subfiles

Exercice I

On considère le système

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= x_1 + x_2 \\ \dot{x_2} &= x_2^2 + u \\ y &= x_1 \end{cases} \quad \text{donc } f(x) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2^2 \end{bmatrix}, g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad h(x) = x_1$$

1. On peut balancer $u = -x_2^2 + v$ comme des bâtards mais on va suivre le cours :
   (a) Trouver le degré relatif

$$\begin{aligned} z_1 &= y = x_1 \\ z_2 &= \dot{y} = \dot{x_1} = x_1 + x_2, \quad r > 1 \\ z_3 &= \dot{z_2} = \dot{x_1} + \dot{x_2} = x_1 + x_2 + x_2^2 + u, \quad r = 2 \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{cases} \dot{z_1} = z_2 \\ \dot{z_2} = v \end{cases} \quad \text{modèle linéaire avec } \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} u &= v - x_1 - x_2 - x_2^2 \\ &= v - z_2 - (z_2 - z_1)^2 \end{aligned}$$

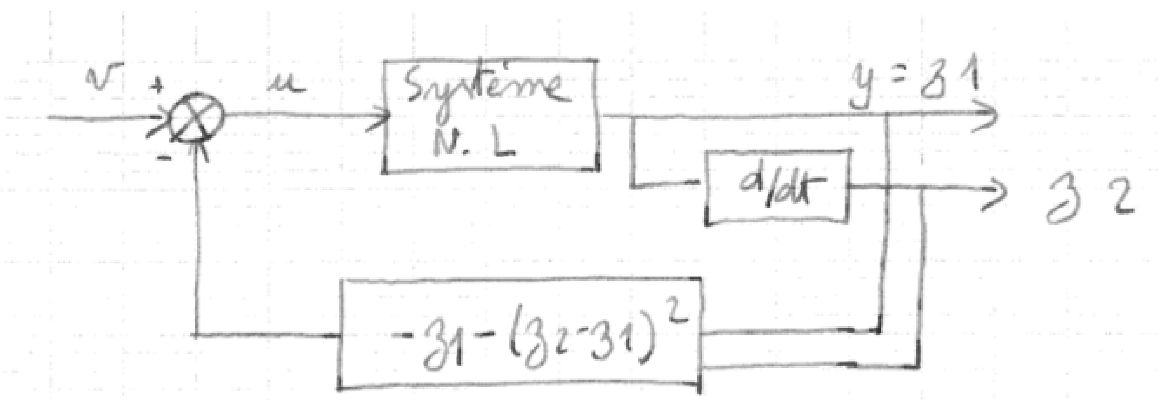

FIGURE 1 –

2.
$$\begin{cases} \dot{z_1} &= z_2 \\ \dot{z_2} &= \ddot{y} = v = \ddot{y_r} + a_1(\dot{y_r} - \dot{y}) + a_2(y_r - y) \end{cases}$$

Équation caractéristique de la dynamique

$$x^2 + a_1 x + a_2 = 0$$

3. On considère maintenant le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = x_1 x_2 + u \\ y = x_1 \end{cases}$$

Cherchons dans un premier temps uen commande linéarisante.

$$\begin{aligned} z_1 &= y = x_1 = h(x) \\ z_2 &= \dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x}\dot{x} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 x_2 + u \end{pmatrix} \\ &= x_2 \\ \ddot{y} &= \frac{\partial \dot{y}}{\partial x}\dot{x} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 x_2 + u \end{pmatrix} \\ &= x_1 x_2 + u = v \end{aligned}$$

Ainsi, $r = 2$ et le modèle linéaire correspond à :

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ et, } u = -x_1 x_2 + v$$

Pour imposer une consigne on a alors :

$$\ddot{\epsilon} + a_1 \dot{\epsilon} + a_0 \epsilon = 0$$

$$\begin{aligned} \epsilon &= y_c - y \\ &= y_c - z_1 \\ \dot{\epsilon} &= \dot{y_c} - z_2 \\ \ddot{\epsilon} &= \ddot{y_c} - \dot{z_2} \end{aligned}$$

Comme $\dot{z_2} = v$ alors,

$$\begin{aligned} &\ddot{y_c} - \dot{z_2} + a_1(\dot{y_c} - z_2) + a_0(y_c - z_1) = 0 \\ \Rightarrow &v = \ddot{y_c} + a_1(\dot{y_c} - z_2) + a_0(y_c - z_1) \end{aligned}$$

Exercice 2 :

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_1 x_3 \\ \dot{x_2} = x_1 + x_2 u \\ \dot{x_3} = 1 + x_3 u \end{cases}$$

Examinons la commandabilité de ce système. Pour cela, on rappelle qu'il faut l'écrire sous la forme :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

On a donc m=2 et,

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad J_f = \begin{pmatrix} x_3 & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad J_g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On calcul ensuite :

$$ad_f g = [f, g] = \begin{pmatrix} -x_1 x_3 \\ x_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc, } J_{ad_f g} = \begin{pmatrix} -x_3 & 0 & -x_1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{reste à calculer, } ad_f^2 g = [f, ad_f g] = J_{ad_f g} - J_f ad_f g = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ 2x_1 x_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, on a $E = \{g, ad_f g, ad_f^2 g\}$. Or pour $x = 0$ le dernier vecteur est nul donc la dimension de E est inférieur à 3. Cela implique que le système n'est pas commandable.

Exercice 3 :

On considère ici le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 + u \\ \dot{x_2} = x_1^2 + x_2 \\ \dot{x_3} = x_3 + u \\ y = x_1 \end{cases}$$

Déterminons la dynamique est zéros, c'est à dire que l'on va choisir u de sorte à maintenir la sortie à zéro ainsi que ses dérivées successives. Ainsi, on impose $y = 0$:

$$\begin{aligned} y = 0 &\Rightarrow x_1 = 0 \\ &\Rightarrow \dot{x_1} = 0 \\ &\Rightarrow x_2 + u = 0 \\ &\Rightarrow u = -x_2 \\ \text{on a aussi avec } x_1 = 0,\ \dot{x_2} = x_2 \\ \text{et aussi, } \dot{x_3} = x_3 - x_2 \end{aligned}$$

On a donc la dynamique du système donnée par les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres étant ± 1, la dynamique des zéros est instable (CF début du cours de 424).