subfiles

Exercice 1 : Forme quadratique de la fonction de Lyapunov

Soit le système donné par :

$$\begin{cases} \dot{x_1} = f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \dot{x_2} = f_2(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \dot{x_n} = f_n(x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases}$$

1. L'approximation linéaire pour le point d'équilibre x_0 est :

$$\delta\dot{x}_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}\delta x_i$$
$$\vdots$$
$$\delta\dot{x}_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ni}\delta x_i \text{ avec, } a_{ij} = \left.\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right|_{x=x_0}$$

   Pour simplifier, on pose $x_0 = 0$, et comme $\delta x_1 = x_1 - x_{0i}$, on a :

$$\dot{x}_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}x_i$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ni}x_i$$

2.

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= \sum_{j=1}^{n} C_{ji}\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} C_{ji}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ji}a_{jk}x_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k C_{ki}x_k \\ &= z_i\lambda_i \end{aligned}$$

3. On considère la fonction de Lyapunov candidate fournie, on calcul alors :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{k=1}^{n} \dot{z}_k z_k^* + z_k\dot{z}_k^* \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_k z_k^* + \lambda_k^* z_k z_k^* \\ &= \sum_{k=1}^{n} 2Re(\lambda_k) z_k z_k^* < 0 \forall k \end{aligned}$$

4. L'analyse doit se faire sur un voisinage suffisamment petit de l'origine (CN).
5. Modèle linéaire :

$$\dot{x_1} = -x_2$$
$$\dot{x_2} = x_1$$

$$\text{donc } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, les valeurs propres sont i et -i

Comme $V = \sum_{k=1}^{2} z_k z_k^*$ alors,

$$\begin{aligned}
&\dot{V} = 8(x_1^4 + x_2^4)(1 - \alpha x_1^2 - \beta x_2^2) \\
&\dot{V} \leq 0 \\
&\Rightarrow \alpha x_1^2 + \beta x_2^2 > 1
\end{aligned}$$

Au voisinage de l'origine, $(\alpha x_1^2 + \beta x_2^2 > 1)$, c'est instable, mais en dehors de la trajectoire converge. On a un cycle limite pour $\alpha x_1^2 + \beta x_2^2 = 1$

Exercice II : Système du 2nd ordre

1. Suivant Routh, $a > 0 \quad$ et $\quad b > 0$
2. Cas linéaire : $f(y) = by$, alors $b > 0$ implique que $y(by) > 0$ pour $y \neq 0$, soit $yf(y) > 0$ pour $y \neq 0$
3. On prend $V(x_1, x_2) = x_2^2 + 2\int_0^{x_1} f(\tau)d\tau$. Elle est définie positive et :

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= 2f(x_1)\dot{x_1} + 2x_2\dot{x_2} \\
&= 2x_2 f(x_1) - 2ax_2^2 - 2x_2 f(x_1) \qquad \leq 0 \text{ : origine stable pour Lyapunov}
\end{aligned}$$

Exercice III : Commandabilité et observabilité

1. On considère le système : $\begin{cases} \dot{x_1} &= -x_2 - x_2^2 \\ \dot{x_2} &= u \end{cases}$

   On a donc $f(x) = \begin{bmatrix} -x_2 - x_2^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad$ et $\quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   $E = \{f(x), g(x)\}$

$$\begin{aligned}
[f, g] &= J_g f - J_f g \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} f(x) - \begin{bmatrix} 0 & -1 - 2x_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\
[f, [f, g]] &= J_{[f,g]} f - J_f [f, g] \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_2 - x_2^2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 - 2x_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + 2x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
[g, [f, g]] &= J_g [f, g] - J_{[f,g]} g \\
&= 0 - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

   On a donc :

$$\mathcal{D} = \{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 + 2x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \}$$

   $\mathcal{D}$ est de dimension 2 : le système est commandable.

2. On a $f(x) = \begin{bmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$[f,g] = \begin{bmatrix} -2x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$[f,[f,g]] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$[g,[f,g]] = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On a donc :

$$\mathcal{D} = \{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \}$$

$\mathcal{D}$ est de dimension 2 : le système est commandable.

De plus, on a $h(x) = x_1$
$\mathcal{V} = \{h, L_f h, L_g h, L_f L_g h, \dots\}$ et on étudie $\nabla\mathcal{V}$.
On a $\nabla h = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Il reste à trouver un élément de $\nabla\mathcal{V}$ qui a une 2e composante non nulle pour que $\nabla\mathcal{V}$ soit de dimension 2, et que le système soit observable.

$$L_f h(x) = x_2^2 \qquad \nabla L_f h(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2x_2 \end{bmatrix} \text{ ok mais dépend de } x_2$$
$$L_g L_f h(x) = 2x_2 \qquad \nabla L_g L_g h(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ COOL!}$$

Le système est donc observable.