

TP2 : Commande d'un bras à liaison flexible par bouclage linéarisant

Pierre-Antoine Comby

25 novembre 2023

1 Modélisation

Prépa.1

- On applique le PFD au chariot {1} de masse M_c :

$$M_c \overrightarrow{a_{\{1\}}} = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{T} - C_d \overrightarrow{v_{\{1\}}} + M_c \overrightarrow{g} \quad (1)$$

Soit en projetant :

$$M_c \ddot{d} = F + T \sin(\theta) - C_d \dot{d} \quad (2)$$

- On fait de même pour la masse pendulaire {2} m :

$$m \overrightarrow{a_{\{2\}}} = -\overrightarrow{T} + m \overrightarrow{g} \quad (3)$$

et il vient directement :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -T \sin(\theta) \\ m\ddot{z} = -T \cos(\theta) + mg \end{cases} \quad (4)$$

- et un théorème du moment cinétique sur l'arbre donne (avec α angle du tambour par rapport au chariot) :

$$J\ddot{\alpha} = -C + bT - C_r \dot{\alpha} \quad (5)$$

soit :

$$J \frac{\ddot{r}}{b} = -C + bT - C_r \frac{\dot{r}}{b} \quad (6)$$

Prépa.2 Comme $b \ll r$ on a :

$$\begin{cases} x = r \sin \theta + d \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (7)$$

soit :

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta + \dot{d} \\ \dot{z} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \ddot{x} = \ddot{r} \sin \theta + 2\dot{r} \dot{\theta} \cos \theta + r \ddot{\theta} \cos \theta - r \dot{\theta}^2 \sin \theta + \ddot{d} \\ \ddot{z} = \ddot{r} \cos \theta - 2\dot{r} \dot{\theta} \sin \theta - r \ddot{\theta} \sin \theta - r \dot{\theta}^2 \cos \theta \end{cases} \quad (8)$$

Prépa.3 en remplaçant dans le système (1) donné dans l'énoncé on trouve :

$$\begin{cases} m(\ddot{r} \sin \theta + 2\dot{r} \dot{\theta} \cos \theta + r \ddot{\theta} \cos \theta - r \dot{\theta}^2 \sin \theta + \ddot{d}) &= -T \sin \theta \\ m(\ddot{r} \cos \theta - 2\dot{r} \dot{\theta} \sin \theta - r \ddot{\theta} \sin \theta - r \dot{\theta}^2 \cos \theta) &= -T \cos \theta + mg \end{cases} \quad (9)$$

A partir des identités trigonométriques on a :

$$\begin{cases} m\ddot{r} &= -m\ddot{d} \sin \theta + mr\dot{\theta}^2 - T + mg \cos \theta \\ r\ddot{\theta} &= -\ddot{d} \cos \theta - 2\dot{r} \dot{\theta} - g \sin \theta \end{cases} \quad (10)$$

Prépa.4 Des équations précédentes on en déduit le modèle d'état (en remplaçant l'expression de T par celle déduite de la prépa.3) :

$$\begin{cases} M_c \ddot{d} &= F + T \sin \theta - C_d \dot{d} \\ r \ddot{\theta} &= -\ddot{d} \cos \theta - 2\dot{r} \dot{\theta} - g \sin(\theta) \\ (m + \frac{J}{b^2}) \ddot{r} &= -\frac{C}{b} - \frac{C_r \dot{r}}{b^2} - m\ddot{d} \sin \theta - mr\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta \end{cases} \quad (11)$$

Prépa.5 On linéarise autour de $d = D, r = R, \theta = 0, T = mg, F = 0, C = mbg$:

$$\begin{cases} M_c(\Delta d + D) &= (\Delta F) + T \sin(\Delta\theta) - C_d(\Delta d + D) \\ (\Delta r + R)(\Delta\theta) &= -(\Delta d + D) \cos(\Delta\theta) - 2(\Delta r + R)(\Delta\theta) - g \sin(\Delta\theta) \\ \left(m + \frac{J}{b^2}\right)(\Delta r + R) &= -\frac{\Delta C + mgb}{b} - \frac{C_r(\Delta r + R)}{b^2} - m(\Delta d + D) \sin(\Delta\theta) - m(\Delta r + R)(\Delta\theta)^2 + mg \cos(\Delta\theta) \end{cases} \quad (12)$$

En faisant une approximation au 1er ordre on a :

$$\begin{cases} M_c \Delta d &= \Delta F + mg \Delta\theta - C_d \Delta d \\ R \Delta\theta + \Delta d &= -g \Delta\theta \\ \left(m + \frac{J}{b^2}\right) \ddot{\Delta r} &= -\frac{\Delta C + mgb}{b} - \frac{C_r \Delta r}{b^2} - mg \Delta\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_c \ddot{\Delta d} &= \Delta F + mg \Delta\theta - C_d \dot{\Delta d} \\ R \Delta\theta + \Delta d &= -g \Delta\theta \\ \left(m + \frac{J}{b^2}\right) \ddot{\Delta r} &= -\frac{\Delta C}{b} - \frac{C_r \Delta r}{b^2} \end{cases} \quad (13)$$

On en deduit le modèle d'état linéarisé :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta d \\ \Delta r \\ \Delta\theta \\ \dot{\Delta d} \\ \dot{\Delta r} \\ \dot{\Delta\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{mg}{M_c} & -\frac{C_d}{M_c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{C_r}{J+mb^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\left(1 + \frac{m}{M_c}\right) \frac{g}{R} & \frac{C_d}{RM_c} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta d \\ \Delta r \\ \Delta\theta \\ \Delta d \\ \Delta r \\ \Delta\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{M_c} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\frac{J}{b} + mb^2} \\ -\frac{1}{RM_c} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta F \\ \Delta C \end{bmatrix}$$

2 Commande linéaire

Manip.1 Dans le cas linéaire on construit la matrice de Kallman :

$$C = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B \quad A^4B \quad A^5B]$$

avec la fonction matlab **rank(Com)** on vérifie que le système est bien commandable. On a un rang de 6, le système linéaire est bien commandable.

Manip.2 avec la fonction **damp(eig(A))** on trouve les valeurs propres et constantes de temps de la matrice d'état

Pole	Damping	Time Constant	
		(rad/TimeUnit)	(TimeUnit)
0.00e+00	-1.00e+00	0.00e+00	Inf
-1.82e-04 + 1.48e+00i	1.23e-04	1.48e+00	5.50e+03
-1.82e-04 - 1.48e+00i	1.23e-04	1.48e+00	5.50e+03
-3.64e-03	1.00e+00	3.64e-03	2.75e+02
0.00e+00	-1.00e+00	0.00e+00	Inf
-1.54e-01	1.00e+00	1.54e-01	6.50e+00

TABLE 1 – Valeur propre et pulsation caractéristique

On a donc la pulsation propre du système : $\omega_0 = 1.48$ rad/s. On choisi alors d'imposer les poles suivant, (d'après le cahier des charges) en ammortissant le pole double conjugué principal :

$$p_{1,2} = \omega_0(\xi \pm j\sqrt{1-\xi^2}) = 1.48(0.5 \pm \sqrt{1-0.5^2})$$

$$K = 10^5 \cdot \begin{bmatrix} 0.4288 & 0.1360 & 2.2614 & 0.0215 & 0.0506 & -0.9539 \\ -0.0035 & -0.0261 & -0.0026 & 0.0019 & -0.0182 & 0.0195 \end{bmatrix}$$

Manip.3 Pour le terme de précommande, si l'on veut un gain statique unitaire, il faut ¹ :

$$\eta = \frac{-1}{C_1(A - BK)^{-1}B_1} = 4.1039 \cdot 10^4$$

Avec C_1 et B_1 lignes et colonnes des matrices C et B propre à Δd

Manip.4 L'ajout d'une composante intégrale va rendre notre système précis. On construit alors la fonction de transfert grace à MATLAB : On obtient le diagramme de bode suivant :

1. cf UE 421

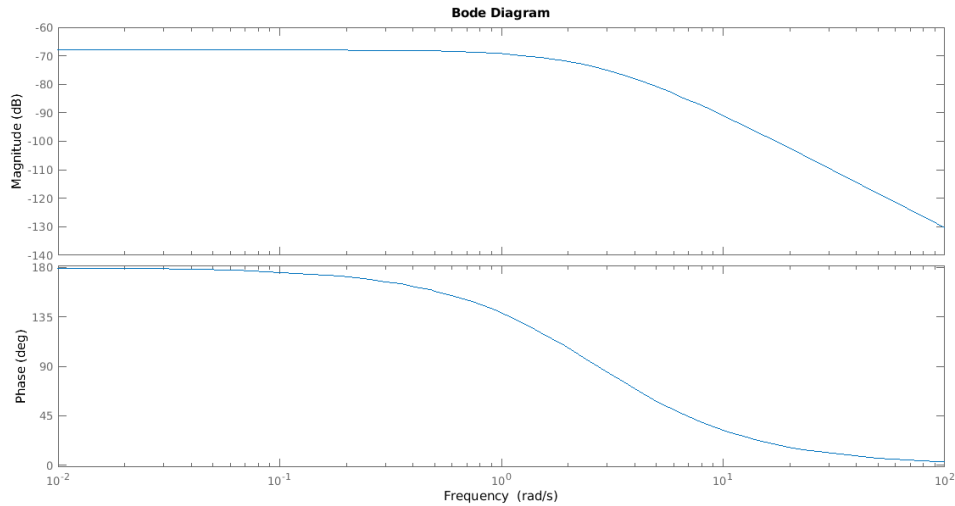


FIGURE 1 – Diagramme de bode système en boucle ouverte

Manip.5 La marge de phase est nulle, on met en place un correcteur intégrale pur qui apporte stabilité et précision au système :

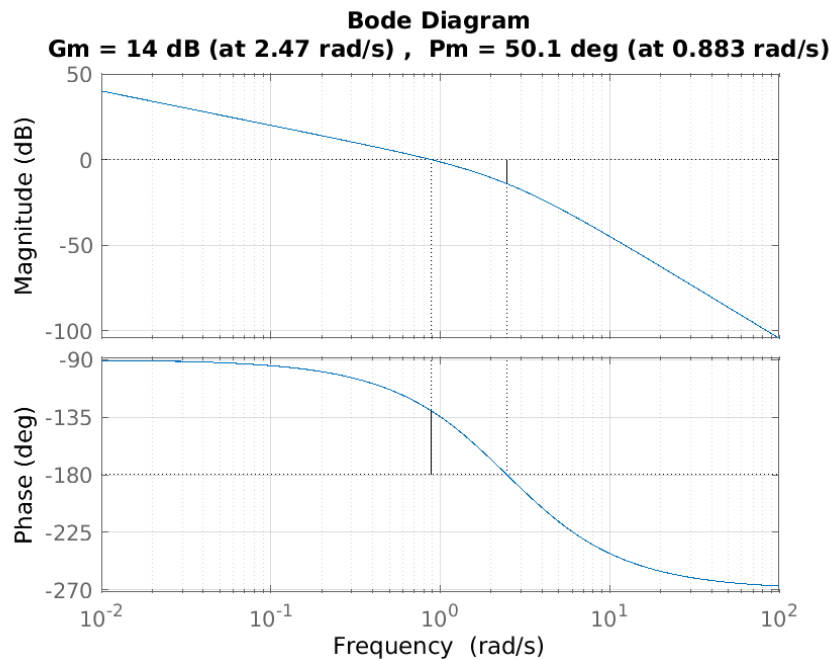


FIGURE 2 – Marge de Phase et Gain pour $T_i = 4 \cdot 10^{-4}$

sur la figure?? on relève une marge de phase de 50° , le cahier des charge est respecté.

Manip.6 Avec une commande $\Delta d_c = 20\text{m}$ on obtient la figure suivante :

On remarque que le système n'est plus précis, il faut recalculer le gain, ici manuellement, pour obtenir un système précis. On atteint les limites du modèle linéaire, pour des commandes plus grande ou plus complexe il va falloir tenir compte des non-linéarités du système.

Manip.7 On applique le correcteur au modèle non linéaire, en ayant recentrer le retour d'état autour de son point de fonctionnement. On obtient une sortie chaotique, mais douce. comme on peut le voir sur la figure ??

Manip.8 Un changement de consigne apporte un comportement différents :

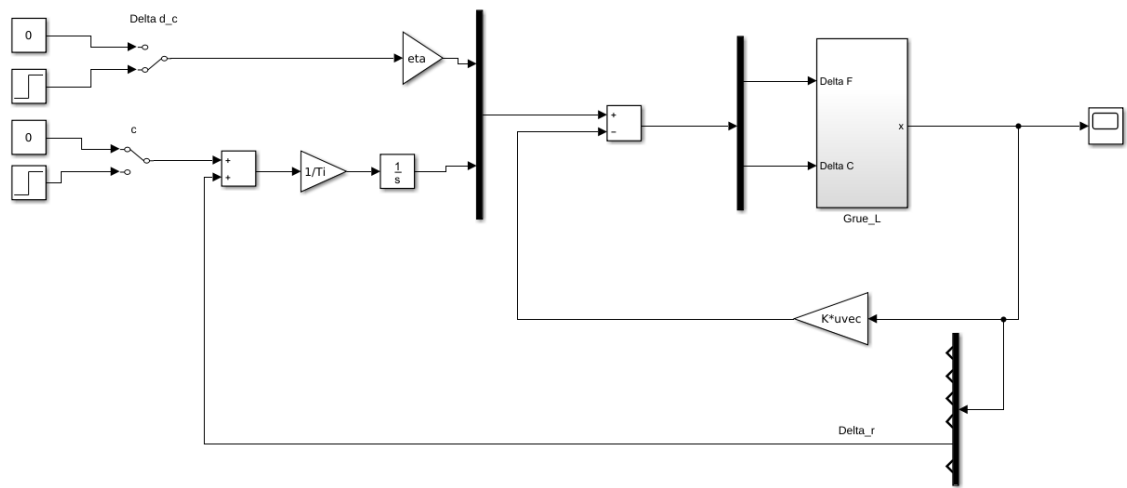


FIGURE 3 – Modèle Linéaire compléter par le correcteru par retour d'état.

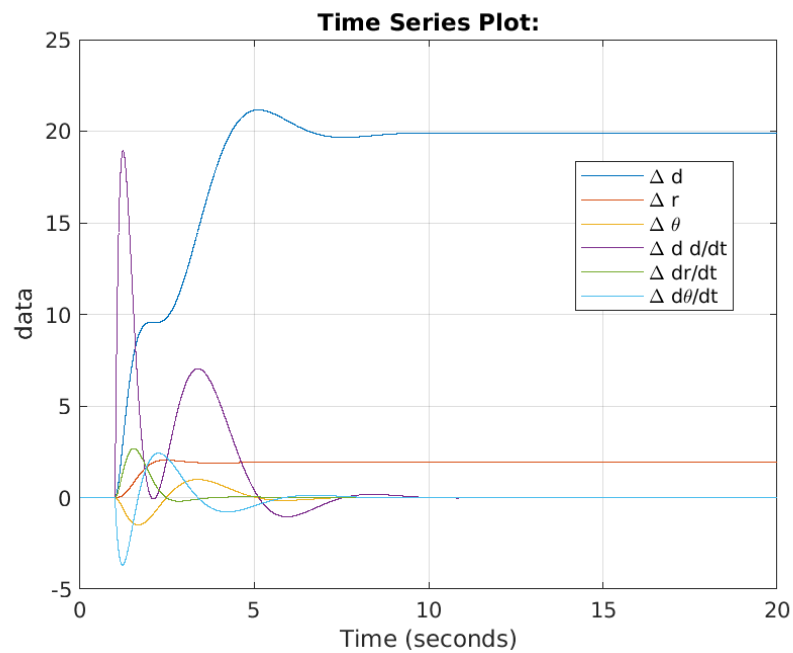
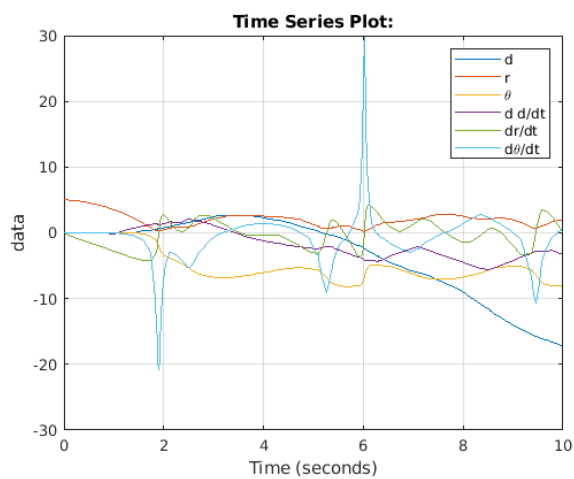
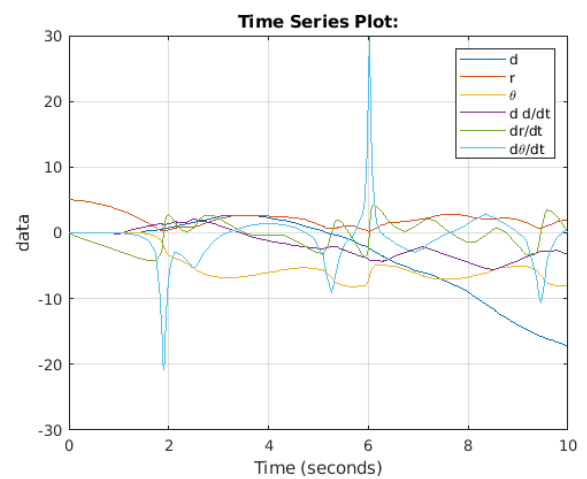


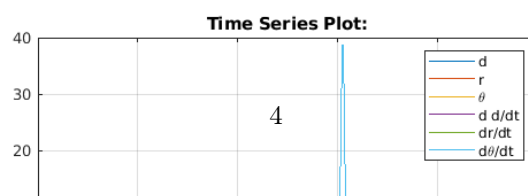
FIGURE 4 – sortie du système pour une commande de 20m



(a) $d_c = 10$



(b) $d_c = 100$



3 Commande non linéaire hiérarchisante

3.1 commande à grand gain

Prépa.6 On planifie la trajectoire avec :

$$\begin{aligned} D_c(t) &= (1 - \phi(t))D_{ini} + \phi(t)D_{fin} \\ R_c(t) &= (1 - \phi(t))R_{ini} + \phi(t)R_{fin} \end{aligned} \quad (14)$$

Avec les conditions initiales et finales sur les positions $\phi(0) = 0$ et $\phi(\Delta t) = 1$ et celles sur la vitesse et l'accélération $\forall i = 1, 2 \frac{d^i \phi(t)}{dt^i} \Big|_{t=0} = 0$ et $\frac{d^i \phi(t)}{dt^i} \Big|_{t=\Delta t} = 0$ On a 6 conditions à respecter, donc on choisit un polynôme de degré 5 :

$$\phi(t) = a_5 t^5 + a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$$

Les conditions initiales imposent $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ on a donc le polynôme : $\phi(t) = a_5 t^5 + a_4 t^4 + a_3 t^3$. Alors :

$$\begin{aligned} \alpha(\Delta t) = 1 &\Rightarrow a_5 \Delta t^5 + a_4 \Delta t^4 + a_3 \Delta t^3 = 1 \\ \frac{d\alpha(t)}{dt} \Big|_{t=\Delta t} &= 0 \Rightarrow 5a_5 \Delta t^4 + 4a_4 \Delta t^3 + 3a_3 \Delta t^2 = 0 \\ \frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} \Big|_{t=\Delta t} &= 0 \Rightarrow 20a_5 \Delta t^4 + 12a_4 \Delta t^3 + 6a_3 \Delta t^2 = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

En résolvant le système on obtient :

$$a_5 = \frac{6}{\Delta t^5}, \quad a_4 = \frac{-15}{\Delta t^4}, \quad a_3 = \frac{10}{\Delta t^3}$$

Prépa.7 à partir de l'équation (2.4) de l'énoncé on a :

$$\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{R}{g} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}} \quad (16)$$

Prépa.8 on a les commandes :

$$F = \frac{M_c}{\epsilon_d} (\dot{D}_c - \dot{d}) \text{ et } C = -\frac{J/b + mb}{\epsilon_r} (\dot{R}_c - \dot{r}) \quad (17)$$

soit le modèle :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \Delta d \\ \Delta r \\ \frac{mg}{M_c} \Delta \theta - \frac{C_d}{M_c} \Delta d + \frac{1}{\epsilon_d} (\dot{D}_c - \dot{d}) \\ \frac{-C_r}{J+mb^2} + \frac{F_c - r}{\epsilon_r} \\ \Delta \theta \end{bmatrix} \quad (18)$$

D'où :

$$\begin{aligned} \ddot{\Delta d} &= -\left(\frac{C_d}{M_c} + \frac{1}{\epsilon_d}\right) \Delta d + \frac{\dot{D}_c}{\epsilon_d} + \frac{mg}{M_c} \Delta \theta \\ \ddot{\Delta r} &= -\left(\frac{C_r}{J+mb^2} + \frac{1}{\epsilon_r}\right) \Delta r + \frac{\dot{R}_c}{\epsilon_r} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\text{On peut poser } \tau_d = \frac{1}{\frac{C_d}{M_c} + \frac{1}{\epsilon_d}}$$

$$\text{et } \tau_r = \frac{1}{\frac{C_r}{J+mb^2} + \frac{1}{\epsilon_r}}$$

En considérant $\epsilon_d \ll 1$ et $\epsilon_r \ll 1$ on a $\tau_d \simeq \epsilon_d$ et $\tau_r \simeq \epsilon_r$

Prépa.9 On doit prendre ϵ_d et ϵ_r suffisamment petit devant la pulsation du système ω_0 , pour avoir une commande qui puisse compenser suffisamment vite les oscillations du système.

Manip.9 La commande est réalisé comme sur la figure ?? . On obtient alors les sorties de la figure ??

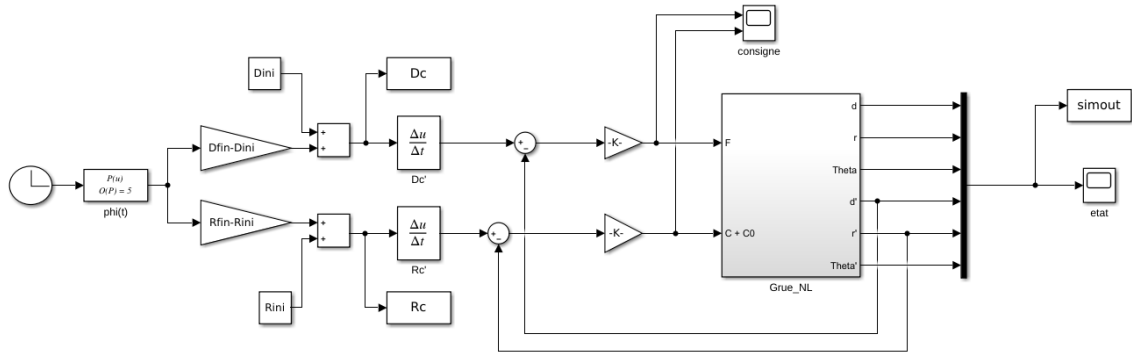
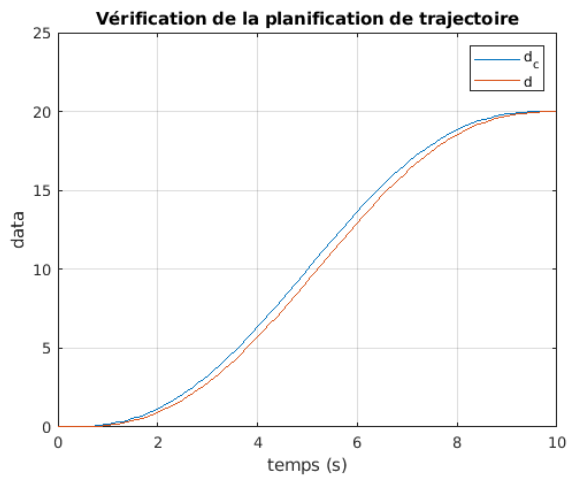
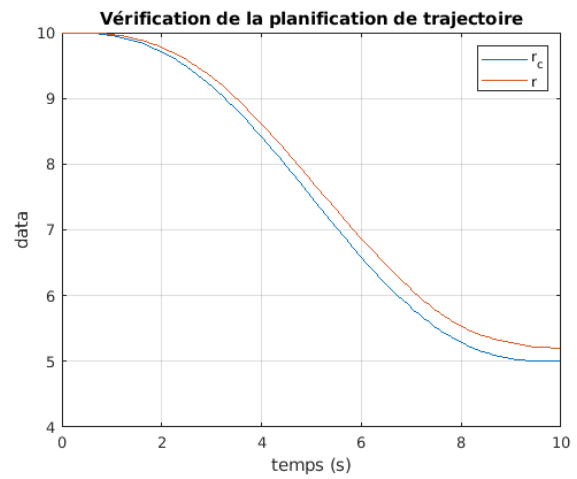


FIGURE 6 – Élaboration de la commande pour la poursuite de trajectoire



(a) poursuite sur d



(b) Poursuite sur r

FIGURE 7 – Commande en poursuite de trajectoire

sur la figure ?? on remarque que la poursuite est plutôt bien respecté pour d , mais celle sur r conduit à un écart final non nul, cela est d'autant plus vrai si $\epsilon_d = \epsilon_r$ devient grand comme sur la figure ??.

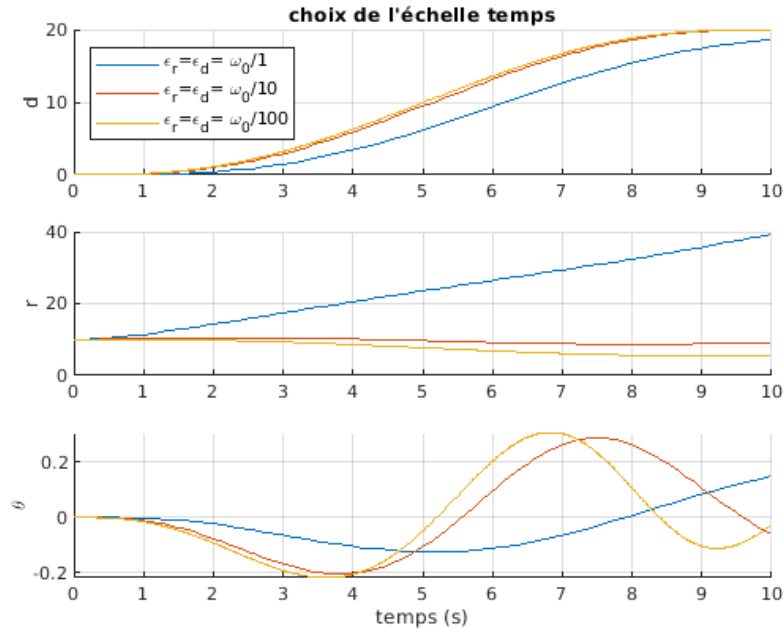


FIGURE 8 – Influence de ϵ sur la trajectoire réelle

Manip.10 On fait varier la masse dans la synthèse de l'asservissement, en ayant choisi $\epsilon_d = \epsilon_r = \omega_0/100$.

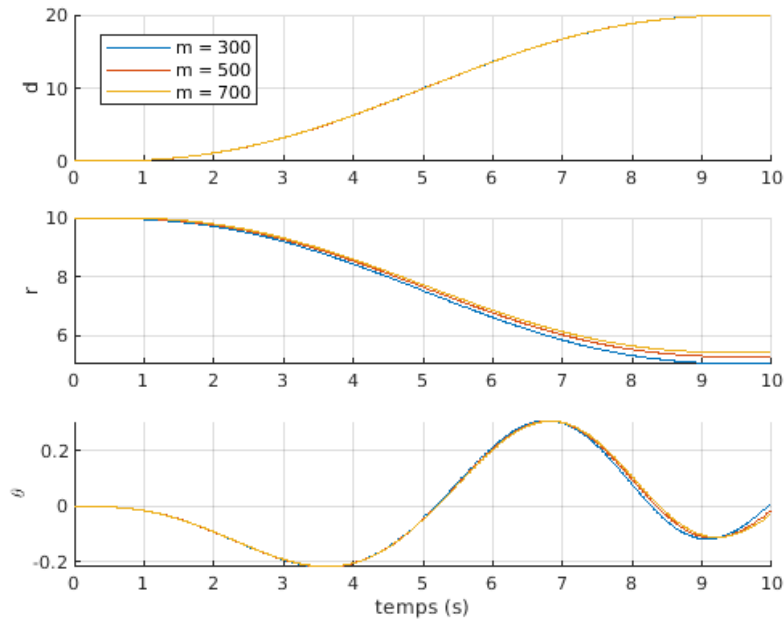


FIGURE 9 – Robustesse face à une perturbation de la masse

On remarque qu'une variation de 200kg n'entraîne qu'un écart d'une 30aine de centimètre avec la consigne ce qui est largement acceptable.

Manip.11 En étudiant des variation sur C_r et C_d on ne remarque aucun changement pour $\epsilon = \omega_0/100$ ou $\epsilon = \omega_0/10$.

La commande suivant le modèle précédement décrit est donc très robuste aux pertubations , tant que sa dynamique est rapide devant celle du système.

3.2 Platitude

Prépa.10 On montre d'abord que le système est plat pour les sorties (x, z) ,

$$\begin{cases} x = r \sin \theta + d \\ m\ddot{x} = -T \sin \theta \end{cases} \Rightarrow d = x + r \frac{m\ddot{x}}{T} \quad (20)$$

Or on a :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -T \sin \theta \\ m\ddot{z} = -T \cos \theta + mg \end{cases} \Rightarrow T = m\sqrt{\ddot{x}^2 + (g - \ddot{z})^2} \quad (21)$$

$$\begin{cases} x = r \sin \theta + d \\ z = r \cos \theta \end{cases} \Rightarrow r^2 = (x - d)^2 + z^2 \quad (22)$$

Soit :

$$\begin{cases} x - d = -r \frac{m\ddot{x}}{T} \\ r^2 = (x - d)^2 + z^2 \end{cases} \Rightarrow r^2 = \frac{z^2}{1 - \frac{\ddot{x}^2}{\ddot{x}^2 + (g - \ddot{z})^2}} \quad (23)$$

Or $\theta = \arccos \frac{\ddot{z}}{r}$ on a donc :

$$r = \sqrt{\frac{z^2}{1 - \frac{\ddot{x}^2}{\ddot{x}^2 + (g - \ddot{z})^2}}}, d = x + \sqrt{\frac{z^2}{(g - \ddot{z})^2}} \ddot{x}, \quad \text{et } \theta = \arccos \sqrt{1 - \frac{\ddot{x}^2}{\ddot{x}^2 + (g - \ddot{z})^2}} \quad (24)$$

Les variables d'états dépendent donc que des sorties et de leurs dérivées, de même pour la commande

$$\begin{aligned} C &= bT - C_r \frac{\dot{r}}{b} - J \frac{\ddot{r}}{b} \\ F &= M_c \ddot{d} - T \sin \theta + C_d \dot{d} \end{aligned} \quad (25)$$

Le système est plat, avec les sorties plates x, z

Prépa.11 Les conditions imposées sont :

$$\begin{cases} d(t=0) = D_{ini} \\ r(t=0) = R_{ini} \\ \theta(t=0) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} d(t=\Delta t) = D_{fin} \\ r(t=\Delta t) = R_{fin} \\ \theta(t=\Delta t) = 0 \end{cases} \quad (26)$$

Ce qui se transpose aux coordonnées :

$$\begin{cases} x(t=0) = D_{ini} \\ z(t=0) = R_{ini} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(t=\Delta t) = D_{fin} \\ z(t=\Delta t) = R_{fin} \end{cases} \quad (27)$$

On pose donc :

$$\begin{aligned} x_c(t) &= (1 - \phi_2(t))D_{ini} + \phi_2(t)D_{fin} \\ z_c(t) &= (1 - \phi_2(t))R_{ini} + \phi_2(t)R_{fin} \end{aligned} \quad (28)$$

De manière analogue à la préparation 6 on a les conditions initiales et finales sur les positions et leur dérivées :

$$\phi_2(0) = 0, \quad \phi_2(\Delta t) = 1, \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad \left. \frac{d^i \phi_2(t)}{dt^i} \right|_{t=0} = 0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{d^i \phi_2(t)}{dt^i} \right|_{t=\Delta t} = 0$$

Pour satisfaire les 8 conditions on choisit un polynôme d'ordre 7 :

$$\phi_2(t) = a_7 t^7 + a_6 t^6 + a_5 t^5 + a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \quad (29)$$

Les conditions initiales imposent $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$ et les conditions finales donnent :

$$\begin{aligned} \phi_2(\Delta t) &= 1 = a_7 \Delta t^7 + a_6 \Delta t^6 + a_5 \Delta t^5 + a_4 \Delta t^4 \\ \left. \frac{d\phi_2(t)}{dt} \right|_{t=\Delta t} &= 0 = 7a_7 \Delta t^6 + 6a_6 \Delta t^5 + 5a_5 \Delta t^4 + 4a_4 \Delta t^3 \\ \left. \frac{d^2 \phi_2(t)}{dt^2} \right|_{t=\Delta t} &= 0 = 42a_7 \Delta t^5 + 30a_6 \Delta t^4 + 20a_5 \Delta t^3 + 12a_4 \Delta t^2 \\ \left. \frac{d^3 \phi_2(t)}{dt^3} \right|_{t=\Delta t} &= 0 = 210a_7 \Delta t^4 + 120a_6 \Delta t^3 + 60a_5 \Delta t^2 + 24a_4 \Delta t \end{aligned} \quad (30)$$

On a donc :

$$a_7 = \frac{-20}{\Delta t^7}, \quad a_6 = \frac{70}{\Delta t^6}, \quad a_5 = \frac{-84}{\Delta t^5}, \quad a_4 = \frac{35}{\Delta t^4} \quad (31)$$

Prépa.12 On impose une trajectoire parabolique ainsi, au niveau de l'obstacle : $x_c = x_H \implies z_c = z_H$.
On pose donc :

$$z_c = a(x_c - x_h)^2 + z_h$$

En évaluant cette expression à la position initiale on a :

$$a = \frac{R_{ini} - z_H}{(D_{ini} - x_H)^2}$$

Pour déterminer x_H on utilise la position finale et on a :

$$x_H = \frac{D_{ini} + \sqrt{\frac{R_{ini} - z_H}{R_{ini} - z_H} D_{fin}}}{1 + \sqrt{\frac{R_{ini} - z_H}{R_{fin} - z_H}}} \quad (32)$$

Manip.12 Cette fois ci on utilise les sorties plates, et on a donc :

$$\begin{cases} \dot{D}_c(t) &= \frac{d}{dt} \left(x_c - \frac{\ddot{x}_c z_c}{\ddot{z}_c - g} \right) \\ \dot{R}_c(t) &= \frac{d}{dt} \sqrt{z_c^2 - \left(\frac{\ddot{x}_c z_c}{\ddot{z}_c - g} \right)^2} \end{cases}$$

On construit alors les différents blocs de synthèse de la commande par sortie plates :

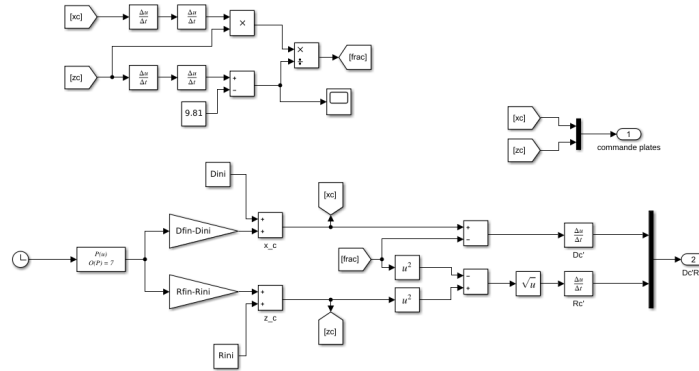


FIGURE 10 – Synthèse de la trajectoire rectiligne par sortie plate

On obtient alors les résultats suivants sur la commande des sorties plates (figure ??).

Remarque : Pour mener la simulation à bien il a fallu modifier les paramètres d'intégrations (pas fixe de $1e-4$, méthode d'Euler) qui influait sur la régularité des sorties et commandes.

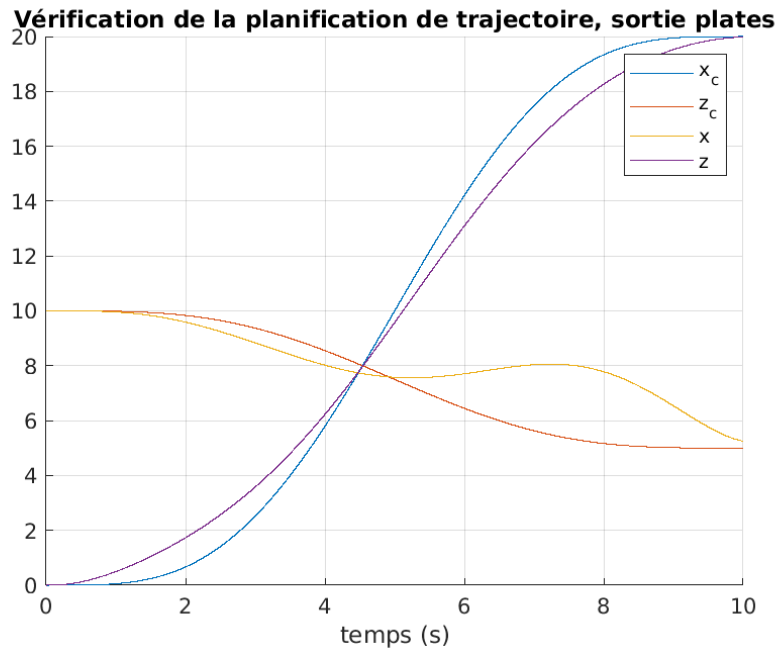


FIGURE 11 – Sorties plates commandées, $\epsilon = \omega_0/100$

Manip.13 De meme on mets en place la synthèse de la parabole de commande

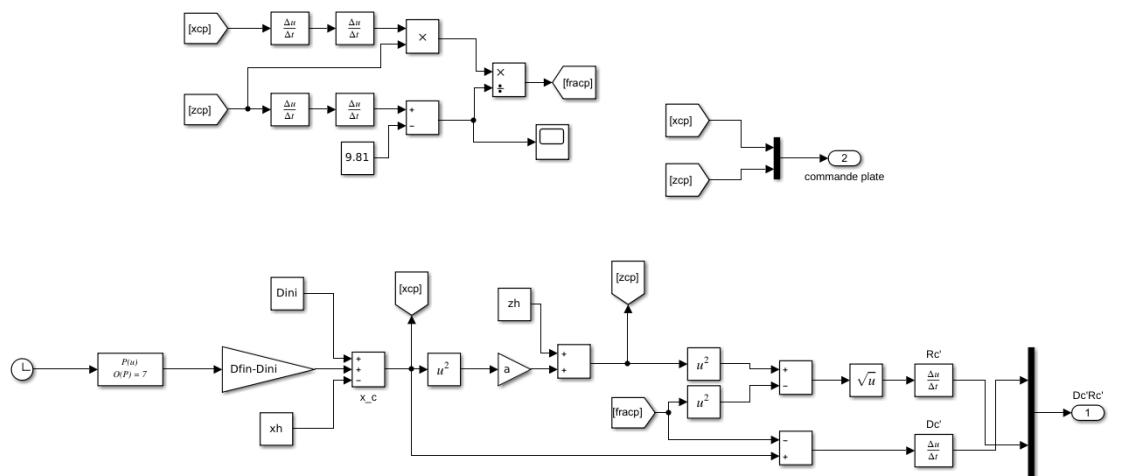


FIGURE 12 – Synthèse des sorties plates

On obtient alors les resultats suivants sur la commande des sorties plates (figure ??).

Remarque : Meme paramètres d'intégration que précédement

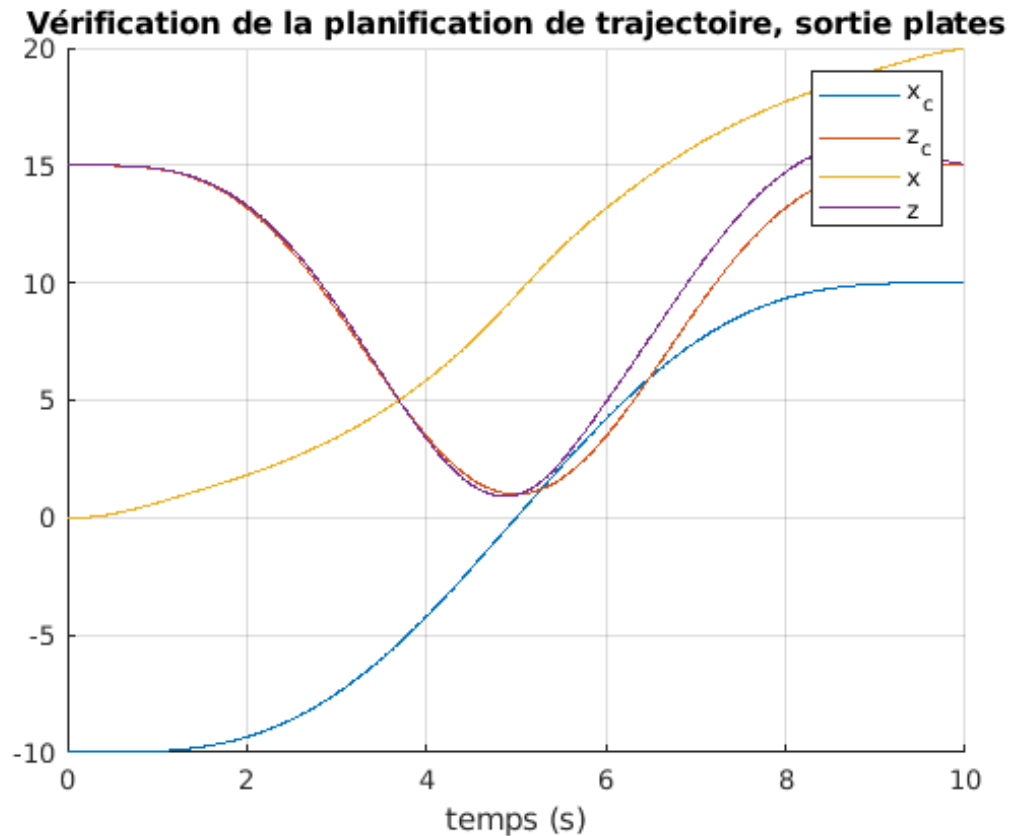


FIGURE 13 – Sorties plates commandé en parabole

Les resultats sont peux satisfaisant,mais la consigne est globalement respectée, il faudrait investiguer plus en profondeur la modélisation réalisée et comparée avec la commande du système réel, ce qui n'a pu être fait par manque de temps.

Conclusion

Dans ce TP nous avons modélisé le système présenté d'abord de manière linéaire, ce qui ne s'est pas avéré assez suffisant pour des commandes qui nous faisait sortir de la plage de linéarisation. En prenant en compte les non-linéarités on peut commander de manière plus précise et plus robuste le modèle, et réaliser une poursuite de trajectoire correcte. Avec l'utilisation des sorties plates on a pu aller plus on simulait le contournement d'un obstacle.