

TP1 : Commande d'un bras à liaison flexible par bouclage linéarisant

Pierre-Antoine Comby

25 novembre 2023

1 Modélisation

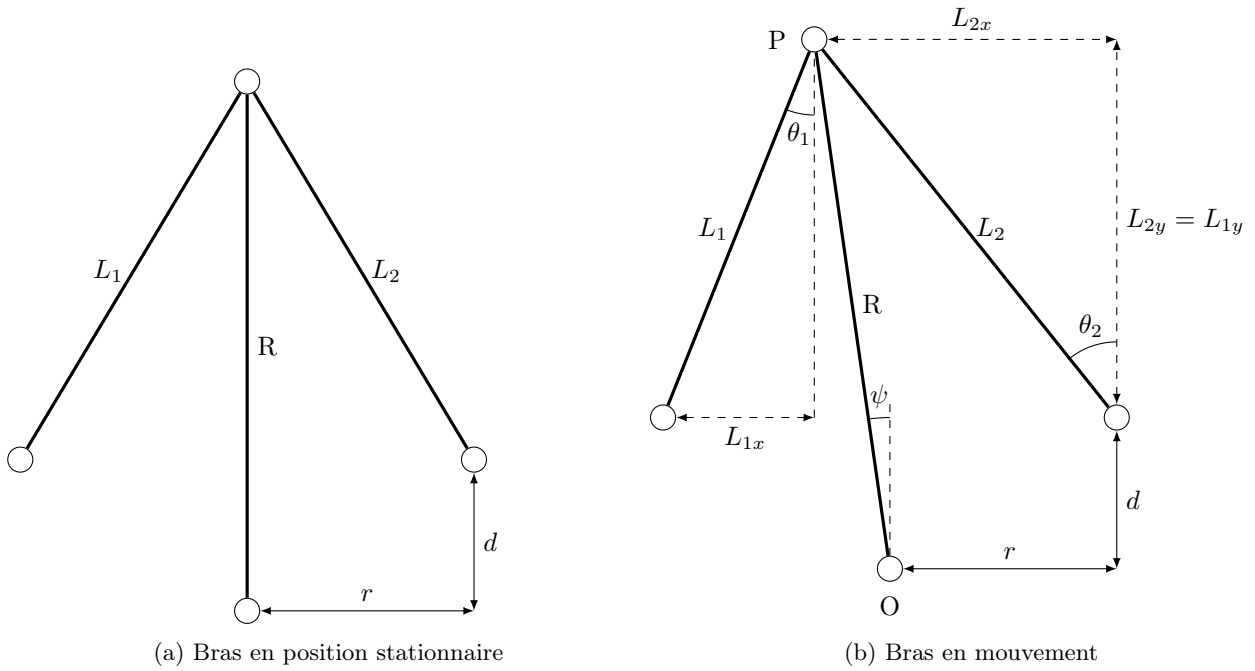


FIGURE 1 – Schéma cinématique du système

Prépa.1 À partir de la figure on a :

$$\begin{aligned} L_{1x} &= r - \sin(\psi)R \\ L_{2x} &= r + \sin(\psi)R \\ L_{1y} &= R \cos(\psi) - d \end{aligned}$$

Prépa.2 On a par définition :

$$F_1 = -k(L_1 - L)F_2 = -k(L_2 - L)$$

On introduit les angles θ_1 et θ_2 tel que :

$$\tan(\theta_1) = \frac{L_{1x}}{L_{1y}} \text{ et } \tan(\theta_2) = \frac{L_{2x}}{L_{2y}}$$

Alors on a pour F_1 :

$$\begin{aligned}
F_{1y} &= F_1 \cos(\theta_1) = F_1 \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\theta_1)}} \\
&= F_1 \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{L_{1x}}{L_{2y}}\right)^2}} \\
&= k \left(\sqrt{L_{1x}^2 + L_{1y}^2} - L \right) \frac{L_{1y}}{\sqrt{L_{1y}^2 + L_{1x}^2}} \\
&= kL_{1y} \left(1 - \frac{L}{\sqrt{L_{1y}^2 + L_{1x}^2}} \right)
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
F_{1x} &= F_1 \sin(\theta_1) \\
&= F_1 \cos(\theta_1) \tan(\theta_1) \\
&= kL_{1y} \left(1 - \frac{L}{\sqrt{L_{1y}^2 + L_{1x}^2}} \right) \frac{L_{1x}}{L_{1y}} \\
&= kL_{1x} \left(1 - \frac{L}{\sqrt{L_{1y}^2 + L_{1x}^2}} \right)
\end{aligned}$$

On a les mêmes relations pour F_2 soit :

$$F_{2x} = kL_{2x} \left(1 - \frac{L}{\sqrt{L_{2y}^2 + L_{2x}^2}} \right) \text{ et } F_{2y} = kL_{2y} \left(1 - \frac{L}{\sqrt{L_{2y}^2 + L_{2x}^2}} \right)$$

Et alors :

$$\vec{F}_1 = \begin{bmatrix} -F_{1x} \\ -F_{1y} \end{bmatrix} \text{ et } \vec{F}_2 = \begin{bmatrix} F_{2x} \\ -F_{2y} \end{bmatrix}$$

Prépa.3 À partir des expression cartésiennes des forces on a le moment :

$$\vec{\mathcal{M}}_0(\vec{F}) = \vec{OP} \wedge (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \begin{bmatrix} R \sin \psi \\ R \cos \psi \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} F_{2x} - F_{1x} \\ F_{2y} - F_{1y} \\ 0 \end{bmatrix} = M \vec{u}_z$$

Soit :

$$M = R \cos \psi (F_{2x} - F_{1x}) - R \sin \psi (F_{2y} - F_{1y})$$

Prépa.4 On a :

$$F_{2x} - F_{1x} = 2kR \sin \psi + kL \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{L_{2y}^2 + L_{2x}^2}} - \frac{1}{\sqrt{L_{1y}^2 + L_{1x}^2}} \right)}_{\Delta} - k \sin \psi RL \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{L_{2y}^2 + L_{2x}^2}} + \frac{1}{\sqrt{L_{1y}^2 + L_{1x}^2}} \right)}_{\Sigma}$$

En effectuant à l'ordre 1 sur Σ et Δ on a :

$$\Delta = \frac{r\psi R}{((R-d)^2 + r^2)^{3/2}} \text{ et } \Sigma = \frac{2}{\sqrt{(R-d)^2 + r^2}}$$

soit :

$$F_{2x} - F_{1x} \simeq 2kR\psi + \psi \frac{kr^2 RL}{((R-d)^2 + r^2)^{3/2}} - 2k\psi RL \frac{1}{\sqrt{(R-d)^2 + r^2}} = \psi K_x$$

Avec

$$K_x = 2kR + \frac{kr^2RL}{((R-d)^2 + r^2)^{3/2}} - \frac{2kRL}{\sqrt{(R-d)^2 + r^2}}$$

On fait de même pour $F_{2y} - F_{1y}$ soit :

$$F_{2y} - F_{1y} = kR(\cos \psi - d)L\Delta = \frac{kR^2(1-d)Lr}{((R-d)^2 + r^2)^{3/2}}\psi = K_y\psi$$

enfin :

$$M = RK_x\psi + RK_y\psi^2$$

Au premier ordre on a :

$$M = R \underbrace{\left(2kR + \frac{kr^2RL}{((R-d)^2 + r^2)^{3/2}} - \frac{2kRL}{\sqrt{(R-d)^2 + r^2}} \right)}_{K_s} \psi$$

Prépa.5 Pour le système {plateforme + bras} on a l'énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2}(J_b + J_p)\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}\dot{\psi}^2$$

Prépa.6 Avec l'ensemble de la masse regroupé à son centre de gravité on a : l'énergie potentielle de {plateforme + bras} suivante :

$$E_p = mgh \cos(\alpha + \psi)$$

Prépa.7 On rappelle l'expression générale des equations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} = Q_i$$

Avec q_i coordonnée généralisée et Q_i la force généralisée associée à q_i (qui regroupe energie potentielle dérivée suivant q_i et les forces s'exerçant au système) On choisit α et ψ comme coordonnée généralisée (système à deux degrés de liberté). Le système est commandé par la MCC, qui exerce un couple $N\phi i$:

$$\begin{cases} J_b(\ddot{\alpha} + \ddot{\psi}) + K_s\psi - mgh \sin(\alpha + \psi) &= 0 \\ J_b(\ddot{\alpha} + \ddot{\psi}) + J_p\ddot{\alpha} - mgh \sin(\alpha + \psi) &= N\phi i \end{cases}$$

Prépa.8 À partir de l'équation électrique :

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + \phi \omega_m$$

On pose $\tau_e = \frac{L}{R} = 69.2\mu s$ constante de temps électrique du moteur.

Prépa.9 On a $\tau_e \ll \tau = 17ms$ on peut donc négliger l'effet inductif dans l'équation électrique et alors :

$$i = \frac{u - \phi \omega_m}{R} = \frac{u - \phi N \dot{\alpha}}{R}$$

Prépa.10 Avec le rapport de transformation N on a :

$$\omega_m = N \dot{\alpha}$$

Prépa.11 À partir des équations de Lagrange et des équations du moteur électrique on a : le modèle d'état suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= \frac{K_s}{J_p}x_2 - \frac{(N\phi)^2}{RJ_p}x_3 + \frac{N\phi}{RJ_p}u \\ \dot{x}_4 &= -\frac{K_s}{J_p}x_2 + \frac{(N\phi)^2}{RJ_p}x_3 - \frac{N\phi}{RJ_p}u - \frac{K_s}{J_b}x_2 + \frac{mgh}{J_b} \sin(x_1 + x_2) \\ y &= x_1 + x_2 \end{cases}$$

On a donc les matrices d'états suivantes :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{K_s}{J_p} & -\frac{(N\phi)^2}{RJ_p} & 0 \\ 0 & -K_s \frac{J_p + J_b}{J_b J_p} & +\frac{(N\phi)^2}{RJ_p} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{N\phi}{RJ_p} & 0 \\ -\frac{N\phi}{RJ_p} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \frac{mgh}{J_b} \sin(x_1 + x_2) \end{bmatrix}$$

2 Commande en boucle fermé

Manip.1 On réalise le modèle d'état dans simulink En excitant le modèle avec un echelon on obtient : La

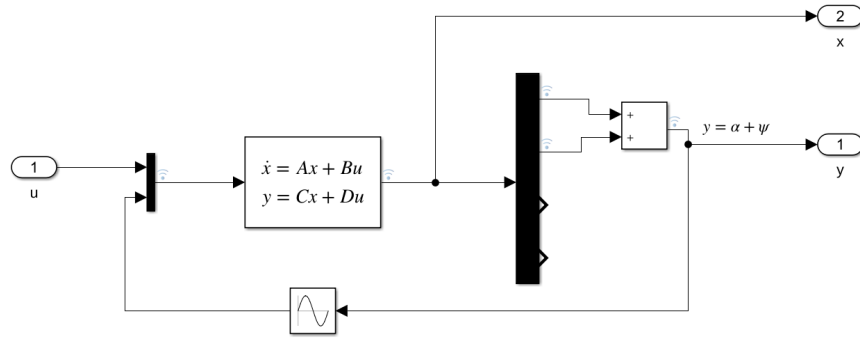


FIGURE 2 – Modèle d'état simulé

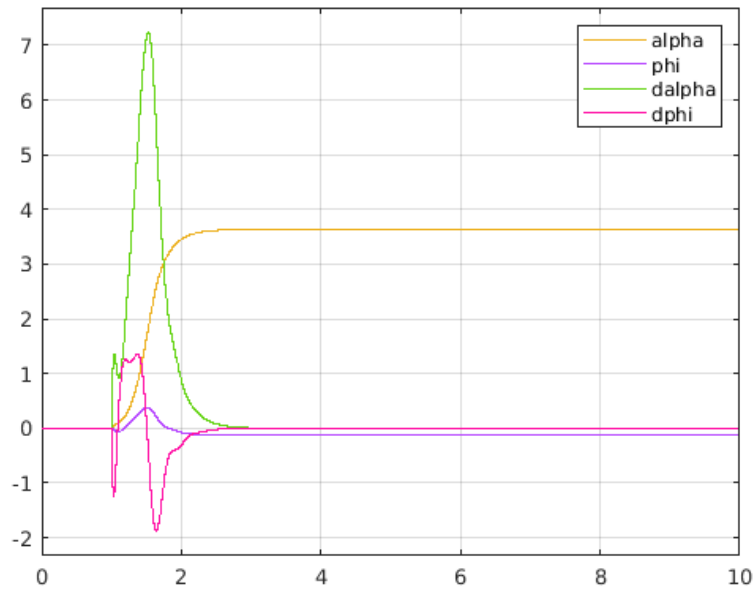


FIGURE 3 – Variable d'états en sortie du modèle

simulation correspond au modèle attendu (on commande le système en position), il est stable mais non précis, de plus les dérivées sont assez chaotiques.

Prépa.12 À partir de la sortie y il faut dérivé 4 fois pour que la commande u apparaisse. on a donc

$$\begin{aligned}
z_1 &= y \\
z_2 &= \dot{z}_1 = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = x_3 + x_4 \\
z_3 &= \dot{z}_2 = \dot{x}_3 + \dot{x}_4 \\
&= \frac{K_s}{J_b} x_2 + \frac{mgh}{J_b} \sin(x_1 + x_2) \\
z_4 &= \dot{z}_3 = \frac{-K_s}{J_b} x_4 + \frac{mgh}{J_b} (x_3 + x_4) \cos(x_1 + x_2) \\
\dot{z}_4 &= \frac{-K_s}{J_b} \left(-K_s \frac{(J_b + J_p)}{J_p J_b} + \frac{(N\phi)^2}{R J_p} x_3 - \frac{N\phi}{R J_p} u + \frac{mgh}{J_b} \sin(x_1 + x_2) \right) \\
&\quad + \frac{mgh}{J_b} \left(\frac{-K_s}{J_b} x_2 + \frac{mgh}{J_b} \sin(x_1 + x_2) \right) \cos(x_1 + x_2) - \frac{mgh}{J_b} (x_3 + x_4)^2 \sin(x_1 + x_2)
\end{aligned}$$

On pose donc $v = \dot{z}_4$.

Prépa.13 On a fais les calculs en Prépa.13 , on peut donc réaliser le schéma bloc suivant :

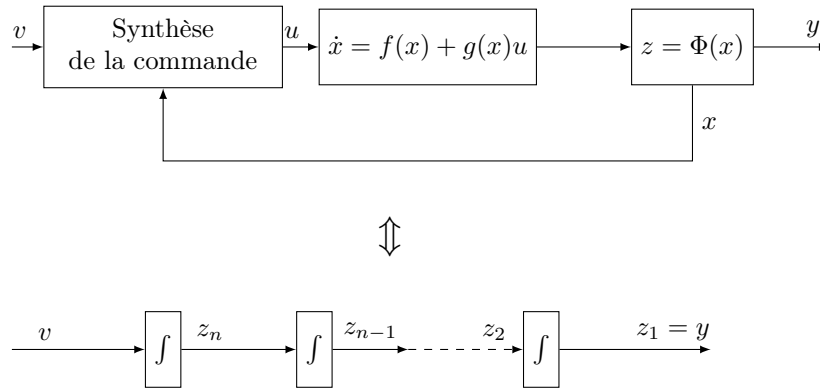


FIGURE 4 – Forme normale

Manip.2 Pour réaliser le bouclage linéarisant, on utilise le fichier transmis au cours de TP au groupe (mon implémentation ne donnait pas de résultat attendu malgré les nombreux réglages effectués).

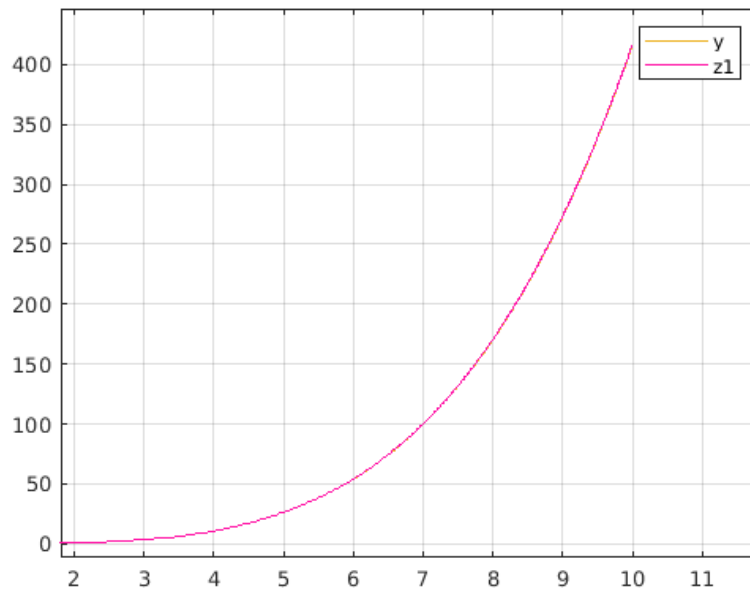


FIGURE 5 – Sortie du modèle et du bouclage

Les sorties issues du modèle non linéaire et du changement de variable sot identique, on a bien $y = z_1$.

Conclusion Dans ce TP on a mis en place une modélisation non linéaire d'un système et utiliser une bouclage linéarisant pour pouvoir construire un asservissement précis et rapide. Par manque de temps je n'ai pas pu mettre en place la dernière partie concernant la planification de trajectoire, qui sera par ailleurs étudié dans le TP2.