Exercice 1 : Asservissement par synthèse d'un correcteur RST

On considère la fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{1}{p(1+\tau p)}$$

Rappel : (TD précédent)

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{B(z)}{A(z)} \\ &= \frac{b_1 z + b_0}{(z-1)(z-D)} \quad \text{avec} \quad D = e^{-T_e/2} \\ &= \frac{b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0} \\ n &= deg(A) = 2 \\ m &= deg(B) = 1 \end{aligned}$$

1. Il y a plusieurs façon de représenter le correcteur RST :
   - $\nu(z) = -\frac{S(z)}{R(z)} Y(z) + \frac{T(z)}{R(z)} E(z)$
     Les conditions de causalité sont alors : $\tau \leq p$ et $\sigma \leq p$.

   - $\nu(z) = \frac{S}{R}[-Y(z) + \frac{T}{S} E(z)]$
     Causalité : $\tau \leq p$ et $\sigma \leq p$.

   - $\nu(z) = \frac{T}{R}[-\frac{S}{T} Y(z) + E(z)]$
     Causalité : $\tau \leq p$ et $\sigma \leq p$.

2. On a : $Y(p) = G(p)[\nu(p) + P(p)]$, $P(p) = \frac{P_0}{p}$ et $\nu(p) = B_0(p)\nu^*(p)$

$$\begin{aligned} Y(p) &= G(p)[\nu(p) + P(p)] \\ &= G(p)[B_0(p)\nu^*(p) + \frac{P_0}{p}] \\ &= \frac{1 - e^{-T_e p}}{p} G(p)\nu^*(p) + G(p)\frac{P_0}{p} \end{aligned}$$

On pose $A(p) = \frac{G(p)}{p}$, et on a après transformée inverse de Laplace :

$$y(t) = (a * \nu^*)(t) - (a * \nu^*)(t - T_e) + a(t)P_0$$

après discrétisation on obtient :

$$y_k = a_k * \nu_k - a_{k-1} * \nu_{k-1} + a_k P_0$$

après transformée en z on a alors :

$$\begin{aligned} Y(z) &= A(z)\nu(z) - z^{-1}A(z)\nu(z) + A(z)P_0 \\ &= (1-z^{-1})A(z)\nu(z) + A(z)P_0 \\ &= G(z)\nu(z) + (1-z^{-1})A(z)(1-z^{-1})^{-1}P_0 \\ &= G(z)\nu(z) + G(z)P_0\frac{z}{z-1} \\ Y(z) &= G(z)(\nu(z)+p(z)) \end{aligned}$$

3. Calcul de R et S.
On considère l'exigence 1 du cahier des charges :
$p_{1,2} = \omega_0(-\xi \pm j\sqrt{1-\xi^2})$, avec $\omega_0 = 1.5$ et $\xi = 0.7$
$p_3 = -3\omega_0\xi$

Comme $z_i = e^{T_e p_i}$, avec $\Omega = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$,
$z_1 = e^{-T_e\omega_0\xi}(cos(\Omega T_e) + jsin(\Omega T_e))$
$z_2 = \overline{z_1}$
$z_3 = e^{-3\omega_0\xi T_e}$

En boucle fermée, l'asservissement considéré donne en posant $G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$,

$$Y(z) = \frac{BT}{AR+BS}E(z) + \frac{BR}{AR+BS}p(z)$$

On pose $H_d(z) = \frac{B_d(z)}{\Pi_d(z)} = \frac{BT}{AR+BS}$, avec $deg(\Pi_d) = q$ et $deg(B_d) = \mu$. Les pôles (continus) imposés par le cahier des charges conduisent à la forme suivante pour le polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned} \Pi_d(z) &= (z-z_1)(z-z_2)(z-z_3) \\ &= z^3 + C_2z^2 + C_1z + C_0 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} C_0 &= z_1z_2z_1 = -e^{-5\omega_0\xi T_e} \\ C_1 &= z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = (e^{-2\xi\omega_0T_e} + 2e^{-4\xi\omega_0T_e}cos(\Omega T_e)) \\ C_2 &= -z_1 - z_2 - z_3 = -(e^{-3\xi\omega_0T_e} + 2e^{-\xi\omega_0T_e}cos(\Omega T_e)) \end{aligned}$$

On s'intéresse à l'exigence 2 du cahier des charges : Pour $E(z) = 0$ i.e $e_k = 0$, et $P(z) = P_0\frac{z}{z-1}$,

$$\lim_{\to\infty} y_k = 0$$

Ainsi, avec le théorème de la valeur finale on a :

$$\begin{aligned} \lim_{z\to1}\frac{z-1}{z}Y(z) = \lim_{z\to1}\frac{BR}{AR+BS}P_0 = 0 &\Leftrightarrow \lim_{z\to1}B(z)R(z) = 0 \\ &\Leftrightarrow R(z) = (z-1)^l\tilde{R}(z)\text{avec, } l \geq 1 \end{aligned}$$

Par simplicité, on prend donc $l = 1$.

$$\frac{B(z)T(z)}{A(z)R(z) + B(z)S(z)} = \frac{B_d(z)}{\Pi_d(z)}$$

donc $B(z)T(z) = B_d(z)$ et $A(z)(z-1)\tilde{R}(z) + B(z)S(z) = \Pi_d(z)$
donc avec $\tilde{A}(z) = (z-1)A(z)$,

$$\boxed{\tilde{A}(z)\tilde{R}(z) + B(z)S(z) = \Pi_d(z)}$$

Soit $\tilde{n} = deg(\tilde{A}) = n + 1$ et $\tilde{\rho} = deg(\tilde{R})$

1) Égalité des degrés : $deg(\tilde{A}\tilde{R}) = deg(AR) < deg(BS)$ par causalité, donc

$$\tilde{n} + \tilde{\rho} = q = 3$$

2) Nombre d'inconnues = nombre d'équations :
$\tilde{R}$ monique $\rightarrow \tilde{\rho}$ inconnues
S non monique $\rightarrow \sigma + 1$ inconnues
Π_d monique $\rightarrow q$ inconnues
donc on a

$$\tilde{\rho} + \sigma + 1 = q$$

3) Causalité du correcteur $\frac{S(z)}{R(z)}$, donc on a nécessairement $\sigma \leq \rho = \tilde{\rho} + 1$ d'où on a

$$\sigma = \tilde{n} - 1 \leq \tilde{\rho} + 1 = q - \tilde{n} + 1$$

donc

$$q \geq 2\tilde{n} - 2 = 4$$

Or, on avait déterminé $q = 3$, donc il faut donc introduire $A_0(z)$ un polynôme auxiliaire/observable de degrés k qui doit être monique dans le numérateur et le dénominateur. Les racines de $A_0(z)$ sont choisies plus rapide que z_1, z_2, et z_3 (d'au moins une décade). On pose donc : $\frac{BT}{AR+BS} = \frac{B_d}{\Pi_d}\frac{A_0}{A_0}$ d'où :

$$AR + BS = \Pi_d A_0$$
$$\tilde{A}\tilde{R} + BS = \Pi_d A_0$$

1) Égalité des degrés

$$\tilde{n} + \tilde{\rho} = q + k \text{ avec, } q = 3 \text{ donné}$$

2) Nombre d'inconnues = nombre d'équations

$$\tilde{\rho} + \sigma + 1 = q + k$$

3) Causalité

$$\tilde{\rho} \geq \sigma - 1$$

Avec 1) et 2),

$$\sigma = \tilde{n} - 1 = 2$$

Avec 3) et 1)

$$-\tilde{n} + q + k \geq \tilde{n} - 2$$

$$k \geq 2\tilde{n} - 2 - q = k_{min} = 1$$

Bilan :
On a donc :

$$k \geq 1, \quad \sigma = 2, \quad \tilde{\rho} \geq 1$$

Idéalement, on prend $k = 1$ et la racine de A_0 doit être prise plus rapide (au moins une décade) que z_1, z_2 et z_3

$$A_0(z) = z - z_0 \quad \text{avec} \quad z_0 = e^{-30\xi\omega_0 T_e}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(z) &= z + r_0 \\
S(z) &= s_2 z^2 + s_1 z + s_0 \\
\tilde{\Pi}_d(z) &= \Pi_d(z) A_0(z) \\
&= (z^3 + C_2 z^2 + C_3 z + C_0)(z - z_0) \\
&= z^4 + \tilde{C}_3 z^3 + \tilde{C}_2 z^2 + \tilde{C}_1 z + \tilde{C}_0 \\
\text{avec} \quad \tilde{C}_3 &= C_2 - z_0 \\
\tilde{C}_2 &= C_1 - z_0 C_2 \\
\tilde{C}_1 &= C_0 - z_0 C_1 \\
\tilde{C}_0 &= -z_0 C_0
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\tilde{A}(z) &= (z-1)A(z) = (z-1)(z^2 + a_1 z + a_0) \\
&= z^3 + \tilde{a_2} z^2 + \tilde{a}_1 z + \tilde{a}_0 \\
\text{avec} \quad \tilde{a_2} &= a_1 - 1 \\
\tilde{a}_1 &= a_0 - a_1 \\
\tilde{a}_0 &= -a_0
\end{aligned}$$

L'équation $\tilde{A}\tilde{R} + BS = \Pi_d A_0$ peut donc se réécrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 \\ \tilde{a}_2 & b_0 & b_1 & 0 \\ \tilde{a}_1 & 0 & b_0 & b_1 \\ \tilde{a}_0 & 0 & 0 & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 \\ s_2 \\ s_1 \\ s_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_3 - \tilde{a}_2 \\ \tilde{C}_2 - \tilde{a}_1 \\ \tilde{C}_1 - \tilde{a}_0 \\ \tilde{C}_0 \end{bmatrix}$$

La résolution de cette équation donne les polynômes

$$\begin{aligned}
R(z) &= (z-1)(z + r_0) \\
S(z) &= s_2 + z^2 + s_1 z + s_0
\end{aligned}$$

Il ne reste qu'à déterminer le polynôme $T(z)$.

$$\text{Rappel : } B(z)T(z) = B_d(z)A_0(z)$$
$$\frac{BT}{AR+BS} = \frac{B_d}{\Pi_d}\frac{A_0}{A_0}$$

On note : $\mu = degB_d$, et on a $k = degA_0$
Par causalité,
$$deg(B_dA_0) = \mu + k \leq deg(\Pi_d A_0) = q + k$$
$$\mu \leq k = 3$$

En boucle ouverte : on a le retard $n - m = 2 - 1 = 1$

$$q - \mu \geq 1 \longrightarrow \mu \leq q - 1 = 2$$

L'égalité des numérateurs donne alors $m + \tau = \mu + k$ donc

$$\mu = m + \tau - k = \tau$$

$$\tau \leq 2$$

Avec $B_d(z) = B(z)\tilde{B}(z)$,

$$BT = B_dA_0$$
$$B(z)T(z) = B(z)\tilde{B}(z)A_0(z)$$
$$T(z) = \tilde{B}(z)(z - z_0)$$

Solution la plus simple pour $\tau \leq 2$: $\tilde{B}(z) = 1$ donc $B_d(z) = B(z)$, et

$$T(z) = A_0(z)$$

4.

$$Y(z) = \frac{B_d(z)}{\Pi_d(z)}E(z) + \frac{B_p(z)}{\Pi_d(z)}P(z)$$

En l'absence de perturbation, on veut que pour

$$E(z) = \frac{E_0 z}{z-1}$$

on ait :

$$Y(z) = \frac{E_0 z T_e}{(z-1)^2}$$

donc

$$\frac{B_d(z)}{\Pi_d(z)} = \frac{T_e}{z-1} \longrightarrow \Pi_d(z) = z - 1$$

Compensation du zéro de B(z) avec $B(z) = b_1 z + b_0 = b_1(z + \frac{b_0}{b_1})$ or, $b_0 = 0.2(1 - 2D)$, et $b_1 = 0.2D$, donc $\frac{b_0}{b_1} = \frac{1-2D}{D}$ avec $D = e{-}1$ donc $\frac{b_0}{b_1} = \frac{0.052848}{0.073576} < 1$ donc le zéro est stable et on peut le compenser.
$H_d(z) = \frac{T_e}{z-1} \rightarrow$ retard $= q - \mu = 1 \geq m - n$. OK.

Modèle admissible :

$$\frac{BT}{AR + BS} = \frac{B_d}{\Pi_d}\frac{A_0}{A_0}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} y_n = 0 &\Leftrightarrow \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z}\frac{BR}{AR+BS}p(z) = 0 \\
&\Leftrightarrow \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z}\frac{BR}{\Pi_d A_0}p(z) = 0 \\
&\Leftrightarrow \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z}\frac{BR}{(z-1)A_0(z)}\frac{p_0 z}{z-1} = 0
\end{aligned}$$

Il faut, $R(z) = (z-1)^l \tilde{R}(z)$ avec $l \geq 2$. On prend $l = 2$.

$$\begin{aligned}
B(z) &= b_1(z + \frac{b_0}{b_1}) \\
&= B_s(z)B_{ns}(z) \\
\text{avec} \quad B_s(z) &= (z + \frac{b_0}{b_1}) \\
\text{et} \quad B_{ns}(z) &= b_1
\end{aligned}$$

on a donc :

$$\frac{B_s B_{ns} T}{AR + B_s B_{ns} S} = \frac{B_d A_0}{\Pi_d A_0}$$

Comme $R = (z-1)^2\tilde{R}(z)$, en posant $\tilde{R} = B_s\hat{R}$ ($\hat{R}$ monique) et $\tilde{A}(z) = (z-1)^2 A(z)$ on obtient

$$\frac{B_{ns}T}{\tilde{A}\hat{R} + B_{ns}S} = \frac{B_d A_0}{\Pi_d A_0}$$

D'où l'équation diophantine

$$\tilde{A}\hat{R} + B_{ns}S = \Pi_d A_0$$

On pose $\hat{\rho} = deg(\hat{R})$ et $\tilde{n} = deg(\tilde{A}) = n + l = 4$.

1) Égalité des degrés :

$$\tilde{n} + \hat{\rho} = q + k$$

2) Nombre d'inconnues = nombre d'équations :

$$r\hat{h}o + \sigma + 1 = q + k$$

3) Causalité :

$$\rho \geq \sigma$$

Avec 1) et 2),

$$\sigma = \tilde{n} - 1 = 3$$

Comme $\rho = l + \hat{\rho} + m_S$,

$$\sigma = \tilde{n} - 1 \ leql + m_S + \hat{\rho} = l + m_S + q + k - \tilde{n}$$

$$\rightarrow k \geq k_{min} = 3$$

On choisit $k = 3$, et on a alors $\hat{\rho} = 0$.
Par conséquent, on a $\hat{R}(z) = 1$ et on prend $S(z) = s_3 z^3 + s_2 z^2 + s_1 z^1 + s_0$.
L'équation se ramène donc à

$$\tilde{A} + B_{nS} S = \Pi_d A_0$$
$$S = \frac{1}{b_1}(\Pi_d A_0 - \tilde{A})$$

Comme $\Pi_d A_0 = (z-1)A_0$ avec $A_0 = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = z^3 + C_2 z^2 + C_1 z + C_0$

$$\Pi_d A_0 = z^4 + \gamma_3 z^3 + \gamma_2 z^2 + \gamma_1 z + \gamma_0$$

avec $\gamma_3 = c_2 - 1, \gamma_2 = c_1 - c_2, \gamma_1 = c_0 - c_1, \gamma_0 = -c_0$.

De plus, $\tilde{A}(z) = (z-1)^2 A(z) = z^4 + \tilde{a}_3 z^3 + \tilde{a}_2 z^2 + \tilde{a}_1 z^1 + \tilde{a}_0$
avec $\tilde{a}_3 = a_1 - 2, \tilde{a}_2 = 1 - 2a_1 + a_0, \tilde{a}_1 = a_1 - 2a_0, \tilde{a}_0 = a_0$

On a donc,

$$\forall j = 0, ..., 3, \quad s_j = \frac{\gamma_j - \tilde{a}_j}{b_1}$$

Il reste donc à déterminer le polynôme $T(z)$.