On envoie un signal x(t) binaire de valeur a de probabilité p et de valeur -a de probabilité 1-p. On reçoit $y(t) = x(t) + b(t)$ avec $x(t)$ la partie utile du signal et $b(t)$ le bruit.

A chaque instant t, $x(t)$ et $b(t)$ sont des VA réelles notées X_t et B_t, et indépendantes. Le bruit B_t suit une loi gaussienne $N(0, \sigma^2)$.

On observe à l'instant t_0, $Y_0 = X_0 + B_0$ que l'on compare au seuil S. La détection, c'est le cas particulier de l'estimation mais avec un nombre discret de valeurs possibles.

1. Avec p = 0.5, les valeurs $+a$ et $-a$ interviennent avec la même probabilité. Le bruit est centré. Le problème est symétrique. Il n'y a pas de raison de privilégier les valeurs strictement positive, ou négative. On pose donc $S = 0$.

2. B est une VA gaussienne centrée et d'écart type σ :

$$f_B(b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-\frac{b^2}{2\sigma^2})$$

3. X est certain et $Y = X + B$ avec $B : N(0, \sigma^2)$, donc on peut intuiter que Y suit la loi gaussienne : $N(X, \sigma^2)$.
   Sinon : Théorème de changement de variable : $f_Y(y) = f_B(b)|\frac{db}{dy}|_{btqy=X+b} = f_B(y - X)$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2})$$

4.

$$\begin{aligned} F_Y(S) = Pr[Y < S] &= \int_{-\infty}^{S} f_Y(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{S} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2})dy \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{S-X}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-\frac{1}{2}t^2)dt \\ &= P(\frac{S-X}{\sigma}) \end{aligned}$$

   On en déduit donc

$$\begin{aligned} F_Y(X + 3\sigma) &= P(3) = 0.9987 \\ F_Y(X - 3\sigma) &= 1 - P(3) = 0.0013 \end{aligned}$$

5. On cherche $\frac{a^2}{\sigma^2}$

$$\begin{aligned} P_X = E[X^2] &= pa^2 + (1-p)(-a)^2 = a^2 \\ P_B = E[B^2] &= \int_{\mathbb{R}} \frac{b^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp(-\frac{1}{2}\frac{b^2}{\sigma^2})db = \sigma^2 \end{aligned}$$

Ainsi, $\frac{a^2}{\sigma^2}$ est égal au rapport signal sur bruit (RSB).

6. Comme X et B sont indépendants, si on fixe $X = a$, on se ramène au cas précédent avec X certain, donc
$$f_{Y/X=a}(y) = f_B(y-a)$$
Ainsi,
$$\begin{aligned} Pr[Y < S/X = a] &= \int_{-\infty}^{S} f_{Y/X=a}(y)dy \\ &= P(\frac{S-a}{\sigma} \end{aligned}$$

7. On commet une erreur si
   - on envoie a (probabilité p) et qu'on reconstruit $-a$
   - ou si on envoie $-a$ (probabilité $1-p$ et qu'on reconstruit a

$$\begin{aligned} P_\epsilon &= Pr[(Y < S \quad \text{et} \quad X = a) \quad \text{ou} \quad (Y > S \quad \text{et} \quad X = -a)] \\ &= Pr[(Y < S \quad \text{et} \quad X = a)] + Pr[(Y > S \quad \text{et} \quad X = -a)] \\ &= Pr[(Y < S/X = a)]Pr[X = a] + Pr[(Y > S/X = -a)]Pr[X = -a] \\ P_\epsilon &= P(\frac{S-a}{\sigma})p + (1 - P(\frac{S+a}{\sigma}))(1-p) \end{aligned}$$

Remarque :
Si $S \to +\infty$ (i.e. on reconstruit toujours $-a$), alors on a $P_\epsilon \to p$ (i.e. la probabilité d'erreur correspond à la celle d'envoyer un a).
Si $S \to -\infty$ (i.e. on reconstruit toujours a), alors on a $P_\epsilon \to 1-p$ (i.e. la probabilité d'erreur correspond à la celle d'envoyer un $-a$).

8. Condition nécessaire pour avoir un optimum (attention à vérifier aux bornes) :
$$\frac{dP_\epsilon}{dS}|_{S=S_{opt}} = 0$$
$$\begin{aligned} \frac{dP_\epsilon}{dS}|_{S=S_{opt}} = 0 &\leftrightarrow \frac{p}{\sigma}P(\frac{S-a}{\sigma}) - \frac{1-p}{\sigma}P(\frac{S+a}{\sigma}) = 0 \\ &\leftrightarrow pe^{-\frac{1}{2}(\frac{S-a}{\sigma})^2} - (1-p)e^{-\frac{1}{2}(\frac{S+a}{\sigma})^2} = 0 \\ &\leftrightarrow S_{opt} = \frac{\sigma^2}{2a}\ln(\frac{1-p}{p}) \end{aligned}$$
Pour montrer qu'il s'agit d'un minimum, on peut calculer $\frac{d^2P_\epsilon}{dS^2}|_{S=S_{opt}}$ et vérifier que c'est positif, ou vérifier que $\frac{dP_\epsilon}{dS}$ change de signe en S_{opt}.

9. Lorsque p tend vers 1, S_{opt} tend vers $-\infty$. En effet, si on envoie toujours un a, pour reconstruire uniquement a, il faut toujours être au dessus du seuil.
Lorsque p tend vers 0, alors S_{opt} tend vers $+\infty$.

10. Lorsque $p = \frac{1}{2}$, $S_{opt} = 0$.

$$\begin{aligned}
P_\epsilon &= \frac{1}{2}P(-\frac{a}{\sigma}) + (1 - P(\frac{a}{\sigma}))\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}(1 + P(-\frac{a}{\sigma}) - P(\frac{a}{\sigma})) \\
P_\epsilon &= P(-\frac{a}{\sigma})
\end{aligned}$$

Lorsque a/σ "grand" (bon RSB), alors $P_\epsilon = P(-\frac{a}{\sigma}) = 1 - P(\frac{a}{\sigma}) \to 0$. Si le bruit est faible, l'erreur aussi.
Lorsque a/σ "petit", alors $P_\epsilon \to \frac{1}{2}$. Si le bruit est élevée, on a autant de chance d'avoir la bonne valeur que de se tromper.

$a/\sigma = 3 : P_\epsilon = 1 - P(3) = 0.0013$

11. Pour diminuer la probabilité d'erreur, on peut par exemple réaliser deux mesures au lieu d'une sur chaque intervalle de temps : cela permet de "moyenner" l'effet du bruit. En effet, pour deux VA Y_1 et Y_2 décrites par $N(0, \sigma^2)$, on a pour la VA $Y = \frac{Y_1+Y_2}{2}$ un écart type de $\sigma' = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$.