
TP2 : Asservissement échantillonné, méthode de ZDAN

I/ Introduction et Préparation

On souhaite corriger par la méthode de ZDAN le processus de fonction de transfert

$$G(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

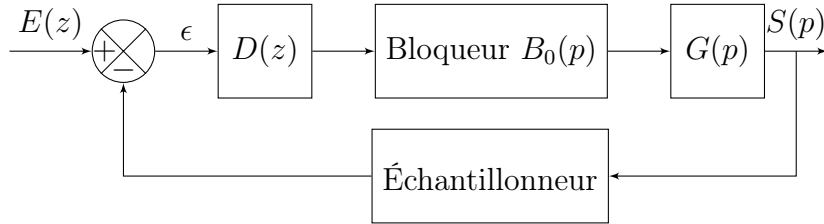


FIGURE 1 – Asservissement considéré

Préparation 1

On cherche à expliciter la fonction de transfert en z du processus

$$G(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Ce processus est associé au bloqueur d'ordre 0 modélisé par

$$B_0(p) = \frac{1 - e^{-T_e p}}{p}$$

$$\begin{aligned} H(z) &= Z\{B_0(p)G(p)\} = (1 - z^{-1})Z\{^*L^{-1}\{\frac{G(p)}{p}\}\} \\ &= (1 - z^{-1})Z\{^*L^{-1}\{\frac{K}{p(1 + \tau p)}\}\} \\ &= K(1 - z^{-1})Z\{^*L^{-1}\{\frac{1}{p} - \frac{\tau}{1 + \tau p}\}\} \\ &= K(1 - z^{-1})Z\{1 - e^{-\frac{nT_e}{\tau}}\} \\ &= K(1 - z^{-1})\left(\frac{z}{z - 1} - \frac{z}{z - D}\right) \text{ où } D = e^{-T_e/\tau} \\ &= K\left(1 - \frac{z - 1}{z - D}\right) \\ H(z) &= K(1 - D)\frac{z^{-1}}{1 - Dz^{-1}} \end{aligned}$$

$$H(z) = k_1 \frac{z^{-1}}{1 - az^{-1}} \quad \text{avec} \quad k_1 = K(1 - e^{-\frac{T_e}{\tau}}) \quad \text{et} \quad a = e^{-\frac{T_e}{\tau}}$$

Préparation 2

On utilise un correcteur de la forme :

$$D(z) = K_d \frac{1 - az^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + bz^{-1})}$$

- **Calcul de la fonction de transfert en boucle fermée**

En boucle ouverte,

$$T_{BO}(z) = D(z)H(z) = k_1 K_d \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + bz^{-1})}$$

On a donc en boucle fermée :

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{T_{BO}(z)}{1 + T_{BO}(z)} \\ &= \frac{k_1 K_d z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + bz^{-1}) + k_1 K_d z^{-1}} \\ &= \frac{k_1 K_d z^{-1}}{1 + z^{-1}(k_1 K_d + b - 1) - bz^{-2}} \end{aligned}$$

- **Erreur statique de position**

En utilisant le théorème de la valeur finale, avec une entrée échelon $E(z) = E_0 \frac{z}{z-1}$,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z) \frac{z}{z-1} E_0 \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{k_1 K_d z^{-1}}{1 + z^{-1}(k_1 K_d + b - 1) - bz^{-2}} E_0 \\ &= \frac{k_1 K_d}{1 + (k_1 K_d - 1 + b) - b} E_0 \\ &= E_0 \end{aligned}$$

On a donc bien une erreur statique de position nulle.

- On écrit la fonction de transfert en boucle fermée sous la forme suivante :

$$F(z) = \frac{Az^{-1}}{1 + Bz^{-1} + Cz^{-2}} \quad \text{avec} \quad A = k_1 K_d, \quad B = k_1 K_d + b - 1, \quad C = -b$$

Préparation 3

- On veut la fonction de transfert du second ordre :

$$M(p) = \frac{F_0}{1 + \frac{2m}{\Omega}p + \frac{p^2}{\Omega^2}} = \frac{\omega_0}{(p+x)^2 + \omega_0^2} = \frac{\frac{\omega_0}{\omega_0^2+x^2}}{\frac{p^2}{\omega_0^2+x^2} + \frac{2x}{\omega_0^2+x^2}p + 1}$$

On en déduit donc :

$$F_0 = \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + x^2}, \quad \Omega = \sqrt{\omega_0^2 + x^2} \quad \text{et} \quad m = \frac{x}{\Omega}$$

•

$$x = m\Omega, \quad \omega_0 = \Omega\sqrt{1 - m^2} \text{ pour } m < 1$$

- La transformée en z de la fonction de transfert $M(p)$ est

$$M(z) = \frac{ze^{-xT_e} \sin(\omega_0 T_e)}{z^2 - 2ze^{-xT_e} \cos(\omega_0 T_e) + e^{-2xT_e}}$$

Le dénominateur a pour déterminant $\Delta = 4e^{-2xT_e}(\cos^2(\omega_0 T_e) - 1) \leq 0$.

Les pôles sont donc

$$z_{1,2} = e^{-xT_e}(\cos(\omega_0 T_e) \pm j\sqrt{1 - \cos^2(\omega_0 T_e)}) = e^{-xT_e \pm j\omega_0 T_e}$$

- On veut que $M(z)$ et $F(z)$ aient les mêmes pôles :

$$\frac{Az^{-1}}{1 + Bz^{-1} + Cz^{-2}} = \frac{ze^{-xT_e} \sin(\omega_0 T_e)}{z^2 - 2ze^{-xT_e} \cos(\omega_0 T_e) + e^{-2xT_e}} = \frac{z^{-1}e^{-xT_e} \sin(\omega_0 T_e)}{1 - 2z^{-1}e^{-xT_e} \cos(\omega_0 T_e) + z^{-2}e^{-2xT_e}}$$

Donc en identifiant :

$$A = e^{-xT_e} \sin(\omega_0 T_e), \quad B = -2e^{-xT_e} \cos(\omega_0 T_e), \quad C = e^{-2xT_e}$$

- On a immédiatement

$$b = -e^{-2xT_e}$$

De plus, $B = k_1 K_d + b - 1 = -2e^{-xT_e} \cos(\omega_0 T_e)$ donc

$$K_d = \frac{1 - 2e^{-xT_e} \cos(\omega_0 T_e) + e^{-2xT_e}}{k_1}$$

Préparation 4

- On a le correcteur

$$D(z) = \frac{K_d - K_d a z^{-1}}{1 + (b - 1)z^{-1} - b z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

On transforme cette expression en équation de récurrence :

$$Y(z)(1 + (b - 1)z^{-1} - b z^{-2}) = X(z)(K_d - K_d a z^{-1})$$

$$y[n] = K_d x[n] - K_d a x[n - 1] + (1 - b)y[n - 1] + b y[n - 2]$$

- On en déduit donc :

$$A_1 = K_d, A_2 = -aK_d, B_1 = 1 - b, B_2 = b$$

- Applications numériques :

$$T_e = 50\mu s, m = 0,5, \Omega = 5000\text{rad/s}, \tau = 1\text{ms}, K = 2$$

$$a = 0.9512$$

$$A = 0.18957$$

$$A_1 = 0.56397$$

$$k_1 = 0.09754$$

$$B = -1.72379$$

$$A_2 = -0.53645$$

$$x = 2500 \text{ rad/s}$$

$$C = 0.7788$$

$$B_1 = 1.7788$$

$$\omega_0 = 4330\text{rad/s}$$

$$b = -0.7788$$

$$B_2 = -0.7788$$

$$K_d = 0.56397$$

- Avec un coefficient d'amortissement $m = 0.5$, on détermine $t_r\Omega = 5.3$ donc $t_r = 1,26 \text{ ms}$. Le premier dépassement est de $D_1 = 25\%$.

II/ Manipulation

Manipulation 1

Simulation du système analogique

Avec les valeurs calculées ci-dessus, en utilisant un pas d'intégration de 10^{-5}s et un schéma d'Euler d'ordre 1, on obtient la réponse indicielle suivante :

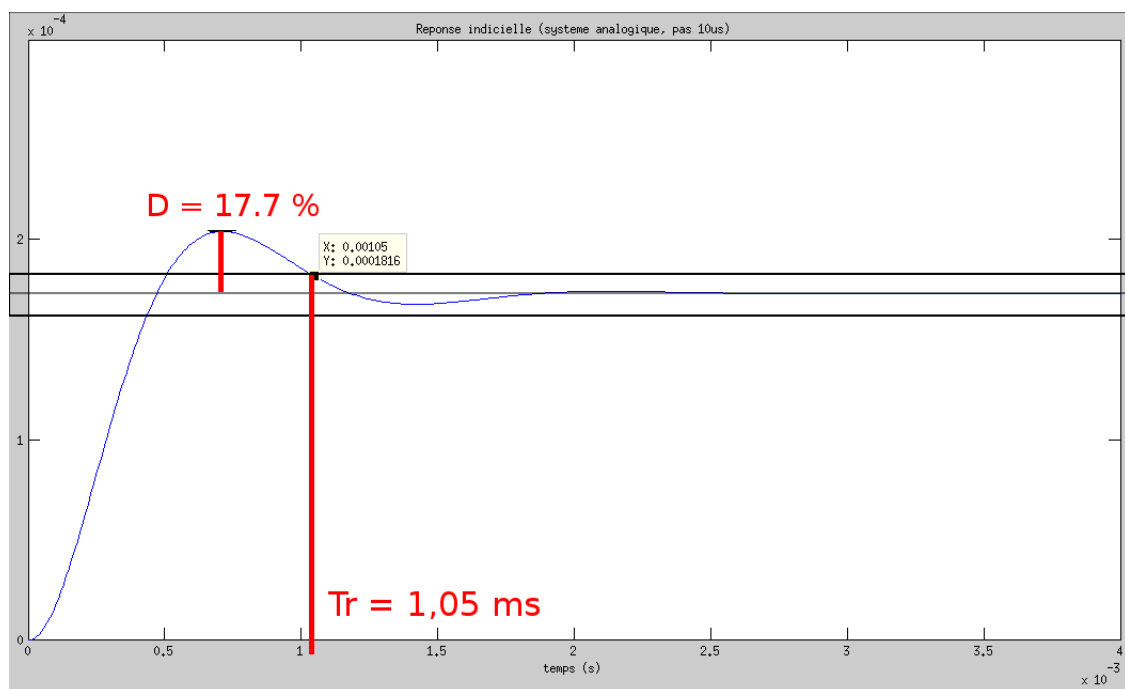
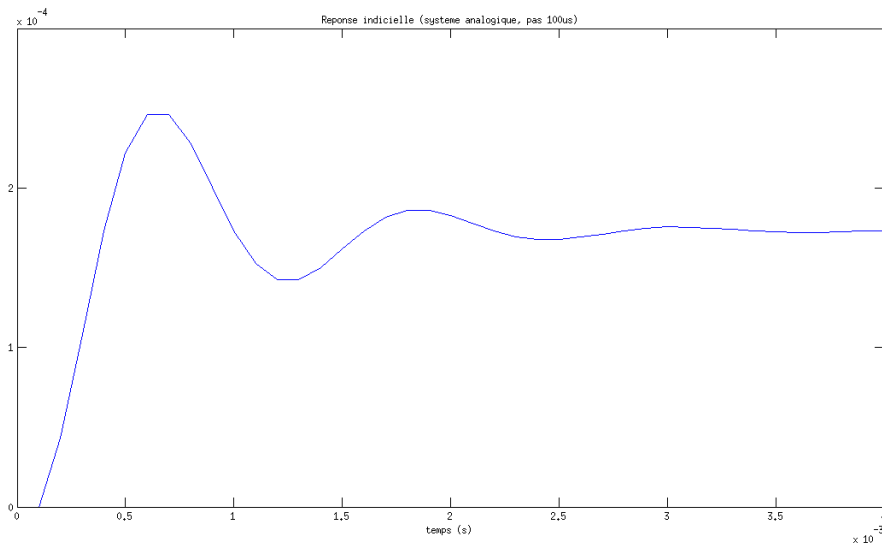
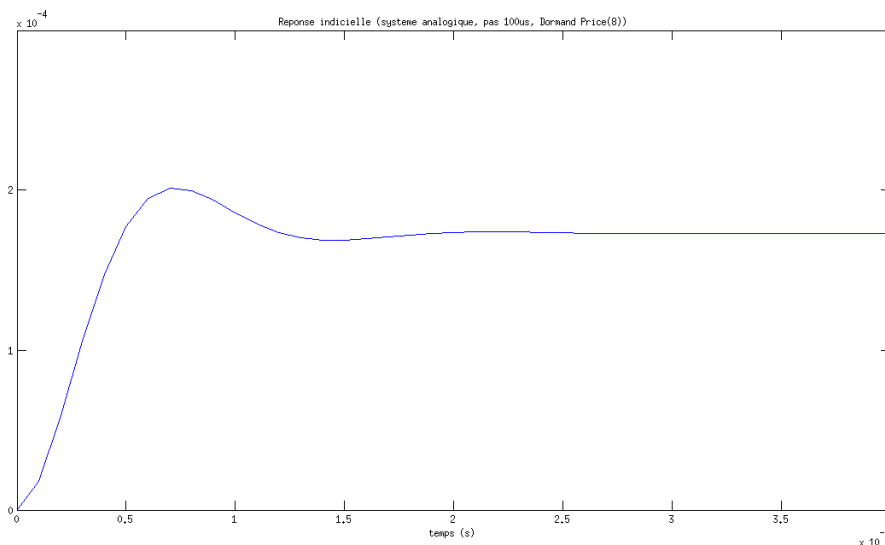


FIGURE 2 – Réponse indicielle du système analogique simulé

Si on diminue le pas d'intégration, alors la réponse calculée peut être très différente. Par exemple, avec un temps de 10^{-4} s, on a la réponse :



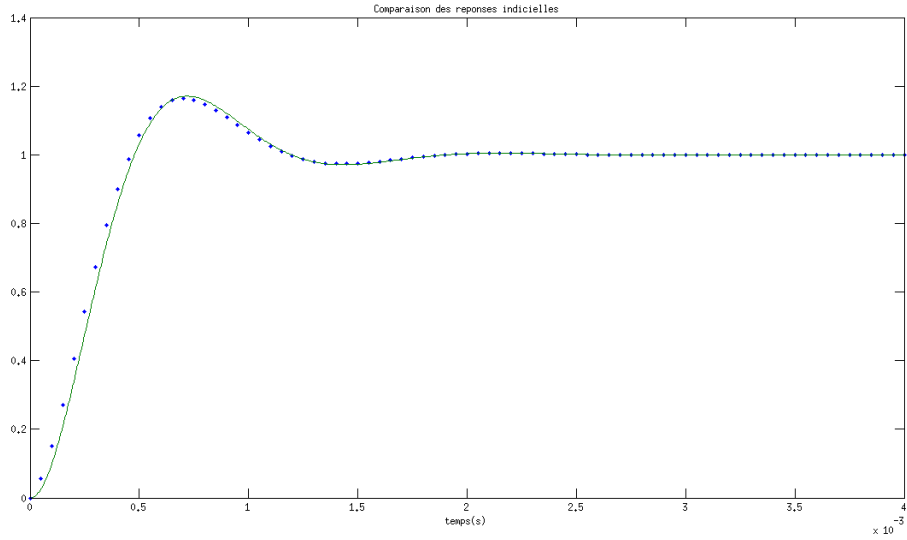
Si on prend un schéma d'intégration plus précis, sans changer le pas d'intégration, on peut obtenir une réponse satisfaisante. Par exemple, en prenant un schéma de Dormand-Price d'ordre 8, on obtient la réponse suivante, qui est similaire à celle obtenue précédemment.



Simulation de l'asservissement avec un correcteur numérique

On réalise l'asservissement avec le correcteur numérique. Les réponses du second ordre analogique et du second ordre numérique diffèrent d'un gain induit par l'échantillonnage. Pour les comparer, on peut donc les normaliser par leur gain statique.

La réponse du système numérique est très proche de celle du système analogique, mais les courbes ne se superposent pas tout à fait.



On réalise la simulation pour des valeurs différentes de T_e :

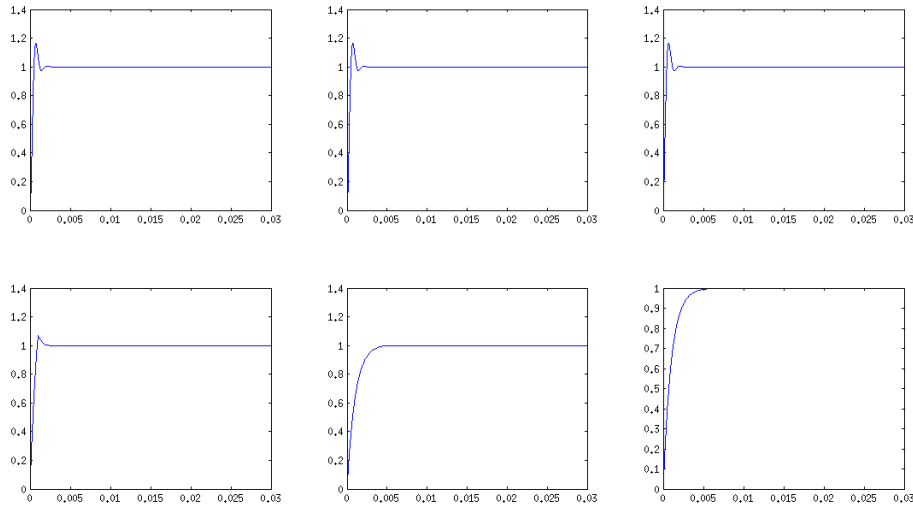
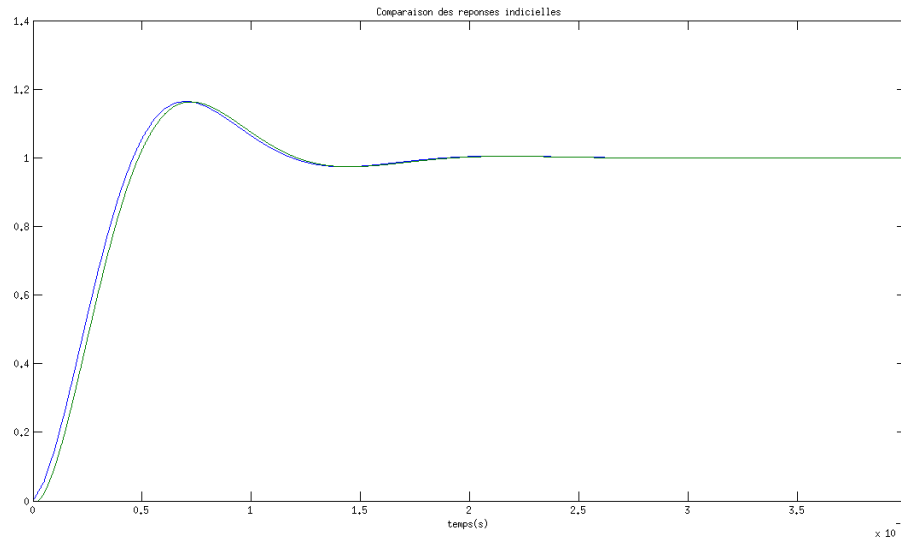
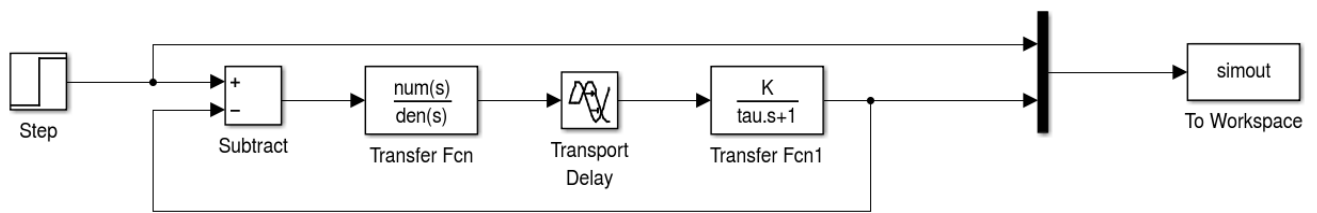


FIGURE 3 – Réponse de l'asservissement pour $T_e = 1\mu s, 10\mu s, 100\mu s, 1ms, 5ms, 10ms$

La variation de la période d'échantillonnage fait varier la valeur du premier dépassement. Lorsque T_e augmente et se rapproche de la période de Shannon $\frac{\pi}{\Omega}$, le dépassement diminue.

On avait remarqué que les réponses simulées avec $M(p)$ et $M(z)$ étaient légèrement différentes. Pour retrouver une réponse proche de celle de la boucle avec le correcteur numérique, en utilisant un modèle analogique, on approxime le bloqueur d'ordre zéro par un retard pur de $T_e/2$ et on utilise l'approximation de Tustin pour remplacer la fonction de transfert en z par une fonction de transfert en p .

Remarque : on utilise les fonctions de Matlab pour faire l'approximation de Tustin.



Les deux courbes ne sont pas superposées. L'approximation a cependant permis d'améliorer le modèle analogique vu au début du TP.

Manipulation 2

Grâce à la carte D-space on a pu remplacer la partie analogique simulée du système par une partie analogique réelle.

On retrouve bien les performances du système modélisé : $D = 17.3\%$ et $t_5\% = 1ms$ (voir figures en annexe).