Signal sinusoïdal à phase équirépartie

On considère le signal aléatoire

$$X_t = x(t) = E_0 \sin(2\pi f_o t + \Phi)$$

ϕ est une variable aléatoire uniformément répartie sur $[0, 2\pi[$
E_0, f_0 sont des grandeurs déterministes strictement positives.

1. À t donné, $f_{X,t}(x,t) = f_{Xt}(x) = f_X(x,t)$
   Méthode : changement de variable

$$\Phi \to X_t = x(t) = g(\Phi) = E_0 \sin(2\pi f_0 t + \Phi)$$

$$f_\Phi(\phi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{si} \quad \phi \in [0, 2\pi[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$X_t = x(t) \in [-E_0, E_0]$ donc $f_{Xt}(x) = 0$, pour tout x tel que $|x| > E_0$.
Théorème de changement de variables aléatoires.
Soit x tel que $|x| < E_0$

$$f_{Xt}(x) = f_X(x,t) = f_\Phi(\phi)|\frac{d\phi}{dx}||_{\phi, g(\phi)=x}$$

Pour tout $x \in [-E_0, E_0]$ (sauf les points où la dérivée s'annule, ensemble de mesure nulle), il y a deux points d'intersection $\phi_i \in [0, 2\pi[$

$$f_X(x,t) = \sum_{i=1}^{2} f_\Phi(\phi_i) \frac{1}{|\frac{dx}{d\phi}|}|_{\phi_i, g(\phi_i)=x}$$

$$\frac{dx}{d\phi} = E_0 \cos(2\pi f_0 t + \phi) \text{ donc } |\frac{dx}{d\phi}|_{\phi=\phi_1} = |\frac{dx}{d\phi}|_{\phi=\phi_2}$$

$$\frac{dx}{d\phi}|_{\phi=\phi_i} = \sqrt{E_0^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \phi_i)} = \sqrt{E_0^2(1 - \sin^2(2\pi f_0 t + \phi_i))} = \sqrt{E_0^2 - x^2}$$

Ainsi, on a

$$f_{X_t}(x) = f_X(x,t) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad |x| \geq E_0 \\ \frac{1}{\pi\sqrt{E_0^2 - x^2}} & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque : $f_X(x,t)$ est finie en $x = \pm E_0$ car Φ VA continue et g fonction continue $\to X_t$ est une VA continue.
Pour conclure quant à la stationnarité à l'ordre un, on regarde si $E[x(t)]$ dépend du temps
Or, $E[x(t)] = \int_{\mathbb{R}} x_t f_X(x_t, t) dx_t$ et $f_X(x_t, t)$ ne dépend pas de t, donc la VA $x(t)$ est stationnaire à l'ordre un.
Autre méthode : fonction de répartition
$F_X(x, t = F_{X_t}(x) = P[X_t < x]$

2.

$$\begin{aligned}
E[x(t)] &= \int_{\mathbb{R}} x f_X(x,t)dx = ... = 0 \\
\text{ou } &= E[E_0 \sin(2\pi f_0 t + \phi)] \\
&= \int_{\mathbb{R}} E_0 \sin(2\pi f_0 t + \phi) f_\phi(\phi) d\phi \\
&= E_0 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi f_0 t + \phi) d\phi = 0
\end{aligned}$$

La moyenne statistique ne dépend pas de l'origine des temps : stationnarité du moment d'ordre 1.

$$\overline{x(t)} = \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} E_0 \sin(2\pi f_0 t + \phi) dt = 0$$

La moyenne temporelle ne dépend pas de ϕ (de la réalisation) : ergodicité du moment d'ordre 1.

3.

$$\begin{aligned}
E[x(t)x(t-\tau)] &= \gamma_{xx}(t, t-\tau) \\
&= E[E_0^2 \sin(2\pi f_0 t + \phi) \sin(2\pi f_0 (t-\tau) + \phi)] \\
&= \frac{E_0^2}{2} E[\cos(2\pi f_0 \tau) - \cos(4\pi f_0 t - 2\pi f_0 \tau + 2\phi)] \\
&= \frac{E_0^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau)
\end{aligned}$$

$E[x(t)x(t-\tau)]$ ne dépend pas de l'origine des temps, donc on a $E[x(t)x(t-\tau)] = \gamma_{xx}(\tau)$: stationnarité du moment d'ordre 2

$$\begin{aligned}
\overline{x(t)x(t-\tau)} &= \frac{E_0^2}{2} (\overline{\cos(2\pi f_0 \tau)} - \overline{\cos(4\pi f_0 t - 2\pi f_0 \tau + 2\phi)}) \\
&= \frac{E_0^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau)
\end{aligned}$$

$\overline{x(t)x(t-\tau)}$ ne dépend pas de ϕ (de la réalisation) : ergodicité du moment d'ordre 2

On a donc ergodicité et stationnarité, à l'ordre 1 et 2.
Remarque : on a donc égalité des moments d'ordre 1 et 2 :

$$\gamma_{xx}(\tau) = \overline{x(t)x(t-\tau)}$$

$\gamma_{xx}(0) = P_x = \frac{E_0^2}{2} < \infty$ et stationnarité du moment d'ordre 1 et 2 $\longrightarrow$ stationnaire au sens large

4. Pour calculer une DSP d'un signal stationnaire au sens large : $\Gamma_{xx}(f) = TF[\gamma_{xx}(\tau)]$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{xx}(f) &= TF[\gamma_{xx}(\tau)] \\
&= TF[\frac{E_0^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau)] \\
&= \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{2} (\delta(f_0 - f) + \delta(f_0 + f))
\end{aligned}$$

Propriétés de la fonction de corrélation

On considère $x(t)$ un SA scalaire et stationnaire.

1.

$$\begin{aligned} m_{x(t)} &= m_x \text{ par stationnarité} \\ &= E[x(t)] \\ \gamma_{xx}(\tau) &= E[x(t)x^*(t-\tau)] \\ \Gamma_{xx}(f) &= TF[\gamma_{xx}(\tau)](f) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} P_x &= E[|x(t)|^2] \\ &= E[x(t)x^*(t)] \\ &= \gamma_{xx}(0) \\ \gamma_{xx}(\tau) &= TF^{-1}[\Gamma_{xx}(f)](\tau) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \Gamma_{xx}(f)e^{j2\pi f\tau}df \\ P_x &= \int_{\mathbb{R}} \Gamma_{xx}(f)df \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \gamma_{xx}(-\tau) &= E[x(t)x^*(t+\tau)] \\ &= E[x(t)x^*(t+\tau)]^{**} \\ &= E[x^*(t)x(t+\tau)]^* \\ &= E[x(t+\tau)x^*(t)]^* \\ &= \gamma_{xx}(\tau)^* \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \Gamma_{xx}^*(f) &= (\int_{\mathbb{R}} \gamma_{xx}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau)^* \\ &= \int_{\mathbb{R}} \gamma_{xx}^*(\tau)e^{j2\pi f\tau}d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} \gamma_{xx}(-\tau)e^{j2\pi f\tau}d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} \gamma_{xx}(\tau')e^{-j2\pi f\tau'}d\tau' \\ &= \Gamma_{xx}(f) \end{aligned}$$

Donc $\Gamma_{xx}(f) \in \mathbb{R}$

4. On suppose que $x(t) \in \mathbb{R}$ Montrons que $\Gamma_{xx}(\tau)$ est paire :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{xx}(-f) &= \int_{\mathbb{R}} \gamma_{xx}(\tau) e^{-j2\pi(-f)\tau} d\tau \\
&= \int_{\mathbb{R}} \gamma_{xx}(-\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \text{en posant } \tau = -\tau' \\
&= \int_{\mathbb{R}} \gamma^*_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\
&= \int_{\mathbb{R}} \gamma_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \text{ car } x \text{ est réel} \\
&= \Gamma_{xx}(f)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\Gamma_{xx}(f)$ est bien paire.

5. Montrons que $\gamma_{xy}(-\tau) = \gamma^*_{yx}(-\tau)$

$$\begin{aligned}
&\forall \tau \in \mathbb{R} \\
\gamma_{xy}(-\tau) &= E[x(t)y^*(t+\tau)]*^* \\
&= E[y(t+\tau)x^*(t)]^* \\
&= \gamma_{xy}(\tau)^*
\end{aligned}$$

Remarque : on retrouve la formule du 3. si y(t) = x(t).

6.
   - $\gamma_{xx}(0)$ est le maximum de l'autocorrélation.
   - donc sa dérivée en 0 est nulle.
   - et sa dérivée seconde est négative pour assurer la concavité (car maximum).

   Remarque : FL(filtre linéaire) = SL(système linéaire) + temps invariant.
   si x(t) est stationnaire alors x'(t) aussi et : $m_{x'} = E[x'(t)] = E[\frac{dx(t)}{dt}] = \frac{d}{dt}E[x(t)]$ car l'espérance ne dépent pas du temps donc l'interversion est possible.
   $\gamma'_{xx}(\tau) = \frac{d}{d\tau}E[x(t)x^*(t-\tau)] = E[x(t)\frac{\partial}{\partial\tau}x^*(t-\tau)] = -\gamma_{xx}(\tau)$

7.

$$\begin{aligned}
\gamma_{xx}(\tau) &= \int_{\mathbb{R}} \Gamma_{xx}(f) e^{+j2\pi f\tau} df \\
\gamma'_{xx}(\tau) &= \frac{d}{d\tau}\gamma_{xx}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} (j2\pi f)\Gamma_{xx}(\tau) e^{+j2\pi f\tau} df \\
\gamma''_{xx}(\tau) &= \int_{\mathbb{R}} (j2\pi f)^2\Gamma_{xx}(\tau) e^{+j2\pi f\tau} df \\
|\gamma_{xx}(\tau)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |\Gamma_{xx}(f)| df = \int_{\mathbb{R}} \Gamma_{xx}(f) df = \gamma_{xx}(0) \\
|\gamma'_{xx}(\tau)| &\leq \int_{\mathbb{R}} 2\pi |f| \Gamma_{xx}(f) df < +\infty \text{ si } \Gamma_{xx}(f) \text{ décroit plus vite que } \frac{1}{f^2} \text{ en } \pm\infty
\end{aligned}$$

et ainsi de suite pour des ordres supérieurs

$$\gamma'_{xx}(0) = 0$$

car $f\Gamma_{xx}(f)$ est impaire donc l'intégrale est nulle sur $\mathbb{R}$. Ou alors, γ' est réelle et égal à j fois un réel, donc est nulle.

8. $s(t) = (h * e)(t) = \int_{\mathbb{R}} h(\theta)e(t-\theta)d\theta$ avec h la réponse impulsionnelle.

$$\begin{aligned}
m_s &= E[s(t)] \\
&= E[\int_{\mathbb{R}} h(\theta)e(t-\theta)d\theta] \\
&= \int_{\mathbb{R}} h(\theta)E[e(t-\theta)]d\theta \\
&= m_e \int_{\mathbb{R}} d\theta \\
&= H(0)m_e \\
H(f) &= \int_{\mathbb{R}} h(t)e^{-j2\pi ft}dt \\
H(0) &= \int_{\mathbb{R}} h(t)dt
\end{aligned}$$

9. $\Gamma_{ss}(f)$ en fonction de $H(f)$, $\Gamma_{ee}(f)$. Formules des interférences :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ss}(f) &= H(f)H^*(f)\Gamma_{ee}(f) \\
&= |H(f)|^2\Gamma_{ee}(f)df \\
P_s = \int_{\mathbb{R}} \Gamma_{ss}(f)df &= \int_{\mathbb{R}} |H(f|^2\Gamma_{ee}(f)df \geq 0
\end{aligned}$$

On suppose par l'absurde qu'il existe $f_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\Gamma_{ee}(f_0) < 0$
$\Rightarrow \exists (f_1, f_2) \in \mathbb{R}^2 \quad$ avec $\quad f_2 > f_0 > f_1$ tel que

$$\forall f \in]f_1, f_2[, \Gamma_{ee}(f) < 0$$

On utilise un filtre passe-bande idéal de gain unitaire et :

$$P_s = \int_{\mathbb{R}} \Gamma_{ss}(f)df = \int_{f_1}^{f_2} |H(f)|^2\Gamma_{ee}(f)df < 0$$

Impossible donc $\forall f \in \mathbb{R}, \Gamma_{ee}(f) \geq 0$.

10. On considère deux signaux stationnaires dans leur ensemble. La formule des interférences donne :

$$\Gamma_{s_1s_2}(f) = H_1(f)H_2^*(f)\Gamma_{e_1e_2}(f)$$

Montrons que :

$$\gamma_{xx'}(\tau) = -\gamma'_{xx}(\tau)$$

Avec $H_1(f) = 1$ et $H_2(f) = j2\pi f$ (dérivateur de x), on a :

$$\Gamma xx'(f) = -j2\pi f \Gamma xx(f)$$

Par transformée de Fourier inverse il vient :

$$\gamma_{xx'}(\tau) = -\gamma'_{xx}(\tau)$$

De même, avec $H_1(f) = H_2(f) = j2\pi f$, on a :

$$\Gamma x'x'(f) = -(j2\pi f)^2 \Gamma xx(f)$$

avec la transformée inverse de Fourier il vient :

$$\gamma_{x'x'}(\tau) = -\gamma''_{xx}(\tau)$$