



M1 E3A - VOIE ANDRÉ AMPÈRE

UE433

ELECTRONIQUE NUMÉRIQUE

POUR LA TRANSMISSION

Enseignant:

FRANÇOIS SAMMOUTH
JEAN-PIERRE BARBEAU

Rédigé par:

PIERRE-ANTOINE COMBY

école _____
normale _____
supérieure _____
paris—saclay _____

université
PARIS-SACLAY

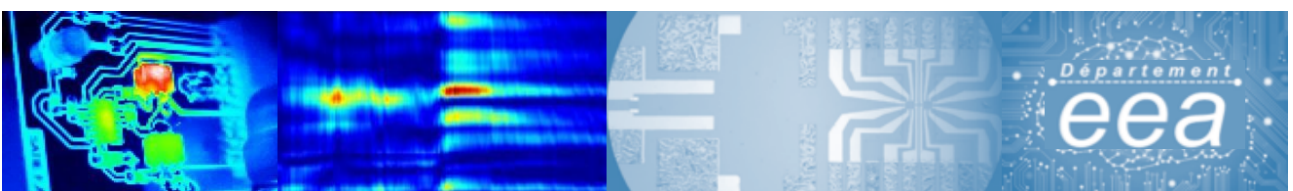
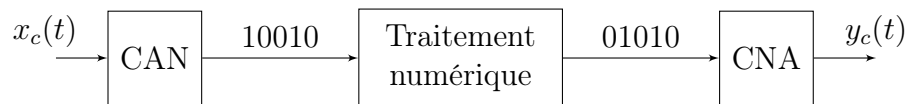


Table des matières

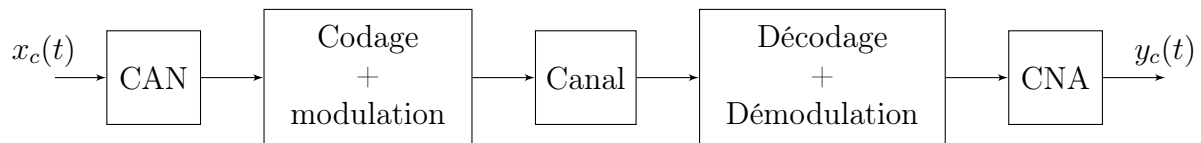
Introduction

Suite à l'UE 431 nous nous intéresserons dans cette UE aux aspects numériques du traitement et de la transmission de l'information.

Exemple: Soit un signal $x_c(t)$ analogique à temps continu (audio, issu d'un capteur de position, de vitesse). On veut effectuer un traitement numérique. En effet, on améliorera le rapport signal sur bruit, et la dispersion technologique des circuits est réduite par rapport à l'analogique.



La seconde partie de l'UE concerne le transport sur une distance plus ou moins longue des informations numériques.



Le codage a pour but de mettre en forme le signal numérique pour garantir au maximum une bonne identification à l'arrivée des bits transmis. Et ce malgré une bande passante de canal limitée et bruitée.

Il y a donc un compromis à faire entre bande passante et rapport signal sur bruit final. Avant le codage "canal", il y a le codage de source (UE 455), qui compresse le signal mais ajoute également des informations pour identifier les erreurs de transmission à la réception, et pour prévoir leur correction.

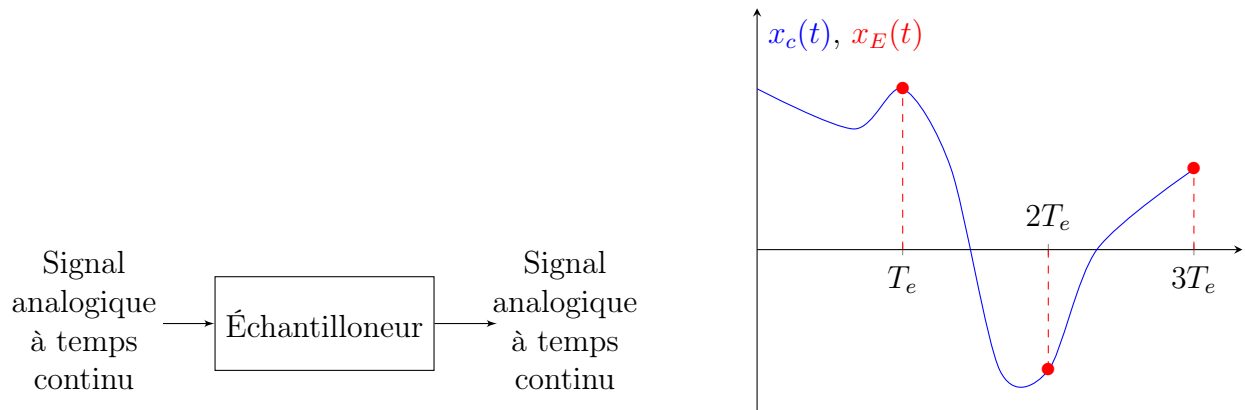
Première partie

Traitement numérique de l'information

Chapitre I-1

Echantillonnage d'un signal numérique

1 Principes



On prélève la valeur de $x_c(t)$ à un instant de l'ensemble discret $nT_e, n \in \mathbb{N}$.

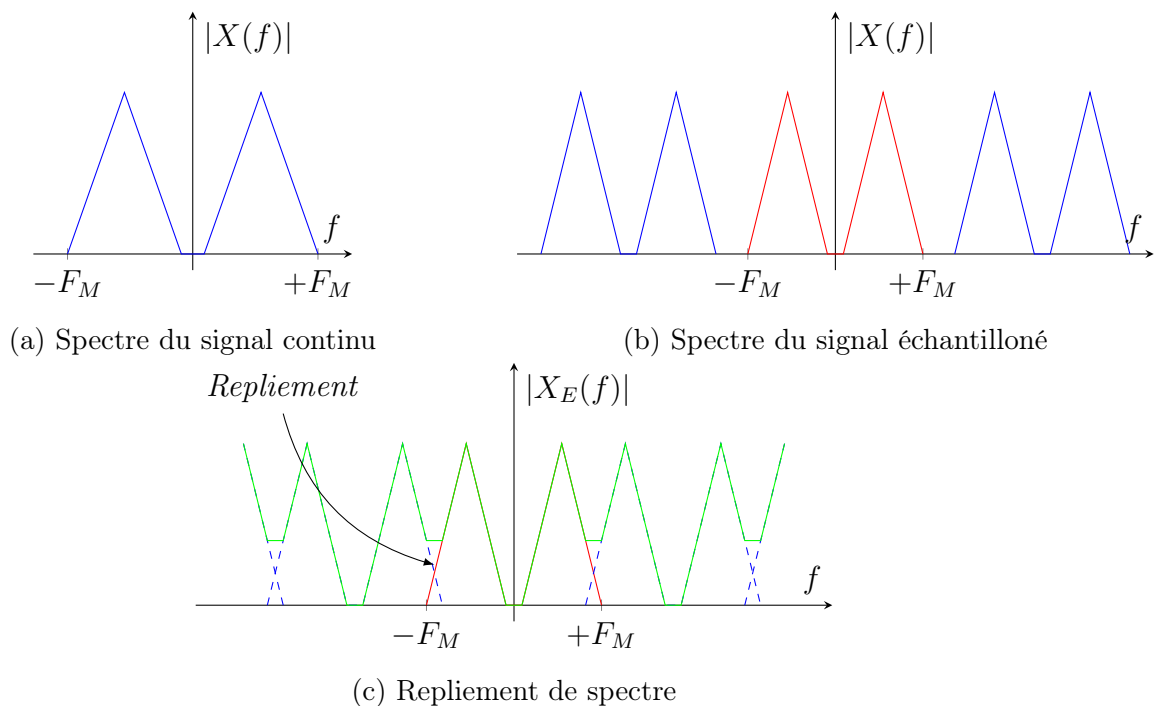
$$x_E(t) = x_c(nT_e)\delta(t - nT_e)$$

Remarque: traduit la causalité, la distribution δ traduit la durée infiniment courte de l'échantillonnage (échantillonnage idéal)

Dans le domaine fréquentiel, on a donc

$$\begin{aligned}
 X_E(f) &= (X_c * TF[\delta(t - nT_e)])(f) \\
 &= (X_c * TF[\delta(t - nT_e)])(f) \quad \text{avec } x_c(t) = 0, t < 0 \\
 \text{Or, } TF[\delta(t - nT_e)] &= e^{-j2\pi f T_e} \\
 &= \frac{1}{T_e} \delta(f - \frac{n}{T_e}) \text{ d'après la formule de Poisson} \\
 \text{donc } X_E(f) &= F_e X_c(f - nF_e)
 \end{aligned}$$

On répète donc le spectre de x_c à tous les multiples de la fréquence d'échantillonnage.



Théorème (Théorème de Shannon)

La fréquence d'échantillonnage doit être au moins 2 fois supérieure à la fréquence maximale du spectre du signal échantillonné.

$$F_e > 2F_M$$

Comme le signal $x_c(t)$ est a priori aléatoire, on ne peut pas forcément garantir de connaître la valeur de sa fréquence maximale F_M . On ajoute donc un filtre anti-repliement (*anti-aliasing*) avant l'échantillonnage pour garantir le critère de Shannon.

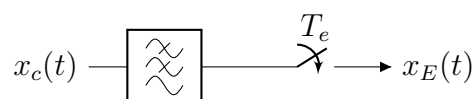


FIGURE I-1.3 – Utilisation d'un filtre antirepliement

Remarque: Le filtre anti-repliement est un filtre passe-bas de fréquence de coupure (bande passante) $\frac{F_e}{2}$

2 Reconstitution d'un signal

Pour retrouver le signal analogique à temps continu, si le théorème de Shannon est respecté, il suffit de faire un filtrage passe-bas sur une bande de fréquence F_M de $x_E(t)$:

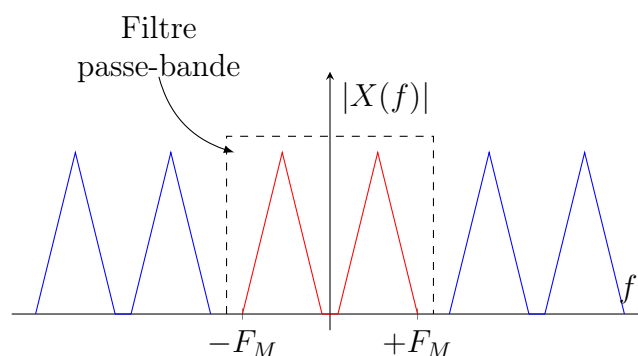


FIGURE I-1.4 – Reconstitution du signal continu

Formellement, on peut considérer la transformée de Laplace :

$$TL[x_E(t)] = X_E(p) = X_c(p) * TL[\delta(t - nT_e)]$$

Or,

$$TL[\delta(t - nT_e)] = e^{-npT_e} = z^{-n}$$

donc finalement

$$X_c(z) = x_c(nT_e)z^{-n}$$

3 Échantillonneur bloqueur

Dans la réalité, la valeur échantillonnée est conservée sur un temps de blocage $\tau \leq T_e$. En pratique, $\tau = T_e$.

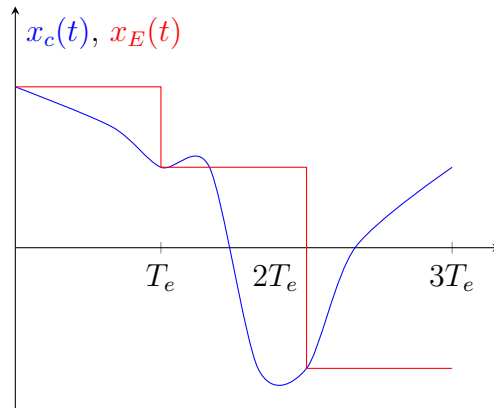


FIGURE I-1.5 – Echantillonneur bloqueur

On écrit donc

$$x_E(t) = x_c(nT_e)P_\tau(t - nT_e), \quad P_\tau \text{ fonction porte } P_\tau(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut également écrire

$$x_E(t) = (x_c(nT_e)\delta(t - nT_e)) * P_\tau(t)$$

d'où

$$X_E(f) = (F_E X_c(f - nF_e))TF[P_\tau(t)]$$

Comme $TF[P_\tau(t)] = \tau e^{-j2\pi f\tau} \text{sinc}(\pi f\tau)$,

$$X_E(f) = \tau F_E X_c(f - nF_e) e^{-j2\pi f\tau} \text{sinc}(\pi f\tau)$$

Autour de $f = 0$, le spectre est peu modifié. Autour des autres multiples de F_e , le spectre sera atténué par le sinus cardinal.

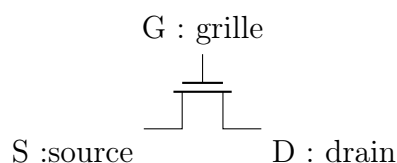
Remarque: Si $\tau = T_e$, on a une atténuation par le sinus cardinal en $f = \frac{F_e}{2}$ (limite de Shannon) de 3.9dB (non négligeable)

4 Techniques de mise en oeuvre

4.1 L'échantillonneur

Il faut un interrupteur électronique commandable. Typiquement, cette fonction est réalisée par un transistor à effet de champ de type MOSFET (*Metal Oxide Semi-conductor Field Effect Transistor*)

MOSFET à canal N (charges négatives qui constituent le canal) de type *Normally Off* (le canal n'existe pas si on n'applique pas le bon type de tension) de symbole suivant :



Principe de fonctionnement : former (ou faire disparaître) un canal de transmission en électrons entre les électrodes de drain et de source grâce au champ électrique induit dans l'oxyde par la tension grille-source V_{GS} .

La conductivité (donc résistivité) du canal est contrôlée par V_{GS} . L'accélération des électrons est contrôlée par V_{DS} : V_{DS} contrôle le courant de drain I_D par déplacement d'électrons de la source au drain, d'où $I_D(V_{DS}, V_{GS})$.

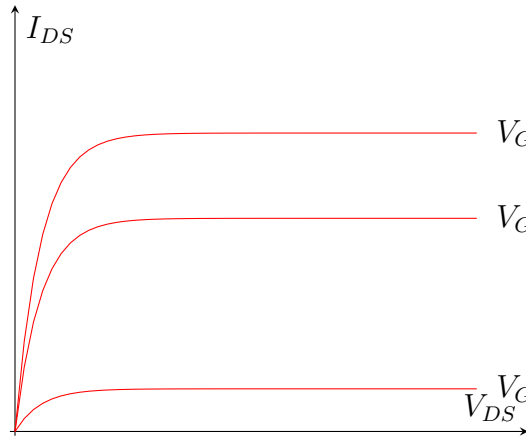


FIGURE I-1.6 – Caractéristique d'un transistor NMOS

Caractéristiques électriques

- Si $V_{GS} = 0$ transistor bloqué tant que $0 < V_{GS} < V_T$, V_T tension de seuil (pour l'apparition d'un canal en électrons entre source et drain, V_T pour *threshold*). On est à l'état État off. On est alors en régime ohmique (si V_{GS} augmente, la densité des électrons augmente donc la résistance du canal diminue).
- si $V_{DS} \gg V_{GS} - V_T$ est assez grand on se place dans la *zone de saturation* et on a une source de courant idéale.

$$I_D = \frac{\beta}{2} (V_{GS} - V_T)^2$$

- si $V_{DS} < V_{GS} - V_T$ on est dans la *zone ohmique*.

$$I_D = \beta \left(V_{GS} - V_T - \frac{1}{2} V_{DS} \right) V_{DS} \quad V_{DS} \ll V_{GS} - V_T \quad \simeq \quad \beta (V_{GS} - V_T) V_{DS}$$

FIGURE I-1.7 – Structure interne d'un transistor mos

Structure physique Les 2 zones de Si dopées N sont des réservoirs à électrons, séparées par la longueur de la grille L_G , par une zone de Si dopée P où les porteurs de courant sont des trous (charges positives).

À l'interface P/N il y a une barrière d'énergie potentielle qui empêche les électrons de passer dans la zone P et les trous dans la zone N.

Si on applique $V_{GS} > 0$, on crée un champ électrique dans l'oxyde dans le sens de la grille vers S, qui repousse les trous vers le fond de la plaquette et attire les électrons des réservoirs de source et de drain.

Si $V_{GS} > V_T$ tous les trous ont disparu de la zone sous l'oxyde et on y a créé un canal riche en électrons de S à D.

Mais $R_{on} = \frac{K}{V_{GS}-V_T}$ pour $V_{GS} \geq V_T$ la résistance du canal pour $V_{DS} \approx 0$.

On vise l'état On : $V_G = V_{DD}$ mais $V_{GS} = V_{DD} - x_c$.

MOSFET passant équivaut à $V_{GS} \geq V_T$ soit $x_c \leq V_{DD} - V_T$.

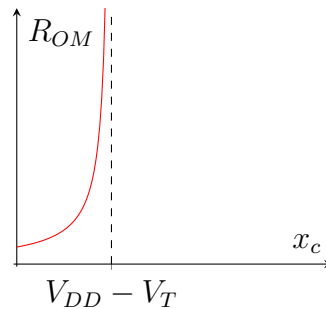


FIGURE I-1.8 – Caractéristique d'un transistor NMOS

Comment améliorer la gamme de variation possible de x_c ?

Le MOSFET à canal P a une zone sous sa grille dopée N et 2 réservoirs dopés P. On le choisit conducteur pour $V_{GS} < -V_T < 0$. On a alors un interrupteur CMOS (C pour complementary)

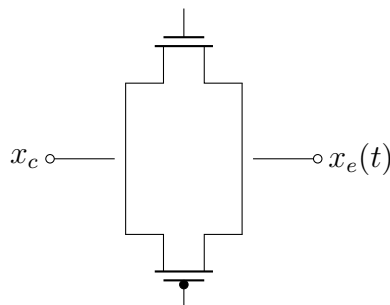


FIGURE I-1.9 – Interrupteur CMOS

À l'état passant de l'interrupteur CMOS :

- $R_{ON_N} = \frac{K}{V_{GS_N}-V_T} = \frac{K}{V_{DD}-x_c-V_T}$ pour $x_c \leq V_{DD} - V_T$
- $R_{ON_P} = \frac{K}{V_{GS_P}+V_T} = \frac{K}{-x_c+V_T}$ pour $x_c > V_T$

Avec $R_{ON_N} // R_{ON_P}$ la résistance globale est quasiment constante quand l'interrupteur CMOS est passant.

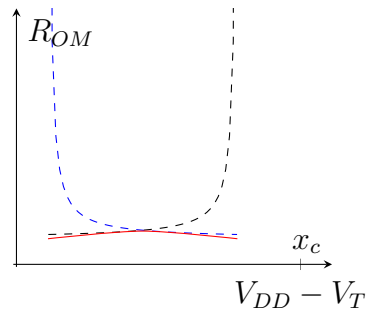


FIGURE I-1.10 – Résistance d'un interrupteur CMOS

4.2 Le bloqueur

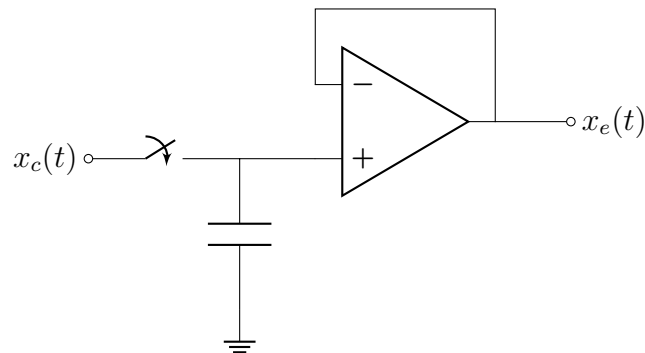


FIGURE I-1.11 – Schéma électrique d'un échantillonneur bloqueur

L'échantillonneur est un interrupteur électronique contrôlé par une horloge de période $T_e = \frac{1}{F_e}$.

La capacité est utilisée pour le "blocage".

Le suiveur est optionnel et permet d'avoir une tension $x_e(t)$ non perturbée par ce qui suit.

Que peut-on utiliser comme interrupteur ?

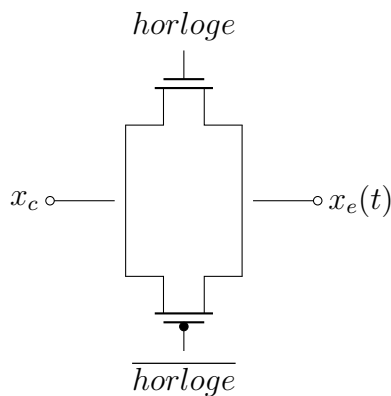


FIGURE I-1.12 – Interrupteur CMOS

Les MOSFET sont passants quand l'horloge est à l'état logique haut, c'est à dire que la tension V_{DD} est positive par rapport à la masse.

À l'état passant, un MOSFET est équivalent à une résistance R_{on} .

V_t est la tension seuil du MOSFET à canal N au niveau de V_{GS} pour le mettre à l'état passant. On utilise donc deux MOSFET pour limiter la résistance R_{on} .

Les interrupteur CMOS sont intégrables sur silicium en même temps que la capacité MOS réalisant la fonction de blocage, de même que le suiveur.

$$x_E(t) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_c(nT_e) \delta(t - nT_e) \right) * P_{\tau}(t)$$

En effectuant la transformée de Fourier de ce signal on a :

$$X_E(f) = TF(x_E(t)) = (F_e \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_C(f - nF_e)) \cdot \tau \exp(-j\pi f\tau) \text{sinc}(\pi f\tau)$$

On fait attention à ce que F_e vérifie la condition de Shannon. F_e doit être supérieure au double de la fréquence maximale du spectre de $x_C(t)$.

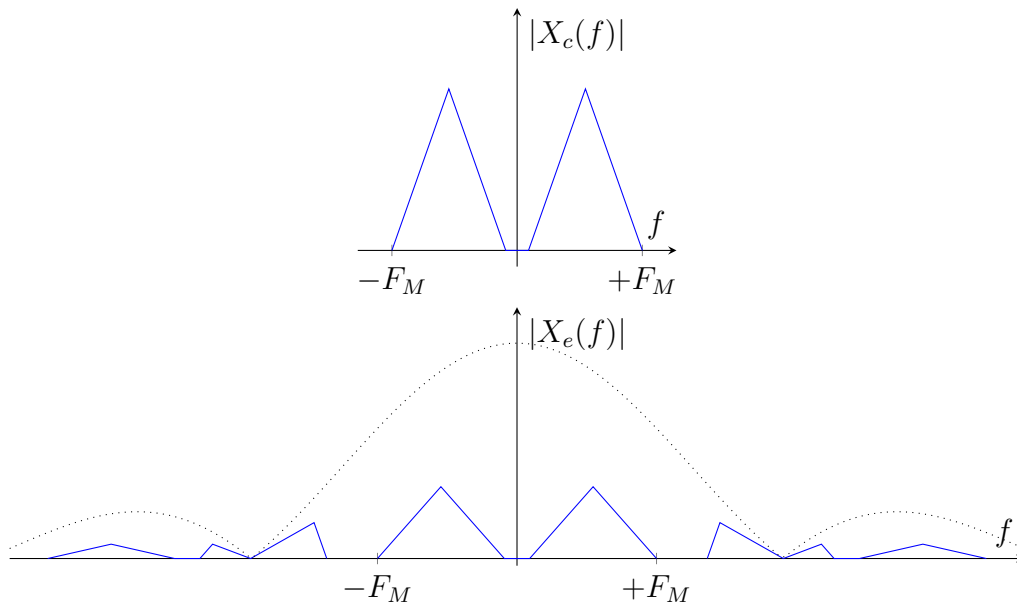


FIGURE I-1.13 – Allure spectrale des signaux

Chapitre I-2

Exemple de filtre à capacité commutées

1 Cellule de base

La structure d'une cellule de base donnée ci-dessous, fait appel à deux *switches*, chacun commandé par une horloge.

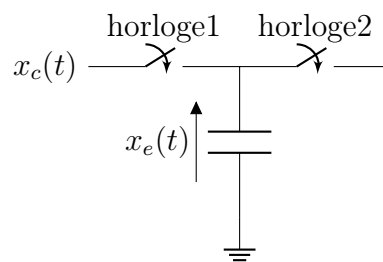


FIGURE I-2.1 – Cellule de commutation

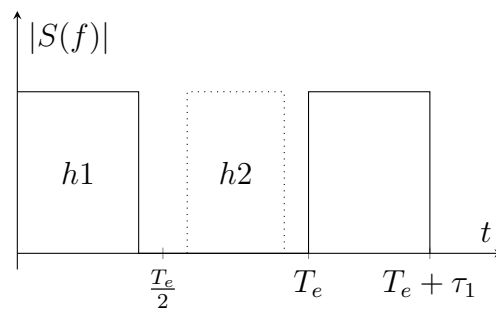


FIGURE I-2.2 – Signaux horloges utilisés

La première horloge présente une période de $T_e + \tau$ et est dissymétrique (haut sur τ et bas sur T_e). La deuxième horloge est presque complémentaire. Elles ont la même durée de passage à l'état haut, mais on s'arrange pour qu'il y ait un intervalle de garde entre les moments où le switch 1 est passant et le moment où le second est passant, sans jamais avoir les deux passants en même temps.

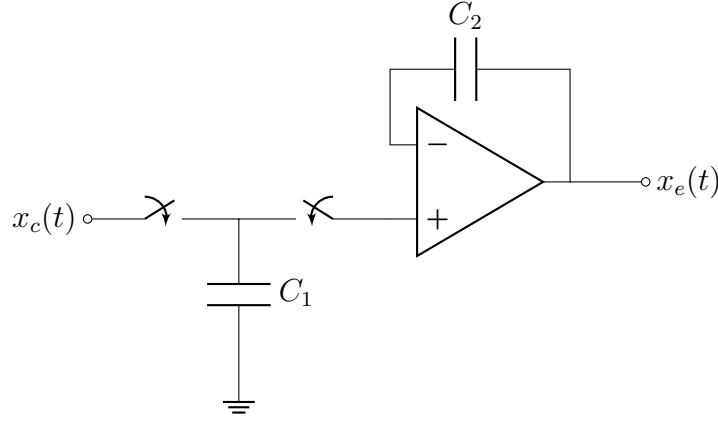


FIGURE I-2.3 – Schéma électrique d'un échantillonneur bloqueur

On suppose $R_{on}C \ll T_e, \tau_1, \tau_2$. En effet, R_{on} peut être minimisé en diminuant la longueur de la grille L_G de façon à ce que la charge/décharge de C soit considérée comme instantanée par rapport aux autres temps caractéristiques des signaux. On suppose également pour commencer que $x_c(t)$ évolue très lentement par rapport à la période d'échantillonnage T_e .

$$\text{De } t = nT_e \text{ à } t = nT_e + \tau, \begin{cases} \text{switch1 passant} \\ \text{switch2 bloqué} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_E = x_c(nT_e) \\ +Q = Cx_c(nT_e) = +Q_1 \end{cases}$$

De $t = nT_e + \tau$ à $t = nT_e + \tau_2 - \frac{\tau_1}{2}$, les deux switchs sont bloqués, la charge $+Q$ n'évolue pas et reste égale à $+Q_1$.

$$\text{De } t = nT_e + \tau_2 - \frac{\tau_1}{2} \text{ à } t = nT_e + \tau_2 + \frac{\tau_1}{2}, \begin{cases} \text{switch1 bloqué} \\ \text{switch2 passant} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_E = v(nT_e) \\ +Q = Cv(nT_e) = +Q_2 \end{cases}$$

Puis de $t = nT_e + \tau_2 + \frac{\tau_1}{2}$ à $t = (n+1)T_e$, les deux switchs sont bloqués, $+Q$ reste égale à $+Q_2$.

Globalement sur une période T_e , on effectue un transfert de charges ΔQ à travers les deux interrupteurs, imposé par les tensions $x_c(nT_e)$ et $v(nT_e)$.

On a alors $\Delta Q = C(v(nT_e) - x_c(nT_e))$ sur le temps T_e , ce qui correspond au courant échangé via la cellule de base :

$$I = \frac{\Delta Q}{T_e} = \frac{C}{T_e}((v(nT_e) - x_c(nT_e)))$$

On a une équivalence avec une résistance $R_e = \frac{1}{CF_e}$ à condition que x_c et v évoluent suffisamment lentement par rapport à T_e .

La valeur de R_e est contrôlée par la fréquence d'échantillonnage de F_e . A la base de "filtres programmables" c'est à dire dont les caractéristiques peuvent être modifiées par F_e .

2 Exemple de l'intégrateur

Si u et v sont assez lents par rapport à T_e et de type sinusoïdal, que l'on a un amplificateur opérationnel parfait, on a $\frac{U(j\omega)}{R_e} = -j\omega C_2 V(j\omega)$, donc la fonction de transfert est :

$$\frac{V(j\omega)}{U(j\omega)} = -\frac{1}{j\omega C_2 R_e} = -\frac{1}{j\omega} \frac{C_1 F_e}{C_2}$$

L'intérêt par rapport à un circuit avec une "vraie" résistance R_e , est que la fonction de transfert dépend d'un rapport de capacités $\frac{C_1}{C_2}$ et non plus de la valeur de C_2 seule.

Remarque : C_1 et C_2 sont des capacités MOS.

Ce sont des condensateurs planaires de capacité $C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{ox}}{e_{ox}} WL$ où ϵ_0 est la permittivité du vide et vaut $8.85 \times 10^{-12} \text{F/m}$ et ϵ_{ox} la permittivité relative de l'oxyde (3.8 pour du SiO_2). Mais pour le SiO_2 le matériau est amorphe quand il est obtenu par oxydation thermique de Si, tandis que pour le Si, le matériau est cristallin c'est à dire que les atomes de Si sont répartis périodiquement dans l'espace.

Cependant, l'interface est mal définie, "rugueuse" entre les deux et donc l'épaisseur d'oxyde fluctue sur la surface WL.

La valeur de $C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{ox}}{e_{ox}} (WL)_2$ et de $C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{ox}}{e_{ox}} (WL)_1$ ne sont pas garantie. Mais le rapport $\frac{C_2}{C_1} = \frac{(WL)_2}{(WL)_1}$ est beaucoup mieux contrôlé.

Voir TP1 pour traitement plus précis de cet intégrateur...

Attention, le système est instable, il intègre son entrée mais aussi les défauts de l'amplificateur opérationnel dont des tensions continues de décalage, ce qui conduit à la saturation rapide de l'AO.

La solution est de mettre une résistance R_2 de grande valeur en parallèle de C_2 , on a un gain fini pour $f \ll \frac{1}{2\pi R_2 C_2}$. Cette solution est difficilement intégrable.

On peut aussi mettre une contre réaction par un AO câblé en soustracteur.

Ce sont les structures avec soustracteur qui sont à la base de "filtres universels programmables", c'est à dire d'un type de filtrage différent suivant la sortie considérée, et de fréquences caractéristiques modifiable par F_e .

3 Exemple de filtre passe bas

On reprend la cellule de commutation de la figure ??

Sur une période :

Quand H_1 est passant et H_2 bloqué :

$$\begin{aligned} x(nT_e) &= u(nT_e) \\ Q_1 &= C_1 u(nT_e) \\ v(nT_e) &= w((n-1)T_e) \\ Q_2 &= C_2 w((n-1)T_e) \end{aligned}$$

Quand H_2 est passant et H_1 bloqué :

$$\begin{aligned} x((n + \frac{1}{2})T_e) &= v((n + \frac{1}{2})T_e) = w(nT_e) \\ Q_1 &= C_1 w(nT_e) \\ Q_2 &= C_2 w(nT_e) \end{aligned}$$

On effectue une re-répartition des charges présentes sur C_1 et C_2 pendant la première moitié de la période, mais on a conservation de la charge totale :

$$C_1 u(nT_e) + C_2 w((n-1)T_e) = (C_1 + C_2) w(nT_e)$$

C'est une "équation aux différences" liant l'entrée et la sortie du filtre.

En écriture simplifiée on a :

$$w_n = \frac{C_2}{C_1 + C_2} w_{n-1} + \frac{C_1}{C_1 + C_2} u_n$$

Après passage à la transformée en z on a la fonction de transfert du filtre :

$$\frac{W(z)}{U(z)} = \frac{C_1}{C_1 + C_2 - C_2 z^{-1}} \quad \text{où } z = \exp(pT_e)$$

soit :

$$H(j\omega) = \frac{C_1}{C_1 + C_2 - C_2 \exp(-j\omega T_e)}$$

Pour $f \ll F_e$, $\bar{\omega} \ll 1$:

$$H(j\bar{\omega}) = \frac{C_1}{C_1 + C_2 - C_2(1 - j\bar{\omega})} = \frac{C_1}{C_1 + jC_2\bar{\omega}}$$

C'est une fonction F_e -périodique et un filtre passe-bas pour $f \ll F_e$.

En fait,

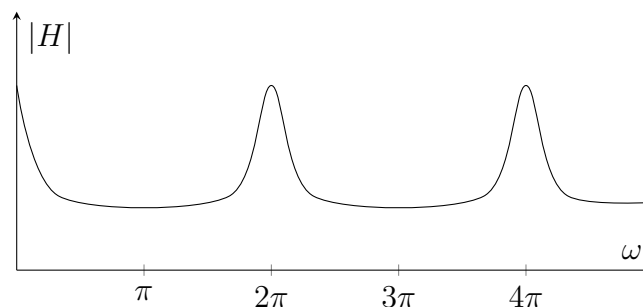


FIGURE I-2.4 – Spectre de $|H|$

Le gabarit de filtre n'est pas forcément très satisfaisant. Pour faire mieux, on utilise des filtres numériques avec une conception de filtres par rapport à un cahier des charges donné et des calculs réalisés sur circuit numériques CMOS.

Chapitre I-3

Filtre numériques (échantillonnés)

1 Généralités

Les filtres à capacités commutées sont un premier exemple de filtres échantillonnés pouvant être intégrés sur une technologie CMOS mais comportent encore des parties analogiques avec des possibilités limitées pour la conception des filtres.

L'idée est de réaliser entièrement les opérations de filtrage par un traitement numérique sur processeur CMOS. (DSP : digital signal processing)

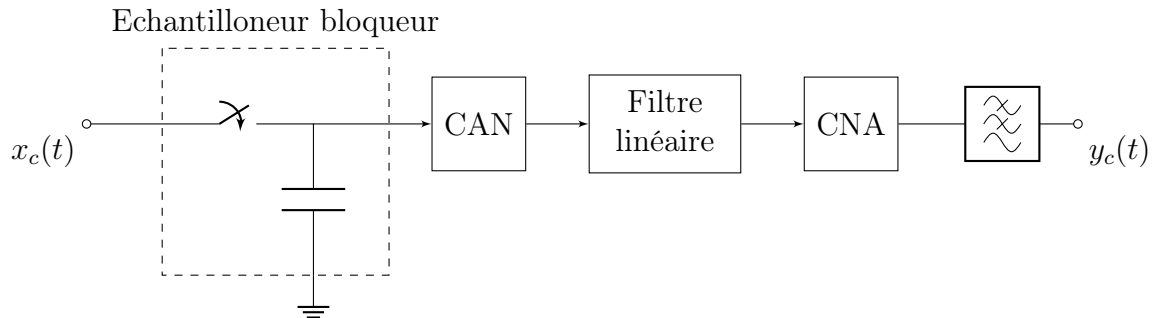


FIGURE I-3.1 – Principe d'un filtre numérique

avec

$$y_E(nT_e) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(nT_e)x((n-m)T_e)$$

où $h(mT_e)$ est la réponse impulsionnelle du filtre et la somme de $-\infty$ à $+\infty$ traduit le fait que le filtre n'est pas forcément causal. Si le filtre n'est pas causal, on a des retards systématiques de kT_e , k entiers, entre l'entrée et la sortie.

On utilise par la suite des notations simplifiées :

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)x(n-m)$$
$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(n-m)x(m)$$

Idée : programmer (réaliser) l'ensemble des calculs nécessaires sur un circuit numérique, après conversion analogique / numérique (CAN).

Intérêts :

- améliorer le rapport signal à bruit
- profiter de la puissance des circuits CMOS : aujourd'hui, circuits à quelques milliards de transistors à un prix raisonnable (ULSI : ultra large scale integration) grâce à la réduction progressive de la longueur de grille L_G en fonction des années (de 0.1 μm en 1971 à 30 nm ou un peu moins actuellement)
- grande diversité possible pour la conception des filtres, avec une faible variabilité sur les caractéristiques des circuits, avec une grande vitesse de calcul

Défauts :

- respecter Shannon (vrai aussi pour les capacités commutées)
- nécessité d'une horloge très stable (vrai aussi pour les capacités commutées)
- Erreurs possibles sur les calculs à virgule flottante dans un DSP
- Bruit de quantification (cf CAN)
- Systèmes pas forcément en "temps réel"

2 Caractéristiques des systèmes linéaires invariant dans le temps

2.1 Réponse impulsionnelle

Pour le filtre linéaire suivant :

$$e_n \rightarrow \boxed{h} \rightarrow y_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h_m e_{n-m}$$

Définition

En utilisant une entrée impulsionnelle (impulsion de dirac):

$$x_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On obtient en sortie du filtre la *réponse impulsionnelle*:

$$y_n = h_n$$

2.2 Transformée en z

$$\begin{aligned} y_E(nT_e) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h((n-m)T_e)x_E(mT_e) \\ &= \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} h((n-m)T_e)\delta(t - (n-m)T_e) \right) * x_E(t) \quad (= h(t) * x_E(t)) \end{aligned}$$

La transformée de Laplace de $\delta((n-m)T_e)$ est $\exp(p(n-m)T_e) = z^{n-m}$ où $z = \exp(pT_e)$

Proposition (Transformée en Z)

On peut exprimer un signal discret par sa transformée en Z , analogue à la transformée de Laplace :

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad \text{avec} \quad H(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h_m z^{-m}$$

Remarque: Une multiplication par z^{-1} correspond à un retard de T_e sur le signal

2.3 Gain complexe

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega T_e}) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h_m \exp(-jm\omega T_e) \\ H(e^{j\omega_b}) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h_m \exp(-jm\omega_b) \quad \text{avec} \quad \omega_b = \omega T_e = 2\pi f T_e \end{aligned}$$

2.4 Causalité

$$y_n = \sum_{m=N_0}^{+\infty} h_m x_{n-m}$$

Si $N_0 \geq 0$, y_n ne dépend que de x_n et x_m avec $m < n$: filtre causal.

Si $N_0 < 0$, y_n dépend aussi de x_m avec $m > n$: filtre non causal.

Un filtre numérique non causal est réalisable physiquement quand on accepte un retard systématique de $|N_0|T_e$ entre l'entrée et la sortie.

2.5 Stabilité

Définition

Un système est stable si et seulement si il présente une sortie qui reste finie quand l'entrée est finie, autrement dit : s'il existe $P > 0$ tel que $\forall n, |x_n| < P$, alors il existe $Q > 0$ tel que $\forall n, |y_n| < Q$.

Conséquence sur la réponse impulsionnelle

Proposition

Un filtre numérique est stable si et seulement si $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_n|$ est fini.

Démonstration :

- Condition suffisante :

$$|y_n| = \left| \sum_m h_m x_{n-m} \right| \leq \sum_m |h_m| |x_{n-m}|$$

Si $|x_n| < l$ alors $|y_n| \leq P \sum_m |h_m|$ donc si $\sum_m |h_m| < R$, alors $|y_n| < PR$.

- Condition nécessaire :

Soit $x_n = \begin{cases} -1 & \text{si } h_{-n} < 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ (entrée finie)

Alors $y_0 = \sum_m h_m x_{0-m} = \sum_m h_{-m} x_m = \sum_m |h_m|$

y_0 doit rester fini donc $\sum_m |h_m|$ doit rester fini. ■

Proposition (Condition sur la transformée de Z)

Pour que le filtre soit stable les pôles p_0 de la transformée de Laplace de sa réponse impulsionnelle doivent être tels que $Re(p_0) < 0$.

Or, $z = \exp(pT_e)$ donc les pôles de $H(z)$ doivent être à l'intérieur (strictement) du cercle unité.

2.6 Différents types de filtres

- À réponse impulsionnelle finie (RIF)
cas où h_n est nul pour $|n| > N_0$. Naturellement filtres stables.

Exemple: Calcul de la dérivée numérique d'un signal

$\frac{dx_c}{dt}(nT_e)$ est proche de $y_n = \frac{x_E(nt_e) - x_E((n-1)T_e)}{T_e}$ si T_e assez faible

Soit $y_n = \sum_m h_m x_{n-m}$ avec $h_0 = \frac{1}{T_e}, h_1 = -\frac{1}{T_e}, h_n = 0 \text{ si } n \neq 0 \text{ ou } 1$

$$\begin{aligned}
 y_n &= h(0)x_n - h(1)x_{n-1} \\
 &= \frac{1}{T_e}x_n - \frac{1}{T_e}x_{n-1} \\
 Y(z) &= \frac{X(z)}{T_e} - \frac{X(z)}{T_e}z^{-1} \\
 H(z) &= \frac{1 - z^{-1}}{T_e}
 \end{aligned}$$

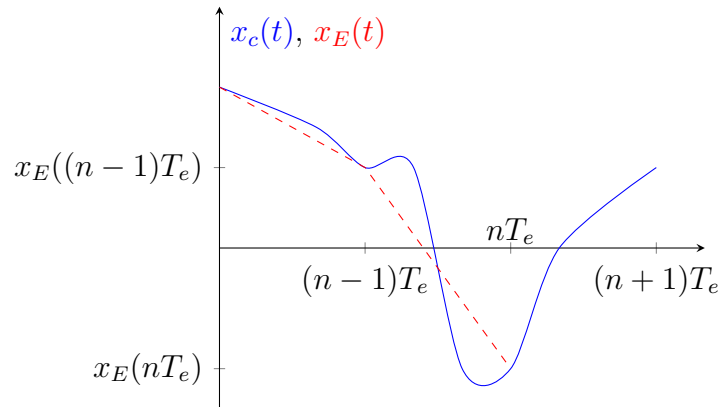


FIGURE I-3.2 – Echantillonneur bloqueur

- À réponse impulsionnelle infinie (RII)
il n'existe pas $N_0 > 0$ tel que $h_m = 0$ pour $|n| > N_0$. Non nécessairement stable.

Exemple: *Intégration numérique par la méthode des trapèzes* $\int_{(n-1)T_e}^{nT_e} x(t)dt$ est proche de $T_e \frac{x_E((n-1)T_e) + x_E(nT_e)}{2}$. On peut procéder de façon récursive sur un grand nombre de périodes :

$$\begin{aligned}
 y_n &= y_{n-1} + \frac{x_{n-1} + x_n}{2} T_e \\
 Y(z) &= z^{-1}Y(z) + \frac{T_e}{2}X(z)(1 + z^{-1}) \\
 H(z) &= \frac{T_e}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}
 \end{aligned}$$

On a aussi, si $|z| < 1$

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{T_e}{2}(1 + z^{-1}) \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} \\
 H(z) &= \frac{T_e}{2}z^{-n} + \frac{T_e}{2}z^{-n-1} \\
 H(z) &= \frac{T_e}{2} + T_e \sum_{n=1}^{+\infty} z^{-n}
 \end{aligned}$$

$$h_0 = T_e/2, h_n = T_e \text{ si } n > 0 \text{ et } h_n = 0 \text{ si } n < 0$$

RII causale instable (récursif)

3 Méthode de synthèse

Cahier des charges programmation d'un filtre sur DSP sous la forme $y_n = \sum_m h_m x_{n-m}$ ou si le filtre est récursif par une équation aux différences du type $y_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m y_m + \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m x_m$ (causal)

→ matérialisation simple en termes de calculs sur DSP notamment pour les filtres récursifs

Exemple:

$$y_n = a_1 y_{n-1} + b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + b_2 x_{n-2}$$

3.1 Transposition d'un filtre à temps continu

Le cahier des charges impose un gabarit $H_c(p)$ filtre à temps continu.

$$H_c(j\omega) = H_c(p = f(z)) = H_c(f(\exp(j\omega T_e)))$$

où $f(z)$ doit conserver la stabilité (si $|z| < 1$, alors $\text{Re}(p = f(z)) < 0$).

On étudie ensuite $H(j\omega)$ afin de vérifier si elle vérifie bien le cahier des charges. Sinon, il faut réajuster des paramètres de H_c ou le choix de la fonction de transposition.

Exemple: *Transformée d'Euler*

$$p = \frac{1 - z^{-1}}{T_e}$$

Elle équivaut à $z = \frac{1}{1 - pT_e}$.

- $H_c(p)$ est stable si ses pôles sont tels que $p_0 = a + jb$ avec $a < 0$ et $b \in \mathbb{R}$.

L'image de p_0 dans l'espace des z est $z_0 = \frac{1}{1 - aT_e - jbT_e}$ de module

$$|z_0| = \frac{1}{\sqrt{(1 - aT_e)^2 + (bT_e)^2}} < 1 \text{ si } a < 0$$

La stabilité est conservée.

- Vérifions dans quel domaine cette transformation est valable.

$$p = \frac{1 - e^{-j\omega T_e}}{T_e} = e^{-j\omega T_e/2} \frac{2j}{T_e} \sin(\omega \frac{T_e}{2}) \text{ donc } |p| = \frac{2}{T_e} |\sin(\omega \frac{T_e}{2})| = \omega_a$$

Si $\omega \rightarrow 0$, $\omega_a \approx \omega$ donc $|H(j\omega)|$ et $|H_c(j\omega_a)|$ ont des comportements très proches

Pour ω plus grand, ce n'est plus vrai. Une distorsion apparaît entre ω et ω_a et augmente quand ω augmente. $|H_c(j\omega_a)|$ va avoir un comportement très différent de $|H - j\omega|$.

Exemple: Transformée bilatère ou bilinéaire

$$p = \frac{1}{\frac{1}{p}} = \frac{2}{T_e} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

Elle équivaut à $z = \frac{2+pT_e}{2-pT_e}$

- Soit $p_0 = a + jb$ avec $a < 0$ et $b \in \mathbb{R}$.

L'image de p_0 dans l'espace des z a pour module

$$|z_0| = \sqrt{\frac{(2 + aT_e)^2 + (bT_e)^2}{(2 - aT_e)^2 + (bT_e)^2}} < 1 \text{ a } < 0$$

La stabilité est conservée.

- En remplaçant $z = \exp(j\omega T_e)$

$$p = \frac{2}{T_e} j \tan(\omega \frac{T_e}{2}) = j\omega_a$$

Si $\omega \rightarrow 0$, $\omega_a \approx \omega$.

3.2 Échantillonnage de la réponse impulsionnelle d'un filtre à temps continu

Méthode brute

$$h_n = h_c(nT_e) \rightarrow y_n = \sum_{m=0}^{\infty} h_c(nT_e) x_{n-m}$$

Cette forme décrit un filtre causal mais avec une réponse impulsionnelle infinie.

Exemple: Filtre passe-bas d'ordre 1

$$\begin{aligned} H_c &= \frac{A_0}{p - p_0} \text{ avec } \operatorname{Re}(p_0) < 0 \\ h_c(t) &= A_0 \exp(p_0 t) \\ h_n &= A_0 \exp(p_0 n T_e) \\ H(z) &= A_0 \sum_{m=0}^{\infty} \exp(m p_0 T_e) z^{-m} \\ &= \frac{A_0}{1 - \exp(p_0 T_e) z^{-1}} \end{aligned}$$

Pôle $z_0 = \exp(p_0 T_e)$ avec $|z_0| = \exp(\operatorname{Re}(p_0) T_e) < 1$

Méthode par fenêtrage On pondère $h_c(nT_e)$ par une fenêtre $w(nT_e)$ de durée finie.

Soit $h_n = h_c(nT_e)w(nT_e)$ où $w(t) = 0$ pour $|t| > T_0$ afin d'obtenir un filtre à réponse impulsionnelle finie.

Exemple: *Fenêtrage rectangulaire*

$$w(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq T_W = NT_e \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a donc

$$H(z) = H_0(z) * w(z) \text{ où } \begin{cases} H_0(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} h_c(nT_e)z^{-n} \text{ filtre RII précédent} \\ w(z) &= \sum_{n=0}^N z^{-n} \end{cases}$$

$$w(z) = \frac{1 - z^{-(N+1)}}{1 - z^{-1}}$$

Si $z = \exp(j\bar{\omega})$ où $\bar{\omega} = \omega T_e$, alors

$$w(\exp(j\bar{\omega})) = \exp(-jN\frac{\bar{\omega}}{2}) \frac{\sin(\frac{N+1}{2}\bar{\omega})}{\sin(\frac{\bar{\omega}}{2})}$$

Si $N \gg 1$:

Conséquences sur $H(\exp(j\bar{\omega}))$:

- apparition d'ondulations dans la réponse en fréquence la plus importante en amplitude correspondant à l'influence du lobe principale : phénomène de Gibbs, oscillations
- dégradation de la pente du filtre (pente plus faible à la coupure que pour le passe bas à temps continu prototype) d'autant plus grande que N est faible

Exemple: *Fenêtrage de Hamming*

$$w(nT_e) = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos(\frac{2\pi n}{2N_0}) & \text{si } |n| \leq N_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$|w(\exp(j\bar{\omega}))|$ a un lobe principal plus large que celui de la fenêtre rectangulaire mais des lobes secondaires plus faibles.

Il y a moins d'oscillations de Gibbs mais la pente est encore plus dégradée (réduction de la bande passante)

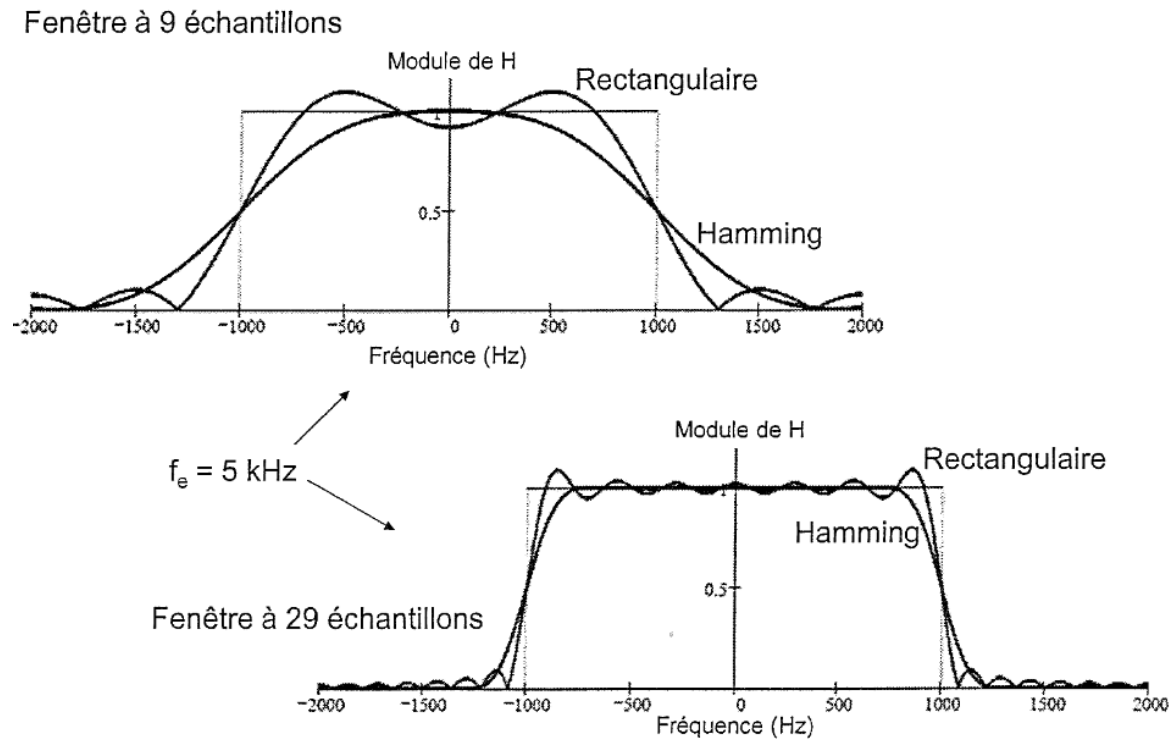


FIGURE I-3.3 – Représentation des fenêtres

Pour caractériser les fenêtres, on utilise les paramètres suivants :

- Niveau de lobe secondaire : $N_S = 20 \log(A_1/A_0)$ où A_0 amplitude du lobe principal et A_1 amplitude du lobe secondaire
- FWHM : full width at half maximum ; largeur à mi hauteur du lobe principal

	Rect	Tria	Hamming	Hanning	B-H
			$0.54 + 0.46 \cos(\frac{\pi n}{N_0})$	$0.5 + 0.5 \cos(\frac{\pi n}{N_0})$	$0.42 + 0.5 \cos(\frac{\pi n}{N_0}) + 0.08 \cos(\frac{2\pi n}{N_0})$
NS	-13dB	-25dB	-43dB	-32dB	-57 dB
FWHM	$\frac{2}{2N_0+1}$	$\frac{4}{2N_0+1}$	$\frac{4}{2N_0+1}$	$\frac{4}{2N_0+1}$	$\frac{6}{2N_0+1}$

Il y a donc un compromis entre amplitude des oscillations (risque de déstabilisation) et bande passante (rapidité du filtre) à réaliser.

Chapitre I-4

CAN et CNA

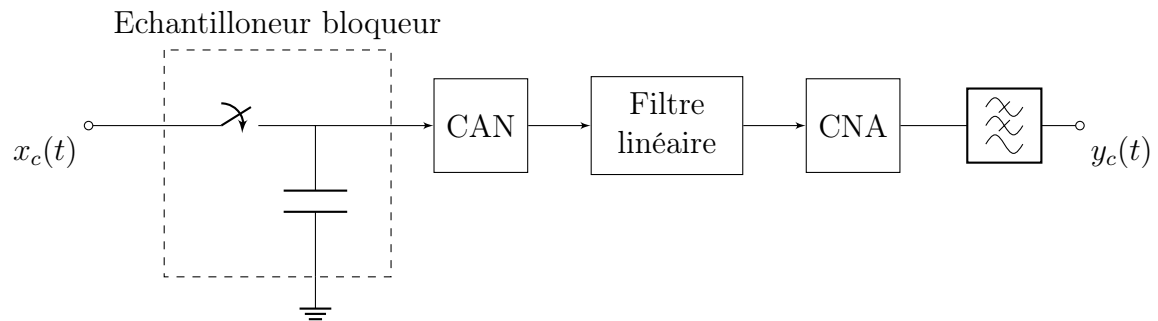


FIGURE I-4.1 – Traitement numérique d'un signal analogique

1 Convertisseur numérique analogique

1.1 Principes

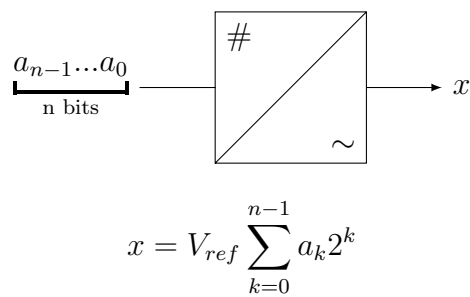


FIGURE I-4.2 – principe du CNA

1.2 Caractéristiques de transfert

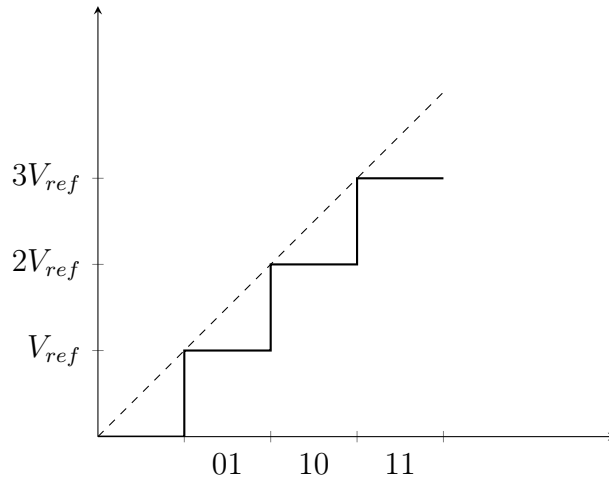


FIGURE I-4.3 – résolution du convertisseur

Résolution du convertisseur = impact du bit a_0 (LSB) = quantum de conversion :

$$q = \frac{E}{2^n - 1} \text{ avec } E = V_{ref} \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = V_{ref}(2^n - 1)$$

1.3 Défauts

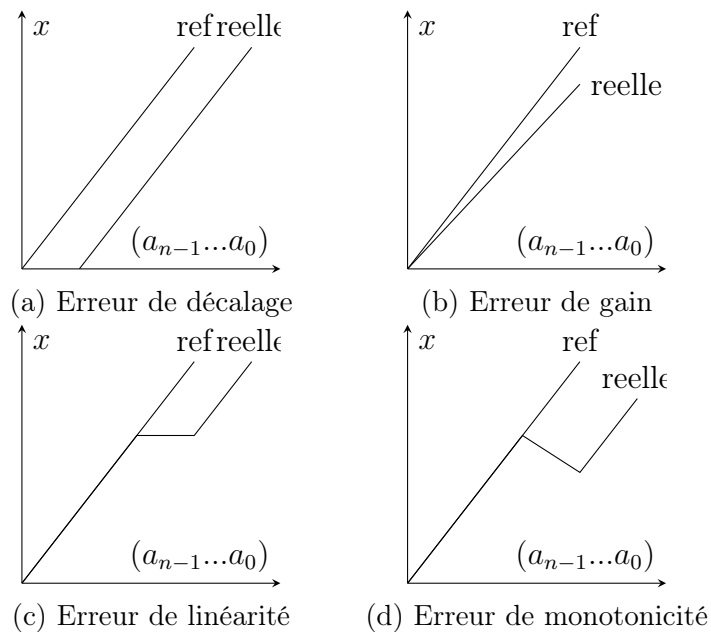


FIGURE I-4.4 – Différentes erreurs possibles

Pour l'erreur de monotonie, plusieurs séquence de bits conduisent à une même valeur analogique.

Ce sont des défauts n'apparaissant pas systématiquement mais qui peuvent apparaître en transitoire ou à mesure que le convertisseur se dégrade en fonctionnement.

On a les mêmes problèmes possibles sur les CAN, induits par des problèmes de fiabilité dans l'utilisation des convertisseurs, voire de variabilité sur les technologies CMOS les plus avancées (sensibles à des défauts à l'échelle d'un atome).

1.4 Réalisation

Structures directes à courants pondérés

- Principe

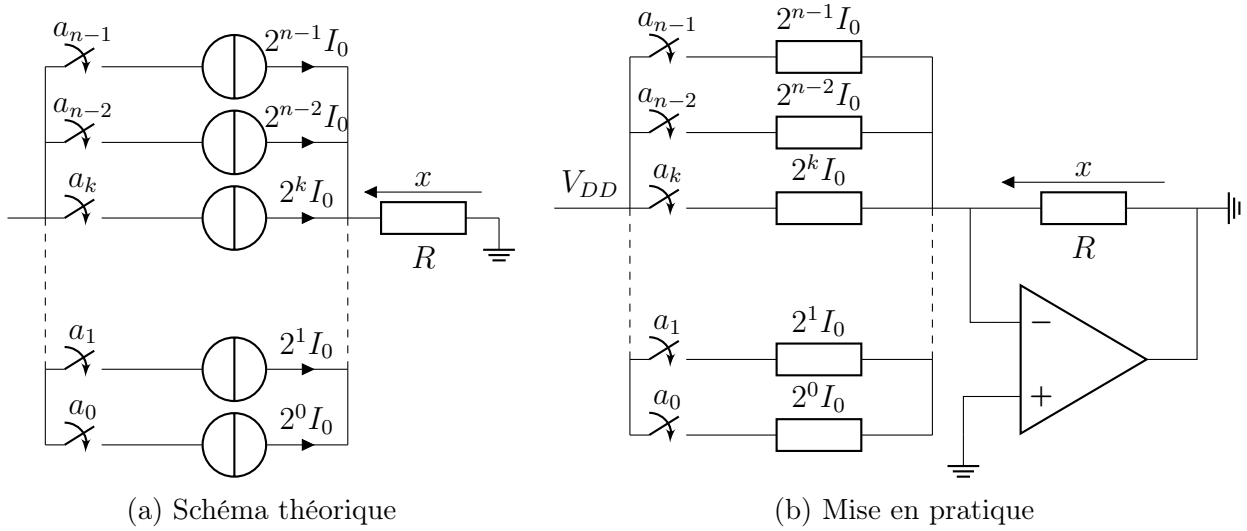


FIGURE I-4.5 – CNA

- (a) Conduit à une conversion très rapide. Cependant dans la réalité on ne relie pas une source de courant à un interrupteur. Sinon boum.

$$V_s = -RI = -R.(2^{n-1}I_0a_{n-1} + 2^{n-2}I_0a_{n-2} + \dots + 2I_0a_1 + I_0a_0) = -RI_0 \sum_{i=0}^{n-1} 2^i a_i$$

- (b) En pratique on utilise des résistances :

$$I = \frac{V_{ref}}{R_0}a_{n-1} + \frac{V_{ref}}{2R_0}a_{n-2} + \dots + \frac{V_{ref}}{2^{n-1}R_0}a_0 = \frac{V_{ref}}{2^{n-1}R_0} (2^{n-1}a_{n-1} + \dots 2a_1 + a_0)$$

$$V_s = \frac{V_{ref}}{2^{n-1}} \frac{R}{R_0} A$$

Simple mais plus le nombre de bits augmente, plus on a besoin de résistances de valeurs différentes et grandes.

Problèmes de variabilité et d'intégration. OK jusqu'à 4 bits peut-être, pas vers l'infini et au-delà.

Remarque: Lors du passage de $A = 2^n - 1$ à 2^n tous les interrupteurs doivent commuter simultanément s'il y a disparité, apparition de glitch.

- Réseau R-2R

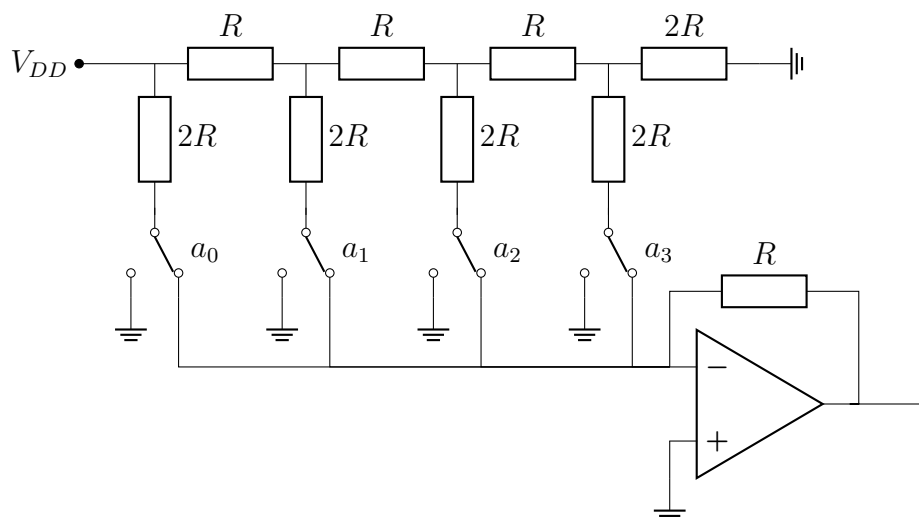


FIGURE I-4.6 – Structure R-2R

Même résultat mais avec 2 valeurs de résistances à contrôler qui peuvent être faibles.

Structure à conversion indirecte

Pour de la conversion indirecte on passe par l'utilisation d'une PWM qui peut être analogique ou numérique :

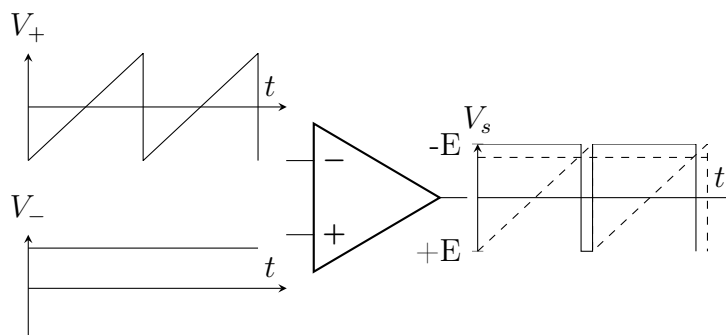


FIGURE I-4.7 – PWM analogique

On peut également le faire de manière entièrement numérique (avec un compteur modulo N) mais retard systématique entre l'entrée et la sortie de $2^n T_e$. Le concept est similaire à l'amplification de classe D.

2 Convertisseur analogique numérique

2.1 Principes et défauts

Exemple de quantification :

À une certaine plage de variation de x_E on associe une valeur quantifiée Δ_k parmi n valeurs possibles.

Si $x_E \in [\Delta_k - \frac{p_k}{2}, \Delta_k + \frac{p_k}{2}]$, alors $\Delta = \Delta_k$ où $p_k = \Delta_{k+1} - \Delta_k$ pas de quantification.

Remarque: Par la suite sur la 1e partie de 433, on ne considérera que des quantifications à pas constant :

$$\Delta_{k+1} - \Delta_k = q$$

Dans la 2e partie de 433, on étudiera des stratégies à pas non uniformes, souvent utilisées dans les télécoms (pas faible pour les petites valeurs de signal, plus important pour les grandes valeurs).

$2v_{max} = E$ plage de conversion

Puis codage des n valeurs quantifiées sur N bits (avec $2^N - 1 \geq n$)

Exemple:

$$\Delta_0 \rightarrow 0 \dots 00$$

$$\Delta_1 \rightarrow 0 \dots 01$$

$$\Delta_2 \rightarrow 0 \dots 10$$

On a

$$q = \frac{E}{2^N - 1}$$

Défauts possibles ? Les mêmes que pour les CNA : erreurs de gain, de linéarité...

2.2 Bruit de quantification

$b_q = x_E - \Delta_k$ varie de $-q/2$ à $q/2$ dans le cas de l'exemple de quantification précédent.

Cet écart systématique est traité dans les systèmes électroniques comme un bruit de quantification pour évaluer son impact sur les grandeurs de sortie.

Calcul de la puissance de bruit Généralement fait dans le cas où $x_E(t)$ évolue linéairement par rapport au temps, de $-V_{max}$ à V_{max}

$$\langle b_q \rangle = 0 \text{ et } \langle b_q^2 \rangle = \frac{1}{T_q} \int_0^{T_q} b_q^2(t) dt = \frac{q^2}{12}$$

Rapport signal à bruit

$$RSB_q = 10 \log \frac{\langle x_c^2 \rangle}{\langle b_q^2 \rangle}$$

$$RSB_q = 10 \log \left(\frac{12(2^N - 1)^2}{E^2} \langle x_c^2 \rangle \right)$$

$$RSB_q = N 20 \log 2 + 10 \log 12 + 10 \log \frac{\langle x_c^2 \rangle}{E^2} \quad \text{en supposant } 2^N \gg 1$$

$$\approx 6N + 10,77 + 10 \log \frac{\langle x_c^2 \rangle}{E^2}$$

On s'arrête là c'est-à-dire qu'on peut calculer un nombre minimal de bits nécessaires pour que RSB_q dépasse une valeur limite donnée, si $\langle x_c^2 \rangle$ est connu

Si $\langle x_c^2 \rangle$ n'est pas connu, on utilise souvent une expression approchée de RSB_q , celle obtenue quand $x_c(t) = \frac{E}{2} \cos(2\pi ft)$
 $\langle x_c^2 \rangle = E^2/8$ et $RSB_q = 6N + 1,8$

Remarque: Parfois, on rajoute à cette expression un facteur de crête F_c (en dB) et la formule devient

$$RSB_q = 6N + 1,8 - F_c$$

où F_c représente l'influence des dépassements possibles de x_c par rapport à la plage de conversion mais aussi de la forme de x_c ...

F_c : marge d'erreur sur la validité de la formule en $6N + 1,8$ qu'on peut évaluer de façon empirique

3 Réalisation des CAN

3.1 Structures directes : convertisseurs flash ou semi-flash

Flash : générer l'ensemble des valeurs Δ_k possibles et les comparer en même temps à x_E : conversion immédiate

Exemple: *Flash pour $n=7$*

Rapide mais nécessite $2^N - 1$ comparateurs de tension : $N = 12$ au grand maximum en pratique.

Moins de comparateurs avec une structure semi-flash :

Au lieu de 255 comparateurs pour une flash 8 bits

3.2 Convertisseur à approximations successives

Pas aussi rapide que la flash mais peut être intégré en CMOS

Stratégie :

- on commence avec $a_3 = 1, a_2 = a_1 = a_0 = 0$
- si $x_E \geq x_a$ alors on maintient $a_3 = 1$ sinon $a_3 = 0$.
- on itère avec $a_2 a_1$ et a_0 mis successivement à 1 (on procède par dichotomie)

Remarque: on peut remplacer la logique de contrôle par un simple compteur qui s'arrête dès que $x_E \geq x_a$. Cependant le temps de conversion varie alors de T_h à $(2^N - 1)T_h$. Le temps de conversion est donc non-contrôlé et peut devenir très grand devant T_h .

3.3 Convertisseur à rampe (analogique)

- Convertisseur à simple rampe :

On compte tant que $x_E \geq r$, on obtient les bits associés à x_E et on remet l'intégrateur à 0.

On a un nombre de périodes d'horloges $M = \lfloor \frac{T_c}{T_h} \rfloor$ avec $T_c = \frac{RC}{V_{ref}}$

Cette solution est simple, assez rapide, mais très sensible aux dérives sur les valeurs de R et C.

- Convertisseur à double rampe

À t_1 fixé, l'interrupteur 1 bascule de x_E à $-V_{ref}$. À t_2 , c'est la fin de la conversion, l'intégrateur a été ramené à 0 par l'interrupteur 2.

t_2 est tel que

$$0 = r(t_2) = \frac{-x_E}{RC}t_1 + \frac{V_{ref}}{RC}(t_2 - t_1)$$

d'où $\frac{t_2 - t_1}{t_1} = \frac{x_E}{V_{ref}}$: indépendant de R et C, possibilité de grande précision de conversion.

3.4 Convertisseur Δ et $\Sigma\Delta$

- Idée : comparer x_E à la sortie d'un intégrateur de pente $q = \pm \frac{V_{ref}}{2RC}$

Si $x_c \leq r$, on a une pente de $-\frac{V_{ref}}{2RC}$ à la période T_H , si $x_c > r$ on a une pente de $+\frac{V_{ref}}{2RC}$

→ convertisseur différentiel : on code la dérivée de x_c

Q code le sens de variation de x_c , 1 seul bit est nécessaire.

On doit avoir

$$\left| \frac{dx_c}{dt} \right| \leq \frac{V_{ref}}{2RC}$$

- Convertisseur $\Sigma\Delta$: permet de pallier cette limitation en intégrant x_c avant de passer par le convertisseur Δ :

$$\frac{1}{\tau}x_c \leq \frac{V_{ref}}{2RC}$$

τ est la grandeur caractéristique de l'intégration.

Deuxième partie

Communication numérique

Chapitre II-1

Introduction

1 Introduction

Beaucoup de blabla. Beaucoup.

À part la radio, toutes les transmissions sont numériques.

Objectif Transmettre le max de donnée avec une fiabilité maximale

- Malgré les limites théoriques
- Les contraintes physiques
- contraintes numériques

2 Historique

encore du blabla. encore.

3 Principe d'une chaîne de transmission numérique

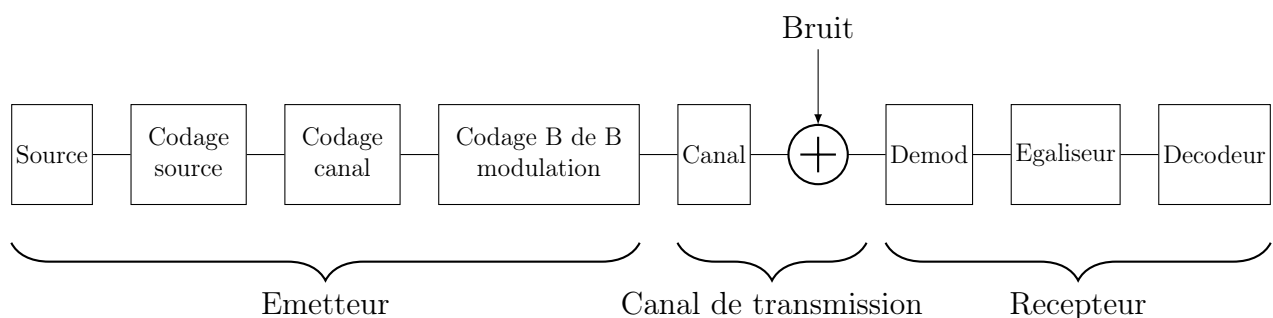


FIGURE II-1.1 – Principe d'une chaîne de transmission numérique

Source Une source d'information est un signal aléatoire. Les communications numériques sont alors des signaux discrets.

Codage de source Dans cette étape on associe un code de façon bijective une suite de k élément binaire (cf UE 455) $\{c_k\}$

Codage Canal L'objectif est de lutter contre les effets du canal :

- introduction de redondance
- Ajoute des bits de redondances à $\{c_k\}$ pour former $\{d_n\}$
- permet l'évaluation d'erreur

Il faut trouver un compromis entre débit et robustesse aux erreurs.

Codage de bande de base

- Donne une réalité physique au message (tension, énergie...)
- Utilise des formes d'impulsions
- Donne au spectre des propriétés utiles (bandes occupées, présence de la fréquence d'horloge ...)

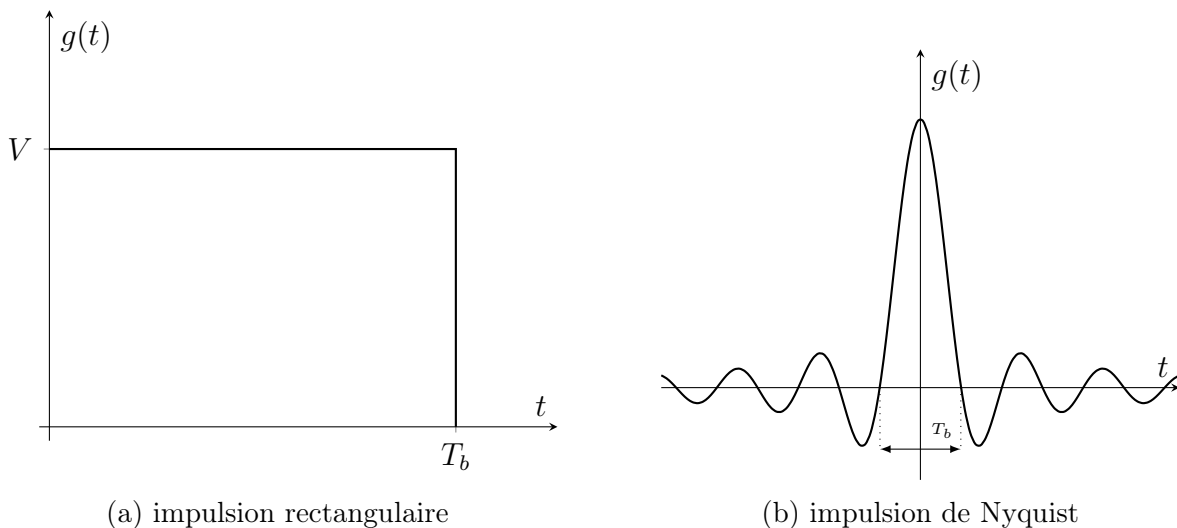


FIGURE II-1.2 – forme d'impulsion usuelles

Modulation Comme pour une modulation numérique

$$e(t) = A(t) \cos(\Phi(t))$$

Où $A(t)$ et $\Phi(t)$ sont les amplitudes et phases instantanées.

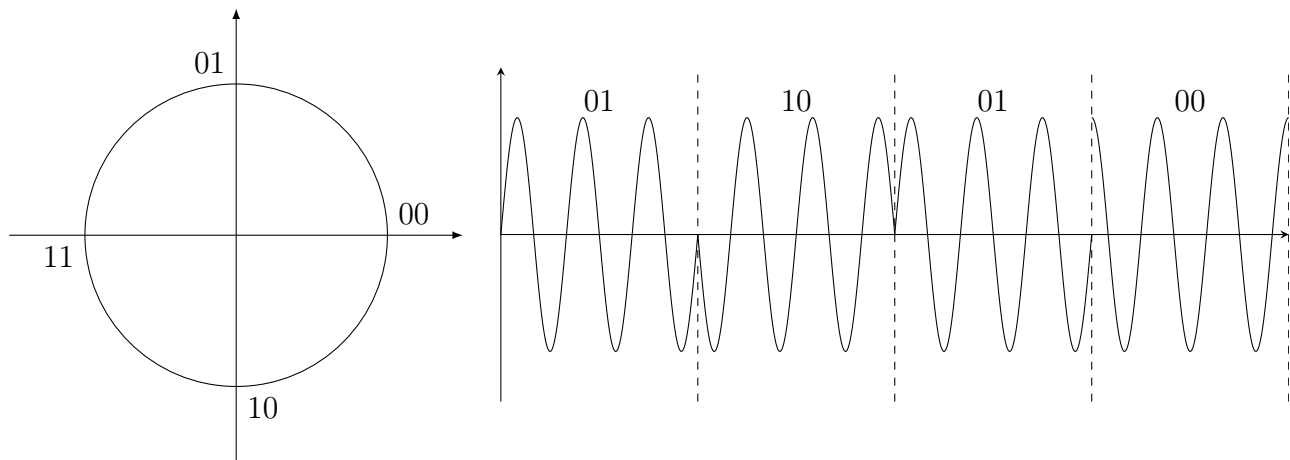
Exemple: Modulation QPSK

FIGURE II-1.3 – modulation QPSK

Canal de transmission Plusieurs types de canaux possibles : canal hertzien , ligne filaire , coax... On les caractérise par leur réponse impulsionnelle complexe, et par sa bande passante B .

Définition

On définit la *capacité de Shannon*:

$$C = B \cdot \log_2(1 + RSB)$$

Bruit Le bruit est présent à la transmission, et dans le canal. on le caractérise par sa densité de probabilité généralement on suppose le bruit additif Blanc et Gaussien :

$$p(b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_b^2}} \exp\left(\frac{-(b - \mu_b)^2}{2\sigma_b^2}\right)$$

On a souvent un bruit centré : $\mu_b = 0$

Démodulation À la réception on inverse la modulation

Exemple: Démodulation QPSK

Egaliseur régénérateur Objectif : lutter les effets du canal de transmission pour augmenter le débit.

Décodeur on refait le passage analogique-numérique et on décode le canal (correction d'erreur) pour cela :

- échantillonnage (cad prise de décision) : filtrage adapté + sortie dur ou souple

- décodage du canal
- décodage de source

Chapitre II-2

La source de l'information

1 Codage de donnée discrètes

Définition

Les données discrètes sont représentées par des symboles en nombre fini m .
On parle d'une représentation m -aire ou m -moments

Exemple:

- Alphabets
- Symbole de numérotation (décimal, hexa, octal)

Sources	Symboles	Dimension	Codage binaires
alpha. simplifié	lettre	27	5
alphabet	lettres	128	7
Nombres	chiffres	Dec : 0-9 10	4 (DCB)
Nombres	chiffres	Hex : 0-F 16	4
Nombres	chiffres	Ternaire : 0-p 10	2)

Remarque: Les symboles binaire s sont des bits ou “digit”.

On code un alphabet à $m = 2^n$ symboles avec des mots binaires à n bits. Il y a $m!$ possibilités.

2 Codage d'une information analogique MIC

2.1 Conversion analogique numérique

On réalise une conversion Analogique-Numérique classique : Échantillonnage et blocage.
Comme au chapitre 1.

2.2 Bruit de quantification

2.3 Quantification uniforme

Ensuite on effectue une quantification uniforme , comme au chapitre 1.

2.4 Quantification non uniforme

2.5 Loi A et loi μ

Objectif Rendre le rapport signal sur bruit de quantification indépendant du niveau du signal.

Définition

On rappelle la définition de *puissance d'un signal*

$$P_x = \int_{-1}^1 x^2 p(x) dx$$

Soit pour le bruit issue d'une quantification non uniforme

$$\sigma_q^2 = \int_{-1}^1 p(x) \frac{\Delta_i^2}{12} = \int_{-1}^1 \frac{p(x)}{12} \left(\frac{2}{N} \frac{dx}{dy} \right)^2 dx$$

Proposition

Le RSB s'écrit alors :

$$\frac{P_x}{\sigma_q} = \frac{\int_{-1}^1 x^2 p(x) dx}{\int_{-1}^1 \frac{p(x)}{3N^2} \left(\frac{2}{N} \frac{dx}{dy} \right)^2 dx} = C_{ste}$$

Cela est possible pour $\frac{dx}{dy} = kx$ soit :

$$\frac{P_x}{\sigma_q} = \frac{3N^2}{k^2}$$

Soit en dB :

$$\left(\frac{P_x}{\sigma_q} \right) = 6n + 4.7 - 20 \log_{10}(k)$$

Remarque: On a alors :

$$y = \frac{1}{k} \ln |x| + 1$$

Pour $x \simeq 0$ on doit faire une approximation.

Proposition

- Loi μ (USA)

$$\begin{cases} y = \frac{\ln(1+\mu|x|)}{\ln(1+\mu)} \\ \mu = 255 \end{cases}$$

- Loi A (UE)

$$\begin{cases} y = \frac{Ax}{1+\ln(A)} & \text{si } |x| < 1/A \\ y = \frac{1+\ln(A|x|)}{1+\ln(A)} & \text{si } |x| \geq 1/A \end{cases}$$

3 Modulation différentielles DPCM

Chapitre II-3

Choix d'un code en bande de base

Définition

- Un signal en bande de base est un signal n'ayant pas subi de transposition en fréquence.
- un code en bande de base consiste à choisir une forme d'impulsion/niveau de tension pour transmettre un débit D dans un canal de bande passante B .

Remarque: Le codage en bande de base n'est pas un codage source ou canal, pas cryptage du signal.

1 Mise en équation

Objectif transmettre d_n mot de code constitué d'une suite d'éléments binaires $\{\beta_n\}$

Définition

Pour la suite on considère que l'on émet le signal (PAM):

$$e(t) = \sum_k a_k g(t - kT)$$

- a_k pris dans un alphabet de tension $\{A_0 \dots A_{M-1}\}$ à M niveaux possibles
- $g(t)$ forme d'impulsion (rectangulaire de période T , triangulaire, Impulsion de Nyquist)
- T est la durée du symbole transmis $T = nT_b$ (transmission d'un n -uplet d'éléments binaire choisi parmi $M = 2^n$ éléments possibles.)

Exemple: Cas binaire $M = 2$. On a un seul élément binaire transmis pendant $T = 1T_b$.
 $a_k \in \{A_0 = 0, A_1 = +1\}$.

Exemple: Cas quaternaire $M = 4 = 2^2$. $T = 2T_b$. $a_k \in \{A_0 = 0, A_1 = +1, A_2 = +2, A_3 = +3\}$

Définition

- La *rapidité de modulation* en sortie du codeur ligne est :

$$R = \frac{1}{T} = \frac{1}{nT_b} = \frac{D}{\log_2 M}$$

- Le débit binaire est ; $D = 1/T_b$ [bits/s]
- la rapidité de modulation $R = D/\log_2(M)$ [bauds]

On peut mettre $e(t)$ sous la forme

$$e(t) = g(t) \star a(t) = g(t) \star \sum_k a_k \delta(t - kT)$$

La DSP du signal peut s'écrire alors (via la formule des interférences)

$$\phi_{ee}(f) = |G(f)|^2 \phi_{aa}(f)$$

Or comme $a(t)$ est aléatoire il est impossible de calculer $A(f)$. La DSP peut cependant s'obtenir par l'autocorrélation du signal¹ Les propriétés statistiques permettent d'obtenir la DSP de a (nature du codage de source, études des moments...)

Remarque: La DSP de e est constituée d'éventuelle raie et du module au carré de de la TF de $G(f)$. On peut par exemple rajouter une raie à la fréquence d'horloge pour la transmettre au récepteur (PLL ...)

La fonction d'autocorrélation de $e(t)$ est périodique (cyclostationnarité) est utilisée dans certaines application pour la récupération du rythme T et la synchronisation.

2 Classification

2.1 Codes RZ et NRZ

Définition

- *RZ : Return to Zero:*

$$g(t) = \begin{cases} \neq 0 & \forall t \in [0, \lambda T] \\ = 0 & \forall t \in [\lambda T, T] \end{cases}$$

- *NRZ : Non Return to Zero*

$$g(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0, T]$$

1. cf UE 451

2.2 Code ou format (M-aire) unipolaire et antipolaire

Définition

Les codes *unipolaires* ne changent pas de signe, les moyennes ne sont pas nulles.

Pour les codes *antipolaires*, c'est l'inverse. On distingue les codes paires et impaires (utilisation du zéro)

Définition

Un code *binnaire* utilise 2 niveau de tension pour encoder le signal.

Un code *M-aire* en utilise M .

2.3 Code avec ou sans mémoire

Définition

- Code *sans mémoire* : Transcodage systématique.
- Code *avec mémoire*: Utilise les valeurs des bits précédemment transmis pour déterminer la valeur à émettre.

Proposition

Si on a un code sans mémoire, alors l'autocorrélation de a peut s'écrire :

$$\phi_{aa}(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} + \frac{m_a^2}{T^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k/T)$$

3 Code en BdeB usuels

3.1 Rappel

: on a la DSP du signal d'après la formule des interférences :

$$\phi_{ee}(f) = |G(f)|^2 \times \phi_{aa}(f)$$

Proposition

Pour un code en Bande de Base :

- à symbole indépendant (sans mémoire)
- à symbole identiquement distribués

Alors :

$$\phi_{aa}(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} + \frac{m_a}{T^2} \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - k/T)$$

3.2 Code NRZ binaires

3.2.1 Code NRZ Binaire antipolaire

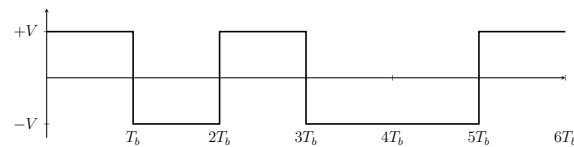


FIGURE II-3.1 – Codage NRZ binaire

Définition

Pour un code NRZ binaire antipolaire on a:

$$\begin{cases} a_k = +1 & \text{si } \beta_k = 1 \\ a_k = -1 & \text{si } \beta_k = 0 \end{cases}$$

Alors :

$$m_a = 0 \text{ et } \sigma_a^2 = V^2$$

Pour une forme d'impulsion rectangulaire on a donc:

$$\phi_{ee}(f) = V^2 T_b \left(\frac{\sin \pi f T_b}{\pi f T_b} \right)^2 + \delta(f) \frac{V^2}{4}$$

3.2.2 Code NRZ binaire unipolaire

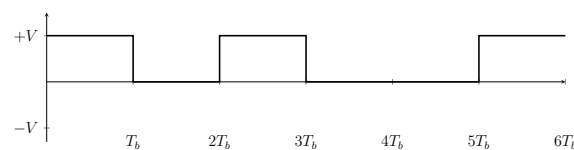


FIGURE II-3.2 – Codage NRZ binaire

Définition

Pour un code NRZ binaire unipolaire on a:

$$\begin{cases} a_k = +1 & \text{si } \beta_k = 1 \\ a_k = 0 & \text{si } \beta_k = 0 \end{cases}$$

Alors :

$$m_a = +\frac{V}{2} \text{ et } \sigma_a^2 = \frac{V^2}{4}$$

Pour une forme d'impulsion rectangulaire on a donc:

$$\phi_{ee}(f) = \frac{V^2 T_b}{4} \left(\frac{\sin \pi f T_b}{\pi f T_b} \right)^2$$

3.2.3 Code NRZ M-aire**Définition**

On généralise le code NRZ binaire pour $a_k = \{\pm 1, \pm 2 \dots \pm (M/2 - 1)\}$ on a :

$$m_a = 0 \text{ et } \sigma_a^2 = \frac{2}{M} \sum_{p=0}^{(M/2)-1} (2p+1)^2$$

Pour une forme d'impulsion rectangulaire de durée $T = nT_b$ on a donc:

$$\phi_{ee}(f) = \frac{(M-1)^2}{3} V^3 T \left(\frac{\sin \pi f T}{\pi f T} \right)^2$$

3.2.4 Code RZ binaire**Définition**

On note RZ_λ pour une impulsion rectangulaire de la forme:

$$g(t) = \begin{cases} +V & \forall t \in [0; \lambda T_b] \\ 0 & \forall t \in [\lambda T_b, T_b] \end{cases}$$

Alors :

$$\phi_{ee}(f) = \frac{V^2 \lambda^2 T_b}{4} \left(\frac{\sin \pi f_b \lambda T}{\pi f \lambda T_b} \right)^2 + \frac{V^2 \lambda^2 T_b}{4} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin k \pi \lambda}{k \pi \lambda} \right)^2 \delta(f - k/T_b)$$

Remarque: Le plus classique est le code $RZ_{1/2}$: on a une raie à $1/T_b$, mais pour une longue suite de 0 la DSP s'annule.

3.2.5 Code Manchester

Définition

$$\begin{cases} a_k = +1 & \text{si } \beta_k = 1 \\ a_k = 0 & \text{si } \beta_k = 0 \end{cases}$$

Pour une impulsion rectangulaire on a donc:

$$g(t) = \begin{cases} +V & \forall t \in [0, T_b/2] \\ -V & \forall t \in [T_b/2, T_b] \\ 0 & \forall t \notin [0, T_b] \end{cases}$$

Alors:

$$\phi_{ee}(f) = V^2 T_b \left(\frac{\sin \pi f T_b / 2}{\pi f T_b / 2} \right)^2 (\sin \pi f T_b / 2)^2$$

Remarque: Le codage de manchester est un transcodage "1B2B" : le 1 est codé par 1->0 alors que 0 est codé par 0->1. Les deux mots 11 et 00 ne sont pas utilisés. C'est le front montant ou descendant qui code l'information.

La DSP d'un code de Manchester a une raie à la fréquence $f = 1/T_b$, on peut faire de la synchronisation.

3.3 Code en Bande de base avec mémoire

3.3.1 Code bipolaire $RZ_{1/2}$

Définition

$$\begin{cases} a_k = \pm 1 & \text{si } \beta_k = 1 \\ a_k = 0 & \text{si } \beta_k = 0 \end{cases}$$

Donc $m_a = 0$ et $\sigma_a^2 = 1/2$. Pour une impulsion rectangulaire on a donc:

$$g(t) = \begin{cases} +V & \forall t \in [0, T_b/2] \\ -V & \forall t \in [T_b/2, T_b] \end{cases}$$

Alors :

$$\phi_{ee}(f) = \frac{V^2 T_b}{\sin^2(\pi f T_b)} \text{sinc}^2\left(\frac{\pi f T_b}{2}\right)$$

Proposition (Cas d'un code avec mémoire)

Pour un code avec mémoire :

$$\phi_{aa}(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} + \frac{2\sigma_a^2}{T} \sum_{k=1}^{\infty} R_{aa}(k) \cos(2\pi f k T) + \frac{m_a^2}{T^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k/T)$$

Avec R_{aa} la fonction d'autocorrélation normalisée des symboles a_k

$$R_{aa} = \frac{E[(a_n - m_a)(a_{n-k} - m_a)]}{\sigma_a^2}$$

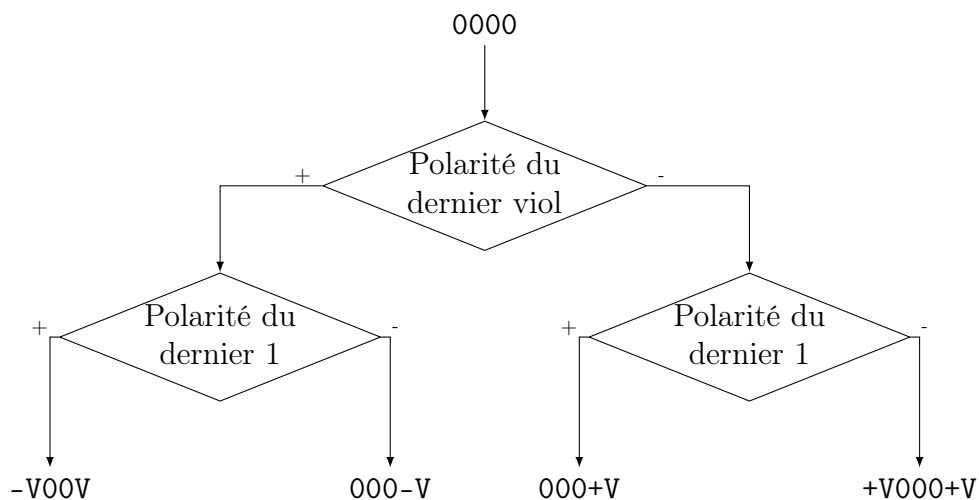
Remarque: $e(t)$ prend 3 niveaux de tension (+V,-V,0), ou 1 est codé alternativement par +V et -V. C'est un code *pseudo-ternaire*. Si β_k possède une longue suite de zéro la DSP va s'annuler...

3.3.2 Code HDBn**Définition**

Pour éviter que la DSP s'annule on intercale des *bit de viol* pour limiter la succession de n zéros.

Proposition

Le n de HBDn indique le nombre de 0 que l'on peut envoyer. On le choisit en fonction de la fiabilité du support et du matériel. La valeur pour le premier 1 à envoyer est fixée par convention entre l'émetteur et le récepteur.



Pour compenser les bits de viols , on ajoute les *bits de bourrage*.

Exemple:

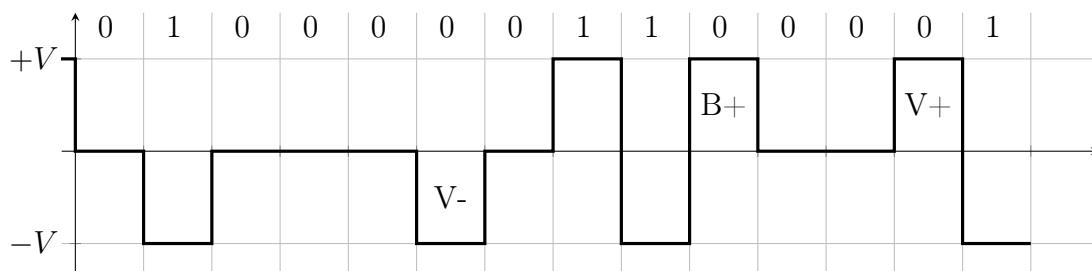


FIGURE II-3.3 – Codage HDB3

Chapitre II-4

Transmission dans un canal en bande de base (non bruité)

Dans cette partie on étudie l'influence du canal sur le signal.

Définition

On rappelle:

- La rapidité de modulation est noté $R = 1/T$ en [bauds]
- Le débit binaire $D = 1/T_b$.
- $T = \log_2(M).T_b$

Soit:

$$R = \frac{D}{\log_2(M)}$$

1 Caractéristique du canal

On choisit d'étudier un canal :

- linéaire et invariant (caractérisé par sa réponse impulsionnelle $g(t)$, sa réponse fréquentielle $G(f)$...)
- bruité par un bruit $n(t)$ additif.
- de type passe-bas et de bande B .
- associé à un filtre de réception de réponse impulsionnelle $g_r(t)$.

Le signal reçu et filtré par le filtre de réception :

$$\begin{aligned} r(t) &= g_r(t) * h(t) * e(t) + g_r(t) * n(t) \\ &= g_r(t) * h(t) * \sum_k a_k g(t - kT) + b(t) \\ &= \sum_k a_k y(t - kT) + b(t) \end{aligned}$$

$b(t)$ représente la contribution totale du bruit après filtrage.

Proposition

On considère que le bruit est additif blanc gaussien (BABG) à moyenne nulle et de variance σ^2

$$B(b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-b^2}{2\sigma^2}}$$

Proposition

Le filtre de reception peut être optimiser afin de maximiser le rapport signal sur bruit après réception :

$$G_r^{opt} = (G(f).H(f))^*$$

■

Démonstration :

Ainsi après échantillonnage à l'instant de décision on a :

$$r(t_0 + nT) = \sum_k a_k y(t_0 + nT - kT) + b(t_0 + nT) = d(t)$$

soit :

$$r(t_0 + nT) = a_n y(t_0) + \sum_{k \neq n} a_k y(t_0 + (n - k)T) + b(t_0 + nT)$$

Définition

On définit le terme d'interférence entre symbole comme:

$$IES = \sum_{k \neq n} a_k y(t_0 + (n - k)T)$$

Que l'on peut exprimer comme:

$$\sum_{k \neq n} a_k y(t_0 + (n - k)T) = \sum_k a_k g_r(t_0 + nT) * h(t_0 + nT) * g(t_0 + (n - k)T)$$

Proposition

En considérant un récepteur parfaitement synchronisé on souhaite qu'à l'instant de prise de décision :

$$r(t_0 + nT) = a_n y(t_0) + b(t_0 + nT)$$

Soit $IES = 0$

Remarque: Dans le cas d'un filtre de réception optimal, et pour une synchronisation parfaite, l'annulation de l'IES consiste à choisir une forme d'impulsion compatible avec le canal et telle que l'IES soit nulle.

2 Premier critère du Nyquist

Théorème (Critère de Nyquist)

On ne peut pas transmettre sans IES un signal de rapidité de modulation $R = 1/T$ dans une bande inférieure à $1/2T$. Un canal respectant le premier critère de Nyquist est tel que :

$$B \geq \frac{1}{2T} = B_{Nyquist}$$

Définition

On appelle Bande de NYQUIST la bande minimale pour une durée de symbole T .

$$B_{Nyquist} = \frac{1}{2T}$$

Démonstration : On considère un canal décrit en ???. Sans bruit on a :

$$r(t_0 + nT) = a_n y(t_0) + \sum_{k \neq n} a_k y(t_0 + (n - k)T)$$

On souhaite obtenir :

$$r(t_0 + nT) = a_n y(t_0) \implies y(t_0 + nT) = \begin{cases} y(t_0) & \text{pour } n = 0 \\ 0 & \forall n \neq 0 \end{cases}$$

En sortie de l'échantillonneur on a la prise de décision :

$$d(t) = y(t) \sum_n \delta(t - t_0 - nT)$$

Soit dans l'espace de Fourier :

$$D(f) = \frac{1}{T} Y(f - \frac{n}{T}) e^{-j2\pi n t_0 / T} \quad (**)$$

De plus on a également :

$$d(t) = \sum_n y(t_0 + nT) \delta(t - t_0 - nT)$$

Soit dans l'espace de Fourier :

$$D(f) = \sum_n y(t_0 + nT) e^{-j2\pi f(t_0 + nT)} \quad (**)$$

Par unicité de la transformée de Fourier on a :

$$\sum_n Y(f - \frac{n}{T}) e^{-j2\pi(f - n/T)t_0} = T y(t_0)$$

alors :

$$Y^{(t_0)}(f) = \frac{Y(f)}{y(t_0)} e^{j2\pi f t_0}$$

Le premier critère de Nyquist s'écrit donc :

$$\sum_n Y^{(t_0)}(f - \frac{n}{T}) = T$$

■

3 Impulsion de Nyquist

Toutes les fonctions qui vérifie l'équation suivante, vérifie le critère de Nyquist.

$$\sum_n Y^{(t_0)}(f - \frac{n}{T}) = T$$

La DSP rectangulaire centrée en fait partie.

Remarque: On a cependant des lobes secondaires élevés dans la DSP (sinus cardinal pur), ce qui peut être dramatique en cas de mauvaise synchronisation. On cherche donc d'autres fonctions candidates avec des lobes secondaires moins élevés.

Définition

Le filtre en cosinus surélevé vérifie ces deux critères. Sa DSP est alors:

$$G(f) = \begin{cases} T & \forall f \in [-\frac{1-\alpha}{2T}, \frac{1-\alpha}{2T}] \\ \frac{T}{2} [1 + \sin(\frac{\pi T}{\alpha} (\frac{1}{2T} - |f|))] & \frac{1-\alpha}{2T} \leq |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ce qui donne la réponse temporelle:

$$g(t) = \frac{\sin(\frac{\pi t}{T})}{\frac{\pi t}{T}} \frac{\cos(\frac{\pi \alpha t}{T})}{(1 - 4\alpha^2 \frac{t^2}{T^2})}$$

Avec α le *Roll-off* compris entre 0 et 1.

Pour $\alpha = 0$ on retrouve l'impulsion rectangulaire. Pour $\alpha = 1$ on a un filtre de Hanning.

Exemple: Dans la téléphonie 3G $\alpha = 0,22$.

(a) Réponse fréquentielle

(b) réponse temporelle

FIGURE II-4.1 – Différents filtres respectant le critère de Nyquist

4 Capacité de canal

4.1 Critère empirique HTS

Définition

HARTLEY, TULLER, SHANNON on établi la formule empirique:

$$m \leq m_{max} = \sqrt{1 + \frac{S}{N}}$$

Avec S et N puissance du signal et du bruit. et m le nombre de niveau de codage possible.

4.2 À retenir

Définition

C la capacité du canal est le nombre maximal de bit qu'il est susceptible de transmettre par seconde.

$$C = D_{max} = R. \log_2(M) = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right)$$

Proposition

Pour un canal de transmission de type passe-bas, de bande passante B et bruité par un BABG le débit doit toujours être inférieur à la capacité de Shannon.

Chapitre II-5

Egalisation

Remarque: Le rôle de l'égaliseur n'est pas le même en transmission numérique et analogique.

En numérique on utilise un égaliseur pour garantir le respect du critère de Nyquist.

1 Egaliseur numérique

On rappelle le schéma de chaîne de transmission numérique :

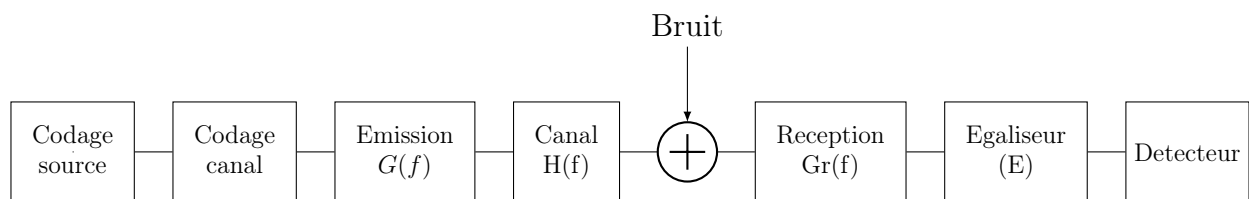


FIGURE II-5.1 – Principe d'une chaîne de transmission numérique

Proposition

On considère que le canal de transmission est idéal :

$$h(t) = K.\delta(t - \tau) \text{ soit } H(f) = K.e^{-2j\pi f\tau}$$

Alors :

- Signal en sortie du canal n'est pas déformé
- Si l'impulsion du canal vérifie le critère de Nyquist, en se plaçant au même rythme d'échantillonnage T pour ensuite détecter les différents niveaux correspondant à un code m -aire.

Remarque: Pour un canal quelconque on a le bruit, l'atténuation, une bande limitée... Tout cela peut conduire à une erreur de décodage sur les échantillons.

On place donc un *égaliseur* pour compenser ces effets dans la chaîne de réception du signal.

2 Réglage de l'égaliseur

Remarque: Le rôle de l'égaliseur n'est pas le même suivant le type de transmission (analogique/numérique).

- En transmission analogique on veut :

$$H(f).E(f) = \exp(-2\pi f\tau)$$

Pour compenser le retard dans le canal de transmission pour qu'il soit idéal du point de vue du récepteur.

- Pour une transmission numérique :

Il faut que l'impulsion perçue respecte (après l'égaliseur) le premier critère de Nyquist.

Proposition

Pour respecter le critère de Nyquist en numérique il faut que :

$$\sum_n G\left(f - \frac{n}{T}\right) \cdot H\left(f - \frac{n}{T}\right) \cdot G_r\left(f - \frac{n}{T}\right) \cdot E\left(f - \frac{n}{T}\right) = T$$

Remarque: Pour une impulsion issue d'un filtre rectangulaire

$$G\left(f - \frac{n}{T}\right) \cdot H\left(f - \frac{n}{T}\right) \cdot G_r\left(f - \frac{n}{T}\right) \cdot E\left(f - \frac{n}{T}\right) = T \cdot \text{rect}_{1/T}(f)$$

Remarque:

- Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, on choisit plutôt une impulsion de Nyquist.
 - L'égaliseur est implémenté numériquement et s'apparente à un filtre numérique.
 - Différentes stratégies d'optimisations sont possibles (Moindres carrés, adaptatifs, etc...).
- ajout sur le diagramme de l'oeil....

Chapitre II-6

Erreur décision et influence du bruit

En sortie de l'égaliseur, on échantillonne le signal reçu. Dans ce chapitre on fera l'hypothèse :

- d'une synchronisation parfaite entre émission et réception.
- d'une égalisation parfaite de la chaîne de transmission.

1 Taux d'erreur binaire

Le signal reçu peut se mettre sous la forme :

$$r(t) = u(t) + b(t)$$

avec $b(t)$ bruit blanc gaussien.

Définition

Le taux d'erreur binaire (TEB) ou bit error rate (BER) est défini par :

$$BER = \frac{\text{nb bit faux}}{\text{nb total bit transmis}}$$

Définition

On appelle *taux d'erreur* la probabilité de prendre une mauvaise décision sur l'information acquise:

- sachant les conditions de bruit (σ^2 est connu).
- en connaissant l'emplacement des seuils de décision.
- en connaissant la probabilité d'apparition des symboles.

Remarque: Cela permet a priori de connaître la qualité de la transmission. Dans le cas binaire on a $\epsilon = BER$

1.1 Exemple d'application

1.1.1 cas binaire antipolaire

Pour une transmission binaire equiprobable ,où :

- $u(t_0) = +1V$, si le bit transmis est un 1_l
- $u(t_0) = -1V$, si le bit transmis est un 0_l
- ajout d'un bruit de variance σ^2 .

On place le seuil de décision au centre (à $0V$) La probabilité de faire une erreur est alors :

$$\epsilon = P(\text{tx}0_l).P(\text{rx}1_l) + P(\text{tx}1_l).P(\text{rx}0_l)$$

Ce que l'on réécrit :

$$\epsilon = P(0_l).P(r(t_0) > 0) + P(1_l).P(r(t_0) < 0)$$

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{1}{2} \times \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x + \Delta/2)^2}{2\sigma^2}\right) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \times \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - \Delta/2)^2}{2\sigma^2}\right) dx \\ \epsilon &= \frac{1}{2} \int_{\Delta/2\sigma}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx + \frac{1}{2} \int_{\Delta/2\sigma}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\ &= \int_{\Delta/2\sigma}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx\end{aligned}$$

C'est la fonction de répartition complémentée de la loi normale.

$$\begin{aligned}G_c\left(\frac{\Delta}{2\sigma}\right) &= \int_{\Delta/2\sigma}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{\Delta/2\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x)^2}{2}\right) dx \\ &= 1 - F\left(\frac{\Delta}{2\sigma}\right)\end{aligned}$$

Définition

Dans les telecom on utilise les fonctions erf et erfc

$$\text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} \exp(-r^2) dr = 1 - \text{erf}(x)$$

Remarque: On a :

$$G_c(x) = \frac{1}{2} \cdot \text{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

1.1.2 Code m-aire unipolaire

soit un code m -aire unipolaire tel que :

- écart entre niveaux uniforme vallant Δ .
- seuils de décision situés à $\Delta/2$.

$$\begin{aligned}\varepsilon = & p(0) \cdot \text{prob} \left(u > \frac{\Delta}{2} \right) + p(m-1) \cdot \text{prob} \left(u < -\frac{\Delta}{2} \right) \\ & + \sum_{k=1}^{m-2} p(k) \cdot \text{prob} \left(|u| \geq \frac{\Delta}{2} \right)\end{aligned}$$

avec $p(k)$ probabilité de transmettre le niveau k . pour des niveaux equiprobables :

$$\varepsilon = \frac{2(m-1)}{m} \cdot G_c \left(\frac{\Delta}{2\sigma} \right) = \frac{(m-1)}{m} \cdot \text{erfc} \left(\frac{\Delta}{2\sqrt{2}\sigma} \right)$$

2 Introduction du rapport signal sur bruit

Rappel : La puissance d'un signal aléatoire est :

$$S = \sum_{k=0}^{m-1} p(k) \cdot a_k^2$$

Si tous les niveaux sont équiprobables et pour un écart constants entre niveaux Δ , on obtient :

- pour les code m -aires unipolaires : $S = \frac{(m-1)(2m-1)}{6} \Delta^2$
- pour les cas antipolaires : $S = \frac{m^2-1}{12} \Delta^2$

Proposition

Avec les calculs précédents on obtient :

- Cas unipolaire :

$$\varepsilon = \frac{2(m-1)}{m} \cdot G_c \left(\sqrt{\frac{3}{2(m-1)(2m-1)}} \cdot \frac{S}{N} \right)$$

- cas antipolaire :

$$\varepsilon = \frac{2(m-1)}{m} \cdot G_c \left(\sqrt{\frac{3}{m^2-1}} \cdot \frac{S}{N} \right)$$

- Pour le binaire on a respectivement :

$$\epsilon_b = G_c \left(\sqrt{\frac{S}{2N}} \right) \text{ et } \epsilon_b = G_c \left(\sqrt{\frac{S}{N}} \right)$$

2.1 Cas d'un mot à N digits

Proposition

Soit un système de transmission dont le taux moyen d'erreur par élément binaire ϵ_b , avec lequel on transmet une information à l'aide de mots de longueur n (n digits), on peut dire :

- que la probabilité pour qu'un élément binaire soit juste est $(1 - \epsilon_b)$
- que la probabilité que tous les éb du mot, qui sont indépendants, soient justes, donc que le mot n'ait pas d'erreur, est $M(0) = (1 - \epsilon_b)^n$
- que la probabilité pour qu'il n'y ait qu'une erreur (un seul élément binaire faux dans le mot) est $M(1) = n \cdot \epsilon_b \cdot (1 - \epsilon_b)^{n-1}$.
- que la probabilité pour qu'il y ait k erreurs dans le mot ($k < n$) est

$$M(k) = C_n^k \epsilon_b^k (1 - \epsilon_b)^{n-k}$$

- que la probabilité pour qu'il y ait au moins une erreur dans le mot est

$$M(> 0) = 1 - (1 - \epsilon_b)^n \simeq n \epsilon_b$$

- que la probabilité pour qu'il y ait plus d'une erreur dans le mot est :

$$M(> 1) = 1 - (1 - \epsilon_b)^n - n \cdot \epsilon_b \cdot (1 - \epsilon_b)^{n-1}$$

càd tous les cas possible sauf ceux où il n'y a pas d'erreur et ceux où il n'y a qu'une erreur.

3 Filtre adapté (Optimisation du RSB)

3.1 Conception du filtre adapté

On a vu que le BER est directement lié au RSB. L'objectif du filtre de réception est donc de maximiser le RSB à l'instant de prise de décision, on parle alors de filtre adapté.

Proposition

À l'instant de décision on a :

$$\frac{\mathcal{S}}{\mathcal{N}} = \frac{r^2(t_0 + nT)}{E[b^2(t_0 + nT)]}$$

- $r(t) = g_r(t) * s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_r(t - \tau) s(\tau) d\tau$
- $b(t) = g_r(t) * n(t)$
- n un BABG centrée et de variance σ_n .

On fait les hypothèses suivantes :

- L'égaliseur a parfaitement compensé l'effet du canal
- Le système est parfaitement synchronisé $\implies s(t_0 + nT) \simeq g_e(t_0 + nT)$

Définition

Puissance de bruit

$$\begin{aligned}\mathcal{N} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{bb}(f) df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |G_r(f)|^2 \phi_{nn}(f) df \\ &= \frac{\sigma_n^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |g_r(\tau)|^2 d\tau\end{aligned}$$

Puissance du signal

$$r(t_0 + nT) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_e(t_0 + nT - \tau) g_r(\tau) d\tau$$

Puis

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(t_0 + nT) &= |r(t_0 + nT)|^2 \\ &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} g_e(t_0 + nT - \tau) g_r(\tau) d\tau \right|^2\end{aligned}$$

Proposition

On a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\mathcal{S}(t_0 + nT) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |g_e(t_0 + nT - \tau)|^2 d\tau \times \int_{-\infty}^{+\infty} |g_r(\tau)|^2 d\tau$$

La puissance sera maximale si $g_r(t) = C \times g_e^*(t_0 + nT - \tau)$ avec C une constante. On choisit donc cette expression pour le filtre adapté.

On a le RSB suivant :

$$\mathcal{S}/\mathcal{N} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |g_e(t_0 + nT - \tau)|^2 d\tau}{\frac{\sigma_0^2}{2}}$$

3.2 Réalisation du filtre adapté

On réalise filtre adapté en réalisant une corrélation entre g_e et s . Tout est très bien expliqué dans le cours de l'UE451.

Chapitre II-7

Modulation numériques

Fondamentalement il n'y a pas de différence entre une modulation analogique et une modulation numérique.

Remarque: Le cours de modulation analogique (AM, FM, bande de Carson ...) a été traité dans l'UE 431.

Notation :

- $u(t)$ est le signal modulant.
- $p(t)$ est la porteuse.
- $s(t)$ est le signal de sortie, modulé.

1 Modulation numérique

Définition

La modulation numérique est une modulation analogique dont le modulant est un signal type codé en bande de base.

Proposition

On se donne différents indicateurs de la qualité de la modulation/transmission :

- L'efficacité spectrale :

$$\eta = \frac{D}{B}, \text{ avec } D = R \cdot \log_2(M) \text{ débit binaire et } B \text{ Bande occupée}$$

- L'énergie bit sur la puissance de bruit :

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{\text{Energie bit (J/bit)}}{\text{DSP de bruit unilatéral (W/Hz)}}$$

- Le rapport signal à Bruit :

$$RSB = \frac{P_s}{P_b} = \frac{DE_b}{BN_0} = \eta \times \frac{E_b}{N_0}$$

2 Modulation d'amplitude

On parle de modulation ASK (Amplitude shift Keying). Le signal $u(t)$ prend M valeurs discrètes (pour une transmission M -aire).

Proposition

- Pour $u(t)$ NRZ, unipolaire à M niveaux et impulsion rectangulaire on a :

$$B_{ASK-rect} = 2R = \frac{2}{T}$$

- Si $u(t)$ est constitué d'impulsion de Nyquist :

$$B_{ASK-N} = 2R = \frac{2}{2T} = \frac{1}{T}$$

Remarque: Cette modulation ne dépend pas de la fréquence de la porteuse (ni de sa phase), mais est très sensible au bruit additif (fading).

Exemple: Modulation OOK Pour un signal binaire on peut réaliser une modulation tout ou rien :

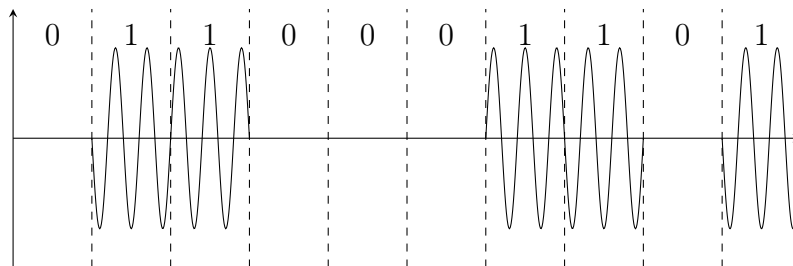


FIGURE II-7.1 – modulation OOK

On alors l'efficacité spectrale :

$$\eta_{rect} = \frac{D}{B} = 0.5 \text{ bit/s/Hz}$$

$$\eta_N = \frac{D}{B} = 1 \text{ bit/s/Hz}$$

3 Modulation angulaires

Proposition

Dans le cas des modulation PSK :

- L'amplitude est constante
- seule $\Phi(t)$ code l'information numérique :

$$s(t) = \Re[u.exp(j2\pi f_0 t + \Phi(t))] = \Re[\underline{u}.exp(j2\pi f_0 t)]$$

Exemple: Dans le cas d'une modulation BPSK : $\Phi(t) = 0$ ou π à la fréquence $R = \frac{1}{T_b}$ on a en fait une modulation d'amplitude :

$$s(t) = \pm A. \cos(\omega_0 t + \phi)$$

C'est une modulation d'amplitude par un modulant NRZ antipolaire. $B_{BPSK-rect} = 2R$.

4 FSK cohérente

5 FSK incohérente

6 Démodulation

7 Modulation dérivées

8 MAQ

9 Exemple d'application