text{pour } |x_1 - < \pi \Rightarrow x_2 = 0$$
$$\text{donc } \dot{x_2} = 0 \Rightarrow sin(x_1) = 0$$

Si $x_1 = 0, \pi\ , -\pi$ il n'y a pas de stabilité asymptotique.

L'origine est stable asymptotiquement pour $(x_1, x_2)\ in] - \pi; \pi[\times \mathbb{R}$

$$V(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2}{2m^2} & \frac{\alpha}{2m} \\ \frac{\alpha}{2m} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{g}{l}(1 - cos(x_1))$$

$$V(0) = 0$$

$$V(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{g}{l}(1 - cos(x_1))$$

Or, $P > 0$ car :

$$\frac{\alpha^2}{2m^2} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\alpha^2}{2m^2} - \frac{\alpha}{4m^2} > 0 \quad \text{et} \quad |x_1| < 0\pi$$

donc :

$$P \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{pmatrix} > 0 \Leftrightarrow (LemmedeSchur)P_{11} > 0 \quad \text{et} \quad (peutetre)P_{11} - P_{12}P_{22}^{+}P_{12}^{T} > 0(P^{+}estlap$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= -\frac{1}{2}(\frac{g\alpha}{lm})x_1 sin(x_1) - \frac{\alpha}{2m}x_2^2 \leq 0 \\ &\leq -\frac{g\alpha}{4lm}x_1 sin(x_1) - \frac{\alpha}{4m}x_2^2 = Q(x) \end{aligned}$$

L'origine est localement asymptotiquement stable.

Exercice 3 : Exemple de systèmes

(a) On pose $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$, et on a bien $V(0) = 0$. $\dot{V}(x) = x_1\dot{x_1} + x_2\dot{x_2} = -(x_1^2 + x_2^2)$.
On a alors $V(x) \leq -Q(x)$ avec $Q(x) = \frac{x_1^2+x_2^2}{2}$, donc l'origine est globalement asymptotiquement stable.

Vérifions la stabilité exponentielle : $\exists \alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, et $x > 1$ tel que $\dot{V} \leq -\gamma||x - -^c$ et $\alpha||x||^c \leq V(x) \leq \beta||x||^c$
Pour la norme euclidienne, on prend $c = 2$ et avec $\gamma = 1$
$\dot{V} \leq -\gamma||x||^2$
Avec $\alpha = \frac{1}{4}$ et $\beta = 1$ la condition 2 est respectée donc on a la stabilité exponentielle.

(bi) On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 + x_3^4 \\ \dot{x_2} = -5sin(x_1) - x_2 + u_1 \\ \dot{x_3} = -kx_3 + u_2 \end{cases}$$

i. Pour $u_1 = u_2 = 0$, l'origine est stable car $\dot{x} = 0$.

ii. Pour linéariser, on passe par la matrice du jacobien prise en (0,0,0) :

$$\begin{pmatrix} \delta\dot{x_1} \\ \delta\dot{x_2} \\ \delta\dot{x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -k \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \end{pmatrix}$$

$$det(\lambda I - A) = (\lambda + k)(\lambda^2 + \lambda + 5)$$

La stabilité suivant le critère de Routh donne que c'est stable si $k > 0$

iii.

$$V(x) = 5(1 - cos(x_1)) + \frac{1}{2}\dot{x_2}^2 + \frac{3}{2k}x_3^4 |x_1| < 2\pi$$

$$\dot{V}(x) = 5x_3^4 sin x_1 - x_2^2 \leq -x_3^4 - x_2^2 \leq 0 (\text{ne marche pas car ne dépend pas de } x_1)$$

$$\dot{V}(x) \leq \frac{5}{2}x_3^4 sin x_1 - \frac{1}{2}x_2^2 - 3x_3^4 \leq -\frac{1}{2}x_3^4 - \frac{1}{2}x_2^2$$

$$Q(x) = -\frac{5}{2}x_3^4 sin x_1 + \frac{1}{2}x_2^2 + 3x_3^4 \geq 0 \text{ a condition que } |x_1| < \pi$$

TD4 Choix de la fonction de Lyapunov candidate, Commandabilité et Observabilité

Exercice 1 : Forme quadratique de la fonction de Lyapunov

Soit le système donné par :

$$\begin{cases} \dot{x_1} = f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \dot{x_2} = f_2(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \dot{x_n} = f_n(x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases}$$

1. L'approximation linéaire pour le point d'équilibre x_0 est :

$$\begin{aligned} \delta\dot{x}_1 &= \sum_{i=1}^{n} a_{1i}\delta x_i \\ &\vdots \\ \delta\dot{x}_n &= \sum_{i=1}^{n} a_{ni}\delta x_i \text{ avec, } a_{ij} = \left.\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right|_{x=x_0} \end{aligned}$$

   Pour simplifier, on pose $x_0 = 0$, et comme $\delta x_1 = x_1 - x_{0i}$, on a :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sum_{i=1}^{n} a_{1i}x_i \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= \sum_{i=1}^{n} a_{ni}x_i \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= \sum_{j=1}^{n} C_{ji}\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} C_{ji} \sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ji}a_{jk}x_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k C_{ki}x_k \\ &= z_i\lambda_i \end{aligned}$$

3. On considère la fonction de Lyapunov candidate fournie, on calcul alors :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{k=1}^{n} \dot{z}_k z_k^* + z_k \dot{z}_k^* \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_k z_k^* + \lambda_k^* z_k z_k^* \\ &= \sum_{k=1}^{n} 2Re(\lambda_k) z_k z_k^* < 0 \forall k \end{aligned}$$

4. L'analyse doit se faire sur un voisinage suffisamment petit de l'origine (CN).
5. Modèle linéaire :

$$\dot{x_1} = -x_2$$
$$\dot{x_2} = x_1$$
$$\text{donc } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, les valeurs propres sont i et -i.
Le système linéaire est stable au sens de Lyapunov. Par contre, il n'y a pas de stabilité asymptotique.

On passe alors dans la base modale. Pour cela, on résout :

$$\begin{aligned} jc_{11} &= a_{11}c_{11} + a_{21}c_{21} \\ -jc_{12} &= a_{11}c_{12} + a_{21}c_{22} \\ jc_{21} &= a_{12}c_{11} + a_{22}c_{21} \\ -jc_{22} &= a_{12}c_{22} + a_{22}c_{22} \\ \Rightarrow z_1 &= x_1 + jx_2 \text{ et, } z_2 = x_2 + jx_1 \end{aligned}$$

Comme $V = \sum_{k=1}^{2} z_k z_k^*$ alors,

$$\dot{V} = 8(x_1^4 + x_2^4)(1 - \alpha x_1^2 - \beta x_2^2)$$
$$\dot{V} \leq 0$$
$$\Rightarrow \alpha x_1^2 + \beta x_2^2 > 1$$

Au voisinage de l'origine, ($\alpha x_1^2 + \beta x_2^2 > 1$), c'est instable, mais en dehors de la trajectoire converge. On a un cycle limite pour $\alpha x_1^2 + \beta x_2^2 = 1$

Exercice II : Système du 2nd ordre

1. Suivant Routh, $a > 0$ et $b > 0$
2. Cas linéaire : $f(y) = by$, alors $b > 0$ implique que $y(by) > 0$ pour $y \neq 0$, soit $yf(y) > 0$ pour $y \neq 0$
3. On prend $V(x_1, x_2) = x_2^2 + 2\int_0^{x_1} f(\tau)d\tau$. Elle est définie positive et :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2f(x_1)\dot{x_1} + 2x_2\dot{x_2} \\ &= 2x_2 f(x_1) - 2ax_2^2 - 2x_2 f(x_1) \qquad \leq 0 \text{ : origine stable pour Lyapunov} \end{aligned}$$

Exercice III : Commandabilité et observabilité

1. On considère le système : $\begin{cases} \dot{x_1} &= -x_2 - x_2^2 \\ \dot{x_2} &= u \end{cases}$

On a donc $f(x) = \begin{bmatrix} -x_2 - x_2^2 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$E = \{f(x), g(x)\}$

$$\begin{aligned}
[f,g] &= J_g f - J_f g \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} f(x) - \begin{bmatrix} 0 & -1-2x_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\
[f,[f,g]] &= J_{[f,g]} f - J_f [f,g] \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_2 - x_2^2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1-2x_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+2x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
[g,[f,g]] &= J_g [f,g] - J_{[f,g]} g \\
&= 0 - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\mathcal{D} = \{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1+2x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \}$$

$\mathcal{D}$ est de dimension 2 : le système est commandable.

2. On a $f(x) = \begin{bmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned}
[f,g] &= \begin{bmatrix} -2x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\
[f,[f,g]] &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
[g,[f,g]] &= \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\mathcal{D} = \{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \}$$

$\mathcal{D}$ est de dimension 2 : le système est commandable.

De plus, on a $h(x) = x_1$

$\mathcal{V} = \{h, L_f h, L_g h, L_f L_g h, \dots\}$ et on étudie $\nabla \mathcal{V}$.

On a $\nabla h = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Il reste à trouver un élément de $\nabla \mathcal{V}$ qui a une 2e composante non nulle pour que $\nabla \mathcal{V}$ soit de dimension 2, et que le système soit observable.

$$\begin{aligned}
L_f h(x) &= x_2^2 & \nabla L_f h(x) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 2x_2 \end{bmatrix} \text{ ok mais dépend de } x_2 \\
L_g L_f h(x) &= 2x_2 & \nabla L_g L_g h(x) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ COOL!}
\end{aligned}$$

Le système est donc observable.

TD5 Bouclage linéarisant par retour d'état statique

Exercice I

On considère le système

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= x_1 + x_2 \\ \dot{x_2} &= x_2^2 + u \\ y &= x_1 \end{cases} \quad \text{donc } f(x) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2^2 \end{bmatrix}, g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad h(x) = x_1$$

1. On peut balancer $u = -x_2^2 + v$ comme des bâtards mais on va suivre le cours :
   (a) Trouver le degré relatif

$$\begin{aligned} z_1 &= y = x_1 \\ z_2 &= \dot{y} = \dot{x_1} = x_1 + x_2, \quad r > 1 \\ z_3 &= \dot{z_2} = \dot{x_1} + \dot{x_2} = x_1 + x_2 + x_2^2 + u, \quad r = 2 \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = v \end{cases} \qquad \text{modèle linéaire avec } \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} u &= v - x_1 - x_2 - x_2^2 \\ &= v - z_2 - (z_2 - z_1)^2 \end{aligned}$$

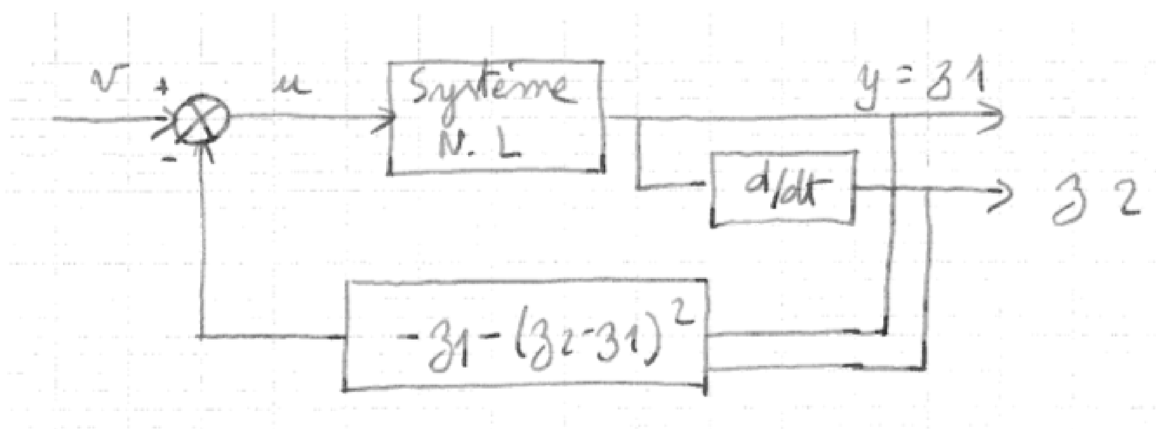


FIGURE 5 –

2.
$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \ddot{y} = v = \ddot{y}_r + a_1(\dot{y}_r - \dot{y}) + a_2(y_r - y) \end{cases}$$

Équation caractéristique de la dynamique

$$x^2 + a_1 x + a_2 = 0$$

3. On considère maintenant le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = x_1 x_2 + u \\ y = x_1 \end{cases}$$

Cherchons dans un premier temps uen commande linéarisante.

$$\begin{aligned} z_1 &= y = x_1 = h(x) \\ z_2 &= \dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x}\dot{x} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 x_2 + u \end{pmatrix} \\ &= x_2 \\ \ddot{y} &= \frac{\partial \dot{y}}{\partial x}\dot{x} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 x_2 + u \end{pmatrix} \\ &= x_1 x_2 + u = v \end{aligned}$$

Ainsi, $r = 2$ et le modèle linéaire correspond à :

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ et, } u = -x_1 x_2 + v$$

Pour imposer une consigne on a alors :

$$\ddot{\epsilon} + a_1\dot{\epsilon} + a_0\epsilon = 0$$

$$\begin{aligned} \epsilon &= y_c - y \\ &= y_c - z_1 \\ \dot{\epsilon} &= \dot{y}_c - z_2 \\ \ddot{\epsilon} &= \ddot{y}_c - \dot{z}_2 \end{aligned}$$

Comme $\dot{z}_2 = v$ alors,

$$\begin{aligned} &\ddot{y}_c - \dot{z}_2 + a_1(\dot{y}_c - z_2) + a_0(y_c - z_1) = 0 \\ \Rightarrow &v = \ddot{y}_c + a_1(\dot{y}_c - z_2) + a_0(y_c - z_1) \end{aligned}$$

Exercice 2 :

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_1 x_3 \\ \dot{x_2} = x_1 + x_2 u \\ \dot{x_3} = 1 + x_3 u \end{cases}$$

Examinons la commandabilité de ce système. Pour cela, on rappelle qu'il faut l'écrire sous la forme :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

On a donc m=2 et,

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad J_f = \begin{pmatrix} x_3 & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad J_g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On calcul ensuite :

$$ad_f g = [f, g] = \begin{pmatrix} -x_1 x_3 \\ x_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc, } J_{ad_f g} = \begin{pmatrix} -x_3 & 0 & -x_1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{reste à calculer, } ad_f^2 g = [f, ad_f g] = J_{ad_f g} - J_f ad_f g = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ 2x_1 x_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, on a $E = \{g, ad_f g, ad_f^2 g\}$. Or pour $x = 0$ le dernier vecteur est nul donc la dimension de E est inférieur à 3. Cela implique que le système n'est pas commandable.

Exercice 3 :

On considère ici le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 + u \\ \dot{x_2} = x_1^2 + x_2 \\ \dot{x_3} = x_3 + u \\ y = x_1 \end{cases}$$

Déterminons la dynamique est zéros, c'est à dire que l'on va choisir u de sorte à maintenir la sortie à zéro ainsi que ses dérivées successives. Ainsi, on impose $y = 0$:

$$\begin{aligned} y = 0 &\Rightarrow x_1 = 0 \\ &\Rightarrow \dot{x_1} = 0 \\ &\Rightarrow x_2 + u = 0 \\ &\Rightarrow u = -x_2 \\ \text{on a aussi avec } x_1 = 0,\ \dot{x_2} &= x_2 \\ \text{et aussi, } \dot{x_3} &= x_3 - x_2 \end{aligned}$$

On a donc la dynamique du système donnée par les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres étant ± 1, la dynamique des zéros est instable (CF début du cours de 424).

TD6 Bouclage linéarisant par retour d'état dynamique

Exercice

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_3^2 + u_1 + u_2 \\ \dot{x_2} = x_2 x_3 + u_2 \\ \dot{x_3} = u_1 \\ y_1 = x_1 - x_3 y_2 = x_2 \end{cases}$$

1. Pour vérifier si le système est linéarisable par retour statique on commence par calculer les dérivées successives :

$$\dot{y_1} = \dot{x_1} - \dot{x_3} = x_3^2 + u_2 \Rightarrow r_1 = 1$$

$$\dot{y_2} = x_2 x_3 + u_2 \Rightarrow r_2 = 1$$

   ainsi r= 2

$$\begin{pmatrix} \dot{y_1} \\ \dot{y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3^2 \\ x_2 x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

   u s'exprime donc en fonction de D^{-1}, D n'est pas inversible implique qu'il n'y a pas de bouclage linéarisant statique.

2. Pour le bouclage dynamique, les commandes sont dépendantes du temps. Si on ne rajoute pas de dynamique, on ne trouve pas un r assez grand, on rajoute donc $\dot{x_4} = \omega$ et $\dot{u_2} = \omega$ est une nouvelle commande :

$$\begin{aligned} \ddot{y_1} &= 2x_3\dot{x_3} + \dot{u_2} \\ &= 2x_3 u_1 + \dot{u_2} \text{donc } r_1 = 2 \\ \ddot{y_2} &= \dot{x_2} x_3 + x_2 \dot{x_3} + \dot{u_2} \\ &= x_2 x_3^2 + x_4 x_3 + x_2 x 2 u_1 + \omega \end{aligned}$$

   Ainsi, le système se met sous forme normale :

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1 \\ z_2 &= y_2 \\ \dot{z_1} &= z_3 \\ \dot{z_3} &= 2x_3 u_1 + \omega = v_1 \\ \dot{z_2} &= z_4 \\ \dot{z_4} &= x_2 x_3^2 + x_4 x_3 + x_2 u_1 + \omega = v_2 \end{aligned}$$

   ainsi, on a :

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 x_3^2 + x_4 x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_3 & 1 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \omega \end{pmatrix}$$

   Ainsi, D(x) (la matrice devant le vecteur de commande, hein !) est inversible si $2x_3 - x_2 \neq 0$.
   Si cette condition est réalisable alors le modèle est linéarisable.

TD7 Bouclage linéarisant poursuite asymptotique

1. La dynamique que l'on veut imposer est $\dot{\epsilon}+a_0\epsilon = 0$ avec $a_0 > 0$, sachant que $\epsilon = \omega_{opt} - \omega_t$, il s'agit donc de remplacer ϵ dans un premier temps, on trouve :

$$\dot{\omega}_{opt} - \dot{\omega}_t + a_0(\omega_{opt} - \omega_t)$$

   Si l'on injecte ceci dans l'équation dynamique, on trouve alors la commande qui suit la restriction imposée sur ϵ :

$$\dot{\omega}_{opt} - \frac{T_a}{J_t} + \frac{K_t}{J_t}\omega_t + \frac{T_g}{J_t} + a_0((\omega_{opt} - \omega_t) = 0$$
$$T_g = -a_0 J_t \omega_{opt} - J_t \dot{\omega}_{opt} v + (a_0 J_t - K_t)\omega_t + T_a$$

   T_a étant le terme à linéariser.

2. Si l'on impose une perturbation constante d, la commande précédente reproduit la perturbation et ne la rejette pas. L'équation obtenue est :

$$\dot{\omega}_{opt} - \frac{T_a}{J_t} + \frac{K_t}{J_t}\omega_t + \frac{T_g}{J_t} + a_0((\omega_{opt} - \omega_t) = -\frac{d}{J_t}$$

   On voit bien que la solution de cette équation aura un terme constant dépendant de d.

3. On se propose d'imposer une convergence asymptotique vers 0 suivant la dynamique $\ddot{\epsilon} + a_1\dot{\epsilon} + a_0\epsilon = 0$ avec $a_1 > 0$ et $a_0 > 0$. Comme précédemment, $\epsilon = \omega_{opt} - \omega_t$. Donc en injectant ceci on a :

$$(\ddot{\omega}_{opt} - \ddot{\omega}_t) + a_1(\dot{\omega}_{opt} - \dot{\omega}_t) + a_0(\omega_{opt} - \omega_t) = 0$$

   On va avoir besoin de dériver l'équation dynamique pour remplacer $\ddot{\omega}_t$,et on trouve :

$$\dot{T}_g = \dot{T}_a - K_t\dot{\omega}_t - J_t a_1(\dot{\omega}_{opt} - \dot{\omega}_t) - J_t a_0(\omega_{opt} - \omega_t) - J_t\ddot{\omega}_{opt}$$

   On constate que l'on doit introduire un capteur pour mesurer $\dot{\omega}_t$.

   On a donc un modèle d'asservissement suivant le schéma suivant : Pour une perturbation constante d, on a bien toujours la dynamique sur ϵ. d disparaissant lors du calcul de la dérivée de $\dot{\omega}_t$.

4. La partie que l'on souhaite linéariser dans la commande de T_g (respectivement $\dot{T}_g$ pour la question 3) est celle contenant les termes dépendant de ω_{opt}. Il suffit donc d'égaler ces termes à une commande v puis d'exprimer cette commande en fonction de T_g comme vu dans les TDs précédents.

TD8 Commande hiérarchisée et robustesse

Exercice I : Platitude

1. On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= x_2 - x_1 cos x_1 \\ \dot{x_2} &= (x_2^2 + u)(5 + sin x_1) \end{cases}$$

   Montrons que x_1 est une sortie plate, pour cela, il faut exprimer u en fonction de x_1 et ses dérivées uniquement :

$$\begin{aligned} x_2 &= \dot{x_1} + x_1 cos x_1 \\ u &= \frac{\dot{x_2}}{5 + sin x_1} - x_2^2 \\ &= \frac{\ddot{x_1} + \dot{x_1} cos x_1 - \dot{x_1} x_1 sin x_1}{5 + sin x_1} - (\dot{x_1} + x_1 cos x_1)^2 \end{aligned}$$

   x_1 est bien une sortie plate.

2. On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= -x_1^2 + x_2 \\ \dot{x_2} &= x_2 x_1 + u_1 \\ \dot{x_3} &= u_2 \end{cases}$$

   Montrons que x_1 et x_3 sont des sorties plates :

$$\begin{aligned} x_2 &= \dot{x_1} - x_1^2 \\ u_1 &= \dot{x_2} - x_2 x_1 \\ &= \ddot{x_1} - 3x_1\dot{x_1} + x_1^3 \\ u_2 &= \dot{x_3} \end{aligned}$$

   On a bien les commandes en fonctions de x_1,x_3 et leurs dérivées uniquement.

Exercice II : Planification

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= x_2 \\ \dot{x_2} &= \alpha \dot{x_1} + u \end{cases}$$

1. Trouvons la sortie plate y. On remarque que pour $y = x_1$ on a $u = \ddot{y} - \alpha\dot{y}$, donc ce y convient (est une sortie plate) et on a alors le système :

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= y \\ \dot{x_2} &= \dot{y} \\ u &= \ddot{y} - \alpha\dot{y} \end{cases}$$

2.

$$\begin{aligned}
y_c(t) &= a(T-t)^3 + b(T-t)^2 + c(T-t) + d \\
y_c(0) &= y_0 \Rightarrow aT^3 + bT^2 + cT + d = y_0 \\
y_c(T) &= y_T \Rightarrow d = y_T \\
\dot{y}_c(T) &= 0 \Rightarrow -c = 0 \\
\ddot{y}_c(T) &= 0 \Rightarrow b = 0 \\
&\Rightarrow aT^3 = y_0 - y_T \\
&\Rightarrow a = \frac{y_0 - y_T}{T^3} \\
u &= \ddot{y}_c - \alpha \dot{y}_c \\
7 &= 3\frac{y_0 - y_T}{T^3}(T-t)(3 + \alpha(T-t)
\end{aligned}$$

On a la commande en BO. En posant $\delta x = x - x_c$ on peut linéariser le modèle autour du point et approcher une trajectoire point par point.
La planification de la trajectoire permet de trouver un modèle linéaire autour de la trajectoire obtenue via u_c, la commande de planification.

Exercice III : Suspension magnétique

On peut appliquer le backstepping car le système est de forme triangulaire :

$$\begin{cases}
\dot{x_1} & = x_2 \\
\dot{x_2} & = -g + \frac{k}{m}\frac{x_3^2}{(c-x_1)^2} \\
\dot{x_3} & = \frac{-x_3 + k_v u}{\tau}
\end{cases}$$

On a u^* qui permet d'avoir x_3 qui via α_3 donne x_3^* qui lui donne x_2 qui via α_2 donne x_2^* qui donne x_1 qui lui donne x_1^* via α_1. Peut-être.

Etape 1 :

On pose $V_1(x_1) = \frac{1}{2}(x_1 - x_1^*)^2$ avec $x_1^* = z_*$, et, $\dot{V_1} = \alpha_1(x_1 - x_1^*)^2$. En égalisant les deux termes, on trouve après simplification que :

$$x_2^* = \alpha_1(x_1 - x_1^*) + \dot{x_1}^* \text{avec, } \alpha_1 < 0$$

Etape 2 :

On pose :

$$\begin{aligned}
V_2(x_1, x_2) &= \frac{1}{2}(x_1 - x_1^*)^2 + \frac{1}{2}(x_2 - x_2^*)^2 \\
\dot{V_2}(x_1, x_2) &= \alpha_1(x_1 - x_1^*)^2 + \alpha_2(x_2 - x_2^*)^2 \text{avec, } \alpha_2 < \alpha_1 < 0
\end{aligned}$$

On dérive, on égalise et on injecte $\dot{x_2}$ pour trouver

$$x_3^2 = \hat{x_3}^* = (\alpha_2(x_2 - x_2^*) + g + \dot{x_2}^*)\frac{m}{k}(c - x_1)^2$$

Etape 3 :

On s'intéresse ici à $\hat{x_3}$ plutot que x_3^2. On pose :

$$V_3(x_1, x_2, \hat{x_3}) = V_2(x_1, x_2) + \frac{1}{2}(\hat{x_3} - \hat{x_3}^*)^2$$
$$\dot{V_3}(x_1, x_2, \hat{x_3}) = \dot{V_2}(x_1, x_2) + \alpha_3(\hat{x_3} - \hat{x_3}^*)^2$$

On dérive, on égalise et on injecte $\dot{x_3}$ pour trouver

$$u = \frac{2x_3 + \alpha_3\tau(x_3 - \hat{x_3}^*/x_3) + \tau\dot{\hat{x}}_3^*}{2k_v}$$

Il faut éviter que $x_3 = 0$ pour avoir i non nul ?

Exercice IV : Commande par modes glissants

$\alpha_0 = 1.5, \alpha(t) = \alpha_0 + \Delta\alpha avec|\Delta\alpha| \leq 0.5$ $S = \dot{\epsilon} + \beta_0\epsilon$

$\dot{S} = \ddot{\epsilon} + \beta_0\dot{\epsilon}$ Poursuite assymptotique $u = (\alpha_0 x_2^2 + \ddot{y}_c + \dot{S} + \alpha K sign(S))$ Premier terme : mode linéarisant Terme 3 et 4 : mode glissant

$\alpha > 1 K telque|\Delta\alpha x_2^2| < K$