Exercice 1 : Système hydraulique

On rappelle la loi de Bernoulli : $\rho\frac{V_1^2}{2}+\rho g z_1+p_1=\rho\frac{V_2^2}{2}+\rho g z_2+p_2$ Ce qui donne $q_1 \approx kh_i$
On a aussi la formule $k=\frac{S}{2}\sqrt{2gH_0}$

1. Cuve 1 :
   On a la relation de débit $q_e-q_1=\frac{dv_1}{dt}$, le volume $V_1=V_1^0+v_1$, sachant que $v_1=h_1*S$, d'où :
   $q_e-q_1=S\frac{dh_1}{dt}$, et puisque $q_1=kh_1$ on aboutit à :
   $$q_e-kh_1=S\frac{dh_1}{dt}$$
   Cuve 2 :
   On a ici, $q_1-q_2=\frac{dv_2}{dt}=S\frac{dh_2}{dt}$ donc :
   $$kh_1-kh_2=S\frac{dh_2}{dt}$$
2. On a les relations :
   $$\begin{aligned}\frac{dh_1}{dt}&=-\frac{k}{S}h_1+\frac{1}{S}q_e\\ \frac{dh_2}{dt}&=\frac{k}{S}h_1-\frac{k}{S}h_2\end{aligned}$$
   On pose $a=\frac{k}{S}$ et $b=\frac{1}{S}$, donc en posant $x=\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}$, on a :
   $$\dot{x}=\begin{pmatrix}-a & 0\\ 0 & -a\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}b\\0\end{pmatrix}q_e$$
3. $$\begin{aligned}P_A(\lambda)&=det(p\mathbf{1}-A)\\ &=(\lambda+a)^2\end{aligned}$$
   On a donc une racine double négative, le système est donc globalement asymptotique stable.
4. $$\begin{aligned}y&=h_1\\ &=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}\\ &=Cx\end{aligned}$$
   A-t-on observabilité du système ?
   $$O(C,A)=\begin{pmatrix}C\\CA\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -a & 0\end{pmatrix}$$

Le système est non observable lorsque $y = h_1$.

Si $y = h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} x$

$$O(C, A) = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & -a \end{pmatrix}$$

Le système est observable lorsque $y = h_2$.

Rappel : Équation fondamentale de l'observateur asymptotique :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$$

Posons :

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= x - \hat{x} \\ \dot{\epsilon_x} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} \\ &= Ax + Bu - (A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \\ &= A(x - \hat{x}) - L(Cx + C\hat{x}) \\ &= A\epsilon_x - LC\epsilon_x \end{aligned}$$

donc :

$$\dot{\epsilon_x} = (A - LC)\epsilon_x$$

avec $\epsilon_x(0) = x_0 - \hat{x_0}$

$$\epsilon_x(t) = e^{(A-LC)t}\epsilon_{x0}$$

$$\hat{x} \longrightarrow_{t \longrightarrow \infty} x \Leftrightarrow \text{valeurs propres de A-LC à } Re() < 0$$

On cherche $L \in \mathbb{R}^{N*1}$ tel que $A - LC$ soit à valeurs propres à partie réelle négative.

Soit,

$$\begin{aligned} L &= \begin{pmatrix} l_1 \\ l2 \end{pmatrix} \\ A - LC &= \begin{pmatrix} -a & -l_1 \\ a & -a - l_2 \end{pmatrix} \\ P_{A-LC}(p) &= p^2 + (2a + l_2)p + a^2 + a(l_1 + l_2) \\ \Pi_0(p) &= (p - \xi(-a))^2 \\ &= (p + \xi a)^2 \\ &= p^2 + 2\xi ap + \xi^2 a^2 \end{aligned}$$

d'où, par identification :

$$\begin{cases} 2a + l_2 = 2\xi a \\ a^2 + a(l_1 + l_2) = \xi^2 a^2 \end{cases}$$

donc, on obtient :

$$
\begin{aligned}
l_2 &= 2a(\xi - 1) \\
l_1 &= a(\xi - 1)^2
\end{aligned}
$$

Exercice 2 : système hydraulique avec perturbation

1. On a :

$$
\begin{aligned}
q_e + q_p - q_1 &= S\frac{dh_1}{dt} \\
q_1 - q_2 &= S\frac{dh_2}{dt}
\end{aligned}
$$

d'ou la représentation d'état :

$$
\begin{pmatrix} \dot{h_1} \\ \dot{h_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ a & -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} q_e + \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} q_p
$$

2. On suppose que $q_p \approx cst$

Posons $x = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ q_p \end{pmatrix}$, on a alors :

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{pmatrix} \dot{h_1} \\ \dot{h_2} \\ \dot{q_p} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -a & 0 & b \\ a & -a0 & \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ q_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 00 \end{pmatrix} q_e \\
&= Ax + Bq_e
\end{aligned}
$$

3. Déterminons les valeurs propres :

$$
\begin{aligned}
det(\lambda \mathbf{1} - A) &= \begin{vmatrix} \lambda + a & 0 & -b \\ -a & \lambda + a & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \\
&= \lambda(\lambda + a)^2
\end{aligned}
$$

4.

$$
\begin{aligned}
\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \\
y = h_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x \\
O(C, A) &= \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -a & 0 \\ -2a^2 & a^2 & ab \end{pmatrix} \\
det(O(C, A)) &= -a^2 b
\end{aligned}
$$

donc observable.