

1 Trajectoire

Dans le cas linéaire, la trajectoire est la solution au système $\dot{x} = Ax$ avec $x(0) = x_0$. Cette solution est unique. Qu'en est-il en non-linéaire ?

Définition

Un système dynamique sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$, où n est la dimension du système, est un triplet $(\mathcal{D}, \mathbb{R}, \chi)$ où $\chi : \mathbb{R} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ est une trajectoire, tel que les axiomes suivants sont vérifiés:

1. Continuité : $\chi(\cdot, \cdot)$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathcal{D}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $\chi(\cdot, x)$ est dérivable.
2. Consistance : $\chi(0, x_0) = x_0, \forall x_0 \in \mathcal{D}$.
3. Propriété de groupe : $\chi(\tau, \chi(t, x_0)) = \chi(t + \tau, x_0), \forall x_0 \in \mathcal{D}$.

Remarque:

- On dénote le système $(\mathcal{D}, \mathbb{R}, s)$ par G , où $\chi(\cdot, \cdot)$ est la trajectoire et \mathcal{D} est l'espace de phase.
- On dénote la trajectoire $\chi(t, \cdot) : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ par $\chi_t(x_0)$ ou χ_t .

Proposition

Suivant l'axiome de consistance, $\chi_0(x_0) = x_0$ et suivant la propriété de groupe :

$$(\chi_\tau \circ \chi_t)(x_0) = (\chi_t \circ \chi_\tau)(x_0) = \chi_{t+\tau}(x_0)$$

Ainsi l'application inverse de χ_t est χ_{-t} où χ_t est un homéomorphisme (bijective, continue, inverse continue).

Démonstration : En effet, montrons que χ_t est injective.

Soit $y, z \in \mathcal{D}$ tels que $\chi_t(z) = \chi_t(y)$. On a $z = s_0(z) = \chi(0, z) = \chi(t-t, z) = \chi(-t, \chi(t, z)) = \chi(-t, \chi(t, y)) = \chi(0, y) = y$

χ_t est surjective : $\forall z \in \mathcal{D}, \exists y \in \mathcal{D}$ tel que $y = \chi(-t, z)$.

Enfin, χ_t est continue sur \mathbb{R} donc χ_{-t} est continue. ■

Exemple: Système linéaire causal de dimension n (n variables d'état)

$s : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ où $\chi(t, x) = e^{At}x$ où $A \in \mathbb{R}^n$ matrice d'évolution

Ainsi $\chi_t(x) = e^{At}x$ où $\chi_t : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto e^{At}x \end{cases}$

On a $(\chi_\tau \circ \chi_t)(x) = \chi_\tau(\chi_t(x)) = e^{A\tau}e^{At}x = \chi_{t+\tau}(x)$

Proposition

Suivant l'axiome 1, le système G peut être décrit par une équation différentielle sur \mathcal{D} . En particulier, la fonction $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $f(x) = \frac{d\chi(t,x)}{dt}|_{t=0}$. Ainsi, $f(x)$ est un champ de vecteur sur \mathcal{D} où pour $x \in \mathcal{D}$, $f(x) \in \mathbb{R}^n$ correspond au vecteur tangent à la trajectoire en $t = 0$.

Exemple: Système linéaire $f(x) = \frac{de^{At}x}{dt}|_{t=0} = Ax$

Nous avons défini une trajectoire, mais à partir de $\dot{x} = f(x)$, est-elle unique ?

2 Trajectoire et point d'équilibre

2.1 Théorème du point fixe

Théorème (*Point fixe*)

Soient X un espace de Banach de norme $\|\cdot\|$, S un fermé de X et $T : S \rightarrow S$ une application contractante sur X , i.e. $\exists \rho \in [0, 1[$ tel que $\forall (x, y) \in S^2, \|T(x) - T(y)\| \leq \rho \|x - y\|$, alors

$$\exists ! x^* \in S \text{ tel que } T(x^*) = x^*$$

De plus, quelque soit la suite sur S tel que $x_{n+1} = T(x_n)$, elle converge vers x^* .

Définition

Soit deux espaces munis de leur normes (X, d_x) et (Y, d_y) et une application $f : (X, d_x) \rightarrow (Y, d_y)$. On dit que f est *lipschitzienne* si $\exists \alpha > 0$ tel que

$$\forall x, y \in X, \quad d_y(f(x), f(y)) \leq \alpha d_x(x, y)$$

Remarque: Une fonction lipschitzienne est uniformément continue.

Théorème (*Cauchy-Lipschitz*)

Soient le système dynamique défini par

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \text{ et } x(t_0) = x_0 \quad (*)$$

Si $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est lipschitzienne sur \mathcal{D} alors

$\forall x_0 \in \mathcal{D}, \exists \tau \in]t_0, t_1[$ tel que $(*)$ a une unique solution $x : [t_0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$

Démonstration : Soient $T(x) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s)ds$, $t \in [t_0, \tau] = x(t)$
 et on définit $S = \{x(t) \text{ tel que } t \in [t_0, \tau], \|x - x_0\| \leq r\}$
 Ainsi, $\forall x \in S$

$$\begin{aligned} \|T(x) - x_0\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s)ds \right\| \\ &= \left\| \int_{t_0}^t (f(s) - f(t_0) + f(t_0))ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|f(s) - f(t_0)\|s + \int_{t_0}^t \|f(t_0)\|ds \\ &\leq (\alpha r + C)ds \quad (f \text{ lipsch. et } \|s - x_0\| \leq r) \\ &\leq (\alpha r + C)(t - t_0) \leq r \end{aligned}$$

$\exists \tau \in]t_0, t_1[$ tel que $(\tau - t_0) \leq \frac{r}{\alpha r + C}$ donc $T : S \rightarrow S$.

$$\begin{aligned} \forall x, y \in S, \quad \|T(x) - T(y)\| &\leq \int_{t_0}^t \|f(x(s)) - f(y(s))\|ds \\ &\leq \alpha \int_{t_0}^t \|x(s) - y(s)\|ds \\ &\leq \alpha \max_{s \in [t_0, \tau]} \|x(s) - y(s)\| \int_{t_0}^t ds \\ &\leq \alpha \|x(s) - y(s)\| (t - t_0) \quad \text{avec } \|\cdot\| = \max_{s \in [t_0, \tau]} (\cdot) \end{aligned}$$

On veut $\alpha(t - t_0) \leq \alpha(\tau - t_0) \leq \rho$ avec $\rho < 1$ donc $\|T(x) - T(y)\| \leq \rho \|x - y\|$.

Il suffit de choisir τ tel que $\tau - t_0 \leq \frac{\rho}{\alpha}$

$T : S \rightarrow S$ est contractante pour $\tau - t_0 \leq \min\{\frac{r}{\alpha r + C}, \frac{\rho}{\alpha}\}$

(*) a une unique trajectoire. ■

Rappel : Dans le cas linéaire, le système $\dot{x} = Ax$ est stable si toutes ses valeurs propres sont à partie réelle négative, il existe un unique point d'équilibre \bar{x} stable tq $\dot{x} = 0$ (si $\det(A) \neq 0$ on $\bar{x} = 0$).

2.2 Points d'équilibres

Définition

- Les *points d'équilibre* d'un système vérifient $\dot{x}_{eq} = 0$
- Dans le cas non linéaire on peut avoir plusieurs points d'équilibre, isolés, voire une infinité, ou aucun.
- La stabilité en non linéaire n'est pas une caractéristique du système mais d'un point (ou un ensemble de point) qui sont généralement les points d'équilibre.

Exemple: *Pendule simple*

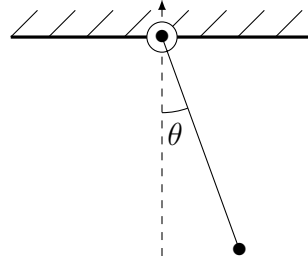


FIGURE 1 – Pendule simple

1. On a la représentation d'état ($x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}$) :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{k}{m} x_2 \end{cases}$$

Les points d'équilibre vérifient $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ soit $x_1 = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. physiquement on a deux points : 0 et π .

2. soit le système NL :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha + \sin(x_1(t) + x_2(t)) + x_1(t) \\ \dot{x}_2 = \alpha + \sin(x_1(t) + x_2(t)) - x_1(t) \end{cases}$$

Les point d'équilibre sont solutions de $\dot{x}_1 = 0$ et $\dot{x}_2 = 0$: on a pas de solution, en effet $\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 2\alpha + 2\sin(x_1 + x_2)$ pour $\alpha > 1$

Remarque: Les points d'équilibre peuvent aussi être déterminer dans le cas du régime forcé : $\dot{x}(t) = f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$

3 Critère Qualitatif

But : Tracer les trajectoires $\chi(t, x_0), \forall x_0 \in \mathcal{D}$ dans l'espace de phase \mathbb{R}^n où n est la dimension du système.

Cette méthode est réalisée pour les systèmes du second ordre ,plan de phase dans \mathbb{R}^2 , voire dans \mathbb{R}^3 . Les systèmes mécaniques sont des exemples typiques, notamment via les équation de Lagrange $\ddot{q} = l(q, \dot{q})$ avec q coordonnées généralisées. même si le modèle est d'ordre $2n$ où $n = \dim(q)$ on peut tracer les coordonnées deux à deux $x_1 = q_i, x_2 = \dot{q}_i$, dans le plan de phase.

3.1 Méthode pour tracer les trajectoires

1. Méthodes informatique :

- On utilise une intégration numérique pour différentes conditions initiale
- Graphe des pentes générés numériquement en étudiant $\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{f_1(x_1, x_2)}{f_2(x_1, x_2)}$

2. Méthode papier-crayon

- Méthode isocline : peut être manuelle et/ou numérique.
- Solution explicite des équations
On élimine le temps de manière explicite ou non.

Dans l'analyse de la stabilité on s'intéresse au comportement dans un voisinage du point d'équilibre.

Définition

Pour déterminer *l'index topologique* on utilise la méthode suivante:

1. Une courbe autour du point d'équilibre choisie d'une manière arbitraire et supposée de taille infinitésimale
2. Avec une paramétrisation dans le sens trigonométrique
3. On considère une suite arbitraire de point (x_n) dans le sens de la paramétrisation
4. Pour chaque point x_n on évalue $f(x_n)$ où f vérifie $\dot{x} = f(x)$.
5. Tous les vecteurs $f(x_n)_{n=1\dots N}$ sont ramenés aux point d'équilibre.

Ainsi *l'index topologique* est la mesure de l'angle (modulo 2π) que l'extrémité des vecteurs $(f(x_i))$ parcourt dans le sens trigonométrique.

Il reste maintenant à chercher les trajectoires autour des points d'équilibres.

3.2 Méthode isocline

Pour cette méthode, il s'agit de poser :

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = Cst$$

C'est-à-dire de rechercher les points tel que la pente en x est égale à une constante donnée.

Exemple: *Pendule inversé* Cas sans frottement :

$$\begin{cases} x_1 = \theta \\ x_2 = \dot{\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin(x_1) \end{cases}$$

Les iso-clines vérifient donc :

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dx_1} &= \frac{-\frac{g}{l} \sin(x_1)}{x_2} \\ &= C \end{aligned}$$

donc les points décrivant la courbe ont pour équation :

$$x_2 = -\frac{g}{lC} \sin(x_1)$$

On trace alors ces courbes pour différentes valeurs de constante et l'on obtient :

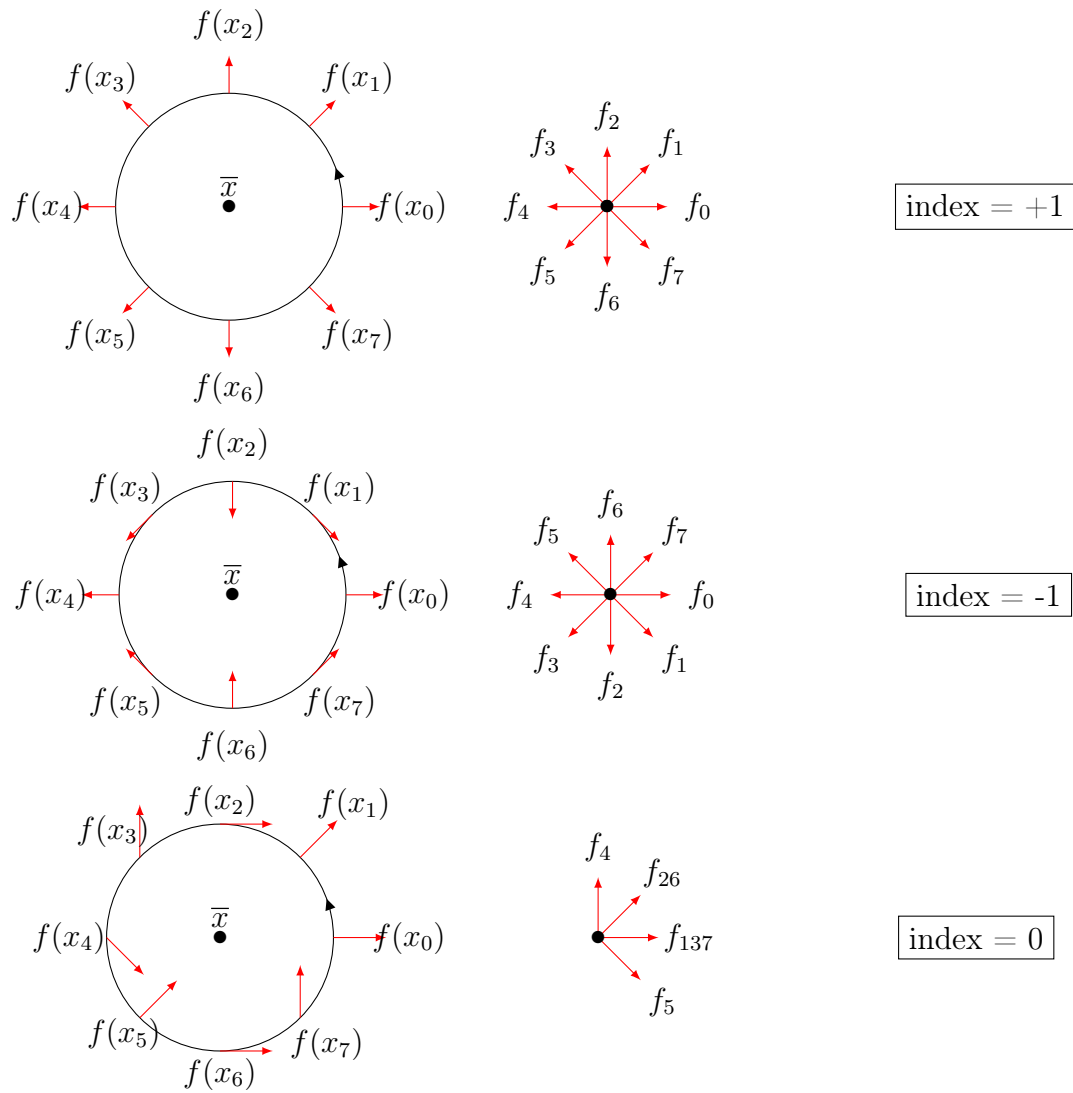
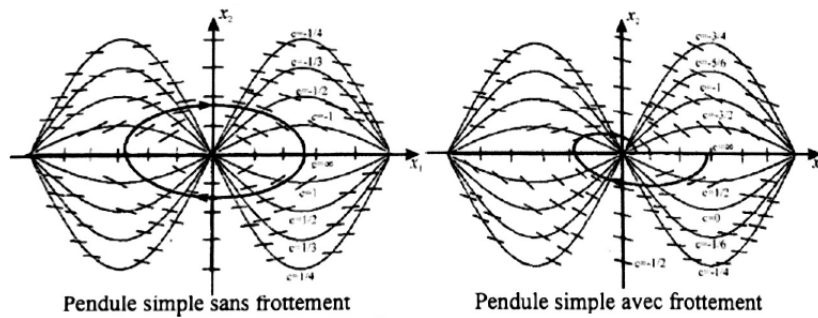


FIGURE 2 – Détermination de l'index topologique



L'iso-cline donne la pente de la trajectoire, ainsi, en suivant les pentes données d'iso-cline en iso-cline, on peut remonter à la trajectoire.

A noter que pour C infini on est sur l'axe de x_1 et pour C nul sur celui de x_2 .

Remarque: sans frottement on atteint un cycle limite tandis qu'avec frottement on tend bien vers l'origine.

3.3 Méthode par suppression temporelle

3.3.1 Méthode explicite

À partir des solutions des équations différentielles on se débarrasse de la paramétrisation temporelle pour obtenir la trajectoire :

Exemple:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_0 \cos(t) + \dot{x}_0 \sin(t) \\ \dot{x}_2 = -x_0 \sin(t) + \dot{x}_0 \cos(t) \end{cases}$$

On a $\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 = x_0^2 + \dot{x}_0^2$ soit un cercle de rayon $\sqrt{x_0^2 + \dot{x}_0^2}$

3.3.2 Méthode implicite

Le temps est élimié à partir de l'équation différentielle puis l'orbite est obtenue par intégration

Exemple:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases} \implies \frac{dx_2}{x_2} = dt = \frac{dx_1}{x_1}$$

Donc :

$$\int_{x_{20}}^{x_2} x_2 dx_2 = - \int_{x_{10}}^{x_1} x_1 dx_1$$

Ainsi on a : $x_1^2 + x_2^2 = x_{10}^2 + x_{20}^2$.

Remarque: Les méthodes par élimination du temps ne s'appliquent que pour les systèmes avec des dynamiques relativement simple.