



M1 E3A - VOIE ANDRÉ AMPÈRE

UE424

COMMANDES DE SYSTÈME NON LINÉAIRES

Enseignant:

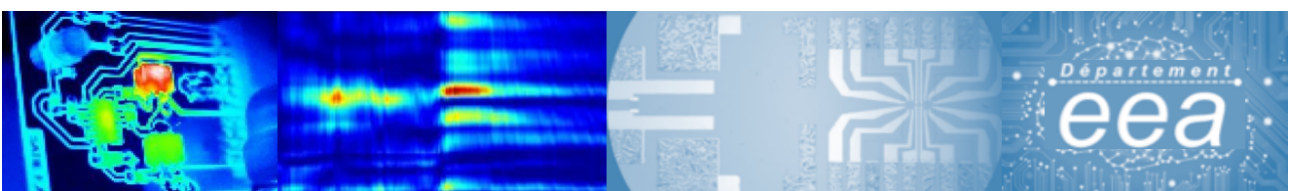
MOHAMED ABBAS TURKIS

Rédigé par:

PIERRE-ANTOINE COMBY

école _____
normale _____
supérieure _____
paris—saclay _____

université
PARIS-SACLAY



AVERTISSEMENT :
La structure de ce cours est purement fictionnelle. Toute ressemblance avec un plan existant
ou ayant existé serait tout à fait fortuite.

Table des matières

Première partie

Études des systèmes non linéaires

Chapitre 1

Classification

Objectifs du Module : Donner les connaissances fondamentales sur l'analyse et la commande des systèmes non linéaires en abordant les techniques classiques. Le but est d'avoir une compréhension plus profonde des hypothèses sous-jacentes à la commande non linéaire, des outils disponibles pour l'analyse, la synthèse et les limites des résultats obtenues.

Dans la première partie on s'intéressera à l'analyse de la stabilité d'un système via différentes méthodes notamment la méthode du premier harmonique (dans le chapitre 4) et l'étude de la fonction de Lyapunov (dans le chapitre 5).

Dans la seconde partie on s'intéressera à l'élaboration de commande du système non-linéaire, qui seront appliquée en TP.

1 Définition

Définition

Un système est dit Non Linéaire (N.L) si on n'a pas le principe de superposition, i.e. pour une entrée $\sum \lambda_i u_i$ on a en sortie $y \neq \sum \lambda_i y_i$.

Pour la *commande*, les systèmes N.L englobent les systèmes Linéaires (L), i.e. les systèmes L forment un sous-ensemble identifié au principe de superposition.

Exemple de systèmes N.L :

- Equation de Navier-Stokes (Mécanique des fluides)
- Equation de Boltzmann (Cinétique d'un gaz peu dense)

Exemple : Système N.L décrit par des EDO (Équations Différentielles Ordinaires) : le pendule simple

L'équation est donnée par $ml\ddot{\theta} = -mg\sin(\theta) - kl\dot{\theta}$ avec k le coefficient de frottement.

On a la représentation d'état avec $\theta = x_1$ et $\dot{\theta} = x_2$:

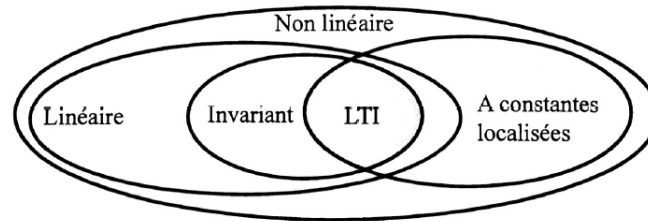
$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{k}{l}x_2 \end{cases}$$

Remarque : Un système à constantes localisées est décrit par des EDO.

Un système à constantes réparties est décrit par des EDP (Équations aux Dérivées Partielles).

Remarque: Si la relation entrées-sorties est de classe C^1 , alors il existe un voisinage, aussi petit soit-il, sur lequel le comportement est linéaire (DL du 1^{er} ordre)
Dans le cours, on considère les systèmes N.L ayant pour modèle dynamique des EDO.

On peut donc représenter les systèmes selon le graphe suivant :



2 Passage des EDP vers EDO

Très souvent les systèmes étudiés sont régis par des équations aux dérivées partielles, pour faciliter leur étude on simplifie ces équations par approximation, car le modèle obtenu est de dimension infinie.

$$\vec{\omega}(x, y, z, t) \approx \sum_{i=1}^N q_i(t) \vec{\eta}(x, y, z)$$

De plus la stabilité sera analysée sur l'aspect temporel car on ne peut pas avoir une dimension spatiale instable.

Poutre flexible : On regarde les différents modes d'excitations, obtenus par la méthode des éléments finis.

Ceci permet donc de décrire le système dans la Base Modale.

3 Forme générale de la représentation d'état

Dans le cas général, les systèmes sont décrits par la représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t, u) \\ y = g(x, t, u) \end{cases} \quad \text{avec,} \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^l$$

Exemple: Système LTV

$$\begin{aligned} f(x, t, u) &= A(t)x + B(t)u \\ g(x, t, u) &= C(t)x + D(t)u \end{aligned}$$

Ainsi la solution est notée $\chi(t, x_0)$, qui donne la valeur de x à l'instant t pour une condition initiale x_0

Définition

La *trajectoire* χ d'un système dynamique Σ sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ où n est la dimension de Σ , est une application :

$$\chi : \mathbb{R} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$$

vérifiant les propriétés:

1. Continuité χ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathcal{D}$ et $\forall x \in \mathcal{D}, \chi(\cdot, x)$ est dérivable sur \mathbb{R}
2. Consistance $\chi(0, x) = x$
3. Propriété de Groupe $\chi(t, \chi(\tau, x)) = \chi(t + \tau, x)$

Remarque: suivant la propriété 1. on a :

$$\frac{\partial \chi(t, x)}{\partial t} = f(\chi(t, x))$$

et si on fixe $x = x_0$ à $t = 0$ alors :

$$\frac{d\chi(t, x_0)}{dt} = f(\chi(t, x_0))$$

Définition

L'ensemble \mathcal{D} dans lequel évolue la trajectoire est nommée *espace de phase*. Dans le cas causal, on se limite à $\chi : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$. Pour t fixé on note $\chi_t := \chi(t, x) : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$

Proposition

L'application χ_t ou χ_{-t} est un homéomorphisme :

- continu
- bijectif
- inverse continu

Démonstration : on montre l'injectivité et la surjectivité de χ . La propriété 1. permet de montrer la continuité. ■

Chapitre 2

Caractérisation de la stabilité

1 Trajectoire

Dans le cas linéaire, la trajectoire est la solution au système $\dot{x} = Ax$ avec $x(0) = x_0$. Cette solution est unique. Qu'en est-il en non-linéaire ?

Définition

Un système dynamique sur $\mathbb{C} \subset \mathbb{R}^n$, où n est la dimension du système, est un triplet $(\cdot, \mathbb{R}, \chi)$ où $\chi : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est une trajectoire, tel que les axiomes suivants sont vérifiés :

1. Continuité : $\chi(\cdot, \cdot)$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $\chi(\cdot, x)$ est dérivable.
2. Consistance : $\chi(0, x_0) = x_0$, $\forall x_0 \in \mathbb{C}$.
3. Propriété de groupe : $\chi(\tau, \chi(t, x_0)) = \chi(t + \tau, x_0)$, $\forall x_0 \in \mathbb{C}$.

Remarque:

- On dénote le système (\cdot, \mathbb{R}, s) par G , où $\chi(\cdot, \cdot)$ est la trajectoire et \mathbb{C} est l'espace de phase.
- On dénote la trajectoire $\chi(t, \cdot) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ par $\chi_t(x_0)$ ou χ_t .

Proposition

Suivant l'axiome de consistance, $\chi_0(x_0) = x_0$ et suivant la propriété de groupe :

$$(\chi_\tau \circ \chi_t)(x_0) = (\chi_t \circ \chi_\tau)(x_0) = \chi_{t+\tau}(x_0)$$

Ainsi l'application inverse de χ_t est χ_{-t} où χ_t est un homéomorphisme (bijective, continue, inverse continue).

Démonstration : En effet, montrons que χ_t est injective.

Soit $y, z \in \mathbb{C}$ tels que $\chi_t(z) = \chi_t(y)$. On a $z = s_0(z) = \chi(0, z) = \chi(t - t, z) = \chi(-t, \chi(t, z)) = \chi(-t, \chi(t, y)) = \chi(0, y) = y$

χ_t est surjective : $\forall z \in D, \exists y \in \mathbb{C}$ tel que $y = \chi(-t, z)$.

Enfin, χ_t est continue sur \mathbb{R} donc χ_{-t} est continue. ■

Exemple: Système linéaire causal de dimension n (n variables d'état)

$s : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ où $\chi(t, x) = e^{At}x$ où $A \in \mathbb{R}^n$ matrice d'évolution

Ainsi $\chi_t(x) = e^{At}x$ où $\chi_t : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto e^{At}x \end{cases}$

On a $(\chi_\tau \circ \chi_t)(x) = \chi_\tau(\chi_t(x)) = e^{A\tau}e^{At}x = \chi_{t+\tau}(x)$

Proposition

Suivant l'axiome 1, le système G peut être décrit par une équation différentielle sur \cdot . En particulier, la fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $f(x) = \frac{d\chi(t,x)}{dt}|_{t=0}$. Ainsi, $f(x)$ est un champ de vecteur sur \mathbb{R}^n où pour $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) \in \mathbb{R}^n$ correspond au vecteur tangent à la trajectoire en $t = 0$.

Exemple: Système linéaire $f(x) = \frac{de^{At}x}{dt}|_{t=0} = Ax$

Nous avons défini une trajectoire, mais à partir de $\dot{x} = f(x)$, est-elle unique ?

2 Trajectoire et point d'équilibre

2.1 Théorème du point fixe

Théorème (*Point fixe*)

Soient X un espace de Banach de norme $\|\cdot\|$, S un fermé de X et $T : S \rightarrow S$ une application contractante sur X , i.e. $\exists \rho \in [0, 1[$ tel que $\forall (x, y) \in S^2, \|T(x) - T(y)\| \leq \rho\|x - y\|$, alors

$$\exists! x^* \in S \text{ tel que } T(x^*) = x^*$$

De plus, quelque soit la suite sur S tel que $x_{n+1} = T(x_n)$, elle converge vers x^* .

Définition

Soit deux espaces munis de leur normes (X, d_x) et (Y, d_y) et une application $f : (X, d_x) \rightarrow (Y, d_y)$. On dit que f est *lipschitzienne* si $\exists \alpha > 0$ tel que

$$\forall x, y \in X, \quad d_y(f(x), f(y)) \leq \alpha d_x(x, y)$$

Remarque: Une fonction lipschitzienne est uniformément continue.

Théorème (Cauchy-Lipschitz)

Soient le système dynamique défini par

Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est lipschitzienne et $x(t_0) = x_0$ (*)
 $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \exists \tau \in]t_0, t_1[$ tel que (*) a une unique solution $x : [t_0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$

Démonstration : Soient $T(x) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s)ds, t \in [t_0, \tau] = x(t)$
 et on définit $S = \{x(t) \text{ tel que } t \in [t_0, \tau], \|x - x_0\| \leq r\}$
 Ainsi, $\forall x \in S$

$$\begin{aligned} \|T(x) - x_0\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s)ds \right\| \\ &= \left\| \int_{t_0}^t (f(s) - f(t_0) + f(t_0))ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|f(s) - f(t_0)\| ds + \int_{t_0}^t \|f(t_0)\| ds \\ &\leq (\alpha r + C)ds \quad (f \text{ lipsch. et } \|s - x_0\| \leq r) \\ &\leq (\alpha r + C)(t - t_0) \leq r \end{aligned}$$

$\exists \tau \in]t_0, t_1[$ tel que $(\tau - t_0) \leq \frac{r}{\alpha r + C}$ donc $T : S \rightarrow S$.

$$\begin{aligned} \forall x, y \in S, \quad \|T(x) - T(y)\| &\leq \int_{t_0}^t \|f(x(s)) - f(y(s))\| ds \\ &\leq \alpha \int_{t_0}^t \|x(s) - y(s)\| ds \\ &\leq \alpha \max_{s \in [t_0, \tau]} \|x(s) - y(s)\| \int_{t_0}^t ds \\ &\leq \alpha \|x(s) - y(s)\| (t - t_0) \quad \text{avec } \|\cdot\| = \max_{s \in [t_0, \tau]} (\cdot) \end{aligned}$$

On veut $\alpha(t - t_0) \leq \alpha(\tau - t_0) \leq \rho$ avec $\rho < 1$ donc $\|T(x) - T(y)\| \leq \rho \|x - y\|$.

Il suffit de choisir τ tel que $\tau - t_0 \leq \frac{\rho}{\alpha}$

$T : S \rightarrow S$ est contractante pour $\tau - t_0 \leq \min\{\frac{r}{\alpha r + C}, \frac{\rho}{\alpha}\}$

(*) a une unique trajectoire. ■

Rappel : Dans le cas linéaire, le système $\dot{x} = Ax$ est stable si toutes ses valeurs propres sont à partie réelle négative, il existe un unique point d'équilibre \bar{x} stable tq $\dot{x} = 0$ (si $\det(A) \neq 0$ on $\bar{x} = 0$).

2.2 Points d'équilibres

Définition

- Les *points d'équilibre* d'un système vérifient $\dot{x}_{eq} = 0$
- Dans le cas non linéaire on peut avoir plusieurs points d'équilibre, isolés, voire une infinité, ou aucun.
- La stabilité en non linéaire n'est pas une caractéristique du système mais d'un point (ou un ensemble de point) qui sont généralement les points d'équilibre.

Exemple: *Pendule simple*

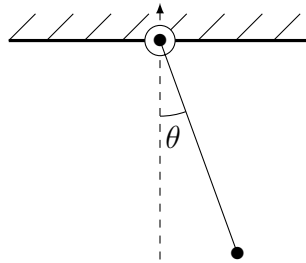


FIGURE 2.1 – Pendule simple

1. On a la représentation d'état ($x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}$) :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{k}{m} x_2 \end{cases}$$

Les points d'équilibre vérifient $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ soit $x_1 = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. physiquement on a deux points : 0 et π .

2. soit le système NL :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha + \sin(x_1(t) + x_2(t)) + x_1(t) \\ \dot{x}_2 = \alpha + \sin(x_1(t) + x_2(t)) - x_1(t) \end{cases}$$

Les point d'équilibre sont solutions de $\dot{x}_1 = 0$ et $\dot{x}_2 = 0$: on a pas de solution, en effet $\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 2\alpha + 2\sin(x_1 + x_2)$ pour $\alpha > 1$

Remarque: Les points d'équilibre peuvent aussi être déterminer dans le cas du régime forcé : $\dot{x}(t) = f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$

3 Critère Qualitatif

But : Tracer les trajectoires $\chi(t, x_0), \forall x_0 \in$ dans l'espace de phase \mathbb{R}^n où n est la dimension du système.

Cette méthode est réalisée pour les systèmes du second ordre ,plan de phase dans \mathbb{R}^2 , voire dans \mathbb{R}^3 . Les systèmes mécaniques sont des exemples typiques, notamment via les équation de Lagrange $\ddot{q} = l(q, \dot{q})$ avec q coordonnées généralisées. même si le modèle est d'ordre $2n$ où $n = \dim(q)$ on peut tracer les coordonnées deux à deux $x_1 = q_i, x_2 = \dot{q}_i$, dans le plan de phase.

3.1 Méthode pour tracer les trajectoires

1. Méthodes informatique :

- On utilise une intégration numérique pour différentes conditions initiale
- Graphe des pentes générés numériquement en étudiant $\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{f_1(x_1, x_2)}{f_2(x_1, x_2)}$

2. Méthode papier-crayon

- Méthode isocline : peut être manuelle et/ou numérique.
- Solution explicite des équations
On élimine le temps de manière explicite ou non.

Dans l'analyse de la stabilité on s'intéresse au comportement dans un voisinage du point d'équilibre.

Définition

Pour déterminer l'*index topologique* on utilise la méthode suivante:

1. Une courbe autour du point d'équilibre choisie d'une manière arbitraire et supposée de taille infinitésimale
2. Avec une paramétrisation dans le sens trigonométrique
3. On considère une suite arbitraire de point (x_n) dans le sens de la paramétrisation
4. Pour chaque point x_n on évalue $f(x_n)$ où f vérifie $\dot{x} = f(x)$.
5. Tous les vecteurs $f(x_n)_{n=1 \dots N}$ sont ramenés aux point d'équilibre.

Ainsi l'*index topologique* est la mesure de l'angle (modulo 2π) que l'extrémité des vecteurs $(f(x_i))$ parcourt dans le sens trigonométrique.

Il reste maintenant à chercher les trajectoires autour des points d'équilibres.

3.2 Méthode isocline

Pour cette méthode, il s'agit de poser :

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = Cst$$

C'est-à-dire de rechercher les points tel que la pente en x est égale à une constante donnée.

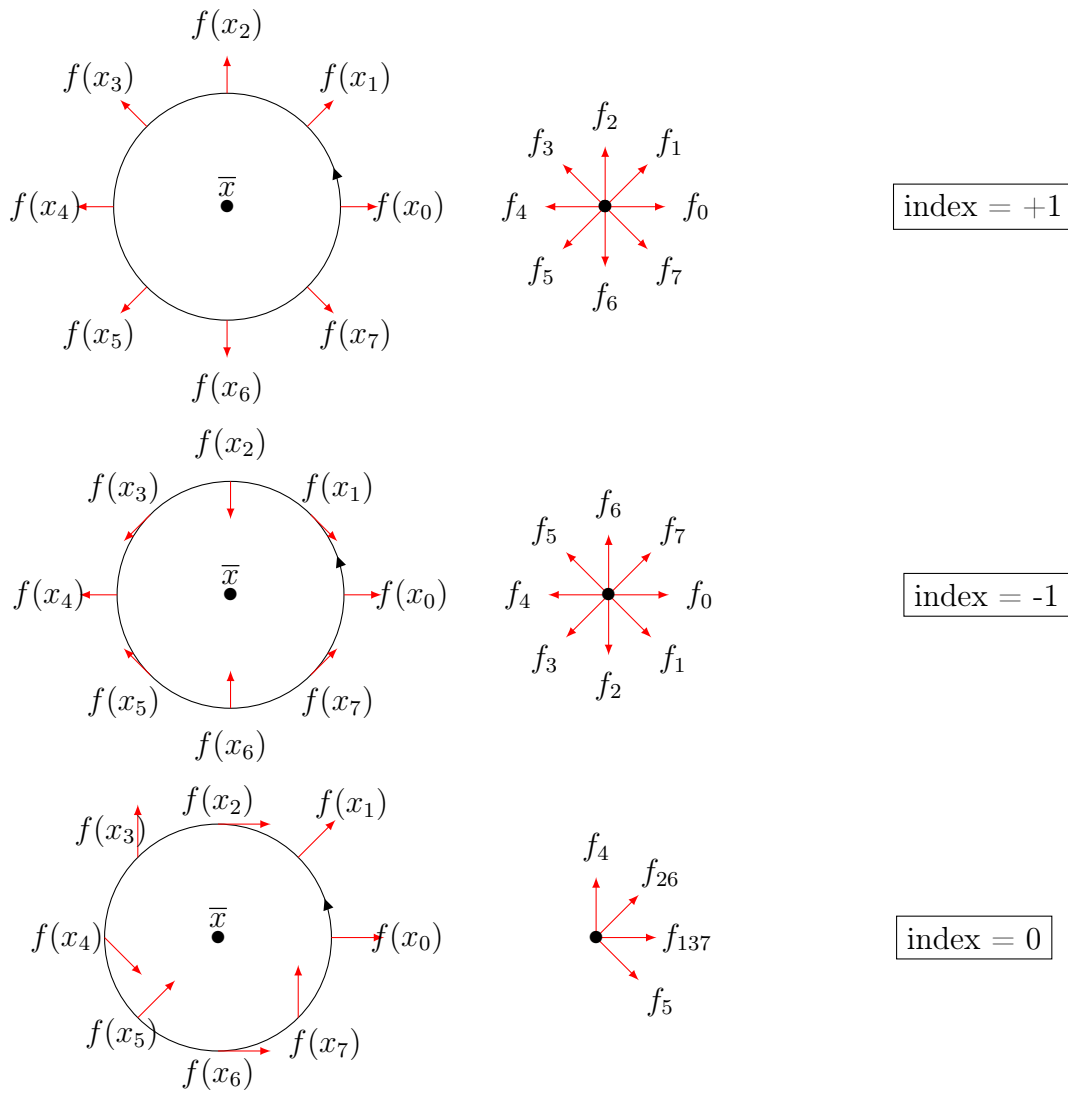


FIGURE 2.2 – Détermination de l'index topologique

Exemple: *Pendule inversé* Cas sans frottement :

$$\begin{cases} x_1 = \theta \\ x_2 = \dot{\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 = -\frac{g}{l} \sin(x_1) \end{cases}$$

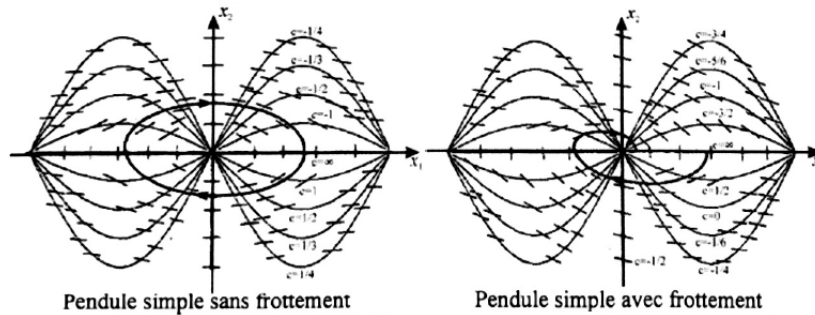
Les iso-clines vérifient donc :

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dx_1} &= \frac{-\frac{g}{l} \sin(x_1)}{x_2} \\ &= C \end{aligned}$$

donc les points décrivant la courbe ont pour équation :

$$x_2 = -\frac{g}{lC} \sin(x_1)$$

On trace alors ces courbes pour différentes valeurs de constante et l'on obtient :



L'iso-cline donne la pente de la trajectoire, ainsi, en suivant les pentes données d'iso-cline en iso-cline, on peut remonter à la trajectoire.

A noter que pour C infini on est sur l'axe de x_1 et pour C nul sur celui de x_2 .

Remarque: sans frottement on atteint un cycle limite tandis qu'avec frottement on tend bien vers l'origine.

3.3 Méthode par suppression temporelle

3.3.1 Méthode explicite

À partir des solutions des équations différentielles on se débarrasse de la paramétrisation temporelle pour obtenir la trajectoire :

Exemple:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_0 \cos(t) + \dot{x}_0 \sin(t) \\ \dot{x}_2 = -x_0 \sin(t) + \dot{x}_0 \cos(t) \end{cases}$$

On a $\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 = x_0^2 + \dot{x}_0^2$ soit un cercle de rayon $\sqrt{x_0^2 + \dot{x}_0^2}$

3.3.2 Méthode implicite

Le temps est élimié à partir de l'équation différentielle puis l'orbite est obtenue par intégration

Exemple:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases} \implies \frac{dx_2}{x_2} = dt = \frac{dx_1}{x_1}$$

Donc :

$$\int_{x_2 0}^{x_2} x_2 dx_2 = - \int_{x_1 0}^{x_1} x_1 dx_1$$

Ainsi on a : $x_1^2 + x_2^2 = x_{10}^2 + x_{20}^2$.

Remarque: Les méthodes par élimination du temps ne s'appliquent que pour les systèmes avec des dynamiques relativement simple.

Chapitre 3

Linéarisation

Il s'agit de regarder la stabilité, la convergence vers un point d'équilibre. On se place dans le cas présent en régime libre pour un système invariant, c'est à dire que $\dot{x} = f(x, u = 0)$ et $y = g(x, u = 0)$.

On pose $u = 0$, car la stabilité et la dynamique du système sont des caractéristiques intrinsèques d'un système, donc indépendantes de l'entrée.

Pour étudier la stabilité, on se place dans le plan de phase. Celui-ci permet de situer les points d'équilibres et de vérifier la stabilité. Sa dimension est égale au nombre de variables d'état.

Ainsi, pour des systèmes du second ordre, on va avoir :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$$

L'espace des phases devient alors ici un plan de phase dans lequel on va rechercher les trajectoires.

Dans la suite, on s'intéressera au cas de dimension deux pour positionner et comprendre le problème.

1 Analyse qualitative du comportement

Soit le système LTI obtenu à partir de la linéarisation autour d'un point d'équilibre x_0 . On dit que ce point d'équilibre est stable si c'est un point de convergence des trajectoire, ou instable si c'est un point de divergence des trajectoires.

On étudie donc le système autour de son point d'équilibre, en linéarisant son équation autour de ce point. On a donc l'équation :

$$\boxed{\delta \dot{x} = A \delta x}$$

où, $A = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big|_{x=x_0}$ Jacobien de f en x_0
et, $\delta x = x - x_0$

Remarque: En N.L, la stabilité est associée aux points d'équilibres. Ainsi, un même système N.L peut avoir des points d'équilibres stables et instables. Cette approximation peut être également réalisée dans le cas d'un régime forcé :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{cases}$$

avec $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$ et on alors :

$$\begin{cases} f(\bar{x} + \delta x, \bar{u} + \delta u) = f(\bar{x}, \bar{u}) + A.\delta x + B\delta u \\ h(\bar{x} + \delta x, \bar{u} + \delta u) = h(\bar{x}, \bar{u}) + C.\delta x + D\delta u \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} \delta\dot{x} = A.\delta x + B.\delta u \\ \delta\dot{u} = C.\delta x + D.\delta u \end{cases}$$

L'analyse qualitative de la stabilité est faite par linéarisation.

Proposition

La trajectoire pour une condition initiale δx_0 est solution de l'équation différentielle précédente, ie

$$\delta x(t) = \text{Mexp}(Jt)M^{-1}\delta x_0$$

où J est la matrice diagonale ou de Jordan¹ de A, la matrice d'évolution, et M la matrice de vecteurs propres tel que : $M^{-1}AM = J$.

2

1.1 Cas \mathbb{R}

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ où } \lambda_1 \neq \lambda_2$$

On pose le changement de variable $\delta z = M^{-1}\delta x$: Base Modale.

Donc on a $\delta z_0 = M^{-1}\delta x_0$ comme valeur initiales, d'où :

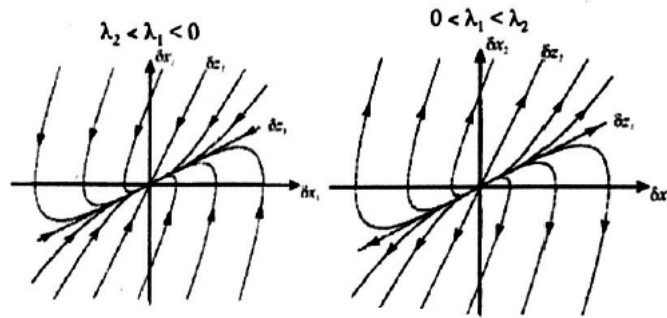
$$\delta z_1(t) = e^{\lambda_1 t} \delta z_{01}$$

$$\delta z_2(t) = e^{\lambda_2 t} \delta z_{02}$$

Ceci permet de tracer les trajectoires dans la base modale.

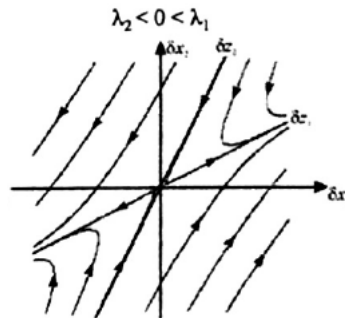
1. Dans le cas où $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ ou $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, on obtient :

2. cf UE421



D'un coté on à la convergence plus rapide de δz_2 par rapport à δz_1 et de l'autre la divergence plus rapide de δz_2 par rapport à δz_1 . On a un *noeud* qui est donc soit stable soit instable. Et son *index topologique* vaut +1

2. Dans le cas où $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, on obtient :

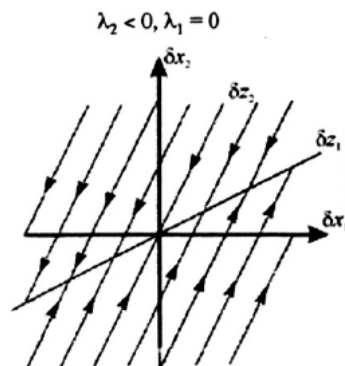


On est dans un cas instable et on a un point selle, d'index -1

3. Dans le cas ou $\lambda_1 = 0$, on a :

$$\begin{aligned}\delta z_1 &= \delta z_{01} \\ \delta z_2 &= e^{\lambda_2 t} \delta z_{02}\end{aligned}$$

d'où le graphique :



Il n'y a pas de point d'équilibre car A est non inversible ce qui implique que $\dot{x} = Ax \Rightarrow x = 0$

Remarque: Il n'y a pas de point d'équilibre d'après la définition $\dot{x} = 0$ même si graphiquement on converge vers un point.

4. Dans le cas où $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

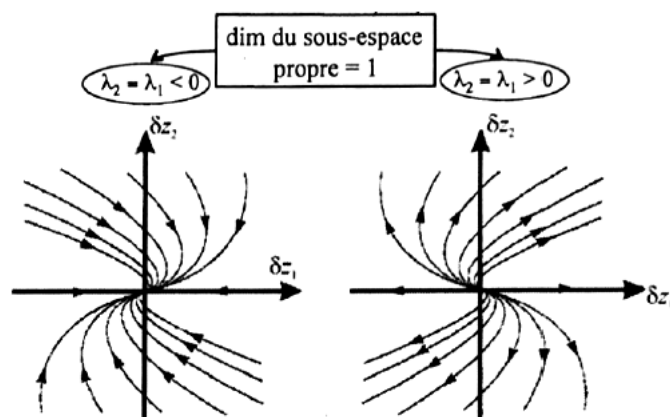
Si $J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ le sous espace propre est de dimension 2.

On a un point d'équilibre.

Si la dimension du sous espace propre est de 1, $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, donc :

$$\delta z_1 = t e^{\lambda t} \delta z_{01} + e^{\lambda t} \delta z_{02}$$

$$\delta z_2 = e^{\lambda t} \delta z_{02}$$



1.2 Cas \mathbb{C}

On a maintenant $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$. On considère la représentation d'état : $\delta \dot{z}_1 = M^{-1} \delta x$ tel que :

$$\delta \dot{z}_1 = \alpha \delta z_1 - \beta \delta z_2$$

$$\delta \dot{z}_2 = \beta \delta z_1 + \alpha \delta z_2$$

On utilise les coordonnées polaires :

$$r = \sqrt{\delta z_1^2 + \delta z_2^2} \text{ et } \theta = \arctan\left(\frac{\delta z_2}{\delta z_1}\right)$$

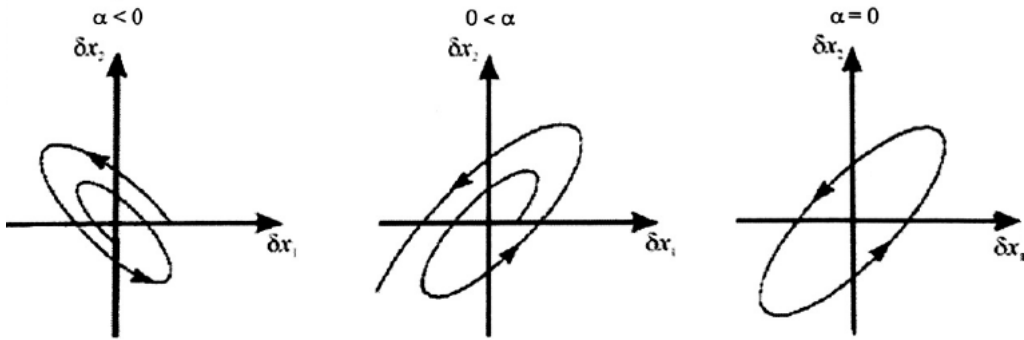
on a donc :

$$\dot{\theta} = \beta$$

$$\dot{r} = \alpha r$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{cases} \theta(t) = \theta_0 + \beta t \\ r(t) = e^{\alpha t} r_0 \end{cases}$$

Cas complexe :

$$\begin{cases} \delta z_1(t) &= e^{\lambda t} \\ \delta z_{10} + t e^{\lambda t} \delta z_{20} \\ \delta z_2(t) &= e^{\lambda t} \delta z_{20} \end{cases}$$

2 Cycle limite

Définition

Un système $\dot{x} = f(x)$ possède un *cycle limite* \mathcal{C} si il existe un intervalle de temps $[t_0, t_0 + T]$ et $\forall x_0 \in \mathcal{C}$ tel que la trajectoire $\chi(t, x_0)$ soit solution de $\dot{x} = f(x)$ et avec $\chi(t_0, x_0) = x_0$ et vérifie :

- $\chi(t, x_0) \in \mathcal{C} \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T[$
- $\chi(t_0 + T, x_0) = x_0$

On considère un système oscillant, c'est à dire qu'il existe $T > 0$ tel que $\forall t > 0, x(t + T) = x(t)$.

(On exclut cependant le cas $x(t) = \text{constante}$).

Remarque: Un point d'équilibre peut être interpréter comme un cycle limite singleton $\forall T \in \mathbb{R}$.

Proposition**Cycle limite stable**

Pour toutes les conditions initiales appartenant au voisinage du cycle limite :

$$\exists t_0 > 0 \text{ et } T > 0 \text{ tel que } \forall t > t_0, \quad x(t+T) = x(t)$$

i.e. toute trajectoire dans un voisinage du cycle limite converge dans un temps fini vers le cycle limite.

Cycle limite instable

Toutes les trajectoires divergent du cycle limite.

Pour toutes les CI n'appartenant pas au cycle limite, $\exists t > 0$ tel que $x(t) \notin \text{cycle limite}$.

Cycle semi-stable

Une partie des trajectoires converge et d'autres divergent du cycle limite.

Oscillateur de Van der Pol :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + (1 - x_1^2)x_2 \end{cases}$$

Point d'équilibre $x^* = (0, 0)$

Remarque: Il n'existe pas de solution analytique aux équations de Van der Pol, mais numériquement on trouve un cycle limite stable.

$\exists \varepsilon$ tel que le cycle limite \subset cercle de centre $(0,0)$ et de rayon ε : stable au sens de Lagrange.

Théorème (*Index de Poincaré*)

Dans le plan de phase (pour un système d'ordre 2) avec N le nombre de noeuds, centre et foyer et S le nombre de points selles.

Si un cycle limite existe, les points d'équilibre que le cycle limite encercle sont tel que

$$N = S + 1$$

ce théorème s'utilise souvent sous sa forme contraposée :

Corollaire

Si $N \neq S + 1$ alors il n'existe pas de cycle limite.

Démonstration :

Lemme

Soit une courbe du plan de phase alors l'index de la courbe est la somme des index des points d'équilibre contenu dans cette courbe.

À partir de cette proposition on peut démontrer le théorème de l'index de Poincaré, car le cycle limite \mathcal{C} est solution de l'équation dynamique. l'index de \mathcal{C} vaut $+1$. Ainsi le nombre de points d'équilibre ayant l'index $+1$ doit être supérieur d'une unité à ceux dont l'index est -1 ■

3 Théorème de Bendixon

Théorème

Soit le système du second ordre $\dot{x} = f(x)$ avec f le champ de vecteurs tel que $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec D un ensemble simplement connexe (d'un seul tenant, non formé de la réunion d'ensemble disjoint, sans trous) de \mathbb{R}^2 ne contenant pas de point d'équilibre. Si :

- $\exists x \in D$ tel que $\operatorname{div} f(x) \neq 0$
- $\operatorname{div} f$ ne change pas de signe dans D

Alors $\dot{x} = f(x)$ n'a pas de cycle limite inclus dans D .

Démonstration : Par l'absurde, soit $\Gamma = \{x \in D, x(t), 0 \leq t \leq T\}$ est un cycle limite.

$\forall x \in \Gamma$, $f(x)$ est tangent à Γ tel que $f(x) \cdot n(x) = 0$ où $n(x)$ est le vecteur normal de Γ en x .

Suivant le théorème de Green,

$$\oint_{\Gamma} f(x) \cdot n(x) dx = \iint_S \operatorname{div} f(x) dS \text{ donc } \iint_S \operatorname{div} f(x) dS = 0$$

Si $\exists x \in D$ tel que $\operatorname{div} f(x) \neq 0$ et que $\operatorname{div} f$ ne change pas de signe dans D (donc a fortiori dans $S \subset D$), on déduit de la continuité de l'opérateur $\operatorname{div} f$ dans D que $\iint_S \operatorname{div} f(x) dS \neq 0$: contradictoire.

Ainsi, D ne contient pas de cycle limite. ■

Exemple : Soit le système NL du 2nd ordre $\ddot{x}(t) + \alpha \dot{x}(t) + g(x(t)) = 0$, avec $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ où $\alpha \neq 0$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue avec $g(0) = 0$.

Représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) = f_1(x) \\ \dot{x}_2(t) = -\alpha x_2(t) - g(x_1(t)) = f_2(x) \end{cases} \text{ avec } x_1(t) = x(t) \text{ et } x_2(t) = \dot{x}(t)$$

Calculons $\operatorname{div} f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -\alpha$.

$\operatorname{div} f \neq 0$ et ne change pas de signe donc ce système ne comporte pas de cycle limite ($D = \mathbb{R}^2$).

4 Théorème de Poincaré-Bendixon

Définition

- Un ensemble $\mathcal{M} \subset \mathcal{D}$ est dit *positivement invariant* du système Σ si

$$\chi_t(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}, \forall t \geq 0$$

- Si la propriété est vraie $\forall t \leq 0$ l'ensemble est *négativement invariant*.
- Si la propriété est vraie $\forall t \in \mathbb{R}$ l'ensemble est *invariant*

Remarque: Un ensemble invariant est un fermé de \mathbb{R}^n .

Remarque: Un cycle limite stable ou semi-stable est un cas particulier d'un ensemble invariant. Cet ensemble est un *attracteur* et ne peut avoir qu'un comportement périodique.

Définition

Un *attracteur* est un ensemble invariant fermé $\mathcal{M} \subset \mathcal{D}$ du système Σ , si il existe un voisinage \mathcal{N} de \mathcal{M} tel que

$$\forall x \in \mathcal{N}, \text{ et } \chi_t(x) \in \mathcal{N}, \forall t \geq 0, \chi_t(x) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \mathcal{M}^t$$

Remarque: Physiquement³ un attracteur est un fermé borné (compact)

Théorème

Soient le système du 2nd ordre $\dot{x} = f(x)$ et $O_{x_0}^+$ une trajectoire positive, i.e $O_{x_0}^+ = \{x \in D, x = S(t, x_0), t \geq 0\}$ où $S(., x) : \mathbb{R} \rightarrow D$ définit une solution de $\dot{x} = f(x)$ pour une trajectoire passant par x , avec un ensemble limite $\omega(x_0)$ i.e.⁴ $\omega(x_0) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{O_{x_0}^+}$

Si $\omega(x_0)$ est compact et ne contient pas de point d'équilibre, alors la limite ne peut être qu'un cycle limite.

5

Interprétation :

Dans le cas du 2nd ordre, si on a une convergence des trajectoires vers un compact (fermé borné de \mathbb{R}^2) qui ne contient pas de point d'équilibre, alors la limite ne peut être qu'un cycle limite.

3. *sic.*

5. adhérence = plus petit fermé contenant l'ensemble

Proposition

- ω_0 définit un ensemble positivement invariant.
- Dans \mathbb{R}^2 le seul attracteur possible est un cycle limite.
- Si la trajectoire converge vers un ensemble alors on a les cas possibles :
 - C'est un ensemble de points d'équilibres.
 - C'est un cycle limite.
 - La trajectoire est un cycle limite.

Exemple 1 :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ -100 & -1 \end{bmatrix} x = A_1 x \\ \dot{x} &= \begin{bmatrix} -1 & 100 \\ -10 & -1 \end{bmatrix} x = A_2 x \quad \text{v.p. } \lambda_{1,2} = -1 \pm j31,62\end{aligned}$$

Les deux systèmes sont stables

Stabilité locale mais le système est instable globalement.

Important : l'analyse faite par linéarisation donne uniquement une information sur la stabilité locale et non globale.

Exemple 2 :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 1 & -10 \\ 100 & 1 \end{bmatrix} x = A_1 x \\ \dot{x} &= \begin{bmatrix} 1 & -100 \\ 10 & 1 \end{bmatrix} x = A_2 x \quad \text{v.p. } \lambda_{1,2} = -1 \pm j31,62\end{aligned}$$

Les deux systèmes sont instables.

En choisissant bien la permutation, on rend le système global stable.

Conclusion l'analyse de la stabilité par linéarisation ne donne pas une CNS de stabilité des systèmes non linéaires (point d'équilibre), d'où l'importance de définir un autre moyen d'analyse.

Remarque: Il existe d'autres méthodes pour tracer les trajectoires dans le plan de phase.

Exemple: *Élimination du temps* Méthode explicite :

$$\begin{cases} x_1(t) &= x_0 \cos t + \dot{x}_0 \sin t \\ x_2(t) &= -x_0 \sin t + \dot{x}_0 \cos t \end{cases}$$

$$x_1^2(t) + x_2^2(t) = x_0^2 + \dot{x}_0^2$$

On a éliminé le temps mais c'est assez *spécifique* à la représentation d'état.
Méthode implicite :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x \text{ donc } \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 \end{cases}$$

$$dt = \frac{dx_1}{x_2} = -\frac{dx_2}{x_1}$$

$$x_1 dx_1 = -x_2 dx_2 \text{ donc } x_1^2 + x_2^2 = x_{20}^2 + x_{10}^2$$

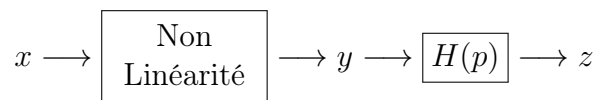
Chapitre 4

Methode du premier harmonique

1 Hypothèses

- la non-linéarité est statique et n'évolue pas dans le temps. On peut la séparer de la dynamique du système. Par exemple, la saturation (ou la zone morte) est une non-linéarité statique.
- la partie dynamique (linéaire) est un filtre passe-bas *suffisamment efficace* pour négliger les harmoniques d'ordre supérieur à 1. Plus précisément, l'ordre relatif du filtre doit être supérieur strict à 1.

2 Schéma-blocs



La fonction de transfert $H(p)$ (fraction rationnelle) correspond à un filtre passe-bas de degré relatif ≥ 2 .

On prend $x = X \sin \omega t$. Dans le cas linéaire, seule la valeur de ω influe sur le tracé de la diagramme de Bode du système. Dans le cas non-linéaire, on a plusieurs tracés de réponses fréquentielles. Par exemple, avec une saturation, on obtient des réponses fréquentielles qui dépendent de l'amplitude d'entrée de X dès qu'elle devient trop élevée.

Puisque $H(p)$ rejette les harmoniques d'ordre supérieur à 1, on peut donc décomposer

$$y(t) = P \sin \omega t + Q \cos \omega t$$

Dans le cas d'une NL symétrique, on a

$$P = \frac{2}{T} \int_{[T]} y(t) \sin \omega t dt$$
$$Q = \frac{2}{T} \int_{[T]} y(t) \cos \omega t dt \quad \text{avec } \omega T = 2\pi$$

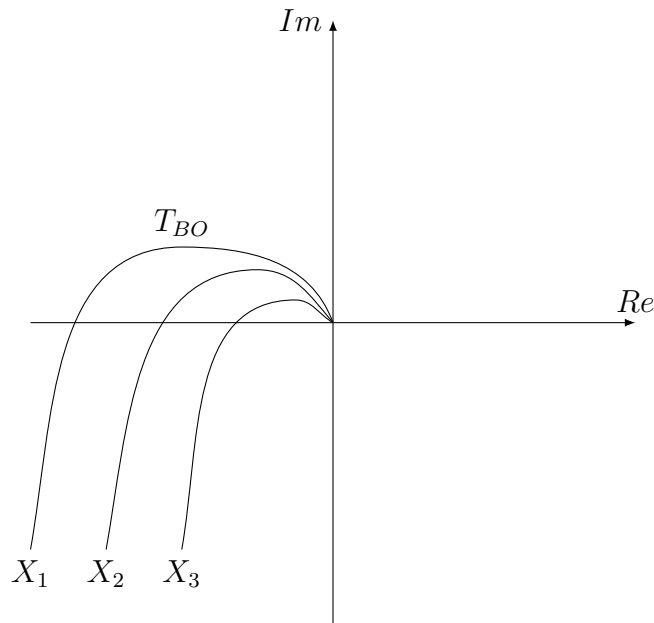


FIGURE 4.1 – Modification du lieu en fonction de l'amplitude

Remarque: Si la NL est non-symétrique, $y(t) = Y + P \sin \omega t + Q \cos \omega t$ avec $Y = \frac{1}{T} \int_{[T]} y(t) dt$. La composante continue Y peut être négligée pour l'analyse de stabilité et modélisée par une perturbation constante à l'entrée de $H(p)$.

Définition

On définit le *gain complexe équivalent*:

$$N(X) = \frac{P + jQ}{X} \text{ qu'on note } N(X) = N_P(X) + jN_Q(X)$$

- $N_P(X) = \frac{P}{X}$ est la gain en phase,
- $N_Q(X) = \frac{Q}{X}$ est la gain en quadrature.

Remarque:

- À la différence du système linéaire, pour une même pulsation, on a plusieurs réponses fréquentielles qui dépendent de l'amplitude de l'entrée X . L'analyse de stabilité doit donc se faire par rapport à tous les tracés.
- Les manipulations de schéma-blocs doivent satisfaire les règles connues (principe de superposition) et s'assurer que le signal en amont du bloc NL est le même, et en aval, qu'il est suffisamment filtré pour ne garer que le 1er harmonique.

Exemple :

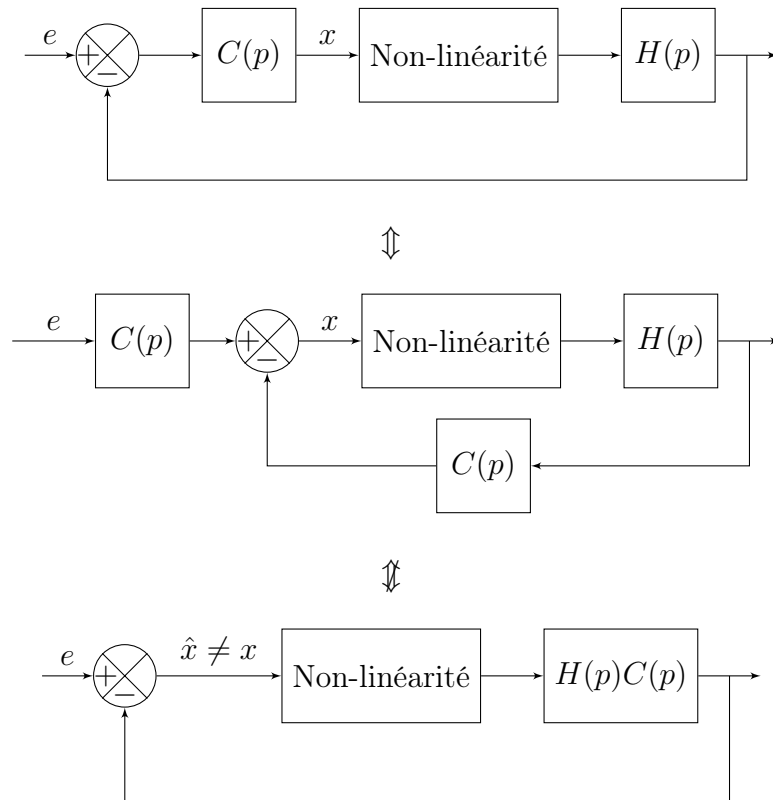
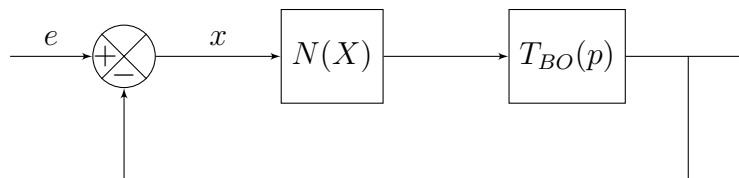


FIGURE 4.2 – Transformations de schéma-blocs

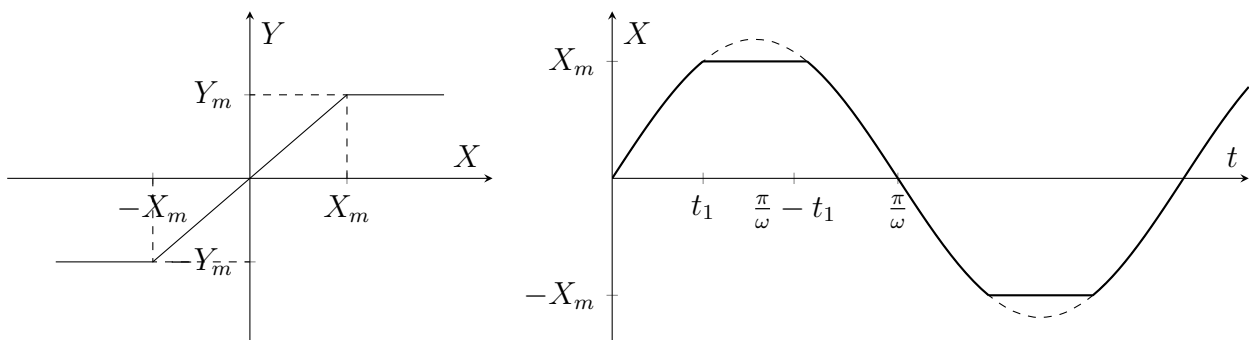
3 Analyse de la stabilité.

Système NL bouclé à retour unitaire



Dans l'analyse harmonique, la NL est modélisée par $N(X)$. Ainsi, il faut trouver l'expression de $N(X)$ en fonction de la NL :

Exemple: *saturation*



Calcul de $N(X)$:

Pour $0 \leq t \leq t_1$: $y(t) = X \sin \omega t$

$t_1 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega} - t_1$: $y(t) = X_m = X \sin \omega t_1$

$$\begin{aligned} P &= \frac{4\omega}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} y(t) \sin \omega t dt \\ &= \frac{4\omega}{\pi} \left[\int_0^{t_1} X \sin^2 \omega t dt + \int_{t_1}^{\frac{\pi}{2\omega}} X \sin \omega t_1 \sin \omega t dt \right] \\ &= \frac{2X}{\pi} \left[\omega t_1 + \frac{\sin 2\omega t_1}{2} \right] \end{aligned}$$

$$t_1 = \arcsin\left(\frac{X_m}{X}\right) \text{ et } Q = 0$$

Ainsi

$$N(x) = \begin{cases} 1 & X \ll X_m \\ \frac{2}{\pi} \left[\arcsin \frac{X_m}{X} + \frac{X_m}{X} \sqrt{1 - \frac{X_m^2}{X^2}} \right] & X > X_m \end{cases}$$

Proposition

Le dénominateur de la BF, $1 + N(X)T_{BO}(p)$, donne la limite de stabilité :

$$T_{BO}(j\omega) = -\frac{1}{N(X)}$$

Le lieu critique remplace le point critique -1 .

On a donc pour notre exemple de saturation

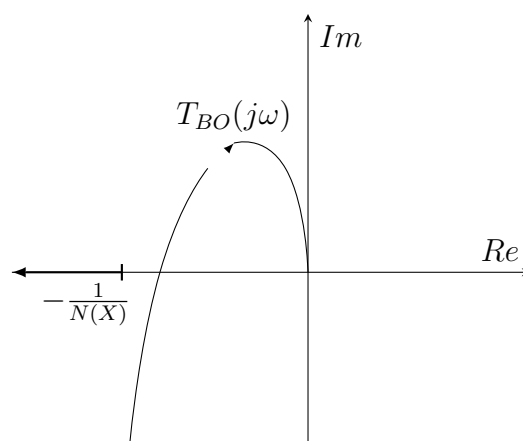


FIGURE 4.3 – INSTABLE

Ainsi dans le cas NL, on remplace le point critique -1 par le lieu critique $\frac{-1}{N(X)}$. Par conséquent, l'analyse de stabilité est réalisée par rapport à $\frac{-1}{N(X)}$. On a alors deux cas

1. Dans le cas où le tracé de Nyquist ne présente *pas d'intersection avec le lieu critique* on applique le critère de Nyquist ($N_{\frac{1}{N(Y)}} + = P_{T_{BO}}^T$) pour la stabilité ou celui du revers sur la FT, qui est alors stable, strictement propre et à déphasage minimal.
2. Si on a une ou plusieurs intersections, on a un régime auto-oscillant (cycle limite). $x(t) = X_0 e^{j\omega_0 t}$

4 Étude de la stabilité du cycle limite

Soit (X_0, ω_0) solution de $T_{B0}(j\omega_0) = -\frac{1}{N(X_0)}$ sur son cycle limite :

$$x(t) = X_0 e^{j\omega_0 t}$$

4.1 Critère analytique

On pose

$$T_{B0}(j\omega) + \frac{1}{N(X_0)} = R(\omega, X) + jI(\omega, X) = 0$$

Ainsi, on a

$$R(\omega_0, X_0) = 0 \text{ et } I(\omega_0, X_0) = 0$$

Pour analyser la stabilité on applique à t_0 une perturbation :

$$X_1 = X_0 + \delta X \text{ et } \omega_1 = \omega_0 + \delta\omega \quad \text{avec } \left| \frac{\delta X}{X_0} \right| \ll 1 \text{ et } \left| \frac{\delta\omega}{\omega_0} \right| \ll 1$$

$x(t)$ n'est plus périodique (plus d'intersection avec le lieu critique) et présente ainsi un amortissement $m > 0$ (stable) ou < 0 (instable).

$$x(t) = (X_0 + \delta X) e^{-mt} e^{j(\omega_0 + \delta\omega)t} = (X_0 + \delta X) e^{j(\omega_0 + \delta\omega + jm)t}$$

Ainsi la perturbation nous donne un régime auto-oscillant avec une amplitude $X_0 + \delta X$ et une *pulsation complexe* $\omega_0 + \delta\omega + jm$.

$$R(\omega_0 + \delta\omega + jm, X_0 + \delta X) + jI(\omega_0 + \delta\omega + jm, X_0 + \delta X) = 0$$

On applique un DL du 1er ordre autour de (ω_0, X_0) :

$$\left(\left. \frac{\partial R}{\partial X} \right|_{(\omega_0, X_0)} + j \left. \frac{\partial I}{\partial X} \right|_{(\omega_0, X_0)} \right) \delta X + \left(\left. \frac{\partial R}{\partial \omega} \right|_{(\omega_0, X_0)} + j \left. \frac{\partial I}{\partial \omega} \right|_{(\omega_0, X_0)} \right) (\delta\omega + jm) \approx 0$$

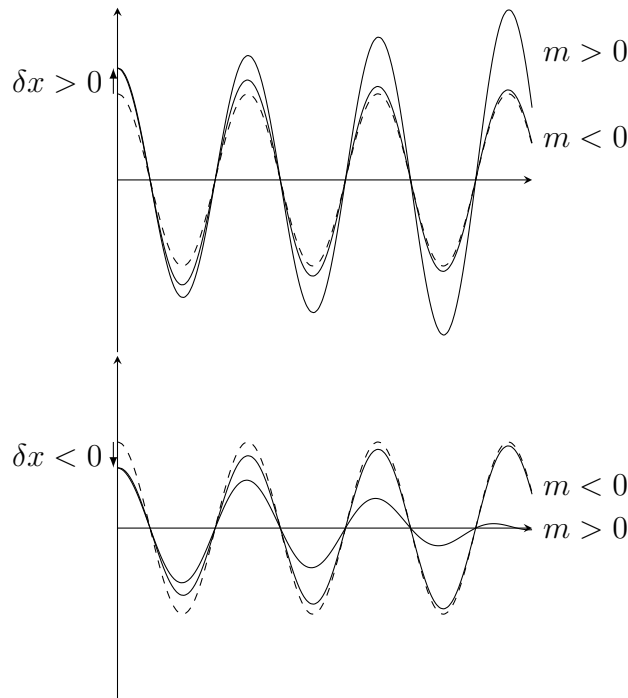
i.e. en notant $\left. \frac{\partial}{\partial X} \right|_{(\omega_0, X_0)} = \left. \frac{\partial}{\partial X} \right|_0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \omega} \Big|_0 \cdot \delta\omega + \frac{\partial R}{\partial X} \Big|_0 \cdot \delta X - \frac{\partial I}{\partial \omega} \Big|_0 \cdot m &= 0 \\ \text{et } \frac{\partial I}{\partial \omega} \Big|_0 \cdot \delta\omega + \frac{\partial I}{\partial X} \Big|_0 \cdot \delta X + \frac{\partial R}{\partial \omega} \Big|_0 \cdot m &= 0 \end{aligned}$$

Élimination de $\delta\omega$:

$$\underbrace{\left(\left(\frac{\partial R}{\partial \omega} \Big|_0 \right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial \omega} \Big|_0 \right)^2 \right)}_{\geq 0} m = \left(\frac{\partial R}{\partial X} \Big|_0 \cdot \frac{\partial I}{\partial \omega} \Big|_0 - \frac{\partial R}{\partial \omega} \Big|_0 \cdot \frac{\partial I}{\partial X} \Big|_0 \right) \delta X$$

Différents types de perturbation



- $m > 0$ et $\delta X > 0$: CL est stable
- $m < 0$ et $\delta X > 0$: CL est instable
- $\delta X < 0$ et $m < 0$: CL est stable
- $\delta X < 0$ et $m > 0$: CL est instable

Proposition (Condition de stabilité du cycle limite dans le plan de Nyquist)

le cycle limite est stable si et seulement si $\delta X \cdot m > 0$

Pour que $\delta X \cdot m > 0$:

$$\left. \frac{\partial R}{\partial X} \right|_0 \cdot \left. \frac{\partial I}{\partial \omega} \right|_0 - \left. \frac{\partial R}{\partial \omega} \right|_0 \cdot \left. \frac{\partial I}{\partial X} \right|_0 > 0$$

On pose $T_{B0}(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$ et $-\frac{1}{N(X)} = L(X) + jM(X)$
 On a un cycle limite si

$$T_{B0}(j\omega_0) = -\frac{1}{N(x)} \Rightarrow \begin{cases} R(\omega, X) = U(\omega) - L(X) \\ I(\omega, X) = V(\omega) - M(X) \end{cases}$$

d'où d'après la condition de stabilité du cycle limite :

$$-\left. \frac{\partial L}{\partial X} \right|_0 \cdot \left. \frac{\partial V}{\partial \omega} \right|_0 + \left. \frac{\partial U}{\partial \omega} \right|_0 \cdot \left. \frac{\partial M}{\partial X} \right|_0 > 0$$

4.2 Critère graphique

On repart de l'équation caractéristique du cycle limite :

$$T_{BO}(j\omega) + \frac{1}{N(X)} = 0$$

On note alors :

$$\begin{cases} T_{BO}(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) \\ -\frac{1}{N(X)} = P(X) + jQ(X) \end{cases} \implies \begin{cases} \Re(X, \omega) = U(\omega) - P(X) \\ \Im X, \omega = V(\omega) - Q(X) \end{cases}$$

La condition de stabilité du cycle limite devient :

$$\left. \frac{\partial Q}{\partial X} \right|_0 \left. \frac{\partial U}{\partial \omega} \right|_0 - \left. \frac{\partial V}{\partial \omega} \right|_0 \left. \frac{\partial P}{\partial X} \right|_0 > 0$$

Si on se place dans \mathbb{R}^3 , on a 2 vecteurs : $\begin{bmatrix} U \\ V \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} P \\ Q \\ 0 \end{bmatrix}$ qui décrivent respectivement T_{BO} et $-\frac{1}{N}$.

Les tangentes aux courbes T_{BO} et $-\frac{1}{N}$ sont colinéaires aux vecteurs :

$$\vec{v}_T = \frac{\partial}{\partial \omega} \begin{bmatrix} U \\ V \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \vec{u}_N = \frac{\partial}{\partial X} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ 0 \end{bmatrix} \text{ alors } \vec{v}_T \wedge \vec{u}_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\partial P}{\partial X} \cdot \frac{\partial V}{\partial \omega} + \frac{\partial U}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial Q}{\partial X} \end{bmatrix}$$

Ainsi, la condition $-\frac{\partial P}{\partial X} \cdot \frac{\partial V}{\partial \omega} + \frac{\partial U}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial Q}{\partial X} > 0 \implies (\vec{v}_T, \vec{u}_N)$ dans le sens direct.

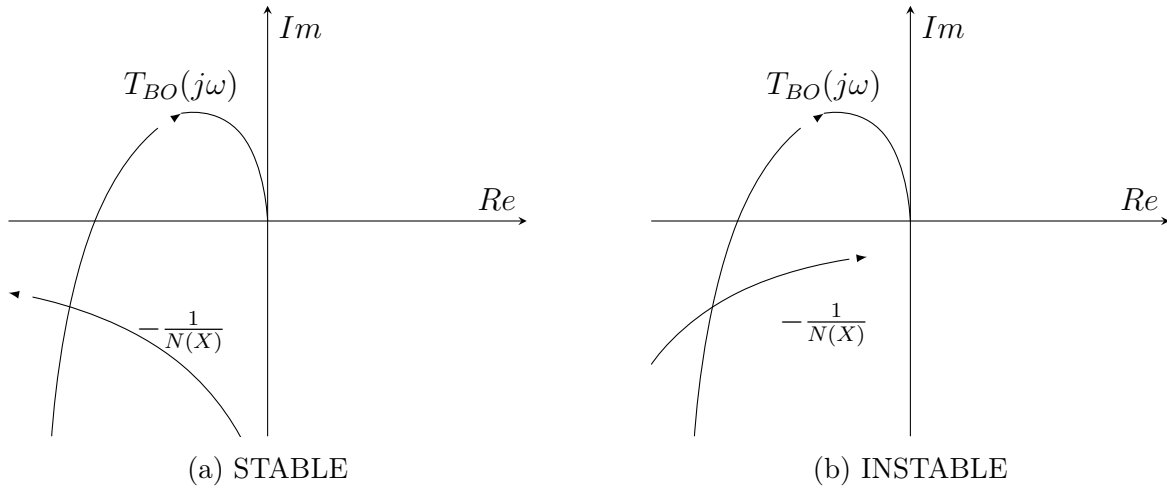


FIGURE 4.4 – Critère géométrique de stabilité

Théorème (Critère de Loeb)

Le cycle limite est stable si l'intersection de $T_{BO}(j\omega)$ et de $-\frac{1}{N(X)}$ est telle qu'en parcourant le lieu de Nyquist $T_{BO}(j\omega)$ dans le sens des ω croissants, on laisse à gauche la direction des X croissant sur le lieu critique.

Chapitre 5

Stabilité des systèmes non linéaires

1 Stabilité de Lagrange

Le premier à avoir introduit la notion de stabilité est Lagrange. Le concept est basé sur l'énergie potentielle V . Puisque les points d'équilibre du système correspondent aux points tels que $\frac{\partial V}{\partial q} = 0$ avec q les coordonnées généralisées du mouvement, alors un point d'équilibre est stable suivant Lagrange si $\frac{\partial^2 V}{\partial q^2} > 0$

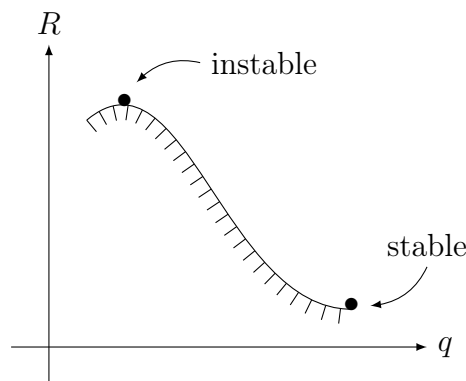


FIGURE 5.1 – Stabilité au sens de Lagrange

Suivant Lagrange, un point d'équilibre est stable si pour toutes conditions initiales, la trajectoire reste bornée.

- On contrôle la variation sur la trajectoire par celle sur la condition initiale.
- des petites variation sur la condition initiale implique de petite variation sur la trajectoire.

Remarque: La notion de stabilité en non linéaire concerne les points d'équilibre et non le système. Mathématiquement, Dirichlet a formalisé la stabilité au sens de Lagrange avec les trajectoires.

Définition

Un point d'équilibre x^* est stable au sens de Lagrange si et seulement si

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall t \in \mathbb{R}, \|x_0 - x^*\| \leq \delta \Rightarrow \|\chi(t, \chi(t_0, x_0)) - x^*\| \leq \varepsilon$$

Ainsi la stabilité suivant Lagrange est qu'un petit changement borné sur x^* implique un petit changement borné sur la trajectoire.

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } \|\chi(t_0, x_0)\| \leq \delta \Rightarrow \|\chi(t, \chi(t_0, x_0))\| \leq \varepsilon$$

Sans perte de généralité, on considère le point d'équilibre $x^* = 0$.

Remarque: La stabilité suivant Lagrange n'implique pas la convergence mais seulement la bornitude¹ (la trajectoire reste bornée), ce n'est pas suffisant pour faire de l'automatique, il faut pouvoir garantir la convergence. On utilise donc la stabilité au sens de Lyapounov

2 Stabilité au sens de Lyapunov

Définition

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \|\chi(t_0, x_0)\| \leq \delta \Rightarrow \|\chi(t, \chi(t_0, x_0))\| \leq \varepsilon$$

Attention : il n'y a pas d'implication entre les deux.

Remarque: C'est ε qui contrôle δ .

Remarque: La condition de Lagrange est sur la bornitude de la trajectoire (quelles que soient les conditions initiales, on borne la solution). Par contre, la condition de Lyapunov est sur la convergence dans un voisinage (il existe des conditions initiales pour lesquelles les trajectoires convergent vers x^*).

Exemple: *Oscillateur de Van der Pol*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + (1 - x_1^2)x_2 \end{cases}$$

Point d'équilibre $x^* = (0, 0)$

Remarque: Il n'existe pas de solution analytique aux équations de Van der Pol, mais numériquement on trouve un cycle limite stable.

1. sic.

$\exists \varepsilon$ tel que le cycle limite \subset cercle de centre $(0,0)$ et de rayon ε : stable au sens de Lagrange.
Par contre, pas stable au sens de Lyapunov car on a

$$\forall \delta > 0, \nexists \varepsilon > 0 \text{ tel que } \|\chi(t, \chi(t_0, x_0))\| < \varepsilon$$

Exemple: *Pendule sans frottement* L'origine est stable suivant Lyapunov avec $\delta = \varepsilon$.
Elle n'est pas stable suivant Lagrange

$$x_0 = (x_1 = \pi, x_2 = 0) : \nexists \varepsilon > 0 \text{ tel que } \|\chi(t, \chi(0, s_0))\| < \varepsilon$$

2.1 Stabilité uniforme

Définition

Le point d'équilibre $x^*(x^* = 0)$ est dit point d'équilibre uniformément stable si, pour la condition de Lyapunov, δ peut être choisi indépendamment des conditions initiales t_0, x_0

Définition

On définit les *fonctions de caractérisations* suivantes :

1. Si $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est continue et strictement croissante, α est dite de classe .
Si α croît indéfiniment (i.e. $\alpha(s) \rightarrow \infty$), alors $\alpha \in_\infty$
2. ϕ est dite de classe si $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue, strictement décroissante et $\phi(s) \rightarrow 0$
3. β est dite de classe si $\beta : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ si $\beta(., r) \in$ et $\beta(s, .) \in$
Typiquement $\beta(s, r) = \alpha(s) \cdot \phi(r)$ avec $\alpha \in, \phi \in$.

Exemple: $\beta(\|x_0\|, |t|) = \|x_0\|e^{-\lambda|t|}$ avec $\lambda > 0$

Ainsi le but est d'arriver à vérifier pour une trajectoire du système $\|\chi(t, x_0)\| \leq \beta(\|x_0\|, t), t \geq 0$ (enveloppe)

Proposition

L'origine est uniformément stable si et seulement si

$$\exists c > 0, \alpha \in \text{ tel que } \|\chi(t_0, x_0)\| \leq c \Rightarrow \|\chi(t, \chi(t_0, x_0))\| \leq \alpha(\|\chi(t_0, x_0)\|)$$

Démonstration : Condition suffisante.

Soit $\alpha \in$ (strictement croissante et continue, donc α^{-1} existe).

Pour $\varepsilon > 0, \exists \delta$ dépendant de ε tel que $\delta = \alpha^{-1}(\varepsilon)$.

Si $\|\chi(t_0, x_0)\| \leq \delta \Rightarrow \|\chi(t, \chi(t_0, x_0))\| \leq \alpha(\alpha^{-1}(\varepsilon)) \leq \varepsilon$

Condition nécessaire.

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta$ dépendant de ε tel que $\|s_0\| \leq \delta \Rightarrow \|s\| \leq \varepsilon$

Si $\varepsilon_2 > \varepsilon_1 \Rightarrow \delta_2 \geq \delta_1$ (suivant Lyapunov). On définit $\delta' \in$ tel que $\delta' < \delta$.

Pour $\varepsilon > 9, \exists \delta > 0$ tel que

$$\|s_0\| \leq \delta \Rightarrow \|\delta\| \leq \varepsilon$$

$$\|s_0\| \leq \delta' \Rightarrow \|\delta\| \leq \varepsilon \text{ car } \delta' < \delta$$

Si on définit $\alpha(\|\cdot\|) = (\delta')^{-1}$, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta'(\varepsilon)$ où $\|s_0\| = \delta'(\varepsilon) \Rightarrow \varepsilon = (\delta')^{-1}(\|s_0\|)$

Suivant Lyapunov, cela implique $\|s\| \leq \varepsilon \leq \alpha(\|s_0\|)$ ■

3 Attractivité (convergence)

Définition

$\exists r > 0, \forall \sigma > 0, \exists T > 0$ tel que $\|\chi(t_0, x_0)\| \leq r \Rightarrow \|\chi(t, \chi(t_0, x_0))\| \leq \sigma, \forall t \geq T$

Autrement dit : $\|s_0\| \leq r \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\chi_t\| = 0$.

On parle d'attractivité uniforme si T ne dépend pas de t_0 .

Proposition (*Stabilité asymptotique*)

L'origine est asymptotiquement stable si et seulement si

- stabilité au sens de Lyapunov et attractivité
- $\|s_0\| \leq r \Rightarrow \|s\| \leq \beta(\|s_0\|, t), \quad \beta \in$

Proposition (*Stabilité exponentielle*)

L'origine est exponentiellement stable si et seulement si

- stabilité au sens de Lyapunov et attractivité
- $\exists \alpha, \lambda, r > 0$ tel que $\|s_0\| \leq r \Rightarrow \|s\| \leq \alpha \|s_0\| e^{-\lambda t}$

Proposition (*Stabilité locale et globale*)

- L'origine est globalement stable si la stabilité (asymptotique, exponentielle,...) ne dépend pas de la condition initiale, i.e. $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et dit localement stable (asymptotiquement, exponentiellement,...)
- Si la stabilité dépend de la CI, i.e. $\exists V_t \subset \mathbb{R}$ ou $V_x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\forall t_0 \in V_t$ et $\forall x_0 \in V_x$, l'origine est stable.

Problème Généralement, on n'a pas de solution analytique de l'équation différentielle. Ainsi, la stabilité ne peut pas être vérifiée via la trajectoire.

Définition

V est une *fonction de Lyapunov* si :

1. $V : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto V(x) \end{cases}$ telle que $V(0) = 0$ et $V(x) \geq 0$ (définie semi-positive) ou telle que $V(0) = 0$ et $V(x) > 0$ si $x \neq 0$ (définie positive)
2. V est radialement non bornée, i.e. $V(x) \rightarrow_{\|x\| \rightarrow \infty} \infty$

Théorème (Stabilité au sens de Lyapunov)

Soit $\dot{x}(t) = f(x(t))$ et $f(0) = 0$ (origine est un point d'équilibre). On suppose qu'il existe V (fonction de Lyapunov) continue et différentiable tel que

$$\exists D \subset \mathbb{R}^n, 0 \in D \text{ où } \forall x \in D, \quad \dot{V}(x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T f(x) \leq 0$$

Alors l'origine est stable au sens de Lyapunov sur D .

Si $D = \mathbb{R}^n$, 0 est globalement stable au sens de Lyapunov.

Démonstration : Si $x = 0$ est stable, alors $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $\|s_0\| \leq \delta \Rightarrow \|s\| \leq \varepsilon$.

Pour $\varepsilon > 0$ on définit $0 < r \leq \varepsilon$ avec $B_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$

Soit $\alpha = \min_{\|x\|=r} V(x)$ et on choisit β tel que $\beta < \alpha$ et on définit $\Omega_\beta = \{x \in B_r(0) \mid V(x) \leq \beta\}$.

$0 \in \Omega_\beta$ car $V(0) = 0$ et $\Omega_\beta \subset B_r(0)$.

Soit $x_0 \in \Omega_\beta \subset : \dot{V}(x) \leq 0$

$$\Rightarrow V(x(t)) - V(x_0) \leq 0 \quad (\text{car } \dot{V} \leq 0)$$

$$\Rightarrow V(x(t)) \leq V(x_0) \leq \beta \quad (\text{car } x_0 \in \Omega_\beta)$$

$$\Rightarrow x(t) \in \Omega_\beta \subset B_r(0)$$

$$\Rightarrow \|x(t)\| \leq \varepsilon \quad r \leq \varepsilon$$

(Autrement dit si on part de Ω_β on reste dans Ω_β)

$\delta(\varepsilon)$ est le rayon de la boule de centre O et $\subset \Omega_\beta$ ■

Théorème (Stabilité asymptotique au sens de Lyapunov)

Soient le système $G : \dot{x} = f(x)$ et $f(0) = 0$ et $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction de Lyapunov continue et différentiable telle que

$$\forall x \in D, \quad \dot{V}(x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T f(x) \leq -Q(x), \quad \text{où } Q(x) \text{ est définie positive}$$

Alors l'origine est asymptotiquement stable.

Remarque: $Q(x)$ dépend de toutes les variables d'état. Sinon la convergence asymptotique n'est vérifiée que pour certaine direction.

Exemple: *Cas linéaire*

$$\dot{x} = Ax \text{ avec } x \in \mathbb{R}^n$$

Soit P une matrice semi définie positive ($P^T = P$ et $\lambda(P) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n, x^T P x \geq 0$)

On définit $V(x) = x^T P x$ fonction de Lyapunov

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\ &= x^T A P x + x^T P A x \\ &= x^T (A^T P + P A) x \end{aligned}$$

Suivant Lyapunov, A est Hurwitz si et seulement si $\text{Re}(\lambda(A)) < 0$.

$\exists P > 0$ tel que $A^T P + P A$ définie négative.

On pose $P = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{A t} dt$ avec Q définie positive. On a donc P définie positive.

$$\int_0^\infty (A^T e^{A^T t} Q e^{A t} + e^{A^T t} Q e^{A t} A) dt = \int_0^\infty \frac{d e^{A^T t} Q e^{A t}}{dt} dt = \left[e^{A^T t} Q e^{A t} \right]_0^\infty$$

Si A est Hurwitz : $e^{A t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$

$$A^T P + P A = -Q \text{ définie négative (équation de Lyapunov)}$$

Pour le système linéaire

$$\dot{V}(x) = x^T (A^T P + P A) x \leq -x^T Q x$$

\Rightarrow Stabilité de Lyapunov \Leftrightarrow Stabilité asymptotique

Théorème (Stabilité exponentielle)

Soient le système $G : \dot{x} = f(x)$ et $f(0) = 0$, $\exists V : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonction de Lyapunov continue et différentiable telle que

1. $\exists \alpha > 0, \beta > 0$ et $c \geq 1$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \|x\|^c \leq V(x) \leq \beta \|x\|^c$$

2. $\exists \gamma > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \dot{V} \leq -\gamma V \leq -\gamma \|x\|^c$$

Alors l'origine est exponentiellement stable. Si \mathbb{R}^n , on a aussi la stabilité globale.

Démonstration : $\dot{V} \leq -\gamma V \Rightarrow V(x(t)) \leq V(x(0))e^{-\gamma t}$

si $\dot{\hat{V}} = -\gamma \hat{V}$

$$\begin{aligned} V(x(0)) &\leq \beta \|x(0)\|^c \\ \text{et } V(x(t)) &\geq \alpha \|x(t)\|^c \\ V(x(0))e^{-\gamma t} &\geq \\ \beta \|x(0)\|^c e^{-\gamma t} &\geq \Rightarrow \|x(t)\| \leq \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/c} \|x(0)\| e^{-\frac{\gamma}{c}t} \end{aligned}$$

■

Corollaire

Le syst linéaire est aussi exponentiellement stable :

$$V = x^T P x \implies \alpha \|x\| \leq V(x) \leq \beta \|x\|^c$$

Avec α plus petite valeur propre de P et β plus grande valeur propre de P .

si on a la stabilité asymptotique

$$\dot{V} = x^T (A^T P + P A) x \leq -\gamma V \leq -\gamma \|x\|^2$$

Exemple:
$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1^3 + x_2^3 + x_1 x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2^2 x_1 - 5x_2^3 \end{cases}$$

$(x_1, x_2) = (0, 0), f(0) = 0$ est-il asymptotiquement stable ?

On pose $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$. $V(0) = 0$ et $V(x) > 0, \forall x \neq 0$.

$$\dot{V}(x) = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = -x_1^4 + x_1^2 x_2^2 - 5x_2^4 \leq -\frac{1}{2}x_1^4 - \frac{9}{2}x_2^4 \leq -Q(x) \text{ tel que } Q(x) \geq 0$$

L'origine est globalement asymptotiquement stable.

Est-il exponentiellement stable ?

$$\alpha \|x(t)\|^c \leq V(x(t)) \leq \beta \|x(t)\|^c$$

$$\beta = 1, \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2}x_1^4 - \frac{9}{2}x_2^4 \leq -\frac{9}{2}(x_1^4 + x_2^4)$$

Pour $= \{\|x\| \leq 1\}$, $x_1^2 + x_2^2 \geq x_1^4 + x_2^4$ donc $-(x_1^2 + x_2^2) \leq -(x_1^4 + x_2^4)$: on ne peut pas borner \dot{V} par V .

Avec ce $V(x)$ on ne peut décider de la convergence exponentielle.

Si on arrive pas à vérifier la stabilité alors le point d'équilibre (ou l'origine) peut-être instable. Dans ce cas, comment vérifier l'instabilité du point d'équilibre (origine) ?

Théorème (Théorème de Lyapunov d'instabilité)

Soit le système $\dot{x} = f(x)$, $f(0) = 0$ et $t \geq 0$. Si $\exists V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue, différentiable et définie positive ($0 \in$), tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \dot{V}(x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T f(x) > 0$$

alors l'origine est instable.

Le système accumule de l'énergie et devient instable

Démonstration : Instable $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall \delta > 0$, alors $\|x_0\| \leq \delta$ et $\|x\| \geq \varepsilon$

$\forall \delta > 0$ soit $r \in]0; \delta[$ tel que :

$B_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$ est compact.

On pose $\alpha = \max_{B_r(0)} V(x)$ et $x_0 \in B_r(0)$

$V(x_0) = \alpha$, ainsi $V(x) - V(x_0) > 0$:

$$\Rightarrow V(x) > \alpha$$

$$\Rightarrow x \notin B_r(0)$$

$$\Rightarrow x \in B_r^c(0)$$

$$\Rightarrow \|x\| > r$$

Donc $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\|x\| \geq \varepsilon > r$ ■

3.1 Théorème simplifiant l'analyse de la stabilité

Théorème (Théorème de Barbashin-Krasovskiy (Stabilité asymptotique))

Soit $\{0\}$ un point d'équilibre du système $\dot{x} = f(x)$, où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, localement lipschitzienne. On suppose qu'il existe V continue, différentiable et définie positive telle que

$$\dot{V} \leq 0$$

Soit $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \dot{V}(x) = 0\}$.

Si $x = 0$ est le seul élément de S , alors l'origine est asymptotiquement stable.

Exemple : Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1^3 + 2x_2^3 \\ \dot{x}_2 &= -2x_1x_2^2 \end{cases}$$

L'origine est un point d'équilibre.

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 > 0$$

$$V(\dot{x}) = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = -x_1^4 \leq 0$$

On ne peut pas conclure sur la stabilité asymptotique car $Q(x) = \frac{1}{2}x_1^4$ ne dépend pas de x_2 .

On utilise le théorème de Barbashin :

$$S = \{x \in \text{ tel que } V(\dot{x}) = 0\} \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\Rightarrow \dot{x}_2 = 0$$

$$\Rightarrow x_2 = 0$$

$$\Rightarrow S = \{0\}$$

$$\Rightarrow \text{Stabilité asymptotique}$$

Théorème (*Principe d'invariance de LaSalle*)

Soient $\dot{x} = f(x)$ avec $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, Ω un compact positivement invariant tel que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue, différentiable tel que $\dot{V} \leq 0$ dans Ω , $E = \{x \in \Omega \text{ tel que } \dot{V} = 0\}$ et M le plus grand ensemble positivement invariant inclus dans E .

Alors toute solution x tel que $x_0 \in \Omega$ converge vers M quand $t \rightarrow \infty$.
Autrement dit \overline{M} est l'attracteur.

Exemple: *Barbashin* Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -h(x_1) - g(x_2) \end{cases}$$

où $h, g : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ avec $h(0) = g(0) = 0$
et $\forall x \neq 0, \quad x.h(x) > 0$ et $x.g(x) > 0$.

L'origine est un point d'équilibre.

Fonction de Lyapunov candidate :

$$V(x) = \int_0^{x_1} h(s)ds + \frac{1}{2}x_2^2$$

$$x_1 = 0 \text{ et } x_2 = 0 \Rightarrow V(x) = 0$$

$$x_1 \neq 0 \text{ ou } x_2 \neq 0 \Rightarrow V(x) > 0$$

donc V est définie positive.

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= h(x_1)x_1 + x_2\dot{x}_2 \\ &= h(x_1)x_1 - x_2h(x_1) - g(x_1)x_2 \\ &= -g(x_2)x_2 \leq -Q(x) \text{ définie positive, dépend de } x_1 \text{ et } x_2\end{aligned}$$

Barbashin :

$$E = \{x \in \mathbb{R}^2, \dot{V}(x) = 0\}$$

$$\dot{V}(x) = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow \dot{x}_1 = 0$$

$$\dot{x}_2 = 0 + x_2 = 0 \Rightarrow h(x_1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

Alors $E = \{0\}$ stabilité asymptotique globale.

Exemple: Invariance de La Salle Soit le système $\dot{x} = ax + u$, a inconnu mais borné.

$$u = -kx \text{ et } \dot{k} = \gamma x^2, \gamma > 0$$

On pose $x_1 = x$ et $x_2 = k$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= ax_1 - x_2x_1 \\ \dot{x}_2 &= \gamma x_1^2 \end{cases}$$

La fonction de Lyapunov candidate

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2\gamma}(x_2 - b)^2, \quad \text{avec } b > a \text{ car } a \text{ est borné}$$

$V(0, b) = 0$ et non pas l'origine

$$V(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^d$$

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= x_1\dot{x}_1 + \frac{1}{\gamma}(x_2 - b)\dot{x}_2 \\ &= ax_1^2 - x_1^2x_2 + (x_2 - b)x_1^2 \\ &= x_1^2(a - b) \leq 0\end{aligned}$$

$$E = \{x \in \mathbb{R}^2, \dot{V} = 0\} = \{x_1 = 0\} : \text{attracteur}$$

Pour le système de départ, on veut montrer que $x \rightarrow 0$ i.e. $x_1 \rightarrow 0$ donc (attracteur)
 $x_1 \rightarrow 0$

4 Extension du théorème de Lyapunov aux systèmes non autonomes, i.e. $\dot{x} = f(t, x)$

Définition

On considère un système non autonome

$$G : \dot{x}(t) = f(t, x)$$

, $x(t_0 = x_0, \forall t \geq t_0$ avec $f(t, 0) = 0, \forall t \geq 0 \Rightarrow x = 0$ est un point d'équilibre.

L'origine est stable au sens de Lyapunov si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ et } t_0 \geq 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \|S(t_0, x_0)\| \leq \delta \Rightarrow \|S(t, S(t_0, x_0))\| \leq \varepsilon, \forall t \geq t_0$$

Théorème (Théorème de Lyapunov)

L'origine du système G est stable au sens de Lyapunov s'il existe une $V : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue et différentiable telle que :

- $V(t, 0) = 0, \forall t \geq 0$
- $V(t, x) > 0, \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- $\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x}\right)^T f(t, x) \leq 0, \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$

S'il existe $Q(t, x)$ tel que

- $Q(t, 0) = 0, \forall t \geq 0$
- $Q(t, x) > 0, \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- $\dot{V}(t, x) \leq -Q(t, x), \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$

Alors l'origine est asymptotiquement stable.

Si $\exists \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$ et $c \geq 1$ tel que

- $\alpha \|x\|^c \leq V(t, x) \leq \beta \|x\|^c$
- $\dot{V}(t, x) \leq -\gamma \|x\|^c$

Alors l'origine est exponentiellement stable.

Remarque: Si \mathbb{R}^n : l'origine est globalement stable

Les démonstrations sont calquées sur celles du cas autonome, avec $x_1 = t \in \mathbb{R}_+, x_2 = x \in \mathbb{R}^n$, $\dot{x}_1 = 1$ et $\dot{x}_2 = f(x_1, x_2)$

Exemple: *Système linéaire non stationnaire* $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ et $x(0) = x_0, t \geq 0$

Soit $V(t, x) = x^T P(t)x$ où $P(t) > 0, \forall t \in \mathbb{R}_+$

$V(t, 0) = 0, \forall t \in \mathbb{R}_+$ et $V(t, x) > 0, \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x) &= x^T(t) \dot{P}(t)x(t) + x^T(t) A^T(t) P(t)x(t) + x^T(t) P(t) A(t)x(t) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \dot{P}(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) \leq 0 \end{aligned}$$

Inégalité de Lyapunov dynamique

Stabilité asymptotique :

$$P(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) = -Q(t)$$

Équation de Lyapunov dynamique

$$\lambda_{\min}(P(t)) \|x\|^{1=c} \leq V(t, x) \leq \lambda_{\max}(P(t)) \|x\|^{1=c}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \exists \gamma > 0$$

$$\dot{V}(t, x) \leq -\lambda_{\min}(Q(t)) \|x\|$$

stabilité exponentielle

Remarque: Dans le cas non autonome, la fonction de Lyapunov candidate peut ne pas dépendre du temps, mais elle doit dépendre de toutes les variables d'état.

Exemple: Soit le système non-linéaire

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_1^3(t) + \sin \omega t x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\sin \omega t x_1(t) - x_2^3(t)\end{aligned}$$

avec $x_1(0) = x_{10}, x_2(0) = x_{20}$ et $t \geq 0$

L'origine est bien un point d'équilibre. Est-il asymptotiquement stable ?

$$\begin{aligned}V(x) &= \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 \\ \dot{V}(x) &= x_1(-x_1^3 + \sin \omega t x_2) + x_2(-\sin \omega t x_1 - x_2^3) \\ &= -x_1^4 - x_2^4 \leq 0 : \text{stable} \\ &\leq -\frac{1}{2}(x_1^4 + x_2^4) = -Q(x) : \text{globalement asymptotiquement stable}\end{aligned}$$

5 Stabilité entrées-états (SEE) / Input-States Stability (ISS)

Soit le système $G : \dot{x} = f(x, u)$ où $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ (m désigne le nombre d'entrées)

Soit l'origine un point d'équilibre :

1. S'il est globalement stable, alors on peut analyser la SEE
2. S'il est localement stable, alors la SEE est locale ($\subset \mathbb{R}^n$)

Dans le cas 1, on analyse la stabilité du système en SEE. Dans le cas 2, on analyse localement
() la stabilité du système en SEE.

Définition

Le système est dit SEE si $\forall u(t)$ et $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ bornées, il existe une solution $x(t, x_0), \forall t \geq 0$ et $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ et $\exists \gamma \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\|x(t, x_0)\| \leq \alpha(\|x_0\|, t) + \gamma(\|u\|_\infty)$$

où $\|u\|_\infty = \sup_{t \geq 0} \|u(t)\| = \sup_{t \geq 0} (u^T u)^{1/2}$

Proposition

Par définition :

- Pour $u = 0$, l'origine est asymptotiquement stable.
- Pour u bornée, la trajectoire est bornée.

Remarque:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0)\| \leq \gamma(\|u\|_\infty)$$

γ gain asymptotique du système

Cette définition dépend de la trajectoire, alors il faut trouver une condition suffisamment indépendante de la trajectoire.

Exemple: Soit le système $\dot{x} = Ax + Bu$

A Hurwitz implique que l'origine est stable.

Le système est-il SEE ?

$$x(t, x_0) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$\|x(t, x_0)\| \leq e^{\lambda_{\min}(A)t}\|x_0\| + \frac{1}{k}\|B\|\|u\|_{\infty} = \frac{1}{k}\gamma(\|u\|_{\infty}) \text{ où } k = -\lambda_{\max}(A)$$

$\|B\| = \sup_{\|v\|=1} \|Bv\|$, on a bien un SEE

Théorème (Condition suffisante de SEE)

Le système $\dot{x} = f(x, u)$ est SEE si f est lipschitzienne et l'origine (pour $\dot{x} = f(x, 0)$) est globalement exponentiellement stable.

Exemple: Pour le système $\dot{x} = -x + (1 + x^2)u$:

- $f(x, 0)$ origine exp stable. (car sys linéaire)
- f n'est pas lipschitzienne pour les deux variables. En effet pour $u = 1$ on a $\dot{x} = -x + 1 + x^2 > 0; \forall x_0$

6 Attracteur

Définition

Un ensemble $M \subset D$ est positivement invariant du système

$$G : \dot{x}(t) = f(x(t)), x(0) = x_0, t \in \mathbb{R} \quad (*)$$

si $\chi_t(M) \subseteq M$ pour $t \geq 0$ où $\chi_t(M) = \{\chi_t(x), x \in M\}$.

Il est négativement invariant suivant la dynamique (??) si $\chi_t(M) \subseteq M$ pour $t < 0$. Ainsi M est un ensemble invariant suivant (??) si $\chi_t(M) \subseteq M, \forall t \in \mathbb{R}$

Proposition

Si $M \subset D$ est un ensemble invariant suivant (??), alors \overline{M} l'adhérence de M est invariant.

Démonstration : Soit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ tel que $x_n \rightarrow x$ avec $x \in \overline{M}$.

Puisque M est invariant, alors $(\chi_t(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset M$. De plus, $\chi_t(x_n) \rightarrow \chi_t(x) \in \overline{M}$ car c'est un fermé.

Ainsi, \overline{M} est invariant suivant (??). ■

Définition

Un ensemble invariant fermé $M \subset D$ est un *attracteur* du système (??), s'il existe un voisinage N de M tel que $\forall x \in N, \exists t \in \mathbb{R}$ tel que $\chi_t(x) \in M$

Remarque: Un cycle limite stable ou semi-stable est un attracteur.

Exemple: Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_2(t) + x_1(t)(1 - x_1^2(t) - x_2^2(t)) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + x_2(t)(1 - x_1^2(t) - x_2^2(t)) \end{cases}$$

En utilisant les coordonnées polaires, on trouve l'attracteur de M .

On a en effet $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ et $\theta = \arctan \frac{x_2}{x_1}$
 donc $\dot{r} = \frac{\partial r}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial r}{\partial x_2} \dot{x}_2 = r(1 - r^2)$ et $\dot{\theta} = \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \dot{x}_2 = 1$

Ainsi,

$$r > 1 \quad \dot{r} < 0 \Rightarrow r \rightarrow 1$$

$$r < 1 \quad \dot{r} > 0 \Rightarrow r \rightarrow 1$$

$r = 1$ un fermé \Rightarrow Attracteur où $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / \{(0, 0)\}$ car $x_1 = x_2 = 0$ est un point d'équilibre, les trajectoires convergent vers le cercle unité. Suivant le théorème de Poincaré-Bendixon le cercle unité est un cycle limite, car c'est un compact et ne contient pas de point d'équilibre.

Deuxième partie

Commande des systèmes non linéaires

Chapitre 6

Commandabilité et observabilité en non linéaire

1 Introduction (notations maths)

Définition

On appelle *champ de vecteur* toute application de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Définition

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, on définit le *crochet de Lie* :

$$[f, g] : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto J_g(x)f(x) - J_f(x)g(x) \end{cases}$$

où J_f et J_g sont respectivement les matrices jacobienes de f et g .

Proposition (*Crochet de Lie*)

Soient f, g et h des champs de vecteurs et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}, (\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.
Alors

$$[\lambda_1 f + \lambda_2 g, h] = \lambda_1 [f, h] + \lambda_2 [g, h] \quad \text{Bilinéaire}$$

$$[f, g] = -[g, f] \quad \text{Anti-symétrique}$$

$$[f, [g, h]] + [h, [f, g]] + [g, [h, f]] = 0 \quad \text{Identité de Jacobi}$$

$$[f, f] = 0$$

Définition

G est une *algèbre de Lie* sur \mathbb{K} si G est un espace vectoriel ayant pour loi interne le crochet de Lie.

Remarque: Cette définition se restreint au cas qui nous intéresse ici, ce n'est pas la définition générale.

Remarque: (E) est l'algèbre de Lie ayant pour famille génératrice l'ensemble des champs de vecteurs E .

Notation : Crochet de Lie itéré

$$ad_f^0(x) = g(x)$$

$$ad_f^1 g(x) = [f, g](x)$$

$$ad_f^k g(x) = [f, ad_f^{k-1} g](x)$$

Définition

la *dérivée de Lie* d'une fonction $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dans la direction de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, notée $L_f \alpha$, est définie par :

$$L_f \alpha(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x_i} f_i(x)$$

Ainsi,

$$L_f^k \alpha(x) = J_{L_f^{k-1} \alpha}(x) f(x) = \left[\frac{\partial L_f^{k-1} \alpha(x)}{\partial x_1} \dots \frac{\partial L_f^{k-1} \alpha(x)}{\partial x_n} \right] \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}$$

Remarque:

- $L_f^0(\alpha(x)) = \alpha(x)$
- Soient 2 champs de vecteurs f et g , alors

$$L_g L_f \alpha(x) = J_{L_f \alpha}(x) g(x)$$

$$L_{[f,g]} \alpha(x) = L_f L_g \alpha(x) - L_g L_f \alpha(x)$$

Définition

La *dimension* d'un ensemble de champs de vecteurs $E = \{f_1(x) \dots f_n(x)\}$, où $f_i(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, est la dimension de l'espace vectoriel $\Delta(x)$ engendré par l'ensemble E .

Remarque: On fait la confusion entre rang et dimension.

Exemple:

$$f_1(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2 \end{bmatrix}, f_2(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_3 \\ 2 & x_3 \end{bmatrix} \text{ et } f_3(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si $x_2 = 0$, alors $\Delta(x) = \text{vect}\left\{\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$ et $\dim = 1$.

Si $x_2 \neq 0$, alors $\Delta(x) = \text{vect}\left\{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ et $\dim = 2$.

2 Commandabilité (atteignabilité, contrôlabilité)

Soit le système non-linéaire (1) (affine en la commande)

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i, \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ et } u \in \mathbb{R}^m$$

Définition

Un système est *commandable* ssi $\forall x \in \mathbb{R}^n, \exists u$ tel que x est atteignable dans un temps fini.

Théorème (Théorème de Commandabilité)

Le système (1) est commandable ssi la sous-algèbre de Lie = $\{g_1 \dots g_m, (E)\}$ avec $E = \{g_1 \dots g_m, f\}$ est de dimension n .

Exemple: cas linéaire

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$E = \{Ax, B\}, [B, Ax] = AB$$

$$[AB, Ax] = A^2B, \dots, A^{n-1}B, \dots$$

$$(E) = \text{vect}\{AB, A^2B, \dots\}$$

suivant Cayley Hamilton :

$$= \{B, \text{vect}\{AB, AB^2, \dots, A^{n-1}B\}\}$$

$\dim = \text{rang}(BAB \dots A^{n-1}B)$ théorème de Kalman

3 Observabilité (distingabilité)

Soit le système NL (2) (affine en la commande) :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

Définition

Un système est *observable* si $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ 2 conditions initiales telles que $x_1 \neq x_2$, \exists une commande u admissible telle que les sorties soient distinctes, $\forall t \geq t_0$ (t_0 instant initial).

Définition

\mathcal{V} est l'espace d'observabilité constitué de toutes les combinaisons linéaires obtenues à partir des dérivées de Lie L_f et L_g des fonctions $h_j(x)$, $j = 1 \dots p$ telles que $y \in \mathbb{R}^p$

$$\mathcal{V} = \{h_j, L_f h_j, L_g h_j, L_f^2 h_j, \dots, L_g L_f h_j, L_f L_g h_j, \dots\}$$

On note $\nabla \mathcal{V}$ l'ensemble des différentielles (gradient) des éléments de \mathcal{V} :

$$\nabla \mathcal{V} = \{\nabla h_j, \nabla L_f h_j, \dots\}$$

Théorème (Théorème d'observabilité)

Le système (2) est localement observable en x_0 si $\dim \nabla \mathcal{V}(x_0) = n$ et il est observable si $\forall x \in \mathbb{R}^n, \dim \nabla \mathcal{V}(x) = n$

Exemple: *Cas linéaire*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu = f(x) + g(x)u \\ y &= Cx = h(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{O} &= \{h(x), L_f h(x), L_g h, L_f^2 h, L_g^2 h, L_f L_g h, L_g L_f h, \dots\} \\ \mathcal{O} &= \{Cx, C.Ax (= L_f h(x)), \\ &\quad C.B (= L_g h), CA^2 x (= L_f^2 h), \\ &\quad 0 (= L_g^2 h), 0 (= L_f L_g h), \\ &\quad CAB (= L_g L_f h), \dots\} \\ \nabla \mathcal{O} &= \{C, CA, 0, CA^2, 0, 0, 0, \dots\}\end{aligned}$$

$$\dim \nabla \mathcal{O} = \text{rg} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{Critère de Kalman}$$

Remarque: l'action de la commande intervient dans l'observabilité. Cette contrainte est écartée dans le cas linéaire.

Chapitre 7

Commande par bouclage linéarisant

Dans la suite du chapitre on étudiera le modèle suivant : Affine en la commande

$$(\Sigma) \begin{cases} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{cases}$$

1 Commande par bouclage linéarisant

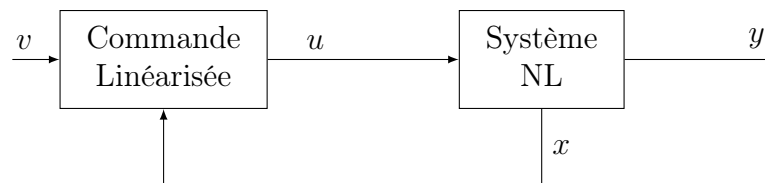


FIGURE 7.1 – Principe du bouclage linéarisant

1.1 Linéarisation entrées-sorties

On se place dans le cas SISO : $u \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

Définition

Le *degré relatif* r du système (Σ) est défini par $r \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{cases} L_g L_f^{r-1} h(x) & \neq 0 \\ L_g L_f^k h(x) & = 0 \quad \forall k < r-1 \end{cases}$$

1.1.1 Procédure de linéarisation

On cherche r par le calcul des dérivées successives de $y = h(x)$:

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \frac{\partial h(x)}{\partial x} \dot{x} \\ &= \frac{\partial h(x)}{\partial x} (f(x) + g(x)u) \\ &= L_f h(x) + L_g h(x)u\end{aligned}$$

Si $L_g h(x) \neq 0$, alors $r = 1$. Sinon on continue la procédure :

$$\begin{aligned}y^{(2)} &= \frac{\partial L_f h(x)}{\partial x} \dot{x} \\ &= \frac{\partial L_f h(x)}{\partial x} f(x) + \frac{\partial L_f h(x)}{\partial x} g(x)u \\ &= L_f^2 h(x) + L_g L_f h(x)u\end{aligned}$$

Si $L_g L_f h(x) \neq 0$, alors $r = 2$. Sinon on continue...

$$y^{(r)} = L_f^r h(x) + L_g L_f^{r-1} h(x)u$$

Remarque: On a $1 \leq r \leq n$ car la procédure utilise la base canonique ($x_1 = y, x_2 = \dot{y}$) : la commande doit apparaître au maximum à la n -ième dérivée.

On pose $v = y^{(r)} = L_f^r h(x) + L_g L_f^{r-1} h(x)u \neq 0$ Alors :

$$u = (L_g L_f^{r-1} h(x))^{-1} (v - L_f^r h(x))$$

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v, \text{ avec } \begin{cases} \alpha(x) &= -(L_g L_f^{r-1} h(x))^{-1} L_f^r h(x) \\ \beta(x) &= (L_g L_f^{r-1} h(x))^{-1} \end{cases}$$

La nouvelle entrée de commande est v telle que

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x) + g(x)\alpha(x) + g(x)\beta(x)v \\ y &= h(x) \end{cases}$$

$u = \alpha(x) + \beta(x)v$ est le bouclage linéarisant statique car à un instant fixé, la linéarisation ne dépend que de x à cet instant.

1.1.2 Cas $r = n$

Choix de la base :

$$\begin{aligned}z_1 &= y = h(x) \\ z_2 &= \dot{y} = L_f h(x) \Rightarrow \dot{z}_1 = z_2 \\ z_3 &= \ddot{y} = L_f^2 h(x) \Rightarrow \dot{z}_2 = z_3 \\ &\vdots \\ y^{(n)} &= \dot{z}_n = L_f^n h(x) + L_g L_f^{n-1} h(x)u = v\end{aligned}$$

Nouveau modèle :

$$\begin{aligned}y &= z_1 \\ \dot{z}_1 &= z_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n \\ \dot{z}_n &= a(z) + b(z)u = v\end{aligned}$$

On a donc la commande suivante :

$$u = \frac{v - a(z)}{b(z)} \text{ avec } b(z) \neq 0$$

Qui nécessite le changement de base des variables d'états :

$$z = \phi(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{bmatrix}$$

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \text{ avec } \alpha(x) = -\frac{a(z)}{b(z)}|_{z=\phi(x)} \text{ et } \beta(x) = \frac{1}{b(z)}|_{z=\phi(x)}$$

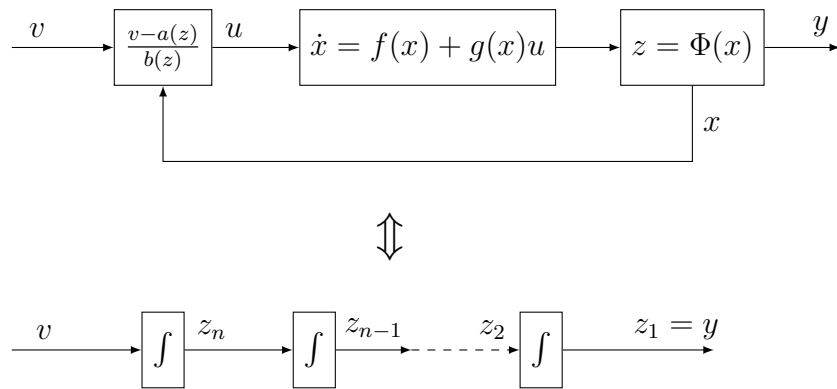


FIGURE 7.2 – Forme normale

1.1.3 Cas $r < n$

Dans le cas où $r < n$ il faut “compléter” le système pour le rendre commandable.

$$\begin{aligned} z_1 &= y \\ z_2 &= \dot{z}_1 \\ &\vdots \\ \dot{z}_r &= L_g^r h + L_g L_f^{r-1} h u = v \end{aligned}$$

Alors on complète les variables d'état avec le vecteur $\eta \in \mathbb{R}^{n-r}$ tel que :

$$\dot{\eta} = q(\eta, z, v, \dot{v}, \dots)$$

Remarque: La dynamique de η n'est pas linéaire (contrairement à z), pour appliquer la commande désirée il faut s'assurer que la dynamique de η est stable car elle sera non observable par y .

On peut faire une analogie avec la compensation de pôles, qui n'est possible que si le pôle compensé est stable. En cachant la dynamique associée à ses pôles ils ne sont plus observables

Remarque: À clarifier Ainsi on définit la dynamique des zéros. Le système commandé est en régime stationnaire :

$$\dot{v} = 0y = 0..$$

La dynamique des zéros est celle $\dot{\eta} = q(\eta, 0, v)$. Puisque la commande est linéaire on aussi prendre $v = 0$

1.2 Dynamique des zéros

Définition

C'est la dynamique interne pour une sortie identiquement nulle. Ainsi, $y = 0 = z_1 \Rightarrow \dot{z}_1 = \dot{z}_2 = \dot{z}_r = v = 0$ et $u = -\frac{a(z)}{b(z)}$
La dynamique restante

$$\begin{cases} \dot{z}_{r+1} = q_{r+1}(z) \\ \vdots \\ \dot{z}_n = q_n(z) \end{cases} \quad \text{où } z = (0, z_{r+1}, \dots, z_n)^T = (0, \text{ et } a)^T$$

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = q_{r+1}(0, \eta) \\ \vdots \\ \dot{\eta}_{n-r} = q_n(0, \eta) \end{cases} \quad \text{avec } u = \frac{-a(0, \eta)}{b(0, \eta)}$$

Remarque: Si $r < n$, le système comporte une dynamique des zéros. Dans le cas où la dynamique des zéros est instable, on peut chercher à trouver une transformation pour linéariser le modèle entrée-états, ce que l'on va étudier tout de suite.

1.3 Linéarisation entrée-états

Dans le cas où l'on ne dispose pas d'une sortie $y = h(x)$, on essaye de trouver une sortie "fictive" grâce à un changement de variable.

Problème : trouver le bon changement de base $z_1 = \phi_1(x)$ qui remplace $z_1 = y = h(x)$:

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{bmatrix} = \phi(x)$$

ϕ est un difféomorphisme, i.e. bijectif et différentiable, de même pour la réciproque.

Théorème

Le système $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ est *linéarisable entrée-états* si

- il existe une région $\Omega \in \mathbb{R}^n$, où il existe un difféomorphisme $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$
- il existe un retour d'état $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ tels que le nouveau vecteur d'état est $z = \phi(x)$
- la nouvelle entrée est v avec $\dot{z} = Az + Bv$, où A est la matrice d'évolution $\in \mathbb{R}^{m \times n}$.

En s'inspirant de la linéarisation entrée-sortie, on simplifie la recherche de $\phi(x)$ par celle de $\phi_1(x) = z_1$ et le reste des transformations est obtenu par la forme canonique (forme normale).

$$\begin{aligned}
 z_2 &= \phi_2(x) \\
 &= \dot{z}_1 = \dot{\phi}_1(x) \\
 &= \frac{\partial \phi_1(x)}{\partial x} f(x) + \frac{\partial \phi_1(x)}{\partial x} g(x)u \\
 &= L_f \phi_1(x) + L_g \phi_1(x)u \text{ avec } L_g \phi_1(x) = 0 \\
 z_3 &= L_f^2 \phi_1(x) \text{ avec } L_g L_f \phi_1(x) = 0 \\
 \phi(x) &= \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ L_f \phi_1(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} \phi_1(x) \end{bmatrix} \text{ avec } L_g L_f^j \phi_1(x) = 0, \text{ et } j = 0, \dots, n-2
 \end{aligned}$$

Or, $L_g L_f^j \phi_1(x) = 0, j = 0, \dots, n-2 \Leftrightarrow L_{ad_f^j g} \phi_1(x) = 0$ car

$$\begin{aligned}
 L_g(L_f \phi_1) - L_g(L_f \phi_1) &= L_f\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} g\right) - L_g\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} f\right) \\
 &= \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} g \cdot f + \frac{\partial \phi_1}{\partial x} J_g \cdot f - \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} g \cdot f - \frac{\partial \phi_1}{\partial x} J_f \cdot g \\
 0 &= L_{[f,g]} \phi_1 = L_{ad_f g} \phi_1 = 0
 \end{aligned}$$

Existe-t-il $\phi_1(x)$ tel que $\begin{cases} L_g L_f^j \phi_1(x) = 0, & j = 0, \dots, n-2 \\ L_g L_f^{n-1} \phi_1(x) \neq 0 \end{cases}$?

Définition

L'application $\Delta(x)$ est une *distribution de champs de vecteurs* sur Ω si $\forall x \in \Omega$, $\Delta(x)$ est un sous-espace vectoriel.

Exemple:

$$\Delta(x) = \text{vect} \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 x_3 \\ x_2 x_3 \\ 2x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow \Delta(x) = \text{vect} \left\{ \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

$\Rightarrow \Delta(x)$ est e.v. de $\dim = 1$

$$x_2 \neq 0 \Rightarrow \Delta(x) = \text{vect} \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$\Rightarrow \Delta(x)$ est un e.v. de $\dim = 2$

$\Delta(x)$ est une distribution de champs de vecteurs.

Définition

La distribution Δ est *involutive* ssi

$$\forall f, g \in \Delta, \quad [f, g] \in \Delta$$

Proposition

$\Delta(x) = [f_1 \ \dots \ f_p]$ est une distribution involutive ssi

$$\exists \alpha_{ijk} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \text{ tq } [f_i, f_j] = \sum_{k=1}^p \alpha_{ijk}(x) f_k, \quad i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, p$$

Exemple:

$$x_2 \neq 0 \Rightarrow \Delta(x) = \text{vect} \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{aligned} [f_1, f_2] &= J_{f_2} f_1 - J_{f_1} f_2 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = -f_2 \in \Delta \end{aligned}$$

Δ est une distribution involutive pour $x_2 \neq 0$

Théorème (*Theoreme d'existence*)

Soit le système Σ . Il existe un changement de base $z = \phi(x)$

linéarisant sur Ω tel que

$$\phi^T(x) = [\phi_1(x), L_f \phi_1(x) \dots L_f^{n-1} \phi_1(x)]$$

ssi :

- $\dim(g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-1} g) = n$ (Commandabilité Kalman)
- la distribution engendrée par $\{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-1} g\}$ est involutive, $\forall x \in \Omega$.

Ainsi, la procédure de linéarisation entrée-états est réalisée via les étapes suivantes :

1. Construction de $E = \{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-1} g\}$
2. Vérifier la commandabilité, i.e. $\dim(E) = n$ (Kalman!)
3. Montrer que $\Delta(x) = \text{vect}\{E\}$ est involutif, i.e. $\exists \alpha_{ijk}(x) : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ tel que :

$$[ad_f^i g, ad_f^j g] = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{ijk}(x) \cdot ad_f^k g, \quad i, j = 0, \dots, n-1$$

4. Trouver $\phi_1(x)$ avec $\begin{cases} L_{ad_f^j g} \phi_1(x) = 0, j = 0, \dots, n-2 \\ L_g L_f^{n-1} \phi_1(x) \neq 0 \end{cases}$
5. Construction du nouveau vecteur d'état $z^T = \phi^T(x) = [\phi_1(x), L_f \phi_1(x) \dots L_f^{n-1} \phi_1(x)]$
6. Linéarisation par retour d'état statique $u = \alpha(x) + \beta(x)v$, v nouvelle commande du modèle linéaire, avec

$$\alpha(x) = -\frac{L_f^n \phi_1(x)}{L_g L_f^{n-1} \phi_1(x)} \text{ et } \beta(x) = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} \phi_1(x)}$$

Si le degré relatif $r < n$ dimension du modèle (entrée-sortie), alors le modèle N.L est partiellement linéarisable, mais le comportement entrée-sortie est linéaire : suffisant pour la commande du système à condition que la dynamique N.L (non linéarisée par le bouclage) est stable, i.e. $\|x\|$ est bornée.

Ainsi en imposant $z_1 = y = \phi_1(x)$ le modèle est sous forme normale :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_r = v \\ \dot{z}_{r+1} = q_{r+1}(z) \\ \vdots \\ \dot{z}_n = q_n(z) \end{cases} \begin{array}{l} \text{Partie linéaire, de dimension } r, \text{ entrée-sortie} \\ \text{Partie N.L., de dimension } n-r \text{ n'influe sur la sortie} \end{array}$$

Remarque: En linéaire, le degré relatif correspond à la différence entre le degré du dénominateur et du numérateur $r = n - m$.

En effet, $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y^{(1)} + a_0y = b_mu^{(m)} + \dots + b_1u^{(1)} + b_0u$:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, y = (b_0, \dots, b_m, 0 \dots 0)u$$

$$\begin{aligned} z_1 &= y = Cx \\ z_2 &= \dot{z}_1 = C\dot{x} = C(Ax + Bu) \\ &= CAx + CBu \end{aligned}$$

Si $r = 0$, alors $CB = (b_0 \dots b_m, 0 \dots 0)(0 \dots 1)^T = b_m$ ($r = n - m$ zéros dans C)

Si $CB = 0 = L_g\phi_1$,

$$\begin{aligned} z_2 &= L_f\phi_1 = CAx \\ \dot{z}_2 &= CA(Ax + Bu) = CA^2x + CABu \Rightarrow r = 1(??) \end{aligned}$$

1.4 Système à déphasage minimal

Rappel :

Dans le *cas linéaire* le système est à déphasage minimal si les zéros sont à partie $Re < 0$.

Définition

Dans le *cas non linéaire* le système est à déphasage minimal si dynamique des zéros stables, i.e. à l'origine on a :

$$\begin{cases} \eta_1 &= q(0, \eta) \\ \vdots & \\ \eta_{n-r} &= q(0, \eta) \end{cases} \text{ est stable}$$

Ainsi, quand le système est à déphasage non minimal, on applique la linéarisation $e - s$.

1.5 Cas MIMO du bouclage linéarisant

Rappel : La linéarisation revient à trouver la commande qui réalise la réciproque de la non-linéarité : problème inverse. Dans le cas où le problème est non inversible d'une manière statique (i.e. algébrique), la solution est alors de réaliser une inversion dynamique, à la manière de l'observateur dans le cas linéaire.

Soit le système non-linéaire :

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i$$

$$y = \begin{bmatrix} k_1(x) \\ \vdots \\ k_p(x) \end{bmatrix} \text{ avec } x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^p \text{ et } u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Définition

Le degré relatif r dans le cas MIMO est défini comme $r = r_1 + \dots + r_p$ si r_i est le degré relatif associé à la sortie y_i tel que :

$$\forall j = 1 \dots m, L_{g_j} L_f^k h_i(x) = 0, \forall k < r_i - 1$$

$$\exists j = 1 \dots m, L_{g_j} L_f^{r_i-1} h_i(x) \neq 0$$

1.5.1 Procédure de linéarisation

Sans perte de généralité, on pose $m = p$ (le nb de paramètre de commande est identique au nombre de sortie). Calculons les dérivées successives des sorties :

$$\begin{bmatrix} y_1^{(r_1)} \\ \vdots \\ y_p^{(r_p)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f^{r_1} h_1(x) \\ \vdots \\ L_f^{r_p} h_p(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1 & \dots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_p-1} & \dots & L_{g_m} L_f^{r_p-1} h_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

On remarquera l'intérêt de poser $m = p$.

On note $D(x)$ la matrice $\mathbb{R}^{p \times m}$ (dite de découplage).

$$D(x) = \begin{pmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1 & \dots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_p-1} & \dots & L_{g_m} L_f^{r_p-1} h_p \end{pmatrix}$$

Proposition

Le système MIMO est linéarisable si $r = \sum_{i=1}^p r_i = n$ avec $D(x)$ inversible.

- Si $D(x)$ est inversible, alors la commande linéarisante est :

$$u(x) = D(x)^{-1} \left(\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_f^{r_1-1} h_1(x) \\ \vdots \\ L_f^{r_p-1} h_p(x) \end{bmatrix} \right)$$

On a un bouclage "statique".

- si $D(x)$ n'est pas inversible alors on introduit une dynamique pour la rendre inversible. Une méthode simple pour trouver cette dynamique est de continuer à dériver après apparition de la commande (u_j, \dot{u}_j) .

Dans le cas où $r < n$, alors le système MIMO est partiellement linéarisable. Ainsi, η est le vecteur d'état des $n - r$ équations non linéaires restantes.

$$\dot{\eta} = P(z, \eta) + Q(z, \eta)u, \text{ avec } P_k(z, \eta) = L_f \eta_k \text{ et } Q_{k,j}(z, \eta) = L_{g_j} \eta_k, k = 1 \dots n - r, j = 1 \dots m$$

Ainsi la dynamique interne, i.e. dynamique des zéros

$$\dot{\eta} = P(\underline{0}, \eta) + Q(\underline{0}, \eta)u(\underline{0}, \eta) \text{ avec } u(\underline{0}, \eta) = -D^{-1}(\underline{0}, \eta) \begin{bmatrix} L_f^{r_1} h_1(\underline{0}, \eta) \\ \vdots \\ L_f^{r_p} H_p(\underline{0}, \eta) \end{bmatrix}$$

doit être stable.

Si $D(x)$ n'est pas inversible alors le bouclage linéarisant est dynamique :

$$\begin{aligned} u &= \alpha(x, q) + \beta(x, q)v \\ \dot{q} &= \gamma(x, q) + \delta(x, q)v \end{aligned}$$

tel que $z = \phi(x, q)$ est un difféomorphisme.

La procédure générique est de dériver y_j au delà de r_j pour obtenir $D(x, q)$ inversible.

Les dynamiques auxiliaires q sont obtenues à partir des dérivées successives des commandes. Cette procédure est la linéarisation par bouclage dynamique.

2 Poursuite de trajectoire asymptotique

2.1 Cas SISO

Soit le système non-linéaire SISO (1) :

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x, y) \\ y &= h(x) \end{cases}$$

Il existe une trajectoire (non unique) remplaçant le vecteur d'état x par z les dérivées successives de la sortie y .

Ainsi, on peut réécrire (1) sous forme polynomiale :

$$P(y, \dots, y^{(n)}, u, \dots, u^{(k)}) = 0$$

avec $n < \infty$ et $k < \infty$:

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

Sous la condition $\frac{\partial P}{\partial y^{(n)}} \neq 0$ le modèle (1) est remplacé par la forme canonique

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= C(z_1 \dots z_n, u \dots u^{(k)})\end{aligned}$$

On suppose la consigne y_c n fois dérivable par rapport au temps.

Objectif : trouver u tel que $y \rightarrow y_c$ suivant une dynamique imposée.

2.2 Procédure

- On pose $\varepsilon(t) = y_c(t) - y(t)$: erreur de poursuite
- Imposer la dynamique de poursuite :

$$\varepsilon^{(m)} + \beta_{m-1}\varepsilon^{(m-1)} + \dots + \beta_1\varepsilon^{(1)} + \beta_0\varepsilon = 0$$

tels que $\beta_i, i = 0 \dots m$ sont choisis pour que le polynôme

$$\lambda^n + \beta_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \beta_1\lambda + \beta_0 = 0$$

soit un polynome d'Hurwitz¹. Pour $n = m$ on a

$$y^{(m)}(t) = y_c^{(m)}(t) + \sum_{i=1}^m \beta_{i-1}(y_c^{(i-1)}(t) - y^{(i-1)}(t))$$

On peut aussi réécrire le modèle sous forme d'état ($\varepsilon_1 = \varepsilon$) :

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_1 &= \varepsilon_2 \\ &\vdots \\ \dot{\varepsilon}_n &= \hat{C}(y_c^{(n)}, Y_c, E, u, \dots u^{(k)}) \text{ avec } Y_c = \begin{bmatrix} y_c \\ \vdots \\ y_c^{(m-1)} \end{bmatrix} \text{ et } E = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}\end{aligned}$$

La poursuite asymptotique revient à trouver u tel que

$$\hat{C}(y_c^{(n)}, Y_c, E, u, \dots u^{(k)}) = - \sum_{i=1}^n \beta_{i-1}\varepsilon^{(i-1)} \Leftrightarrow C(z_1, \dots z_n, u, u^{(i)}, \dots u^{(k)}) = y_c^{(n)} + \sum_{i=1}^n \beta_{i-1}(y_c^{(i-1)} - z_i)$$

Dans le cas où le modèle est sous forme normale (forme obtenue pour le bouclage linéa-

1. les racines sont à parties réelles strictement négatives

risant) :

$$\begin{aligned}
 y &= z_1 \\
 \dot{z}_1 &= z_2 \\
 &\vdots \\
 \dot{z}_{r-1} &= z_r \\
 \dot{z}_r &= b(z) + a(z)u \text{ avec } a(z) \neq 0 \\
 \dot{z}_{r+1} &= q_{r+1}(z) \\
 &\vdots \\
 \dot{z}_n &= q_n(z)
 \end{aligned}$$

Si $m = r$ alors

$$u = \frac{1}{a(z)}(-b(z) + y_c^{(r)} + \sum_{i=1}^r \beta_{i-1} \varepsilon^{(i-1)})$$

$y_c^{(r)}$ bouclage linéarisant statique

Si $m = r + 1$ alors

$$\dot{u} = \frac{1}{a(z)}(-\dot{b}(z) - \dot{a}(z)u + y_c^{(m)} + \sum_{i=1}^m \beta_{i-1} \varepsilon^{(i-1)})$$

$\dot{a}(z)u$ bouclage linéarisant dynamique Même démarche pour les degrés supérieurs de la poursuite asymptotique.

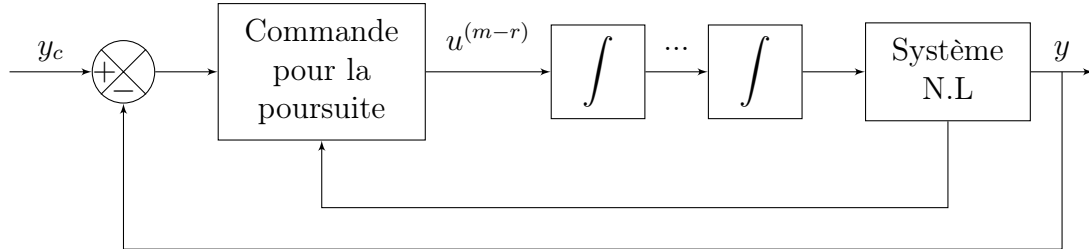


FIGURE 7.3 – Commande par bouclage linéarisant

La difficulté de la poursuite asymptotique est la résolution de l'équation dynamique NL

$$c(z_1 \dots z_n, u \dots u^{(k)}) y_c^{(n)} - \sum_{i=1}^m \beta_{i-1} (y_c^{(i-1)} - z_i) = 0$$

2.3 Système plats

Dans le cas des systèmes plats, la solution est obtenue via les sorties plates.

Définition

Un système est dit *plat* si toutes les variables d'états \vec{x} et les entrées peuvent s'écrire comme :

$$\begin{cases} \vec{x} = \psi(y_1, \dots, y_1^{(\alpha_1)}, \dots, y_m, \dots, y_m^{(\alpha_m)}) \\ \vec{u} = \phi(y_1, \dots, y_1^{(\beta_1)}, \dots, y_m, \dots, y_m^{(\beta_m)}) \end{cases}$$

Les y_i sont alors appelées *sortie plates*

Exemple: Montrer que le système suivant est plat avec pour sorties plates $y_1 = x_1$ et $y_2 = x_2$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_2 \\ \dot{x}_2 &= x_2 + x_3 u_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1 u_1 \end{aligned}$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 \\ x_2 &= y_2 \\ x_3 &= \frac{y_2 - \dot{y}_2}{\dot{y}_1} \\ u_2 &= \dot{y}_1 \\ u_1 &= \frac{\dot{x}_3}{y_1} = \frac{(\ddot{y}_2 - \dot{y}_2)\dot{y}_2 - \ddot{y}_1(\dot{y}_2 - y_2)}{y_3(\dot{y}_1)^2} \end{aligned}$$

Une des utilisation des sorties est la planification simple de trajectoire. En partant de $y_i(0) = y_0$ on souhaite arriver en un temps fini à $y_i(T_f) = y_f$. À partir de ce cahier des charges on trouve une trajectoire (généralement polynomiale) tel que $u = \phi(y_{1p} \dots y_{1p}^{(\beta_1)}, \dots, y_{mp}, \dots, y_m^{(\beta_m)})$.

Une autre application est la résolution de l'équation N.L de la poursuite asymptotique par intégration successive de u .

Théorème (Principe de la planification de trajectoire)

La planification peut comporter des contraintes sur la commande (énergie, saturation, ...) et sur les états (obstacles, limitation de vitesse, d'accélération...) Pour les systèmes plats, la planification est réalisée sur les sorties plates $y \in \mathbb{R}^p$ et la commande est déduite par $u = \psi(y_1, \dots, y_p^{(\delta_p)})$

Exemple: Bras de robot avec n degrés de libertés et n actionneurs

$$M(q)\dot{q} + B(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q})u$$

q : coordonnées généralisées $q \in \mathbb{R}^n$

$B(q, \dot{q})$: vecteur des forces centrifuges et de Coriolis

$K(q, \dot{q})$: matrice d'influence avec $\text{rang}(K) = n$

Le système est plat où $q \in \mathbb{R}^n$ sont les sorties plates.

La planification de trajectoire est réalisée sur les q , puis $u = K^{-1}(q, \dot{q})(M(q)\dot{q} + B(q, \dot{q}))$

On a la commande en cascade :

$$C_0(p) = K \gg 1, \quad H_0(p) = \frac{H_1(p)}{1 + K H_1(p)} \approx \frac{1}{K}$$

Chapitre 8

Commande hiérarchisée

1 Échelles de temps

Soit le système (S) (avec f_1 et f_2 lisses (de classe C^∞), avec $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ et $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$.)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \varepsilon f_1(x_1, x_2, u) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, u) \end{cases}$$

On suppose que $0 < \varepsilon \ll 1$. et on pose $\tau = \varepsilon t$, alors τ est plus lent que t . Ainsi, le système (S) dans la nouvelle échelle temporelle est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= f_1(x_1, x_2, u) \quad \text{Dynamique lente et d'ordre 0 en } 1/\varepsilon \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= \frac{1}{\varepsilon} f_2(x_1, x_2, u) \quad \text{Dynamique rapide et d'ordre 1 en } 1/\varepsilon \end{aligned}$$

Proposition

Ainsi, dans le cas d'un point d'équilibre stable, x_2 converge plus rapidement vers Σ_0 que x_1 vers Σ_ε avec :

$$\begin{cases} \Sigma_0 = \{(x_1, x_2, u) \mid f_2(x_1, x_2, u) = 0\} \\ \Sigma_\varepsilon = \{(x_1, x_2, u) \mid f_1(x_1, x_2, u) = 0 \text{ et } f_2(x_1, x_2, u) = 0\} \subset \Sigma_0 \end{cases}$$

Remarque: La variété¹ Σ_ε dégère en Σ_0 pour $\varepsilon \rightarrow 0$.

2 Détermination du voisinage

L'objectif est d'avoir seulement à faire converger $x_1 \rightarrow x_1^*$.

À partir du théorème des fonctions implicites, nous avons l'existence de X_2 tq $x_2 = X_2(x_1, u)$.

1. une courbe est une variété de dimension 1, une surface une variété de dimension 2

Définition

On définit la variété

$$\Sigma_{0,\varepsilon} = \{(x_1, x_2) / f_2(x_1, x_2, u, \varepsilon) = 0\}$$

avec $\dot{u} = \varepsilon v$ où v est une fonction bornée.

La variété $\Sigma_{0,\varepsilon}$ est obtenue à partir de Σ_0 avec une faible variation de la commande.

Proposition

Soit le système (S) avec $\text{rang}(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}) = n_2$, alors :

$$\exists X_2(x_1, u, \varepsilon) \text{ tel que } \forall u \text{ vérifiant } \dot{u} = \varepsilon v, v \text{ bornée,} \\ (x_1, x_2) \in \Sigma_{0,\varepsilon} \text{ avec } x_2 = X_2(x_1, u, \varepsilon).$$

Interprétation : La variété $\Sigma_0 \Leftrightarrow x_2 = X_2(x_1, u)$, obtenue pour $\varepsilon = 0$, continue d'exister pour $\varepsilon \neq 0$ et suffisamment petit si $\dot{u} = \varepsilon v$, v bornée, c'est à dire pour une dynamique de u lente.

Exemple: MCC

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} &= u - Ri - k\omega \text{ Dynamique électrique} \\ J \frac{d\omega}{dt} &= Ki - \alpha\omega - C_r \text{ Dynamique mécanique temps lent} \end{cases}$$

On pose $\varepsilon = L \ll 1$, on a donc le temps rapide $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$

Identification avec le système (1) : $x_1 = \omega$ et $x_2 = i$.

Pour $\varepsilon = 0$, Σ_0 est donnée

$$i = \frac{u - k\omega}{R} = X_2(x_1, u)$$

Ainsi, la dynamique lente est donnée par

$$J \frac{d\omega}{d\tau} = \varepsilon \left(k \left(\frac{u - k\omega}{R} \right) - \alpha\omega - C_r \right)$$

En temps lent, la nouvelle expression est

$$J \frac{d\omega}{dt} = - \left(\frac{k^2}{R} + \alpha \right) \omega - C_r + \frac{k}{R} u$$

On peut améliorer l'approximation de la variété $\Sigma_{0,\varepsilon}$ via un DL du 1er ordre.

$$i = \frac{u - k\omega}{R} + \frac{L}{R} \left(\dot{u} - \frac{k}{J} \left(k \left(\frac{u - k\omega}{R} \right) - \alpha\omega - C_r \right) \right) + \mathcal{O}(L^2)$$

Par exemple, si on veut avoir $i_0 = 0$, alors $\Sigma_0 = k\omega$. Pour garder $i_0 = 0$ pour $\Sigma_{0,\varepsilon}$, on doit imposer une variation lente de u (lente par rapport à $L \frac{d}{dt}$).

$$\dot{u} = -\frac{k}{J}(\alpha\omega + C_r) - \mathcal{O}(L^2)$$

Remarque: $C_r = -\frac{\dot{u}J}{k}$ est utilisée pour estimer C_r en modulant \dot{u} afin que i_0 reste aussi plat que possible et $\omega = 0$.

3 Synthèse de commande hiérarchisante

3.1 Hiérarchisation par commande à grand gain

Définition

Un système est de *forme triangulaire*, si il est de la forme:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= f_1(x_1) + x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) + x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n) + u \end{cases}$$

Soit le système (1) triangulaire, où la commande n'intervient que sur x_2 linéairement :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) + u \end{cases}, \quad x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}, u \in \mathbb{R}^{n_2}$$

Soit x_2^* la trajectoire consigne à imposer à x_2 . Avec comme hypothèse $f_2(x_1, x_2)$ bornée, nous appliquons la commande à grand gain

$$u = -\frac{K}{\varepsilon}(x_2 - x_2^*)$$

où $\varepsilon \ll 1$ et K matrice diagonale définie positive.

Ainsi, suivant la nouvelle échelle de temps $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\tau} &= \varepsilon f_1(x_1, x_2) && \text{dynamique lente} \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= \varepsilon f_2(x_1, x_2) - k(x_2 - x_2^*) && \text{perturbation et dynamique de convergence rapide} \end{cases}$$

Σ_0 est la variété $x_2 = x_2^*$.

Pour $\varepsilon \neq 0$, $\Sigma_{0,\varepsilon}$ est la variété $x_2 = x_2^* + k\varepsilon f_2(x_2, x_2^*)$

La dynamique lente est $\frac{dx_1}{d\tau} = \varepsilon f_1(x_1, x_2^*)$. Par conséquent la consigne x_2^* (commande fictive) peut servir à commander la dynamique lente.

Remarque: Avec cette méthode on a simplifié la synthèse :

$$\begin{cases} u : x_2 \xrightarrow{1/\varepsilon} x_2^* \\ x_2^* : x_1 \xrightarrow{1/\varepsilon} x_1^* \end{cases}$$

Où x_2^* est une commande “fictive” dans le cas où x_1 est à sortie asservie

Remarque: cette méthode a cependant des inconvénients :

- Amplification du bruit de mesure (x_2)
- Risque de saturation $\frac{K}{\varepsilon} \gg 1$.

3.2 Commande par backstepping

Soit un système sous forme triangulaire (apparition successive des différentes commandes) :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1) + x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) + x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n) + u \end{aligned}$$

On veut trouver u pour imposer une poursuite asymptotique de x_1 vers x_1^* , pour cela on utilise une commande réalisée via la condition de Lyapunov. La méthode du backstepping synthétise la commande u en plusieurs étapes avec une séparation dynamique pour simplifier le choix de $V(x)$.

Procédure de synthèse

Étape 1 Afin d'imposer la consigne x_1^* , on utilise la fonction de Lyapunov, où x_1^* est un point d'équilibre à atteindre

$$V_1(x_1) = \frac{1}{2}(x_1 - x_1^*)^2$$

Pour assurer la stabilité, il faut que $\dot{V}_1(x_1)$ soit définie négative.

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(x_1) &= (x_1 - x_1^*)(\dot{x}_1 - \dot{x}_1^*) \\ &= (x_1 - x_1^*)(f_1(x_1) + x_2 - \dot{x}_1^*) \end{aligned}$$

On cherche donc x_2^* pour que

$$\dot{V}_1(x_1) = \alpha_1(x_1 - x_1^*)^2 \quad \text{avec } \alpha_1 < 0$$

Soit :

$$x_2^* = \alpha_1(x_1 - x_1^*) - f_1(x_1) + \dot{x}_1^*$$

x_2^* est une “consigne fictive”. On doit faire tendre x_2 vers x_2^* asymptotiquement et plus rapidement que x_1 vers x_1^* .

Étape 2 Faire converger x_2 vers x_2^* . On utilise la nouvelle fonction de Lyapunov

$$V_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1 - x_1^*)^2 + \frac{1}{2}(x_2 - x_2^*)^2$$

On veut $\dot{V}_2(x_1, x_2)$ définie négative :

$$\begin{aligned}\dot{V}_2(x_1, x_2) &= (x_1 - x_1^*)(\dot{x}_1 - \dot{x}_1^*) + (x_2 - x_2^*)(\dot{x}_2 - \dot{x}_2^*) \\ &= \alpha_1(x_1 - x_1^*)^2 + \alpha_2(x_2 - x_2^*)^2\end{aligned}$$

Pour avoir une hiérarchisation dynamique, on pose $\alpha_2 < \alpha_1 < 0$ (la dynamique 2 est plus rapide que la 1)

$$\begin{aligned}(x_2 - x_2^*)(\dot{x}_2 - \dot{x}_2^*) &= \alpha_2(x_2 - x_2^*)^2 \\ (x_2 - x_2^*)(f_2(x_1, x_2) + x_3 - \dot{x}_2^*) &= \alpha_2(x_2 - x_2^*)^2 \\ x_3^* &= \alpha_2(x_2 - x_2^*) - f_2(x_1, x_2) + \dot{x}_2^*\end{aligned}$$

Étape n Meme démarche :

$$u = \dot{x}_n^* - f_n(x_1, \dots, x_n) + \alpha_n(x_n - x_n^*)$$

avec $\alpha_n < \alpha_{n-1} < \dots < \alpha_2 < \alpha_1$

si $\alpha_n \ll \alpha_{n-1} \ll \dots \ll \alpha_1$ alors : \dot{V} est obtenu par $f_n(x_1, \dots, x_n) + u - x_n^* = \alpha_n(x_n - x_n^*)$

Remarque: Cette méthode est généralisable à des systèmes sans forme :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n) + g_n(x_1, \dots, x_n)u\end{aligned}$$

sur $\mathcal{D} = \{x_1, \dots, x_n \text{ tq } g_1 \neq 0, \dots, g_n \neq 0\}$

Mais les méthodes sont alors peu robuste.

Chapitre 9

Rejet de perturbation et commande Robuste

On suppose que le modèle est soumis à des perturbations :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u + p(x)w \\ y = h(x) \end{cases}$$

Remarque: Si w modélise des incertitudes de modèle, alors on suppose que les erreurs de modélisation n'impliquent pas d'instabilité, w ne dépend pas de x .

On applique au modèle le principe du bouclage linéarisant :

$$y = h(x) = z_1 \implies z_2 \dot{z}_1 = \dot{y} = h(x)$$

Ainsi l'analyse sur le rejet de perturbation est réalisée sur la relation entre r le degré relatif associé à u et σ le degré relatif associé à w .

- $r < \sigma$:
Alors le bouclage linéarisant a rendu la perturbation non commandable
- $r \geq \sigma$:
 - Soit on peut mesurer w pour atténuer son effet
 - Soit on modélise la perturbation, généralement sous forme canonique (ie $w^{(\alpha)} = 0$, ou α est l'ordre). Pour avoir le cas $r < \sigma$ on réalise un observateur de perturbation et atténuer son effet.

1 Rejet de perturbation via la commande par mode glissant

1.1 Exemple et Définitions

Dans la commande par mode glissant on a $U = u_{eq} + u_y$ avec :

- u_{eq} commande sans perturbation pour une poursuite asymptotique
- u_y commande à structure variable pour faire converger x vers x^* .

Exemple: Onduleur de tension commandé en courant

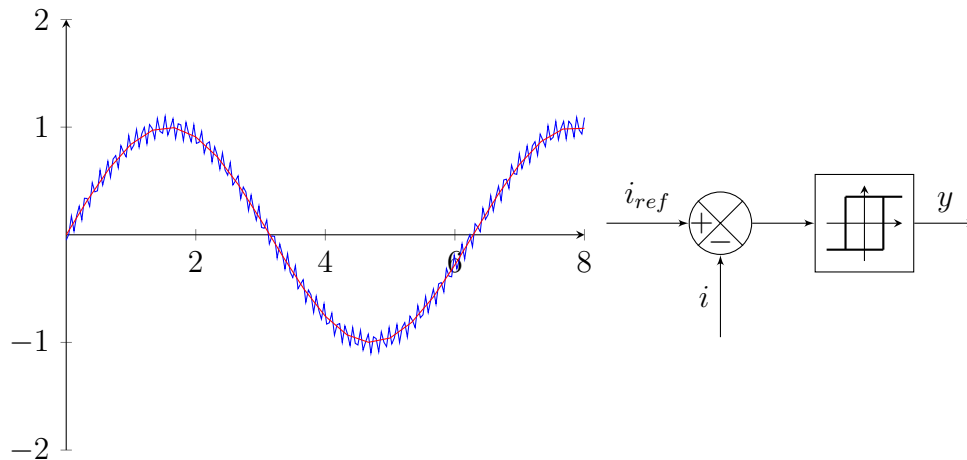


FIGURE 9.1 – Exemple de l'onduleur de tension

Si la fréquence est infinie on a un mode glissant

Définition

Un système est à structure variable si la commande commute entre 2 valeurs suivant une logique $\sigma(x)$.

Proposition

$\sigma(x)$ permet de glisser sur $S(x, t)$ surface de glissement si la fréquence de commutation est infinie. On a :

$$V(x) = \frac{1}{2}S(x, t)^2$$

Soit :

$$\dot{V}(x) = S(x, t)\dot{S}(x, t) < 0 : \sigma(x)$$

Dans un régime glissant on est dans un voisinage de $S(x, t) = 0$ et pour maintenir le glissement la logique de commutation $\sigma(x)$ vérifie :

$$\lim_{S \rightarrow 0^-} \dot{S} > 0 \text{ et } \lim_{S \rightarrow 0^+} \dot{S} < 0$$

1.2 Application à la commande par mode glissant

On utilise la méthode suivante

1. Choisir $S(x, t)$: Généralement $S(x, t)$ est obtenu par la poursuite asymptotique de y (sortie du système) vers y_c , en choisissant une dynamique de poursuite linéaire. Alors on pose $\varepsilon(t) = y_c(t) - y(t)$ erreur de poursuite. et on a :

$$S(x, t) = \varepsilon^{(m)}(t) + \beta_{m-1}\varepsilon^{(m-1)}(t) + \dots + \beta_1\varepsilon^{(1)}(t) + \beta_0\varepsilon(t)$$

Avec β_i tel que $p^m + \beta_{m-1}p^{m-1} + \dots + \beta_0$ est un polynôme d'Hurwitz¹. Généralement on prend :

$$\left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^m \varepsilon(t) = 0, \lambda > 0$$

2. Trouver u_g qui réalise la logique $\sigma(x)$ tel que $u_g = W \text{signe}(S)$, avec $W > 0$. Ainsi on a :

$$u = u_{eq} + u_g \text{ avec } \dot{S} = 0 \text{ pour } u_{eq}$$

1.3 Application au bouclage linéarisant

On pose $m = r - 1$ (où r est le degré relatif) Alors on a :

$$\begin{aligned} z_1 &= y = h(x) \\ \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_r &= v \end{aligned}$$

Avec

$$u \frac{1}{L_g L_f^{r-1}} \left(-L_f^r h(x) + \underbrace{y_c^{(r)} + \dot{S} + W \text{sgn}(S)}_v \right)$$

Soit

$$v = y^{(r)} + \dot{S} + W \text{sgn}(S)$$

À cette forme on rajoute une perturbation (due à l'erreur du modèle) :

$$\begin{aligned} z_1 &= y = h(x) \\ \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_r &= y^{(r)} = v + \Delta \end{aligned}$$

Avec $|\Delta| < K$. Pour assurer la poursuite de trajectoire on veut $y^{(r)} = y_c^{(r)}$ Ainsi : $\dot{S} = -W \text{sgn}(S) - \Delta$. On pose $W = K\alpha$.

1. Racine à partie Réelle négatives

- Si $S > 0 \implies \dot{S} < -K(\alpha - 1) < 0 \implies S\dot{S} < 0$ avec $\alpha > 1$.
- Si $S < 0 \implies \dot{S} = W - \Delta > K(\alpha - 1) > 0 \implies S\dot{S} > 0$

On a le mode de glissement avec $u_g = W \operatorname{sgn}(S)$. C'est pour cette raison qu'on prend

$$W_{sat} = \begin{cases} +U_{max} \\ -U_{max} \end{cases}$$

1.4 Commande par mode glissant - Récapitulatif

On fabrique la commande suivante pour rejeter les perturbations :

$$u = u_{eq} + u_g$$

où :

- u_{eq} est la commande sans perturbation ni incertitude sur le modèle.
- $u_g = W \operatorname{sgn}(S)$ la fréquence de variation de u_g doit être très grande devant la dynamique de la poursuite.

Le problème de la discontinuité de u dans les excitation des dynamiques du système. La solution est de réaliser la loi de commande sur $w = \dot{u}$, u devient une variable d'état d'un *modèle augmenté*.

Sur le nouveau modèle on applique le mode glissant sur $w = w_{eq} + w_g$