Optimisation d'un laminoir

1. Y désigne la longueur de barres perdue, qui est de X (la totalité de la barre) si la barre est trop courte, ou de X-l si la barre est trop longue.

$$Y = \begin{cases} X & \text{si } X < l \\ X - l & \text{si } X > l \end{cases}$$

2.

$$\begin{aligned} m_Y &= E_Y[Y] = E_X[Y] \\ &= \int_0^l x f_X(x)dx + \int_l^\infty (x-l) f_X(x)dx \\ &= \int_0^\infty x f_X(x)dx - \int_l^\infty l f_X(x)dx \\ m_Y &= m_X - l \int_l^\infty f_X(x)dx \end{aligned}$$

3. On suppose que X est une variable aléatoire gaussienne, alors

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}}$$

- m_X représente la moyenne de X, c'est-à-dire la valeur sur laquelle la gaussienne est centrée
- σ_X représente la dispersion des valeurs autour de m_X. En effet, à $m_X \pm \sigma_X$, on a $f_X(x) = 0.6\frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}}$.

$$\begin{aligned} \int_{m_X-\sigma_X}^{m_X+\sigma_X} f_X(x)dx &= 0.68 \\ \int_{m_X-2\sigma_X}^{m_X+2\sigma_X} f_X(x)dx &= 0.95 \\ \int_{m_X-3\sigma_X}^{m_X+3\sigma_X} f_X(x)dx &= 0.99 \end{aligned}$$

Le modèle est valable si la probabilité d'avoir des événements "non-physiques" reste faible, c'est-à-dire si $m_X - 3\sigma_X > 0$ de sorte à ce que $P(X < 0) < 0.5\%$.

4. Sans contrainte sur l'intervalle de variation de m_X, une condition nécessaire à l'obtention d'un minimum m_X^{opt} est $\frac{dm_Y}{dm_X} = 0$.

$$\frac{dm_Y}{dm_X} = 1 - l \int_l^{+\infty} \frac{\partial f_X(x, m_X)}{\partial m_X} dx$$

$$\text{Or, on a ici une gaussienne, donc } \frac{\partial f_X}{\partial m_X} = -\frac{\partial f_X}{\partial x}$$

$$\begin{aligned} \frac{dm_Y}{dm_X} &= 1 + l \int_l^\infty \frac{df_X(x, m_X)}{dx} dx \\ &= 1 + l(f_X(+\infty) - f_X(l)) = 1 - l f_X(l) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \frac{dm_Y}{dm_X} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f_X(l) = \frac{1}{l}$$

$$f_X(l) = \frac{1}{l} \Leftrightarrow 1 = \frac{l}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m_X}{\sigma_X})^2}$$

$$\Leftrightarrow m_X = l \pm \sigma_X \sqrt{-2\ln\frac{l}{\sqrt{2\pi}\sigma_X}} \text{ avec } l > \sqrt{2\pi}\sigma_X$$

Pour qu'il s'agisse d'un minimum, il faut que $\frac{d^2 m_Y}{d_X^m} > 0$.

$$\frac{d^2 m_Y}{d_X^m} = -l\frac{df_X(l)}{dm_X}$$

$$= \frac{-l}{\sqrt{2\pi}\sigma_X^3}(l - m_X)e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m_X}{\sigma_X})^2}$$

et on obtient $\frac{d^2 m_Y}{d_X^m}|_{m_X+} > 0$ et $\frac{d^2 m_Y}{d_X^m}|_{m_X-} \quad < 0$

Le minimum de m_Y est donc bien atteint pour $m_{Xopt} = l + \sigma_X \sqrt{-2\ln\frac{l}{\sqrt{2\pi}\sigma_X}}$

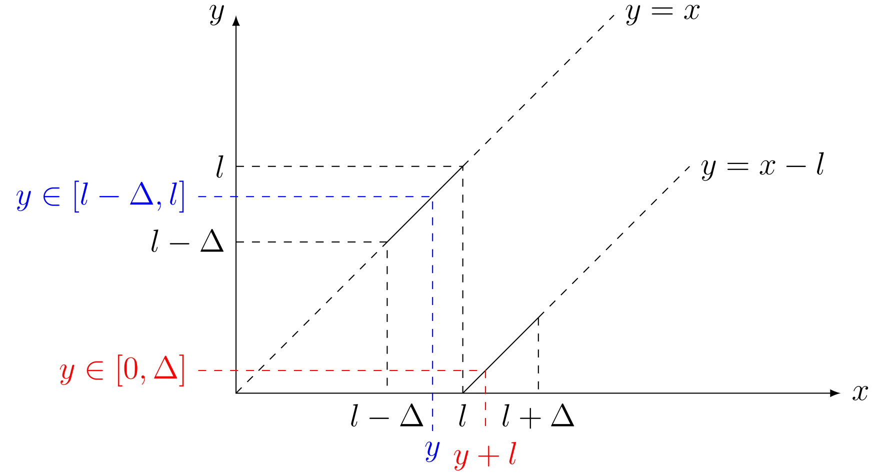
5. Application numérique :

$$m_X = 1 + 0,01\sqrt{2\ln\frac{1}{\sqrt{2\pi}0,01}} = 1,027m$$

Remarque : on obtient $l \approx l + 3\sigma_X$, donc le modèle est valable, en accord avec la question 4.

Changement de variable aléatoire

1. Traçons l'évolution de la VA Y en fonction de X :



Avec l'aide du dessin, on voit immédiatement que :

- si $y \in [0, \Delta[$, alors $F_Y(y) = P[0 \leq Y < y] = P[l \leq x < y + l] = F_X(y + l) - F_X(l)$
- si $y \in [l-\Delta, \Delta]$, alors $F_Y(y) = P[0 \leq Y < y] = F_X(l+\Delta) - F_X(l) + F_X(y) - F_X(l-\Delta)$
- sinon, $F_Y(y) = \text{cste}$.

Ainsi, on en déduit la densité de probabilité en dérivant par rapport à y :

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(y) & \text{si } y \in [l-\Delta, \Delta] \\ f_X(y+l) & \text{si } y \in [0, \Delta[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. On a le changement de variable $g : X \Rightarrow Y = g(X)$ où :

$$g(X) = \begin{cases} X + l & \text{si } Y = X - l \in [0, \Delta] \\ X & \text{si } Y = X \in [l-\Delta, \Delta] \end{cases}$$

On utilise la formule générale du changement de variables :

$$f_Y(y) = F_X(x)|\frac{dx}{dy}||_{x,g(x)=y}$$

On retrouve ainsi le résultat précédent.

3. On considère que la variable X est uniformément répartie sur l'intervalle $[l-\Delta, l+\Delta]$. Ainsi, $f_X(x) = C$ (constante) sur cet intervalle et comme on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \int_{l-\Delta}^{l+\Delta} f_X(x)dx = 2\Delta C = 1$$

alors

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta} & \text{si } x \in [l-\Delta, l+\Delta] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

d'où

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta} & \text{si } y \in [0, \Delta] \cup [l-\Delta, l] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Propriété importante : Si une densité de probabilité a une symétrie en x_0 et que sa moyenne existe, sa moyenne est sur l'axe de symétrie, donc vaut x_0.
Preuve :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} (y+x_0) f_X(y+x_0)dy \\ &= x_0 \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(y+x_0)dy + \int_{-\infty}^{+\infty} y f_X(y+x_0)dy \\ &= x_0 \times 1 + 0 = x_0 \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient $m_Y = \frac{l}{2}$

4. On considère le changement de variable : $\Phi \to Y = \cos(\Phi)$.
Comme $\cos(\Phi) \in [-1, 1]$, on a pour $y < -1, F_Y(y) = 0$ et pour $y \geq 1, F_Y(y) = 1$.
Pour $y \in [-1, 1]$,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(\cos(\Phi) < y) \\ &= P(-pi \leq \Phi < -\arccos(y)) + P(\arccos(y) \leq \Phi < \pi) \\ &= F_\Phi(-\arccos(y)) - F_\Phi(\arccos(y)) + F_\Phi(\pi) - F_\Phi(-\pi) \\ &= F_\Phi(-\arccos(y)) - F_\Phi(\arccos(y)) + 1 \\ f_Y(y) &= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} f_\Phi(-\arccos(y)) + \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} f_\Phi(\arccos(y)) \end{aligned}$$

5. On utilise le résultat général sur les changements de VA avec $\phi = \arccos(y)$ si $y > 0$ et $\phi = -\arccos(y)$ si $y < 0$

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= f_\Phi(\phi)|\frac{d\phi}{dy}||_{\phi, g(\phi)=y} \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } y \notin [-1,1] \\ f_\Phi(\phi)|\frac{d\phi}{dy}||_{\phi=\arccos(y)} + f_\Phi(\phi)|\frac{d\phi}{dy}||_{\phi=-\arccos(y)} & \text{si } y \in [-1,1] \end{array} \right. \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } y \notin [-1,1] \\ \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} f_\Phi(-\arccos(y)) + \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} f_\Phi(\arccos(y)) & \text{si } y \in [-1,1] \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

6. Si la VAΦ est uniformément répartie sur $[-\pi, \pi]$, alors on a

$$
\begin{aligned}
f_\Phi(\phi) &= \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2\pi} & \text{si } \phi \in [-\pi, \pi] \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \\
f_Y(y) &= \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}} & \text{si } y \in [-1,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.
\end{aligned}
$$