Exercice 1 :

On considère le système suivant :

$$(S) = \begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -10 & 12 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} u \\ y_1 = \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix} x_1 \end{cases}$$

1. (a) Base modale
Déterminons les valeurs propres de la matrice d'évolution :

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= det(A_1 - \lambda \mathbf{1}_2) \\ &= det \begin{pmatrix} -10-\lambda & 12 \\ -6 & 7-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (-10-\lambda)(7-\lambda) + 72 \\ &= -70 + 3\lambda + \lambda^2 + 72 \\ &= \lambda^2 + 3\lambda + 2 \\ &= (\lambda+1)(\lambda+2) \end{aligned}$$

Cherchons les vecteurs propres vérifiant $A_1 X = \lambda X$:
Pour $\lambda = -1$:

$$A_1 X = \lambda X \rightarrow -6x_1 + 8x_2 = 0$$

On a donc :

$$\begin{aligned} E_{-1} &= Ker\{-1.\mathbf{1}_3 - A\} \\ &= Vect\left\{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right\} \end{aligned}$$

Pour $\lambda = -2$:

$$A_1 X = \lambda X \rightarrow -6x_1 + 9x_2 = 0$$

On a donc :

$$\begin{aligned} E_{-2} &= Ker\{-2.\mathbf{1}_3 - A\} \\ &= Vect\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} \end{aligned}$$

La matrice de changement de base est donc : $P = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

(b) Le système est globalement asymptotiquement stable car les valeurs propres sont à $Re() < 0$.
On effectue alors le changement de base $x_1 = P\xi_1$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 + x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 x_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{\xi}_1 = \Lambda \xi_1 + V^{-1} B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 V \xi_1 \end{cases}$$

avec,

$$\Lambda = V^{-1} A_1 V = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\begin{cases} V^{-1} B_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = B_m \\ C_1 V = 1 \quad 2 = C_m \end{cases}$$

(c) Rappel : pour $\dot{x} = Ax + Bu$ avec $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ la solution est de la forme CI + régime forcé :

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

Application :

$$\xi_1(t) = e^{\Lambda t} \xi_0 + \int_0^t e^{\Lambda(t-\tau)} B_m u_1(\tau) d\tau$$

$$e^{\Lambda t} = e^{\begin{pmatrix} -t & 0 \\ 0 & -2t \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$\xi_1(t) = \begin{pmatrix} \int_0^t -e^{-(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \\ \int_0^t e^{-2(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} y_1(t) &= C_m \xi_1(t) \\ &= \int_0^t -e^{-(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + \int_0^t 2e^{-2(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \quad = \int_0^t (2e^{-2(t-\tau)} - e^{-(t-\tau)}) B u_1(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Pour une réponse indicielle $u_1(t) = 1 \ \forall t \geq 0$

(d) Commandabilité : C(A,B) $= \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} A &= V \Lambda V^{-1} \\ B &= V B_m \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} C(A,B) &= \begin{pmatrix} V B_m & V \Lambda V^{-1} V B_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} V B_m & V \Lambda B_m \end{pmatrix} \\ &= V \begin{pmatrix} B_m & \Lambda B_m \end{pmatrix} \\ &= V C(\Lambda, B_m) \end{aligned}$$

or,

$$C(\Lambda, B_m) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$
$$\text{donc, } det(C(\Lambda, B_m)) = 1 \neq 0$$

Ainsi, le système est commandable.

Remarque : Soit $x_1 \in \mathbb{R}^{\nvDash}$:

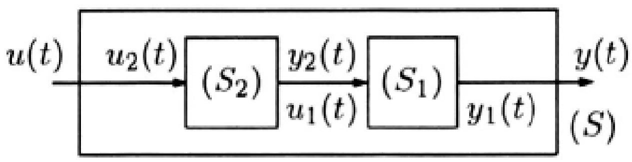
$$x_1(t) = e^{A_1 t} x_0 + \int_0^t e^{A_1(t-\tau)} B_1 u_1(\tau) d\tau \in \mathbb{R}^{\nvDash}$$
$$W_c(0,t) = \int_0^t e^{A_1(t-\tau)} B_1 B_1^T e^{A_1^T(t-\tau)} d\tau \in \mathbb{R}^{\nvDash * \nvDash}$$

$W_c(0, t_1)$ est inversible car commandable

$$x_1(t_1) = e^{A_1 t_1} x_0 + \int_0^{t_1} e^{A_1(t_1-\tau)} B_1 B_1^T e^{A_1^T(t_1-\tau)} W_c(0,t_1)^{-1} d\tau (x_1 - e^{A_1 t_1} x_0) = x_1 \forall t_1 \geq 0$$
$$= B_1 e^{A(t_1-t)} W_c(0,t_1)^{-1} (x_1 - e^{A_1 t_1} x_0)$$

2. On considère le système (S2) suivant :

$$(S2) = \begin{cases} \dot{x}_2 = -10x_2 + 4u_2 \quad x_2(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \\ y = -2x + u_2 \end{cases}$$



(a) La relation de connection est $u_1 = y_2$ et donne

$$\dot{\xi}_1 = \Lambda \xi_1 + B_m u_1 \text{ avec, } u_1 = y_2 = C_2 x_2 + D_2 u_2$$

D'où le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \Lambda \xi_1 + B_m C_2 x_2 + B_m D_2 u_2 \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2 \end{cases}$$

Posons x(t) = $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, on a alors :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \Lambda & B_m C_2 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} B_m D_2 \\ B_2 \end{pmatrix} u$$
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} u = Ax + Bu$$

On a donc pour l'équation d'observation :

$$\begin{aligned} y = y_1 &= C_m\xi_1 + D_1 u_1 \\ &= C_m\xi_1 + D_1 y_2 \text{ où } D_1 = 0 \\ &= C_m\xi_1 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \xi_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) On regarde alors la commandabilité :

$$\begin{aligned} C(A,B) &= \begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 9 & -89 \\ 1 & -10 & 100 \\ 4 & -40 & 400 \end{pmatrix} \\ rang(C(A,B)) &= 2 \text{ car } L_3 = 4L_2 \end{aligned}$$

(S1) est stable, (S2) est stable mais l'association des deux ne l'est pas !

(c) On considère le système (S) suivant :

$$(S) = \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu & x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

On introduit le vecteur :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \dot{x}_n \end{pmatrix}$$

et, sa transformée de Laplace

$$\begin{aligned} L\{x\} &= \begin{pmatrix} L\{x_1\} \\ L\{x_2\} \\ \vdots \\ L\{x_n\} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} X_1(p) \\ X_2(p) \\ \vdots \\ X_n(p) \end{pmatrix} = X(p) \end{aligned}$$

on a alors avec le système (S)

$$\begin{aligned} pX(p) - x_0 &= AX(p) + BU(p) \\ (p\mathbf{1_n} - A)X(p) &= x_0 + BU(p) \end{aligned}$$

d'où la relation :

$$X(p) = (p\mathbf{1_n} - A)^{-1}BU(p) + (p\mathbf{1_n} - A)^{-1}x_0$$

De même, on pose le vecteur :

$$\begin{aligned} Y(p) &= L\{y(t)\} \\ &= CX(p) + DU(p) \\ &= [C(p\mathbf{1_n} - A)^{-1}B + D]u(p) + C(p\mathbf{1_n} - A)^{-1}x_0 \\ &= G(p)U(p) + C(p\mathbf{1_n} - A)^{-1}x_0 \end{aligned}$$

et on a :

$$\begin{aligned} (p\mathbf{1_n} - A)^{-1} &= \frac{1}{det(p\mathbf{1_n} - A)} Adj(p\mathbf{1_n} - A) \\ G(p) &= \frac{C.Adj(p\mathbf{1_n} - A)B + DP_A(p)}{P_A(p)} \end{aligned}$$

Les pôles sont les modes. On calcul donc :

$$p\mathbf{1_n} - A = \begin{pmatrix} p+1 & 0 & -2 \\ 0 & p+2 & 2 \\ 0 & 0 & p+10 \end{pmatrix}$$

puis,

$$(p\mathbf{1_n} - A)^{-1} = \frac{1}{(p+1)(p+2)(p+10)} \begin{pmatrix} (p+2)(p+10) & 0 & 0 \\ 0 & (p+1)(p+10) & 0 \\ 2(p+2) & -2(p+1) & (p+1)(p+2) \end{pmatrix}^T$$

ensuite,

$$C(p\mathbf{1_n} - A)^{-1} = \frac{1}{(p+1)(p+2)(p+10)} \big((p+2)(p+10) \quad 2(p+1)(p+10) \quad 2(p+2) - 4(p+$$

enfin on obtient l'ordre 2 :

$$C(p\mathbf{1_n} - A)^{-1}B = G(p) = \frac{p}{(p+1)(p+10)}$$

Remarque :

$$G(p) = G_1(p)G_2(p)$$

avec

$$\begin{aligned} G_1(p) &= C_1(p\mathbf{1_2} - A_1)B_1 = \frac{p}{(p+1)(p+2)} \\ G_2(p) &= C_2(p\mathbf{1_1} - A_2)B_2 + D_2 = \frac{p+2}{p+10} \end{aligned}$$

Un pôle de G_1 a été neutralisé par un zéro de G_2, on a donc une perte de commandabilité.
Réalisation minimale : un vecteur d'état de taille la plus petite. Ici, ordre 2 (on avait un ordre 3 qui n'était pas minimal).

3. On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= \begin{pmatrix} -10 & 12 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} x_1 \quad + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ y_1 &= \begin{pmatrix} 4 & -5 \end{pmatrix} x_1 \end{cases}$$

(a) On impose une trajectoire polynomiale : $y_d(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \left(\frac{t}{T}\right)^k$
Avec les conditions initiales suivantes :

t=0	t=T
$y_1(0) = 0$	$y_1(T) = 1$
$\dot{y_1}(0) = 0$	$\dot{y_1}(T) = 0$
$\ddot{y_1}(0) = 0$	$\ddot{y_1}(T) = 0$

On a aussi :

$$\dot{y_1}(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{T} \alpha_k \left(\frac{t}{T}\right)^{k-1}$$
$$\ddot{y_1}(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{T^2} \alpha_k \left(\frac{t}{T}\right)^{k-2}$$

On a 6 contraintes donc 6 inconnues donc au maximum, $n = 5$

à $t = 0$:

$$y_1(0) = \sum_{k=0}^{5} \alpha_k \left(\frac{0}{T}\right)^k \Leftrightarrow \alpha_0 = 0$$
$$\dot{y_1}(0) = \sum_{k=0}^{5} \frac{k}{T} \alpha_k \left(\frac{0}{T}\right)^{k-1} \Leftrightarrow \alpha_1 = 0$$
$$\ddot{y_1}(t) = \sum_{k=0}^{5} \frac{k(k-1)}{T^2} \alpha_k \left(\frac{0}{T}\right)^{k-2} \Leftrightarrow \alpha_2 = 0$$

à $t = T$:

$$\begin{aligned}
y_1(T) = 1 &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{5} \alpha_k = 1 \\
&\Leftrightarrow \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 1 \\
\dot{y_1}(T) = 0 &\Leftrightarrow \sum_{k=3}^{5} \frac{k}{T}\alpha_k = 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{T}(3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 5\alpha_5) = 0 \\
\ddot{y_1}(T) = 0 &\Leftrightarrow \sum_{k=3}^{5} \frac{k(k-1)}{T^2}\alpha_k = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{T^2}(6\alpha_3 + 12\alpha_4 + 20\alpha_5) = 0
\end{aligned}$$

ce système est alors équivalent au calcul matriciel suivant :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 12 & 20 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 12 & 20 \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Le calcul abouti à :

$$\begin{cases} \alpha_3 = 10 \\ \alpha_4 = -15 \\ \alpha_5 = 6 \end{cases}$$

Remarque : On a une matrice 3x3, on peut donc se permettre de calculer l'inverse à partir des cofacteurs $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$ avec M_{ij} la matrice obtenu en supprimant la ligne i et la colonne j.

Remarque : $\dddot{y_1}(t)$ représente la secousse, aussi appelé Jerk. Le quintique est la trajectoire à Jerk minimal.

(b) Passage à la forme canonique de commandabilité.
Il s'agit de trouver la matrice de passage M du système d'état vers celui correspondant a A_c une matrice compagnon horizontale de type 1 et B_c un vecteur de 0 avec 1 sur la dernière composante. Puis, une fois que l'on à M, on calcule $C_c = M.C$

On a le polynôme caractéristique $P_{A_1}(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$, dont on en déduit la matrice compagnon horizontale :

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Et on a aussi :

$$B_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Changement de coordonnées $M \in \mathbb{R}^{2x2}$ avec $M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \end{pmatrix}$

$M^{-1}AM = A_c \Leftrightarrow AM = MA_c$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} Am_1 & Am_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2m_2 & m_1 - 3m_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Am_1 = -2m_2 \\ Am_2 = m_1 - 3m_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Am_1 = -2m_2 \\ (A + 3\mathbf{1}_2)m_2 = m_1 \end{cases}$$

or, $M^{-1}B = B_c \Leftrightarrow B = MB_c = m_2$, donc :

$$M = \begin{pmatrix} B & (A + 3\mathbf{1}_2)B \end{pmatrix}$$

d'où :

$$M = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Il est inutile de calculer M^{-1} pour le calcul de la forme canonique. Car $C_c = C_1M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ et, $D_c = D_1 = 0$

(c) On impose $y_1(t) = 10\left(\frac{t}{T}\right)^3 - 15\left(\frac{t}{T}\right)^4 + 6\left(\frac{t}{T}\right)^5$.
On cherche une commande du type : $u_1(t) = \sum_{k=0}^{m} \beta_k \left(\frac{t}{T}\right)^k$.

Forme de Browmovski :

$$\begin{pmatrix} \dot{z_1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{z_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \\ 0 & ... & ... & 1 & \\ -a_0 & ... & ... & -an-1 & \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

Ayant la forme canonique de commandabilité, la forme de Browmovski conciste à poser :

$$\boxed{v(t) = -a^T z + u}$$

où $a = \begin{pmatrix} a_0 & ... & a_{n-1} \end{pmatrix}^T$ d'où

$$\begin{pmatrix} \dot{z_1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{z_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \\ 0 & ... & ... & 1 & \\ 0 & ... & ... & 0 & \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v$$

Avec l'équation d'observation du système d'état $y = \begin{pmatrix} c_0 & ... & c_{n-1} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{pmatrix}$

Application : Avec l'équation d'observation :

$$y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = z_2$$

Puis, avec la forme de Brow*** :

$$\left\{ \begin{pmatrix} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = v \end{pmatrix} \right. \text{ où } v = -\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + u$$

On a donc comme commande, en remplaçant avec les expressions provenant de l'équation d'obersation :

$$u = v + \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \qquad = 2z$$

On calcul donc chaque terme :

$$\begin{aligned} z_1 &= \int_0^t z_2(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t y_1(\tau) d\tau \\ &= \frac{10T}{4} \left(\frac{t}{T}\right)^4 - \frac{15T}{5} \left(\frac{t}{T}\right)^5 + \frac{6T}{6} \left(\frac{t}{T}\right)^6 + cst(=0) \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} u(t) &= 2z_1 + 3y_1 + \dot{y}_1 \\ &= 2T \left(\frac{t}{T}\right)^6 + (18 - 6T) \left(\frac{t}{T}\right)^5 + (\frac{30}{T} - 45 + 5T) \left(\frac{t}{T}\right)^4 + (30 - \frac{60}{T}) \left(\frac{t}{T}\right)^3 + \frac{30}{T} \left(\frac{t}{T}\right)^2 \\ &= \beta_6 \left(\frac{t}{T}\right)^6 + \beta_5 \left(\frac{t}{T}\right)^5 + ... + \beta_2 \left(\frac{t}{T}\right)^2 \end{aligned}$$

Donc m=6 et $\beta_1 = \beta_2 = 0$. Commande en boucle ouverte non robuste au conditions initiales. Il faut donc commander en boucle fermée.