subfiles

Exercice I : Stabilité au sens de Lagrange et de Lyapunov

1. (a) On défini le système par
$$\dot{x} = (6t\sin t - 2t)x$$
donc
$$\frac{dx}{x} = (6t\sin t - 2t)dt$$
$$[\ln(u)]_{x_0}^{x} = 6([-\tau\cos\tau]_{t_0}^{t} + \int_{t_0}^{t}\cos\tau d\tau - [\tau^2]_{t_0}^{t}$$
$$\ln(x) - \ln(x_0) = -6t\cos t + 6t_0\cos t_0 + 6\sin t - 6\sin t_0 - t^2 + t_0^2$$
Donc on a la trajectoire :
$$x(t) = x_0\exp(-6t\cos t + 6t_0\cos t_0 + 6\sin t - 6\sin t_0 - t^2 + t_0^2)$$

   (b) Stabilité au sens de Lyapunov :
$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0 \text{ tq } ||x_0|| \leq \delta \Rightarrow ||x|| \leq \epsilon$$
Soit $\epsilon > 0$ tq $|x(t)| \leq \epsilon$. Exprimons δ en fonction de ϵ tel que $|x_0| \leq \delta$.
$$|x(t)| \leq |x_0|\exp(6t_0\cos t_0 - 6\sin t_0 + t_0^2 + 6 + 6t - t^2)$$
$$\text{Or, } 0 < (3-t)^2 = 9 - 6t + t^2 \Rightarrow 6t - t^2 < 9$$
$$\text{donc } |x(t)| \leq |x_0|C \qquad \text{avec} \qquad C = \exp(6t_0\cos t_0 - 6\sin t_0 + t_0^2 + 12) > 0$$
$$\Rightarrow \delta = \frac{\epsilon}{C}$$
Le fait que le δ dépende de t_0 n'empêche pas que l'origine soit stable au sens de Lyapunov. Cela montre que la stabilité n'est pas uniforme.

   (c) Stabilité au sens de Lagrange :
$$\forall\delta > 0, \exists\epsilon > 0 \text{ tq } |x_0| \leq \delta \Rightarrow |x| \leq \epsilon$$
$t_0 = 2\pi n$ et $t = t_0 + \pi$
$$x(t) = x_0\exp(6.2\pi n + A\pi^2 n^2 - 6(2\pi n + \pi) - (2\pi n + \pi)^2)$$
$$= x_0\exp((4n+1)\pi(6-\pi)) \to \infty \text{ si } n \to \infty$$
$|x_0| \leq \delta$ alors que $\nexists\epsilon > 0$ tq $|x| \leq \epsilon$: l'origine n'est pas stable au sens de Lagrange.

2. (a) On définit le système par
$$\dot{x} = -\frac{x}{t+1}$$
$$\frac{dx}{x} = -\frac{dt}{t+1}$$
$$\ln(\frac{x}{x_0}) = \ln(\frac{1+t_0}{1+t})$$

Donc on a la trajectoire :

$1 + t_0$

(c) Stabilité au sens de Lyapunov :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } |x_0| \leq \delta \Rightarrow |x| \leq \epsilon$$

Soit $\epsilon > 0$. On pose $\delta = \epsilon$

$$|x_0| \leq \delta = \epsilon \Rightarrow |x| = |x_0|\frac{1+t_0}{1+t} \leq \epsilon\frac{1+t_0}{1+t} \leq \epsilon$$

chibrage de l'exo