

# COURS DE MM4

8 avril 2015

# Sommaire

<b>I</b>	<b>Algèbre</b>	<b>1</b>
	<b>Rappels, espaces vectoriels</b>	<b>2</b>
<b>1</b>	<b>Formes quadratiques</b>	<b>5</b>
1	Formes linéaires, espace dual . . . . .	5
2	Formes bilinéaires . . . . .	10
3	Formes quadratiques . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Espaces euclidiens</b>	<b>21</b>
1	Produit scalaire, normes euclidiennes . . . . .	21
2	Projections orthogonales . . . . .	24
3	Endomorphismes des espaces euclidiens . . . . .	26
4	Isométries des espaces euclidiens . . . . .	30
<b>II</b>	<b>Analyse</b>	<b>34</b>
<b>3</b>	<b>Intégrale de RIEMANN</b>	<b>35</b>
1	Intégrale de RIEMANN sur $[a, b]$ . . . . .	35
2	Intégrale double de fonctions à deux variables . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Suites et séries de fonctions</b>	<b>48</b>
1	Suites de fonctions . . . . .	48
2	Séries de fonctions . . . . .	55
<b>5</b>	<b>Séries entières</b>	<b>59</b>
1	Définitions . . . . .	59

# Première partie

## Algèbre

### Table des matières

---

	<b>Rappels, espaces vectoriels</b>	<b>2</b>
<b>1</b>	<b>Formes quadratiques</b>	<b>5</b>
1	Formes linéaires, espace dual . . . . .	5
1.1	Formes linéaires . . . . .	5
1.2	Espace dual . . . . .	6
1.3	Applications transposées . . . . .	8
1.4	Représentation matricielle . . . . .	9
2	Formes bilinéaires . . . . .	10
2.1	Définition . . . . .	10
2.2	Matrice d'une forme bilinéaire . . . . .	10
2.3	Formes quadratiques . . . . .	12
2.4	Formes dégénérées . . . . .	13
2.5	Coniques et quadriques . . . . .	15
3	Formes quadratiques . . . . .	17
3.1	Définitions et propriétés . . . . .	17
3.2	Coniques et quadriques . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Espaces euclidiens</b>	<b>21</b>
1	Produit scalaire, normes euclidiennes . . . . .	21
1.1	Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ . . . . .	21
2	Projections orthogonales . . . . .	24
2.1	Définition . . . . .	24
2.2	Procédé d'orthonormalisation de GRAM-SCHMIDT . . . . .	25
3	Endomorphismes des espaces euclidiens . . . . .	26
3.1	Endomorphisme adjoint . . . . .	26
3.2	Intermède . . . . .	27
4	Isométries des espaces euclidiens . . . . .	30
4.1	Isométries en dimension 2 . . . . .	31
4.2	Isométries de l'espace . . . . .	33

---

# Rappels, espaces vectoriels

Soit  $E$  un espace vectoriel sur un corps  $\mathbf{K}$ . La structure d'espace vectoriel définit l'addition d'éléments de  $E$  et la multiplication par un scalaire d'un élément de  $E$ .

## DÉFINITION 0.1

Soit  $(v_1, \dots, v_n) \in E^n$ .  $z \in E$  est une *combinaison linéaire* de  $(v_1, \dots, v_n)$  s'il existe  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$  tel que

$$z = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i.$$

## DÉFINITION 0.2

Soit  $(v_1, \dots, v_n) \in E^n$ . Cette famille est dite *libre* (ou linéairement indépendante) si pour tout  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i = 0 \implies (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, 0, \dots, 0).$$

REMARQUE. Dans une famille libre, aucun vecteur n'est nul. En effet, si

$$v_1 = 0$$

alors  $(1, 0, \dots, 0)$  est une combinaison linéaire où les facteurs sont non tous nuls donnant 0.

## DÉFINITION 0.3

$F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  si :

1.  $F \subset E$  ;
2.  $0_E \in F$  ;
3. stabilité par multiplication :

$$\forall v \in F, \forall \lambda \in \mathbf{K}, \lambda \cdot v \in F ;$$

4. stabilité par addition

$$\forall v_1, v_2 \in F, v_1 + v_2 \in F.$$

EXEMPLE. Avec  $E = \mathbf{R}^2$ , le sous-ensemble

$$F = \{(x, y) \mid y = x^2\}$$

n'est pas un sous-espace vectoriel. En effet, si  $v = (x, y) \in F$  est le vecteur non nul alors pour  $\lambda \in \mathbf{K} \setminus \{0, 1\}$  on a pas

$$\lambda \cdot y = \lambda^2 \cdot x^2.$$

## DÉFINITION 0.4

Soient  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $(v_1, \dots, v_n) \in F^n$ . Cette famille est dite *génératrice* de  $F$  si pour tout  $v \in F$  il existe  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  tels que

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i.$$

## DÉFINITION 0.5

Soient  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $B = (v_1, \dots, v_n) \in F^n$ .  $B$  est une *base* de  $F$  si  $B$  est libre et génératrice de  $F$ .

## PROPOSITION 0.6

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $B = (v_1, \dots, v_n)$  une base de  $F$ . Pour tout vecteur  $v \in F$  il existe une unique collection  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$  tel que

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i.$$

REMARQUE. Si on se donne une base  $B = (v_1, \dots, v_n)$  d'un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  alors on peut écrire une bijection entre  $F$  et  $\mathbf{K}^n$  :

$$\phi : v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i \mapsto (\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

## LEMME 0.7

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Si  $B = (v_1, \dots, v_n)$  et  $B' = (w_1, \dots, w_l)$  sont deux bases de  $F$  alors  $n = l$ .

## DÉFINITION 0.8

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . La *dimension* de  $F$  est le nombre d'éléments de vecteurs d'une base de  $F$ . On note ce nombre  $\dim F$ .

## DÉFINITION 0.9

Soient  $E, F$  deux  $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels et  $f : E \rightarrow F$ . On dit que  $f$  est une *application linéaire* si :

1.  $f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)$  pour tous  $\lambda \in \mathbf{K}$  et  $v \in E$  ;
2.  $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$  pour tous  $v_1, v_2 \in E$ .

## DÉFINITION 0.10

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire.

1.  $\text{Ker}(f) = \{v \in E \mid f(v) = 0_F\}$  est le *noyau* de  $f$  ;
2.  $\text{Im}(f) = \{f(v) \mid v \in E\}$  est l'*image* de  $f$ .

## THÉORÈME 0.11

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire.

$$\dim E = \dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f).$$

Soit  $f : E \rightarrow F$  avec  $\dim E = n$ ,  $\dim F = m$ . On identifie  $f$  à une matrice  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K})$ . Soit  $B = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et soit  $B' = (f_1, \dots, f_m)$  une base de  $F$ .

Pour tout  $v \in F$  il existe une combinaison unique  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbf{K}^m$  telle que

$$v = \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i.$$

On pose

$$(v)_{B'} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^m.$$

On définit

$$A = \begin{pmatrix} (f(e_1))_{B'} & (f(e_2))_{B'} & \dots & (f(e_n))_{B'} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K})$$

comme étant la matrice de  $f$  dans les bases  $B, B'$ .

# Chapitre 1

## Formes quadratiques

### 1 FORMES LINÉAIRES, ESPACE DUAL

#### 1.1 Formes linéaires

Soit  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel.

##### DÉFINITION 1.1

Une forme linéaire sur  $E$  est une application linéaire de  $E$  dans  $\mathbf{K}$ .

Comme  $\text{Im}(f)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{K}$ , sa dimension est soit nulle soit égale à un. Ainsi,  $\text{Im}(f)$  est soit :

- réduit à  $\{0\}$  ;
- égal à  $\mathbf{K}$ .

##### PROPOSITION 1.2

Si  $\dim E = n < \infty$  et si  $f$  est une forme linéaire non nulle sur  $E$  alors

$$\dim \text{Ker}(f) = n - 1.$$

##### DÉMONSTRATION

On a par le théorème du rang :

$$n = \dim E = \dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f) = \dim \text{Ker}(f) + 1.$$

EXEMPLE. Soit  $E = \mathcal{M}_{m,1}(\mathbf{K})$ . Pour  $v \in E$ , on a

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}.$$

Soit  $u \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbf{K})$ , on considère l'application :

$$f_u(v) = {}^t u \cdot v \in \mathbf{K}.$$

REMARQUE. Soit  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'une base  $(e_1, \dots, e_n)$  et soit  $f : E \rightarrow \mathbf{K}$  une forme linéaire. On pose le vecteur  $u = (u_1 \ \dots \ u_n) \in E$  définit par :

$$\forall i \leq n, \ u_i = f(e_i).$$

Soit  $v \in E$ , on a :

$$\begin{aligned} f(v) &= f\left(\sum_{i=1}^n v_i e_i\right) \\ f(v) &= \sum_{i=1}^n v_i f(e_i) \\ f(v) &= \sum_{i=1}^n v_i u_i \\ f(v) &= {}^t u \cdot v. \end{aligned}$$

## 1.2 Espace dual

### DÉFINITION 1.3

Soit  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel. Le dual de  $E$ , noté  $E^*$  est l'ensemble des formes linéaires sur  $E$ .

$E^*$  est muni d'une addition : soient  $f_1, f_2 \in E^*$  :

$$\forall x \in E, (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x).$$

Mais aussi d'une multiplication par un scalaire : soient  $f \in E^*, \lambda \in \mathbf{K}$  :

$$\forall x \in E, (\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x).$$

$E^*$  a donc une structure de  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel.

### DÉFINITION 1.4 (Base duale)

Soit  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel et soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

Pour tout  $v \in E$ , il existe une unique collection  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ . On définit une collection de formes linéaires  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  où pour tout  $i \leq n$  :

$$e_i^*(v) = \lambda_i.$$

### PROPOSITION 1.5

Soit  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'une base  $(e_1, \dots, e_n)$ . La base duale,  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ , est une base du dual.

Ainsi,

$$\dim E^* = \dim E.$$

### DÉMONSTRATION

On montre que  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  est génératrice et libre.

1. Soient  $x^* \in E^*$  et  $x \in E$ .

$$\begin{aligned} x^*(x) &= x^*\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) \\ x^*(x) &= \sum_{i=1}^n x_i x^*(e_i) \\ x^*(x) &= \sum_{i=1}^n x^*(e_i) \cdot e_i^*(x) \\ x^*(x) &= \left(\sum_{i=1}^n x^*(e_i) e_i^*\right)(x). \end{aligned}$$



Ainsi, toute forme linéaire s'écrit comme combinaison linéaire de  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ .

2. Soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$  tel que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^* = 0.$$

C'est-à-dire :

$$\forall x \in E, \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^*(x) = 0.$$

On choisit  $n$  vecteurs  $x \neq 0$  particuliers :

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij}.$$

Ainsi, pour  $e_j$  fixé :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^*(e_j) = \lambda_j = 0.$$

Donc  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0_{\mathbf{K}^n}$ .

#### PROPOSITION 1.6

Soit  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel et soit  $f$  une forme linéaire sur  $E$  non nulle. Soit  $H = \text{Ker}(f)$ . Si  $g$  est une forme linéaire telle que  $H \subset \text{Ker}(g)$  alors il existe  $\lambda \in \mathbf{K}$  tel que  $g = \lambda f$ .

#### DÉMONSTRATION

Si  $f \neq 0$  alors il existe  $x_0 \in E$  tel que  $f(x_0) \neq 0$ . Soit  $x \in E$ ,

$$x = x - \frac{f(x)}{f(x_0)} x_0 + \frac{f(x)}{f(x_0)} x_0.$$

On a alors

$$f\left(x - \frac{f(x)}{f(x_0)} x_0\right) = 0$$

et donc

$$g(x) = \frac{f(x)}{f(x_0)} g(x_0)$$

et donc  $\lambda = g(x_0)/f(x_0)$  convient.

#### LEMME 1.7

Soit  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie égale à  $n$ . Pour tout  $x \in E$  non nul il existe  $x^* \in E^*$  tel que  $x^*(x) \neq 0$ .

#### DÉMONSTRATION

On considère la base de  $E$ ,  $(e_1, \dots, e_n)$ , où  $e_1 = x$  et la base duale  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ . Comme  $e_1^*(x) = 1$ ,  $e_1^*$  convient.

#### THÉORÈME 1.8

Soit  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n < \infty$  et soit  $(f_1, \dots, f_k)$  une famille libre de formes linéaires avec  $k < n$ . En posant  $H_i = \text{Ker}(f_i)$ , on a

$$\dim \bigcap_{i=1}^k H_i = n - k.$$

**DÉMONSTRATION**

On complète  $(f_1, \dots, f_k)$  en une base du dual,  $B^* = (f_1, \dots, f_k, \dots, f_n)$ . On définit

$$u: \begin{cases} E \rightarrow \mathbf{K}^n \\ x \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x)) \end{cases}.$$

Montrons que  $u$  est injective. Soit  $x \in E$  tel que  $u(x) = 0$ . Comme  $(f_1^*, \dots, f_n^*)$  est une base, toute forme s'écrit comme combinaison linéaire de ces vecteurs. Or  $u(x) = 0$  et donc toute forme s'annule en  $x$  et par le lemme précédent ce n'est possible que si  $x = 0$ . Donc  $u$  est injective et donc bijective puisque  $\dim E = \dim \mathbf{K}^n = n$ .

Or,

$$\bigcap_{i=1}^k H_i = u^{-1}(T)$$

où

$$T = \{y \in \mathbf{K}^n \mid y_1 = 0, \dots, y_k = 0\}.$$

Or  $\dim T = n - k$ .

**COROLLAIRE 1.9**

Soit  $(f_1, \dots, f_n)$  une base de  $E^*$ . Il existe une base  $(v_1, \dots, v_n)$  de  $E$  telle que  $f_i(v_j) = \delta_{ij}$ .

**DÉMONSTRATION**

En gardant le même  $u$  de la démonstration précédente, on a

$$u(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)).$$

Comme  $u$  est un isomorphisme, on définit pour tout  $j \leq n$  :

$$v_j = u^{-1}(e_j)$$

où  $(e_1, \dots, e_n)$  est la base canonique de  $\mathbf{K}^n$ .

**1.3 Applications transposées**

Soient  $E, F$  deux  $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels.

**DÉFINITION 1.10**

Soit  $a : E \rightarrow F$  une application linéaire. On définit :

$${}^t a : F^* \rightarrow E^*$$

par

$${}^t a(y^*) = y^*(a).$$

**EXEMPLE.** Avec  $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$  et  $F = \mathcal{M}_{m,1}(\mathbf{R})$ , les duals sont :

$$E^* = \mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{R}), \quad F^* = \mathcal{M}_{1,m}(\mathbf{R}).$$

Soit  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$  et on définit :

$$\forall x \in E, \quad a(x) = Ax.$$

On définit la forme  $y^*$  sur  $F$  par :

$$\forall y \in F, \quad y^*(y) = \sum_{i=1}^m y_i^* y_i = \begin{pmatrix} y_1^* & \dots & y_m^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

On définit alors

$$\forall x \in E, {}^t a(y^*)(x) = \begin{pmatrix} y_1^* & \dots & y_m^* \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = {}^t \left( {}^t A \begin{pmatrix} y_1^* \\ \vdots \\ y_m^* \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

L'application transposée est représentée par la matrice transposée de l'application.

LEMME 1.11

On a :

1. soient :

$$E \xrightarrow{a} F \xrightarrow{b} G,$$

alors

$${}^t(b \circ a) = {}^t a \circ {}^t b;$$

2.  ${}^t I_d = I_d$ ;

3. soit  $A : E \rightarrow F$  inversible,  ${}^t(A^{-1}) = ({}^t A)^{-1}$ .

DÉMONSTRATION

Dans l'ordre :

1. On a :

$$\begin{aligned} \forall z^* \in G^*, \forall x \in E, {}^t(b \circ a)(z^*)(x) &= z^*((b \circ a)(x)) \\ &= {}^t b(z^*(a(x))) \\ &= {}^t a \circ {}^t b(z^*(x)). \end{aligned}$$

## 1.4 Représentation matricielle

Soit  $a : E \rightarrow F$  une application linéaire de  $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels. On associe à  $a$  la matrice  $A = \text{mat}(a, \mathbf{e}, \mathbf{f})$  où  $\mathbf{e}$  est une base de  $E$  et  $\mathbf{f}$  une base de  $F$ . On a

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{f}(a(e_1)) & \dots & \mathbf{f}(a(e_i)) & \dots & \mathbf{f}(a(e_n)) \end{pmatrix}$$

avec

$$\mathbf{f}(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad v = \sum_{i=1}^m x_i f_i.$$

On définit  $B = \text{mat}({}^t a, \mathbf{f}^*, \mathbf{e}^*)$ . On a

$$B = \begin{pmatrix} \mathbf{e}^*({}^t a(f_1^*)) & \dots & \mathbf{e}^*({}^t a(f_m^*)) \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire :

$$B_{ij} = {}^t a(f_j^*)(e_i) = f_j^*(a(e_i)) = A_{ji}.$$

Finalement

$$B = {}^t A.$$

## 2 FORMES BILINÉAIRES

### 2.1 Définition

Soient  $E, F$  deux  $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels.

#### DÉFINITION 2.1

Soit :

$$\varphi : E \times F \rightarrow \mathbf{K}$$

une application. C'est une application bilinéaire si elle vérifie les conditions suivantes :

1. pour tout  $y \in F$ ,

$$x \mapsto \varphi(x, y) : E \rightarrow \mathbf{K}$$

est linéaire ;

2. pour tout  $x \in E$ ,

$$y \mapsto \varphi(x, y) : F \rightarrow \mathbf{K}$$

est linéaire.

#### EXEMPLES.

1. Prenons  $E = F = \mathbf{R}^n$ . Pour  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, \dots, y_n)$ , l'application

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

est une forme bilinéaire, c'est le produit scalaire euclidien.

2. En prenant  $E = F = \mathbf{R}^4$  (l'espace-temps). Si  $x \in \mathbf{R}^4$ , on note  $x = (x_1, x_2, x_3, t)$ . On définit

$$\varphi_2(x, x') = x_1 x'_1 + x_2 x'_2 + x_3 x'_3 - c t t'.$$

REMARQUE. Il existe des vecteurs  $x$  non nuls tels que  $\varphi_2(x, x) = 0$ . L'ensemble des ces vecteurs est appelé le « cône de lumière ».

3. Avec  $E = F = \mathcal{C}([0, 1])$ , on considère :

$$\forall f \in E, \forall g \in G, \varphi(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x) dx.$$

REMARQUE. Si  $\varphi : E \times F \rightarrow \mathbf{K}$  est une application bilinéaire, on peut définir

$$D_\varphi : F \rightarrow E^*$$

définie par

$$\forall y \in F, \forall x \in E, D_\varphi(y)(x) = \varphi(x, y).$$

### 2.2 Matrice d'une forme bilinéaire

Soient  $E, F$  deux  $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels,  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_m)$  une base de  $E$  et  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$  une base de  $F$ . Soit  $\varphi$  une forme bilinéaire sur  $E \times F$ .

Soit  $x = \sum_{i=1}^m x_i e_i$  un vecteur de  $E$  et  $y = \sum_{i=1}^n y_i f_i$  un vecteur de  $F$ .

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i y_j \varphi(e_i, f_j).$$

## DÉFINITION 2.2

On définit la matrice  $\Phi \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K})$  par

$$\Phi_{i,j} = \varphi(e_i, f_j),$$

c'est-à-dire,  $\Phi = \text{mat}(\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{f})$ .

On a alors

$$\varphi(x, y) = {}^t X \Phi Y$$

avec

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Si on prend  $P$  et  $Q$  inversibles telles que  $X = PX'$  et  $Y = QY'$  alors Pour

$$\Phi' = {}^t P \Phi Q$$

on a

$$\varphi(x, y) = {}^t X' \Phi' Y'.$$

## DÉFINITION 2.3

Une forme bilinéaire sur  $E \times E$  est dite *symétrique* si

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \varphi(x, y) = \varphi(y, x).$$

## DÉFINITION 2.4

Soient  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel et  $\varphi$  une forme bilinéaire symétrique sur  $E \times E$ . On dit que  $x$  et  $y$  de  $E$  sont  $\varphi$ -orthogonaux si  $\varphi(x, y) = 0$ .

## DÉFINITION 2.5

Soit  $A \subset E$ . On définit l'orthogonal de  $A$  :

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in A, \varphi(x, y) = 0\}.$$

## PROPOSITION 2.6

Soit  $A \subset E$ ,

1.  $A^\perp$  est un sous-espace vectoriel ;
2. si  $A_1 \subset A_2$  alors  $A_2^\perp \subset A_1^\perp$  ;
3.  $A \subset A^{\perp\perp}$ .

## DÉMONSTRATION

Montrons le point 2 :

Soit  $x \in A_2^\perp$ , pour tout  $y \in A_1$ ,  $\varphi(x, y) = 0$  puisque  $y \in A_2$ . Donc  $x \in A_1^\perp$ .

EXEMPLE : L'ESPACE-TEMPS DE MINKOWSKI. Soit

$$\varphi_2 : (\mathbf{R}^2)^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$$

définit pour  $x = (x_1, t)$  par :

$$\varphi_2(x, x') = x_1 x'_1 - t t'.$$

Le vecteur  $x = (1, 2)$  a pour orthogonal (non unique)  $y = (2, 1)$ .

### 2.3 Formes quadratiques

Soit  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel.

#### DÉFINITION 2.7

Soit  $\varphi$  une forme bilinéaire symétrique sur  $E$ . La forme quadratique  $Q$  associée à  $\varphi$  comme étant l'application

$$Q : E \rightarrow \mathbf{K}$$

définie par

$$Q(x) = \varphi(x, x).$$

EXEMPLE. En prenant  $\varphi : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  définie par

$$\varphi(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3,$$

la forme quadratique associée est

$$Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Pour  $\varphi : \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}$  définie par

$$\varphi(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4$$

on a

$$Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2.$$

#### LEMME 2.8

Supposons que  $\mathbf{K}$  soit de caractéristique différente de 2 et soit  $Q : E \rightarrow \mathbf{R}$  une forme quadratique. La forme bilinéaire symétrique  $\varphi$  associée est définie par

$$\forall x \in E, \forall y \in E, 2\varphi(x, y) = Q(x + y) - Q(x) - Q(y).$$

#### DÉMONSTRATION

$$Q(x + y) = \varphi(x + y, x + y)$$

$$Q(x + y) = \varphi(x, x + y) + \varphi(y, x + y)$$

$$Q(x + y) = Q(x) + \varphi(x, y) + \varphi(y, x) + Q(y)$$

$$Q(x + y) = Q(x) + Q(y) + 2\varphi(x, y).$$

#### THÉORÈME 2.9

Soient  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n < \infty$ , où  $\mathbf{K}$  est de caractéristique différente de 2, et  $\varphi$  une forme bilinéaire symétrique sur  $E$ .

Il existe une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  formée de vecteurs  $\varphi$ -orthogonaux.

#### DÉMONSTRATION

On procède par récurrence sur  $n$ .

1. Pour  $n = 1$  on prend  $e_1 \neq 0$ .

2. Supposons que tout  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n - 1$  vérifie le résultat.

Si  $\varphi = 0$  alors il suffit de compléter la base.

Supposons que  $\varphi \neq 0$ . Il existe  $(x, y) \in E^2$  tel que  $\varphi(x, y) \neq 0$ . Il existe donc par le résultat précédent  $v \in E$  tel que  $Q(v) \neq 0$  et alors  $\varphi(v, v) \neq 0$ . Posons  $e_1 = v$ . On définit

$$G = \{e_1\}^\perp.$$

C'est un sous-espace vectoriel de dimension  $n - 1$  §1 et donc il existe une base  $\psi$ -orthogonale  $(e_2, \dots, e_n)$  de  $G$  pour la forme linéaire  $\psi$  définie par  $\psi(x, y) = \varphi(x, y)$  pour tous  $x, y \in G$ . La famille  $(e_1, \dots, e_n)$  forme alors une base où les vecteurs sont  $\varphi$ -orthogonaux deux à deux.

## 2.4 Formes dégénérées

Soit  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel.

DÉFINITION 2.10

Soit  $\varphi$  une forme bilinéaire symétrique sur  $E$ . Le *noyau* de  $\varphi$ , noté  $N_\varphi$ , est

$$N_\varphi = \{x \in E \mid \forall y \in E, \varphi(x, y) = 0\}.$$

EXEMPLE. Pour  $E = \mathbf{R}^4$  et la forme

$$\varphi(x, y) = x_1 y_1 + x_3 y_3$$

on a

$$N_\varphi = \{x \in \mathbf{R}^4 \mid x_1 = x_3 = 0\}.$$

DÉFINITION 2.11

Soit  $\varphi$  une forme bilinéaire symétrique sur  $E$  de dimension finie. Le *rang* de  $\varphi$  (noté  $r$ ) est

$$r = \dim E - \dim N_\varphi.$$

REMARQUE. C'est également le rang de la matrice associée à  $\varphi$  dans la base  $\mathcal{B}$ , où  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ .

EXEMPLE. En reprenant l'exemple précédent, posons

$$F = \{x \in \mathbf{R}^4 \mid x_2 = x_4 = 0\}.$$

On a  $F^\perp = N_\varphi$  et  $F^{\perp\perp} = E$ . Avec

$$G = \{x \in \mathbf{R}^4 \mid x_1 = 0\}$$

on a

$$G^\perp = \{y \in \mathbf{R}^4 \mid \forall x \in G, \varphi(x, y) = 0\} = \{y \in \mathbf{R}^4 \mid y_3 = 0\} \supset N_\varphi.$$

---

§1. Si on prend  $D(x) = \varphi(x, e_1)$  qui est une forme linéaire sur  $E$  alors son noyau est un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension  $n - 1$  et  $\text{Ker } D = \{e_1\}^\perp$ .

**THÉORÈME 2.12**

Soit  $E$  de dimension  $n < \infty$  et soit  $\varphi$  une forme bilinéaire symétrique. Si  $F \subset E$  est un sous-espace vectoriel alors

$$\dim F + \dim F^\perp - \dim F \cap N_\varphi = \dim E.$$

**DÉMONSTRATION**

On considère le cas où  $F \cap N_\varphi = \{0\}$ .

Soit  $F$  de dimension  $k < n$  et soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_k)$  une base de  $F$ .

$$F^\perp = \{x \in E \mid \forall i \leq k, \varphi(x, e_i) = 0\}.$$

Posons  $l_i : E \rightarrow \mathbf{K}$  définie par

$$l_i(x) = \varphi(x, e_i).$$

On a :

$$F^\perp = \bigcap_{i=1}^k \text{Ker}(l_i).$$

Or par le résultat 1.8, si  $(l_1, \dots, l_k)$  est une famille libre alors la dimension de cette intersection est égale à  $n - k$  et alors  $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$ . Il s'agit donc de montrer que  $(l_1, \dots, l_k)$  est une famille libre.

Soit  $(c_1, \dots, c_k) \in \mathbf{K}^k$ , supposons que

$$\sum_{i=1}^k c_i l_i = 0.$$

C'est équivalent à

$$\forall x \in E, \varphi \left( x, \sum_{i=1}^k c_i e_i \right) = 0.$$

Or cela veut dire que  $\sum_{i=1}^k c_i e_i$  appartient à  $F$  et  $N_\varphi$  et donc cette somme est nulle et comme  $(e_1, \dots, e_k)$  est une base, les coefficients  $(c_1, \dots, c_k)$  sont tous nuls. Ainsi,  $(l_1, \dots, l_k)$  est une famille libre.

Supposons maintenant que  $F \cap N_\varphi \neq \{0\}$ . On montre que  $\dim F^\perp + k - \dim(F \cap N_\varphi) = n$ . On prend une base de  $F \cap N_\varphi$  :  $(e_1, \dots, e_j)$  et on la complète en une base de  $F$ , on obtient  $(e_1, \dots, e_j, e_{j+1}, \dots, e_k)$ . Il faut montrer que  $F^\perp = \{y \in E \mid \forall i \in \{j+1, j+2, \dots, k\}, \varphi(y, e_i) = 0\}$ .

**DÉMONSTRATION**

Soit  $F$  de dimension  $k < n$  et supposons que  $F \cap N_\varphi$  soit de dimension  $j$ . Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$   $\varphi$ -orthogonale telle que pour  $i \leq j$  on ait  $e_i \in F \cap N_\varphi$  et pour  $i \leq k$  on ait  $e_i \in F$ . On a :

$$\varphi = \Psi_{i,j} e_i^* \otimes e_j^*.$$

Soit  $\{l^i\}_{i \leq k}$  une famille de formes sur  $E$  définie par

$$l^i = \Psi_{i,j} e_j^*.$$

On définit l'application linéaire :

$$M = l^i e_i : E \rightarrow F.$$

On a :

$$\dim \text{Im } M = \dim F - \dim F \cap N_\varphi$$

et comme  $\text{Ker } M = F^\perp$  on a

$$\dim E = \dim \text{Im}(M) + \dim \text{Ker}(M) = \dim F - \dim F \cap N_\varphi + \dim F^\perp.$$



## 2.5 Coniques et quadriques

Les coniques sont des courbes de  $\mathbf{R}^2$ .

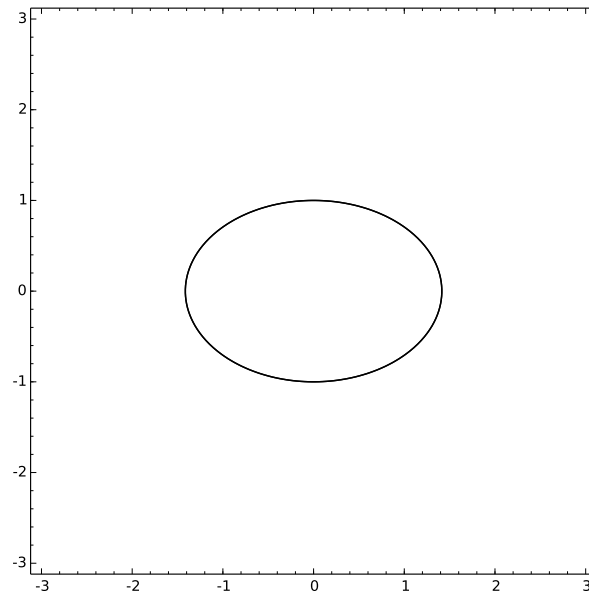


FIGURE 1.1 – Ellipse

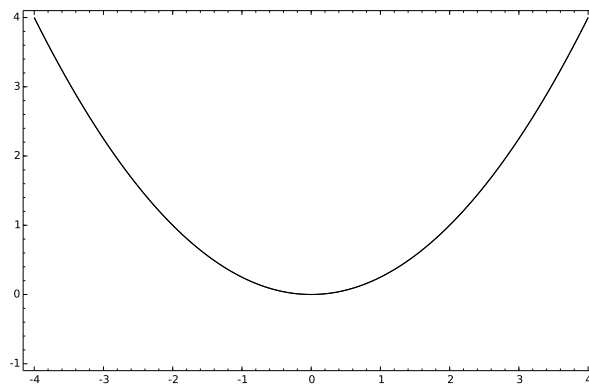


FIGURE 1.2 – Parabole

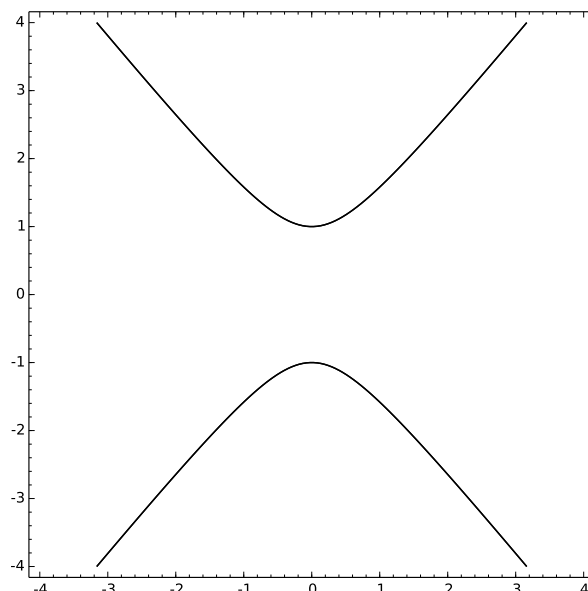


FIGURE 1.3 – Hyperbole

Les quadriques sont des surfaces dans l'espace  $\mathbf{R}^3$ .

Les coniques (et les quadriques) sont des ensembles de points de  $\mathbf{R}^2$  (resp.  $\mathbf{R}^3$ ) dont les coordonnées cartésiennes  $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$  (resp.  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ ) satisfont :

$$Q(x) + l(x) + c = 0$$

où  $c$  est une constante,  $Q(x)$  une fonction de la forme :

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} x_i x_j$$

(si  $n = 2$  alors c'est une conique, si  $n = 3$  c'est une quadrique) et  $l(x)$  une application linéaire.

QUELQUES RAPPELS. Rappelons quelques résultats précédents :

THÉORÈME 2.13

Soit  $\varphi$  une forme bilinéaire symétrique sur un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie. Il existe une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  telle que  $\varphi(e_i, e_j) = 0$  si  $i \neq j$ .

PROPOSITION 2.14

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  muni d'une forme bilinéaire symétrique. Alors

$$\dim F + \dim F^\perp - \dim F \cap N_\varphi = \dim E.$$

DÉFINITION 2.15

$\varphi$  est non dégénérée si  $N_\varphi = \{0\}$ .

REMARQUE. Si  $\varphi$  est non dégénérée alors  $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$  et dans ce cas-ci  $F = F^{\perp\perp}$ . En effet, comme  $F \subset F^{\perp\perp}$  et d'après la formule précédente, on a

$$\dim F + \dim F^\perp = \dim F^\perp + \dim F^{\perp\perp} = \dim E$$

et donc  $\dim F = \dim F^{\perp\perp}$  d'où  $F = F^{\perp\perp}$ .

En conséquence, si  $\Phi = \text{mat}(\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{e})$ , i.e.  $\Phi_{i,j} = \varphi(e_i, e_j)$  pour tous  $i, j$ . Alors si  $\mathbf{e}$  est une base  $\varphi$ -orthogonale alors  $\Phi$  est diagonale.

Soient  $v, w \in E$  et  $(e_1, \dots, e_n), (e'_1, \dots, e'_n)$  deux bases de  $E$ . Donnons-nous les décompositions :  $v = \sum x_i e_i$ ,  $w = \sum y_i e_i$ ,  $v = \sum x'_i e'_i$  et  $w = \sum y'_i e'_i$ . On note

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad Y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}.$$

Il existe une matrice  $P$  inversible telle que  $X = PX'$  et  $Y = PY'$ . On a

$$\varphi(v, w) = {}^t X \Phi Y = {}^t X' \Phi' Y'$$

avec  $\Phi'$  la matrice dans la base  $\mathbf{e}'$ . Si  $\mathbf{e}'$  est une base orthogonale alors

$$\varphi(v, w) = \sum_{i=1}^n \varphi(e'_i, e'_i) x'_i y'_i.$$

En particulier

$$\varphi(v, v) = \sum_{i=1}^n \varphi(e'_i, e'_i) (x'_i)^2.$$

Pour  $n = 3$  on aurait

$$\varphi(v, v) = \lambda_1 (x'_1)^2 + \lambda_2 (x'_2)^2 + \lambda_3 (x'_3)^2$$

où  $\lambda_i = \varphi(e'_i, e'_i)$ .

### 3 FORMES QUADRATIQUES

#### 3.1 Définitions et propriétés

Soit  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel.

##### DÉFINITION 3.1

$Q : E \rightarrow \mathbf{K}$  est une forme quadratique s'il existe une forme bilinéaire  $\varphi$  telle que  $Q(x) = \varphi(x, x)$  pour tout  $x \in E$ .

##### PROPOSITION 3.2

Pour tout  $\lambda \in \mathbf{K}$  et pour tout  $x \in E$

$$Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x).$$

EXEMPLE. Pour  $E = \mathbf{R}^3$ ,  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$  on a par exemple la forme quadratique :

$$Q(x) = x_1^2 + 3x_1x_2 + 5x_2x_3.$$

On peut trouver comme forme bilinéaire associée :

$$\varphi_1(x, y) = x_1y_1 + 3x_1y_2 + 5x_2y_3.$$

On a également comme forme  $\varphi_2(x, y) = \varphi_1(y, x)$ . Il y a une forme symétrique :

$$\varphi_s(x, y) = \frac{1}{2}(\varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y)).$$

## DÉFINITION 3.3

On appelle *forme polaire* de  $Q$ , la forme bilinéaire symétrique sur  $E$  définie par

$$2\varphi(x, y) = Q(x + y) - Q(x) - Q(y).$$

## PROPOSITION 3.4

Soient  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $\varphi$  une forme bilinéaire symétrique et  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  une base  $\varphi$ -orthogonale. Si

$$q = \text{card} \{i \leq n \mid \varphi(e_i, e_i) = 0\}$$

alors

$$q = \dim N_\varphi.$$

REMARQUE.  $q$  ne dépend pas du choix de la base orthogonale.

## DÉMONSTRATION

Supposons que  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$  tel que  $\varphi(e_j, e_j) = 0$  si, et seulement si,  $k < j \leq n$ . On montre que  $(e_{k+1}, \dots, e_n)$  est une base de  $N_\varphi$ . On sait que c'est une famille libre et donc il suffit de montrer qu'elle est génératrice.

Soit  $v \in N_\varphi$  tel que

$$v = c_1 e_1 + \dots + c_k e_k + c_{k+1} e_{k+1} + \dots + c_n e_n.$$

Comme  $\varphi(v, e_j) = 0$  pour tout  $j$  on a  $c_i = 0$  pour tout  $i \leq k$ . Ainsi,  $v$  est une combinaison linéaire des  $e_i$  pour  $i > k$  et donc la famille  $(e_{k+1}, \dots, e_n)$  est génératrice.

## THÉORÈME 3.5 (Théorème de SYLVESTER)

Soit  $E$  un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme bilinéaire symétrique  $\varphi$ . Il existe un entier  $r$  tel que pour toute base  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$   $\varphi$ -orthogonale de  $E$  on ait

$$r = \text{card} \{i \leq n \mid \varphi(e_i, e_i) > 0\}.$$

## DÉMONSTRATION

Soient  $r, s$  tels que  $0 \leq r \leq s \leq n$ . Soit  $(f_1, \dots, f_n)$  une base orthogonale de  $E$  telle que

$$\begin{aligned} \varphi(f_i, f_i) &> 0, 1 \leq i \leq r \\ \varphi(f_i, f_i) &< 0, r+1 \leq i \leq s \\ \varphi(f_i, f_i) &= 0, s+1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Soit  $(f'_1, \dots, f'_n)$  une base orthogonale de  $E$  telle que pour  $(r', s')$  on ait les mêmes conditions que précédemment. Il faut montrer  $r = r'$  (qui implique alors  $s = s'$ ).

On considère la collection

$$(f_1, \dots, f_r, f'_{r'+1}, \dots, f'_n).$$

Si cette famille est libre, elle a  $r + n - r' \leq n$  éléments et donc  $r \leq r'$ . Mais le même argument pour la famille symétrique  $(f'_1, \dots, f'_{r'}, f_{r+1}, \dots, f_n)$  montre que  $r' \leq r$  et donc  $r = r'$ .

Supposons que l'on ait

$$c_1 f_1 + \dots + c_r f_r + d_{r'+1} f'_{r'+1} + \dots + d_n f'_n = 0$$

c'est-à-dire

$$v = c_1 f_1 + \dots + c_r f_r = -(d_{r'+1} f'_{r'+1} + \dots + d_n f'_n) = -w.$$

On a  $\varphi(v, v) = \varphi(w, w)$  c'est-à-dire :

$$c_1^2 \varphi(f_1, f_1) + \dots + c_r^2 \varphi(f_r, f_r) = d_{r'+1}^2 \varphi(f'_{r'+1}, f'_{r'+1}) + \dots + d_n^2 \varphi(f'_n, f'_n).$$

Or le terme de gauche est positif par hypothèse et celui de droite négatif. Donc les deux termes sont nuls et donc  $c_i = 0$  pour  $i \leq r$  et donc  $v = 0$  et  $w = 0$ . Comme  $v$  et  $w$  sont des combinaisons de vecteurs libres, les coefficients sont tous nuls et donc la famille est libre.

#### DÉFINITION 3.6

Soit  $\varphi$  une forme bilinéaire symétrique sur  $E$ , un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel. On dit que  $\varphi$  est de signature  $(p, q)$  s'il existe une base orthogonale  $(e_1, \dots, e_n)$  telle que

$$p = \text{card} \{i \leq n \mid \varphi(e_i, e_i) > 0\}, \quad q = \text{card} \{i \leq n \mid \varphi(e_i, e_i) < 0\}.$$

#### DÉFINITION 3.7

Soit  $Q$  une forme quadratique sur  $E$ , un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel, et soit  $\varphi$  sa forme polaire. On dit que :

1.  $\varphi$  (ou  $Q$ ) est positive si  $\varphi(x, x) \geq 0$  pour tout  $x \in E$  ;
2.  $\varphi$  (ou  $Q$ ) est définie positive si  $\varphi(x, x) > 0$  pour tout  $x$  non nul.

### 3.2 Coniques et quadriques

Les coniques et les quadriques sont des ensembles (respectivement dans  $\mathbf{R}^2$  et  $\mathbf{R}^3$ ) d'expression générale :

$$\{x \in \mathbf{R}^n \mid Q(x) + l(x) + c = 0\}$$

où  $c$  est une constante et

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i x_j, \quad l(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

avec les  $b_{ij}$  et  $a_i$  réels.

Il est possible de trouver  $P$  inversible telle que  $X' = P^{-1}X$  avec

$$Q(X') = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x'_i)^2$$

et  $\lambda_i = Q(e'_i)$ . De plus

$$l(X') = APX' = \sum_{i=1}^n a'_i x'_i.$$

Le nombre de  $\lambda_i$  positifs et négatifs ne dépend pas du choix de la base orthogonale utilisée pour construire  $P$ .

Je suppose que coniques et quadriques sont des ensembles dont les coordonnées satisfont :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 + \sum_{i=1}^n a_i x_i + c = 0. \quad (1.1)$$

1. Si les  $\lambda_i$  sont tous non nuls alors

$$\lambda_i x_i^2 + a_i x_i = \lambda_i \left( x_i^2 + \frac{a_i}{\lambda_i} x_i \right) = \lambda_i \left( x_i^2 + \frac{a_i}{\lambda_i} x_i + \left( \frac{a_i}{2\lambda_i} \right)^2 \right) - \frac{a_i^2}{4\lambda_i}.$$

Finalement l'équation 1.1 est équivalente à

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i (x'_i)^2 + c - \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{4\lambda_i} = 0$$

avec

$$x'_i = x_i + \frac{a_i}{2\lambda_i}$$

et en posant  $c' = c - \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{4\lambda_i}$  on a une équivalence :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i (x'_i)^2 + c' = 0.$$

**2.** S'il existe un  $\lambda_i$  nul et un  $\lambda_j$  non nul alors on suppose qu'il existe  $m$  tel que  $\lambda_j$  est non nul pour tout  $j \leq m$  et  $\lambda_i = 0$  pour tout  $i > m$ . L'équation 1.1 est alors équivalente à :

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j (x'_j)^2 + \sum_{j=m+1}^n a_j x'_j + c = 0$$

avec

$$\forall j \leq m, x'_j = x_j + \frac{a_j}{2\lambda_j}$$

et

$$\forall j > m, x'_j = x_j.$$

POUR  $n = 2$ , LES CONIQUES. **1.** Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont non nuls alors l'équation est sous la forme

$$\lambda x_1^2 + \mu x_2^2 = \delta$$

avec  $\lambda = \lambda_1$  et  $\mu = \lambda_2$ .

	Si $\lambda > 0$ et $\mu > 0$	Si $\lambda > 0$ et $\mu < 0$
Si $\delta < 0$	La conique est vide	La conique est une hyperbole d'équation : $\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 = -1$ avec $a = \sqrt{\frac{-\delta}{\lambda}}$ , $b = \sqrt{\frac{\delta}{\mu}}$ .
Si $\delta > 0$	La conique est une ellipse d'équation : $\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 = 1$ avec $a = \sqrt{\frac{\delta}{\lambda}}$ , $b = \sqrt{\frac{\delta}{\mu}}$ .	La conique est une hyperbole d'équation : $\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 = 1$ avec $a = \sqrt{\frac{\delta}{\lambda}}$ , $b = \sqrt{\frac{-\delta}{\mu}}$ .
Si $\delta = 0$	La conique est réduite à $\{0\}$	La conique est deux droites sécantes

**2.** Si  $\lambda_2 = 0$  et  $\lambda_1 \neq 0$  alors l'équation se met sous la forme

$$\lambda x_1^2 + ax_2 + k = 0.$$

C'est une parabole si  $a \neq 0$ .

## Chapitre 2

# Espaces euclidiens

### 1 PRODUIT SCALAIRE, NORMES EUCLIDIENNES

#### DÉFINITION 1.1

Un espace euclidien est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'une forme bilinéaire symétrique définie positive,  $\varphi$ .

On dit que  $\varphi$  est le produit scalaire de l'espace vectoriel et on note

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \varphi(x, y) = \langle x, y \rangle.$$

REMARQUE. Si  $E$  est muni d'une forme bilinéaire symétrique définie positive mais sans supposer que  $E$  est de dimension finie alors  $E$  est un espace pré-hilbertien.

EXEMPLES. Exemples usuels :

1.  $\mathbf{R}^n$  avec  $\varphi_1(x, y) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ .
- 2.

$$l_2 = \left\{ (a_k)_{k \in \mathbf{N}} \left| \forall k \in \mathbf{N}, a_k \in \mathbf{R} \text{ et } \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|^2 < +\infty \right. \right\}$$

avec le produit scalaire

$$\varphi_2(x, y) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k y_k,$$

et comme

$$|x_k y_k| \leq \frac{1}{2}(x_k^2 + y_k^2)$$

alors le produit scalaire est bien défini (il converge absolument).  $l_2$  est un espace pré-hilbertien.

3.  $\mathcal{C}([0, 1])$  l'ensemble des fonctions continues sur  $[0, 1]$  avec

$$\varphi_3(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t) dt.$$

#### 1.1 Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ

#### DÉFINITION 1.2

L'application

$$E \ni x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

est appelée la *norme* de  $x \in E$ .

**PROPOSITION 1.3 (Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ)**

Pour tous  $x, y$  de  $E$  :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

**DÉMONSTRATION**

Soit  $t \in \mathbf{R}$ ,

$$\langle tx + y, tx + y \rangle \geq 0$$

et en développant on a :

$$t^2 \langle x, x \rangle + 2t \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \geq 0.$$

Le membre de gauche est un polynôme en  $t$  de la forme  $at^2 + bt + c$ . Cette inégalité est vraie aussi si, et seulement si,  $4|\langle x, y \rangle|^2 - 4\langle y, y \rangle \langle x, x \rangle \leq 0$  c'est-à-dire

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

et donc

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

**LEMME 1.4**

L'application  $x \mapsto \|x\|$  satisfait :

1.  $\|x\| = 0$  si, et seulement si  $x = 0$  ;
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  pour tout  $\lambda \in \mathbf{R}$  et pour tout  $x \in E$  ;
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  pour tous  $x, y \in E$ .

**DÉMONSTRATION**

Pour l'inégalité triangulaire on utilise l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ :

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle \\ &\leq \|x\| + \|y\|^2 + 2\|x\| \|y\| \\ &\leq (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

**LEMME 1.5 (Identité du parallélogramme)**

Pour tous  $x, y \in E$  on a :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

**DÉMONSTRATION**

Par définition,

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$$

et donc

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2. \end{aligned}$$

**REMARQUE.** Le « théorème » de PYTHAGORE est valide. En effet, si  $x \perp y$  alors

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$



## PROPOSITION 1.6

Soit  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$  une collection de vecteurs orthogonaux deux à deux. On a :

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2.$$

## DÉMONSTRATION

Par récurrence sur  $n$ . C'est vrai pour  $n = 2$  et

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^{n-1} x_i + x_n \right\|^2$$

or  $x_n$  est orthogonal à la somme puisqu'il est orthogonal à chaque  $x_i$  pour  $i < n$ . Ainsi,

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^{n-1} x_i \right\|^2 + \|x_n\|^2$$

et par hypothèse de récurrence la propriété est vraie.

## PROPOSITION 1.7

Soit  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ . Si les  $x_i$  sont tous non nuls et orthogonaux deux-à-deux alors la famille  $(x_1, \dots, x_n)$  est libre.

## DÉMONSTRATION

Supposons :

$$c_1 x_1 + \dots + c_n x_n = 0$$

alors

$$\|c_1 x_1 + \dots + c_n x_n\| = 0$$

et comme ils sont orthogonaux deux-à-deux :

$$c_1^2 \|x_1\|^2 + \dots + c_n^2 \|x_n\|^2 = 0.$$

Or  $\|x_i\|^2 \neq 0$  pour tout  $i$  car  $x_i$  non nuls et donc les coefficients sont tous nuls. Donc la famille considérée est libre.

## THÉORÈME 1.8

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension finie. Il existe une base orthonormée.

## DÉMONSTRATION

On sait qu'il existe une base orthogonale :  $(u_1, \dots, u_n)$ . Mais la famille  $(e_1, \dots, e_n)$  définie pour tout  $i \leq n$  par :

$$e_i = \frac{u_i}{\|u_i\|}$$

est une base orthonormée.

REMARQUE. Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$  et soit  $x \in E$  tel que

$$x = \sum_{i=1}^n c_i e_i.$$

Alors

$$c_i = \langle x, e_i \rangle.$$

Soit  $u : E \rightarrow E$  et  $A$  sa matrice associée dans la base  $e = (e_1, \dots, e_n)$ . Si  $A = (a_{i,j})_{\substack{i \leq n \\ j \leq n}}$  alors

$$a_{i,j} = \langle e_i, u(e_j) \rangle.$$

## 2 PROJECTIONS ORTHOGONALES

### 2.1 Définition

#### DÉFINITION 2.1

Soient  $E$  un espace euclidien,  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $x \in E$ . La projection orthogonale de  $x$  sur  $F$  est un vecteur  $y$  de  $F$  tel que  $x - y \in F^\perp$ . On note  $y$  par  $P_F(x)$ .

$P_F(x)$  est bien défini :

1. Unicité : soient  $y_1$  et  $y_2$  des vecteurs de  $F$  tels que  $x - y_1$  et  $x - y_2$  sont dans  $F^\perp$ .  
On a

$$(x - y_2) - (x - y_1) = y_1 - y_2 \in F^\perp$$

or  $y_1 - y_2 \in F$  et donc  $y_1 - y_2 = 0$ .

2. Existence (en dimension finie) : il existe une base orthonormée de  $F$ ,  $(e_1, \dots, e_k)$ .  
On pose

$$y = \sum_{i=1}^k \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Et on a bien  $y - x$  orthogonal à  $F$ .

#### PROPOSITION 2.2

Soient  $E$  un espace euclidien,  $x \in E$  et  $F$  un sous-espace vectoriel. Alors  $P_F(x)$  est le vecteur de  $F$  le plus proche de  $x$ . C'est-à-dire :

$$\|P_F(x) - x\| = \inf_{z \in F} \|z - x\|.$$

#### DÉMONSTRATION

Soit  $z \in F$ ,

$$\begin{aligned} \|x - z\|^2 &= \|x - P_F(x) + P_F(x) - z\|^2 \\ &= \|x - P_F(x)\|^2 + \|P_F(x) - z\|^2 \\ &\geq \|x - P_F(x)\|^2. \end{aligned}$$

REMARQUE. On a  $\|P_F(x)\| \leq \|x\|$ , en effet :

$$\|x\|^2 = \|P_F(x) + x - P_F(x)\|^2 = \|P_F(x)\|^2 + \|x - P_F(x)\|^2 \geq \|P_F(x)\|^2.$$

#### PROPOSITION 2.3

Soient  $E$  un espace euclidien et  $F$  un sous-espace vectoriel.

$$E = F \oplus F^\perp.$$

**DÉMONSTRATION**

Soit  $x \in E$ , on a

$$x = P_F(x) + x - P_F(x).$$

De plus  $F \cap F^\perp = \{0\}$  et donc  $E = F \oplus F^\perp$ .

**2.2 Procédé d'orthonormalisation de GRAM-SCHMIDT**

REMARQUE. Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  et soit  $(e_1, \dots, e_k)$  une base orthonormée de  $F$ . Si  $x \notin F$  alors  $y = x - P_F(x)$  est un vecteur de  $F^\perp$ . On définit

$$e_{k+1} = \frac{y}{\|y\|}.$$

On a bien que  $e_{k+1}$  est orthogonal à tous les autres  $e_i$ . Ainsi,  $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1})$  est une famille orthonormée (et libre).

**THÉORÈME 2.4 (Algorithme de GRAM-SCHMIDT)**

Soit  $E$  un espace euclidien et soit  $(f_1, \dots, f_n)$  une base de  $E$ . On définit par récurrence une base orthonormée de  $E$  :

1.  $e_1 = f_1 / \|f_1\|$ .
2. On suppose qu'on a construit  $(e_1, \dots, e_k)$  une famille orthonormée telle que

$$F = \text{Vect}(f_1, \dots, f_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k).$$

On définit alors

$$u_{k+1} = f_{k+1} - P_F(f_{k+1}), \quad e_{k+1} = \frac{u_{k+1}}{\|u_{k+1}\|}.$$

Le vecteur  $e_{k+1}$  appartient bien à l'espace engendré par  $(f_1, \dots, f_k, f_{k+1})$  et  $e_{k+1} \in F^\perp$ . Ainsi,  $(e_1, \dots, e_{k+1})$  est un système orthonormé de vecteurs.

3. On continue jusqu'à ce que  $k = n$ .

EXEMPLE. Avec  $\mathbf{R}^3$  muni de :

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

On considère la base :

$$(f_1, f_2, f_3) = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

On pose :

$$e_1 = f_1.$$

Avec  $F_1 = \text{Vect}(f_1)$  on a :

$$u_2 = f_2 - P_{F_1}(f_2).$$

$$P_{F_1}(f_2) = \langle f_2, f_1 \rangle f_1 = 1 \cdot f_1.$$

Ainsi,

$$u_2 = f_2 - f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On pose alors

$$e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = u_2.$$

On définit  $F_2 = \text{Vect}(e_1, e_2)$ , on a

$$u_3 = f_3 - P_{F_2}(f_3).$$

$$\begin{aligned} P_{F_2}(f_3) &= \langle f_3, e_1 \rangle e_1 + \langle f_3, e_2 \rangle e_2 \\ &= 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2. \end{aligned}$$

On a finalement,

$$e_3 = u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

#### THÉORÈME 2.5

Soit  $E$  un espace euclidien et soit  $l$  une forme linéaire sur  $E$ . Il existe un unique vecteur  $y$  tel que

$$\forall x \in E, l(x) = \langle y, x \rangle.$$

#### DÉMONSTRATION

Si  $l = 0$  alors on choisit  $y = 0$ . Supposons qu'il existe  $x_0 \in E$  tel que  $l(x_0) = 1$ . Soit  $F = \text{Ker}(l)$ . On pose  $z_0 = P_F(x_0)$  et on pose  $y_0 = x_0 - z_0$ . Finalement, on prend

$$y = \frac{y_0}{\|y_0\|^2}.$$

On a bien :

$$\begin{aligned} \langle y, x \rangle &= \langle y, x - l(x)y_0 + l(x)y_0 \rangle \\ \langle y, x \rangle &= \langle y, x - l(x)y_0 \rangle + \langle y, l(x)y_0 \rangle \\ \langle y, x \rangle &= \langle y, x - l(x)y_0 \rangle + l(x) \frac{\langle y_0, y_0 \rangle}{\|y_0\|^2}. \end{aligned}$$

On conclut car  $x - l(x)y_0 \in F = \text{Ker}(l)$ . En effet :

$$l(x - l(x)y_0) = l(x) - l(x)l(y_0) = l(x) - l(x)l(x_0) = 0.$$

## 3 ENDOMORPHISMES DES ESPACES EUCLIDIENS

### 3.1 Endomorphisme adjoint

#### THÉORÈME 3.1

Soit  $E$  un espace euclidien et soit  $u : E \rightarrow E$  un endomorphisme. Il existe une unique application linéaire  $u^* : E \rightarrow E$  telle que :

$$\langle y, u(x) \rangle = \langle u^*(y), x \rangle.$$

#### DÉFINITION 3.2

$u^*$  est l'adjoint de  $u$ .

## DÉMONSTRATION

Pour tout  $y$ , l'application  $x \mapsto \langle y, u(x) \rangle$  est une forme linéaire sur  $E$ . Par le théorème précédent, il existe  $y^* \in E$  tel que

$$\langle y^*, x \rangle = \langle y, u(x) \rangle.$$

L'application :

$$u^* : y \mapsto y^*$$

convient.

OPÉRATIONS SUR L'ADJOINT. Si  $u$  est un endomorphisme de  $E$  :

1.  $u^{**} = u$  ;
2. pour tout  $\lambda \in \mathbf{R}$ ,  $(\lambda u)^* = \lambda u^*$  ;
3. si  $v$  est un endomorphisme sur  $E$ ,  $(u + v)^* = u^* + v^*$ .

## DÉFINITION 3.3

Soit  $E$  un espace euclidien et  $u$  un endomorphisme de  $E$ . On dit que  $u$  est *symétrique* si  $u^* = u$ .

REPRÉSENTATION MATRICIELLE. Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ , un espace euclidienne, et soit  $A = (a_{i,j})_{i,j}$  la matrice de  $u$  dans la base  $e$  où  $e = (e_1, \dots, e_n)$  est une base orthonormée. On a :

$$\forall i, j \leq n, a_{i,j} = \langle e_i, u(e_j) \rangle.$$

Si  $B$  désigne la matrice dans la base  $e$  de  $u^*$  alors

$$B = {}^t A.$$

Si  $u$  est symétrique alors

$${}^t A = A.$$

## 3.2 Intermède

En posant :

$$\mathbf{C}^n = \{Z = (z_1, \dots, z_n) \mid z_i \in \mathbf{C}\},$$

on définit sur  $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$  :

$$(Z, Z') \mapsto \langle \langle Z, Z' \rangle \rangle = z_1 \overline{z'_1} + \dots + z_n \overline{z'_n}.$$

## PROPOSITION 3.4

On a :

1.  $\langle \langle Z, Z' \rangle \rangle = \overline{\langle \langle Z', Z \rangle \rangle}$  ;
2.  $\langle \langle Z, Z' \rangle \rangle = {}^t Z \cdot \overline{Z'}$  ;
3.  $\langle \langle Z, Z \rangle \rangle > 0$  si  $Z \neq 0$  ;
4. si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  alors  $\langle \langle AZ, Z' \rangle \rangle = \langle Z, {}^t \overline{A} Z' \rangle$ .

## THÉORÈME 3.5

Soit  $A$  une matrice réelle  $n \times n$  symétrique. Alors si  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$  alors  $\lambda \in \mathbf{R}$ .

## DÉMONSTRATION

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$ . Soit  $Z \in \mathbf{C}^n$  tel que  $Z \neq 0$  et

$$AZ = \lambda Z.$$

On a :

$$\begin{aligned}\langle\langle AZ, Z \rangle\rangle &= \lambda \langle\langle Z, Z \rangle\rangle \\ \langle\langle AZ, Z \rangle\rangle &= \langle\langle Z, {}^t\bar{A} \rangle\rangle = \langle\langle Z, AZ \rangle\rangle \\ \langle\langle AZ, Z \rangle\rangle &= \langle\langle Z, \lambda Z \rangle\rangle = \bar{\lambda} \langle\langle Z, Z \rangle\rangle.\end{aligned}$$

Donc  $\lambda = \bar{\lambda}$  et donc  $\lambda \in \mathbf{R}$ .

## THÉORÈME 3.6

Soit  $A$  une matrice symétrique réelle. Alors  $A$  possède un vecteur propre réel non nul.

## DÉMONSTRATION

$A$  possède toujours un vecteur propre,  $Z$ , dans  $\mathbf{C}^n$  pour une certaine valeur propre  $\lambda \in \mathbf{C}$ . Mais par le résultat précédent,  $\lambda \in \mathbf{R}$ .

Posons  $Z = X + iY$  avec  $X, Y \in \mathbf{R}^n$  non tous deux nuls. On a :

$$\begin{aligned}AZ &= \lambda Z \\ A(X + iY) &= \lambda(X + iY) \\ \begin{cases} AX &= \lambda X \\ AY &= \lambda Y \end{cases}\end{aligned}$$

et donc  $X$  ou  $Y$  sont deux vecteurs propres réels de  $A$  avec pour valeur propre  $\lambda \in \mathbf{R}$ .

## COROLLAIRE 3.7

Soit  $E$  un espace euclidien et  $u$  un endomorphisme de  $E$  symétrique.  $u$  possède un vecteur propre  $x$  non nul de valeur propre réelle.

## DÉMONSTRATION

Soit  $A$  la matrice associée de  $u$  dans une base orthonormée,  $e = (e_1, \dots, e_n)$ . Il existe  $X \in \mathbf{R}^n$  tel que

$$AX = \lambda X$$

pour un certain  $\lambda \in \mathbf{R}$ . Si

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

alors le vecteur :

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

convient.

## THÉORÈME 3.8

Soit  $u : E \rightarrow E$  un endomorphisme symétrique et soit  $x \in E$  un vecteur propre non nul de  $u$ . Si  $y \in E$  est orthogonal à  $x$  alors  $u(y)$  est orthogonal à  $x$ .

## DÉMONSTRATION

Supposons que  $\langle x, y \rangle = 0$ . Alors :

$$\begin{aligned}\langle x, u(y) \rangle &= \langle u(x), y \rangle \\ &= \langle \lambda x, y \rangle \\ &= \lambda \langle x, y \rangle = 0.\end{aligned}$$

## THÉORÈME 3.9 (Spectral)

Soit  $E$  un espace euclidien et soit  $u : E \rightarrow E$  un endomorphisme symétrique. Il existe orthonormée de vecteurs propre,  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ , de  $u$  et on a que  $A = \text{Mat}(u, \mathbf{e}, \mathbf{e})$  est diagonale.

## DÉMONSTRATION

Par récurrence sur  $n = \dim E$ .

1. Si  $n = 1$  alors c'est vérifié.
2. Soit  $n \geq 2$ , supposons le résultat vrai pour  $\dim E = n - 1$ . On sait qu'il existe  $x \in E$  qui est vecteur propre de  $u$ . Soit  $F = x^\perp$ ,  $F$  est de dimension  $n - 1$ .  $F$  est un espace euclidien, il s'agit donc de montrer que  $u$  laisse stable  $F$ . Par le résultat précédent, si  $y$  est orthogonal à  $x$ , i.e.  $y \in F$ , alors  $u(y)$  est également orthogonal à  $x$  et donc  $u(F) \subset F$ . Par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormée  $(e_1, \dots, e_{n-1})$  de vecteurs propres de  $u|_F$ . Mais par définition de  $F$ ,  $(e_1, \dots, e_{n-1}, x/\|x\|)$  est donc une base orthonormée de  $E$  formée de vecteurs propres de  $u$ .

## COROLLAIRE 3.10

Soit  $A$  une matrice symétrique réelle  $(n \times n)$  alors il existe une matrice orthogonale  $U$  telle que

$${}^tU A U = D$$

où  $D$  est diagonale.

## DÉFINITION 3.11

Soit  $U$  une matrice  $n \times n$ .  $U$  est dite *orthogonale* si, et seulement si,

$${}^tU U = I_n.$$

REMARQUE.  $U$  est orthogonale si, et seulement si, ses colonnes forment une base orthonormée de  $\mathbf{R}^n$  muni du produit scalaire usuel.

## DÉMONSTRATION

$A$  est la représentation matricielle d'un certain endomorphisme symétrique,  $u$ , de  $\mathbf{R}^n$  muni du produit scalaire habituel. D'après le théorème spectral, il existe une base  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$  orthonormée de vecteurs propres de  $u$ . La matrice,  $D$ , de  $u$  dans la base  $\mathbf{f}$  est diagonale.

Avec  $U = \text{Mat}(I_d, \mathbf{f}, \mathbf{e})$  avec  $\mathbf{e}$  la base canonique, on a

$$U^{-1} A U = D.$$

Puisque  $\mathbf{f}$  est orthonormée, on a :

$$({}^tU U)_{i,j} = \langle f_i, f_j \rangle = \delta_{i,j}.$$

Mais alors  ${}^tU U = I_d$  et donc  $U^{-1} = {}^tU$ .

## 4 ISOMÉTRIES DES ESPACES EUCLIDIENS

### THÉORÈME 4.1

Soit  $E$  un espace euclidien et  $u$  un endomorphisme de  $E$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. Pour tous  $x, y$  de  $E$  :

$$\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle .$$

2. Pour tout  $x \in E$  :

$$\|u(x)\| = \|x\| .$$

3.  $u$  est bijective et

$$u^{-1} = u^* .$$

### DÉMONSTRATION

1 implique 2. En effet, pour  $x = y \in E$  on a

$$\|u(x)\|^2 = \|x\|^2 .$$

2 implique 1. Par la relation

$$2 \langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2$$

pour tous  $x, y \in E$ . On a alors

$$2 \langle u(x), u(y) \rangle = \|u(x) + u(y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2 = \|u(x + y)\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 = 2 \langle x, y \rangle .$$

2 implique 3. On a  $\text{Ker } u = \{0\}$  par définition de la norme. Donc  $u$  injective mais  $u$  est un endomorphisme donc  $u$  est bijective. De plus :

$$\langle u^{-1}(x), y \rangle = \langle u(u^{-1}(x)), u(y) \rangle = \langle x, u(y) \rangle$$

et donc  $u^{-1} = u^*$ .

3 implique 2. En effet, pour tous  $x, y \in E$ ,

$$\langle u^{-1}(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle .$$

En particulier, pour  $x = u(y)$  on a

$$\|y\|^2 = \|u(y)\|^2 .$$

### DÉFINITION 4.2

Soit  $E$  un espace euclidien et  $u$  un endomorphisme de  $E$ .  $u$  est une *isométrie* si elle satisfait une de ces trois propriétés.

### DÉFINITION 4.3

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ , un espace euclidien. La symétrie orthogonale par rapport à  $F$  est donnée pour tout  $x \in E$  par

$$s_F(x) = x - 2(x - p_F(x)) = 2p_F(x) - x$$

où  $p_F$  est la projection orthogonale sur  $F$ .

REMARQUE. Si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base orthonormée de  $E$  et si  $u$  est une isométrie alors  $(u(e_1), \dots, u(e_n))$  est une base orthonormée de  $E$ .



**PROPOSITION 4.4**

Si  $\lambda$  est une valeur propre d'une isométrie  $u$  alors  $\lambda = \pm 1$ .

**DÉMONSTRATION**

Soit  $x$  un vecteur propre non nul de valeur propre  $\lambda$ , on a

$$\|x\| = \|u(x)\| = |\lambda| \|x\|.$$

**PROPOSITION 4.5**

Soit  $u$  une isométrie de  $E$  et soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  tel que  $u(F) \subset F$ .  $F^\perp$  est stable par  $u : u(F^\perp) \subset F^\perp$ .

**DÉMONSTRATION**

Remarquons que si  $F$  est stable par  $u$  alors  $u(F) = F$  puisque  $u$  est un automorphisme.

Soit  $y \in F^\perp$ , il s'agit de montrer que  $u(y) \in F^\perp$ , c'est-à-dire que pour tout  $x \in F$ ,

$$\langle u(y), x \rangle = 0$$

mais il existe  $z \in F$  tel que  $x = u(z)$ . Or,

$$\langle u(y), u(z) \rangle = \langle y, z \rangle = 0.$$

**LEMME 4.6**

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$  et soit  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension  $k$ . Il existe  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  orthonormée telle que  $(e_1, \dots, e_k)$  est une base orthonormée de  $F$ .

**PROPOSITION 4.7**

Si  $s$  est une symétrie orthogonale par rapport à  $F$  alors

$$\det(s) = (-1)^{n-k}$$

où  $n = \dim E$  et  $k = \dim F$ .

**DÉMONSTRATION**

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée telle que  $(e_1, \dots, e_k)$  est une base orthonormée de  $F$  et  $(e_{k+1}, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $F^\perp$ .

Soit  $S = \text{Mat}(s, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ , on a

$$S = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_{n-k} \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\det(s) = (-1)^{n-k}.$$

**THÉORÈME 4.8**

Soit  $E$  un espace euclidien tel que  $\dim E = n \geq 2$ . Toute isométrie de  $E$  est composée d'au plus  $n$  symétries orthogonales par rapport à des hyperplans.

**4.1 Isométries en dimension 2**

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension 2.

## PROPOSITION 4.9

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$  une base orthonormée de  $E$ . L'endomorphisme  $u$  de  $E$  est une isométrie si, et seulement si,  $A = \text{Mat}(u, \mathcal{B}, \mathcal{B})$  est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

avec  $a^2 + b^2 = 1$ .

## DÉMONSTRATION

Pour  $a, b \in \mathbf{R}$ , si  $f(e_1) = ae_1 + be_2$  alors on peut remarquer

$$(f(e_1))^\perp = \text{Vect}(-be_1 + ae_2).$$

Mais  $f$  est une isométrie si, et seulement si,

1.  $a^2 + b^2 = 1$  ;
2.  $f(e_2) \in (f(e_1))^\perp$ .

Il existe donc  $\lambda$  tel que  $f(e_2) = \lambda(-be_1 + ae_2)$ . Mais comme  $\|f(e_2)\| = 1$  on en déduit  $\lambda = \pm 1$ . Donc  $A = (f(e_1) \ f(e_2))$  est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

## PROPOSITION 4.10

Soit  $u : E \rightarrow E$  une isométrie.  $u$  est une symétrie orthogonale par rapport à une droite si, et seulement si,  $\det(u) = -1$ .

## DÉMONSTRATION

On a vu que  $\det(u) = (-1)^{2-k}$  où  $k$  est la dimension de  $F$  tel que  $u$  est une symétrie orthogonale par rapport à  $F$ .

Si  $u$  est une symétrie orthogonale par rapport à une droite alors  $\det(u) = -1$ .

Si  $\det(u) = -1$  alors c'est une symétrie orthogonale, nécessairement par rapport à un espace de dimension 1, c'est-à-dire une droite.

## DÉFINITION 4.11

Si  $u$  est une isométrie de déterminant 1 alors on dit que  $u$  est une *rotation*.

Si  $\det(u) = 1$  alors la matrice de  $u$  dans une base  $\mathcal{B}$  orthonormée est

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

avec  $a^2 + b^2 = 1$ . Il existe un unique  $\theta \in [0, 2\pi[$  tel que  $a = \cos \theta$  et  $b = \sin \theta$ . Ainsi,

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

est bien la représentation d'une rotation d'angle  $\theta$ .

## LEMME 4.12

Si  $u : E \rightarrow E$  est une isométrie telle que  $\det(u) = 1$  alors  $u$  ne possède pas de valeurs propres.

**DÉMONSTRATION**

$u$  est de la forme dans une base  $\mathcal{B}$  orthonormée :

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique est alors :

$$\chi_A(\lambda) = (a - \lambda)^2 + b^2 = 0$$

si  $u \neq \text{id}$  alors  $b \neq 0$  et  $\chi_A$  n'a pas de racine.

**4.2 Isométries de l'espace**

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension 3.

**PROPOSITION 4.13**

Soit  $u$  une isométrie telle que  $u \neq \text{id}$ .

1. 1 est valeur propre et  $\dim E(1) = 1$  ( $E(1)$  est le sous-espace propre associé à la valeur propre 1).
2. Soit  $P = (E(1))^\perp$ . On a  $u(x) \in P$  pour tout  $x \in P$ . De plus  $h : P \rightarrow P$  définie par  $h(x) = u(x)$  est une rotation de  $P$ .

**DÉFINITION 4.14**

On définit :

1. Une isométrie  $u : E \rightarrow E$  est une rotation si  $\det u = 1$ .
2. L'axe de rotation est  $E(1)$ .
3. L'angle (ou mesure de la rotation) est l'angle de la rotation de  $h : P \rightarrow P$ .

**PROPOSITION 4.15**

Soit  $u$  une isométrie telle que  $\det(u) = -1$ .  $u$  est une symétrie orthogonale par rapport à un plan ou il existe  $s$  et  $r$  respectivement une symétrie orthogonale et une rotation tels que  $u = r \circ s = s \circ r$ .

# Deuxième partie

## Analyse

### Table des matières

---

<b>3</b>	<b>Intégrale de RIEMANN</b>	<b>35</b>
1	Intégrale de RIEMANN sur $[a, b]$ . . . . .	35
1.1	Continuité . . . . .	41
2	Intégrale double de fonctions à deux variables . . . . .	42
2.1	Intégration sur un rectangle . . . . .	42
2.2	Intégration sur domaines plus généraux . . . . .	45
2.3	Coordonnées polaires . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Suites et séries de fonctions</b>	<b>48</b>
1	Suites de fonctions . . . . .	48
1.1	Définitions . . . . .	48
1.2	Suites de nombres réels et normes . . . . .	51
1.3	Limites fonctionnelles . . . . .	51
1.4	Continuité . . . . .	52
1.5	Dérivabilité . . . . .	53
1.6	Intégrabilité . . . . .	54
2	Séries de fonctions . . . . .	55
2.1	Rappel sur les séries numériques . . . . .	55
2.2	Séries de fonctions . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Séries entières</b>	<b>59</b>
1	Définitions . . . . .	59
1.1	Série entière et rayon de convergence . . . . .	59
1.2	Disque de convergence . . . . .	60

---

## Chapitre 3

# Intégrale de RIEMANN

### 1 INTÉGRALE DE RIEMANN SUR $[a, b]$

Soit  $[a, b]$  un intervalle de  $\mathbf{R}$  avec  $a < b$ .

#### DÉFINITION 1.1

Une subdivision de  $[a, b]$  est la donnée de  $n \in \mathbf{N}^*$  et d'une suite de points,  $\{x_0, \dots, x_n\}$  telle que

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Les intervalles  $]x_{i-1}, x_i[$  pour  $1 \leq i \leq n$  sont les intervalles de la subdivision.

#### DÉFINITION 1.2

Une fonction  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  est dite *en escaliers* s'il existe une subdivision  $\pi$  de  $[a, b]$  telle que  $\varphi$  est constante les intervalles de  $\pi$ .

On dit alors que  $\pi$  est *adaptée* à  $\varphi$ .

#### DÉFINITION 1.3

Soit  $\pi = (n, \{x_0, \dots, x_n\})$  et soit  $\rho = (p, \{z_0, \dots, z_p\})$ . On dit que  $\rho$  est *plus fine* que  $\pi$  si  $p > n$  et si  $\{x_0, \dots, x_n\} \subset \{z_0, \dots, z_p\}$ .

#### LEMME 1.4

Si  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  est en escaliers,  $\pi$  est une subdivision adaptée à  $\varphi$  et  $\rho$  une subdivision plus fine que  $\pi$  alors  $\rho$  est adaptée à  $\varphi$ .

#### DÉMONSTRATION

Chaque intervalle de  $\rho$  est dans un intervalle de  $\pi$  et donc  $\varphi$  est constante sur chacun d'eux.

#### LEMME 1.5

Soient  $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  des fonctions en escaliers. Soient  $\pi$  et  $\rho$  des subdivisions adaptées à chacune. Il existe une subdivision  $\sigma$  adaptée aux deux fonctions.

#### DÉMONSTRATION

Supposons que  $\pi = (n, \{x_0, \dots, x_n\})$  et  $\rho = (p, \{z_0, \dots, z_p\})$ . On construit  $\sigma$  en ordonnant  $\{x_0, \dots, x_n\} \cup \{z_0, \dots, z_p\}$ .  $\sigma$  est alors plus fine que  $\pi$  et  $\rho$  et donc elle est adaptée à  $\varphi$  et  $\psi$ .

#### LEMME 1.6

Si  $\varphi$  et  $\psi$  sont des fonctions en escaliers de  $[a, b]$  alors :

1.  $\lambda\varphi + \mu\psi$  sont en escaliers pour tous  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$  ;

2.  $\max(\varphi, \psi)$  est en escaliers ;
3.  $\min(\varphi, \psi)$  est en escaliers.

**DÉFINITION 1.7**

Soit  $\varphi$  une fonction en escaliers et soit  $\pi = (n, \{x_0, \dots, x_n\})$  une subdivision adaptée à  $\varphi$ . L'intégrale de  $\varphi$  sur  $[a, b]$  est définie par :

$$E(\varphi, \pi) = \sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

avec  $\xi_i \in ]x_i, x_{i-1}[$ .

On note

$$E(\varphi, \pi) = \int_a^b \varphi(t) dt.$$

**REMARQUE.** La valeur de  $E(\varphi, \pi)$  ne dépend pas de la subdivision  $\pi$  choisie. En effet, si  $\sigma$  est plus fine que  $\pi$  alors  $E(\varphi, \sigma) = E(\varphi, \pi)$ . On considère le cas où on rajoute un point  $z$  à  $\{x_0, \dots, x_n\}$  tel que  $z \in ]x_{i_0-1}, x_{i_0}[$ . On a

$$\begin{aligned} E(\varphi, \sigma) &= \sum_{j=1}^{i_0-1} \varphi(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) + \varphi(\xi_{i_0})(z - x_{i_0-1}) + \varphi(\xi_{i_0})(x_{i_0} - z) + \sum_{j=i_0+1}^n \varphi(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = E(\varphi, \pi). \end{aligned}$$

De plus, si  $\pi$  et  $\rho$  sont des subdivisions adaptées alors il existe  $\sigma$  plus fine que  $\pi$  et  $\rho$  et qui est adaptée à  $\varphi$ . On a alors  $E(\varphi, \pi) = E(\varphi, \sigma) = E(\varphi, \rho)$ .

**PROPOSITION 1.8**

Soient  $\varphi$  et  $\psi$  des fonctions en escaliers de  $[a, b]$ .

1. Pour tout  $\lambda \in \mathbf{R}$ ,

$$\int_a^b (\lambda\varphi + \psi)(t) dt = \lambda \int_a^b \varphi(t) dt + \int_a^b \psi(t) dt.$$

2. Si  $\varphi \leq \psi$  alors

$$\int_a^b \varphi(t) dt \leq \int_a^b \psi(t) dt.$$

- 3.

$$\left| \int_a^b \varphi(t) dt \right| \leq \int_a^b |\varphi(t)| dt$$

**DÉMONSTRATION**

Montrons le 2.

Soit  $\sigma$  une subdivision adaptée à  $\varphi$  et  $\psi$  avec  $\sigma = (n, \{x_0, \dots, x_n\})$ .

$$\int_a^b \varphi(t) dt = \sum_{j=1}^n \varphi(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \leq \sum_{j=1}^n \psi(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) = \int_a^b \psi(t) dt.$$

Soit  $f$  une fonction bornée sur  $[a, b]$ , i.e. il existe  $c$  tel que pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $|f(x)| \leq c$ . Soient

$$A = \left\{ \int_a^b \varphi_1(t) dt \mid \varphi_1 \leq f \right\}$$

$$B = \left\{ \int_a^b \varphi_2(t) dt \mid \varphi_2 \geq f \right\}.$$

$A$  est majoré. En effet,  $f(x) \leq c$  pour tout  $x \in [a, b]$  et donc si  $\varphi_1 \leq f$  alors  $\varphi_1(x) \leq c$  pour tout  $x \in [a, b]$ . Comme  $x \mapsto c$  est en escaliers,

$$\int_a^b \varphi_1(t) dt \leq c(b-a).$$

De même,  $B$  est minoré. On pose

$$M = \sup A < +\infty,$$

$$m = \inf B > -\infty.$$

#### DÉFINITION 1.9

Soit  $f$  une fonction bornée sur  $[a, b]$ .  $f$  est intégrable au sens de RIEMANN sur  $[a, b]$  si  $M = m$ .

#### DÉFINITION 1.10 (Définition équivalente)

Soit  $f$  une fonction bornée sur  $[a, b]$ .  $f$  est intégrable au sens de RIEMANN si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  en escaliers tels que

$$\varphi_1 \leq f, \varphi_2 \geq f \text{ et } \int_a^b (\varphi_2 - \varphi_1)(t) dt \leq \varepsilon.$$

NOTATION. Si  $f$  est intégrable alors on note

$$\int_a^b f(t) dt = M = m$$

son intégrale.

CONTRE-EXEMPLE. Soit  $h$  la fonction de DIRICHLET définie sur  $I = [0, 1]$  par :

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbf{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

$h$  n'est pas intégrable au sens de RIEMANN.

Soit  $\varphi_1$  une fonction en escaliers telle que  $\varphi_1 \leq h$ . Soit  $\pi$  une subdivision adaptée à  $\varphi_1$ . Sur chaque intervalle de  $\pi$  il existe un irrationnel,  $y$ , où  $h(y) = 0$  et donc  $\varphi_1(x) \leq 0$  pour tout  $x$ . De même pour  $\varphi_2$  en escaliers telle que  $\varphi_2 \geq h$ . On a  $\varphi_2 \geq 1$  et donc  $M \neq m$ .

#### PROPOSITION 1.11

Soit  $f$  bornée sur  $[a, b]$ .  $f$  est intégrable au sens de RIEMANN si, et seulement si, pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $\varphi, \psi$  en escaliers telles que  $|f - \varphi| \leq \psi$  et  $\int_a^b \psi(t) dt < \varepsilon$ .

## DÉMONSTRATION

Si  $f$  est intégrable alors  $\psi = \varphi_2 - \varphi_1$  et  $\varphi = \varphi_1$  convient.

Réciproquement, on pose  $\varphi_1 = \varphi - \psi$  et  $\varphi_2 = \varphi + \psi$ .

REMARQUE. Soit  $f$  RIEMANN-intégrable sur  $[a, b]$ . Si  $\varphi, \psi$  en escaliers telles que  $|f - \varphi| \leq \psi$  alors

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx - \int_a^b \varphi(x) \, dx \right| \leq \int_a^b \psi(x) \, dx.$$

## PROPOSITION 1.12 (Linéarité et majoration)

On a :

1. Soient  $f_1$  et  $f_2$  RIEMANN-intégrables sur  $[a, b]$ . Pour tous  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ ,  $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$  est RIEMANN-intégrable et

$$\int_a^b (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) \, dx = \lambda_1 \int_a^b f_1(x) \, dx + \lambda_2 \int_a^b f_2(x) \, dx.$$

2. Si  $f$  et  $g$  sont RIEMANN-intégrables sur  $[a, b]$  avec  $f \leq g$  alors

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx.$$

3. Si  $f$  est RIEMANN-intégrable alors  $x \mapsto |f(x)|$  est RIEMANN-intégrable et

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

## DÉMONSTRATION

On démontre :

2. On a

$$\int_a^b f(x) \, dx = \sup_{\varphi \leq f} \int_a^b \varphi(x) \, dx \leq \sup_{\varphi \leq g} \int_a^b \varphi(x) \, dx = \int_a^b g(x) \, dx.$$

3. Soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\varphi$  et  $\psi$  en escaliers telles que  $|f - \varphi| \leq \psi$  et  $\int \psi < \varepsilon$ . On a  $||f| - |\varphi|| \leq |f - \varphi| \leq \psi$ . Donc  $|f|$  est RIEMANN-intégrable,  $-|f| \leq f \leq |f|$  donc

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

1. Supposons  $|\lambda_1| + |\lambda_2| \leq 1$ .  $f_1$  et  $f_2$  sont RIEMANN-intégrables. Alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\varphi_1, \varphi_2$  et  $\psi_1, \psi_2$  telles que  $|f_{1,2} - \varphi_{1,2}| \leq \psi_{1,2}$  et  $\int \psi_{1,2} < \varepsilon$ . D'où

$$|\lambda_1 + f_1 + \lambda_2 f_2 - \lambda_1 \varphi_1 - \lambda_2 \varphi_2| \leq |\lambda_1| \psi_1 + |\lambda_2| \psi_2 = \tilde{\psi}$$

et

$$\int_a^b \tilde{\psi}(x) \, dx < |\lambda_1| \varepsilon + |\lambda_2| \varepsilon < \varepsilon.$$

D'où  $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$  intégrable.

## DÉFINITION 1.13

Soit  $\pi = (n, \{x_0, \dots, x_n\})$  une subdivision de  $[a, b]$ . On note  $\delta(\pi)$  le pas de la subdivision.

$$\delta(\pi) = \max(x_i - x_{i-1}).$$



## DÉFINITION 1.14

Soit  $\pi$  une subdivision de  $[a, b]$ ,  $(\pi, \xi) = (\pi, \{\xi_1, \dots, \xi_n\})$  est une division pointée si  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i[$ .

## DÉFINITION 1.15

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  et soit  $(\pi, \xi)$  une subdivision pointée. La somme de RIEMANN  $\sum_{\pi, \xi}(f)$  est donnée par

$$\sum_{\pi, \xi}(f) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

## PROPOSITION 1.16 (Linéarité de la somme de RIEMANN)

On a

$$\sum_{\pi, \xi}(f + g) = \sum_{\pi, \xi}(f) + \sum_{\pi, \xi}(g).$$

REMARQUE. Si  $\varphi$  est en escaliers sur  $[a, b]$  alors

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{1}_{I_i}$$

où  $I_i \subset [a, b]$ .

## THÉORÈME 1.17 (Riemann)

Soit  $f$  une fonction de  $[a, b]$  dans  $\mathbf{R}$ . Si  $f$  est RIEMANN-intégrable alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (\pi, \xi), \delta(\pi) < \eta \implies \left| \sum_{\pi, \xi}(f) - \int_a^b f(x) \, dx \right| < \varepsilon.$$

## LEMME 1.18

Soit  $J$  un intervalle inclus dans  $[a, b]$ . Pour toute subdivision pointée  $(\pi, \xi)$ ,

$$\left| \sum_{\pi, \xi}(\mathbf{1}_J) - \int_a^b \mathbf{1}_J(x) \, dx \right| = \left| \sum_{\pi, \xi}(\mathbf{1}_J) - l(J) \right| \leq 2\delta(\pi)$$

avec  $l(J)$  la longueur de  $J$ .

## PROPOSITION 1.19

Soit  $\varphi$  en escaliers sur  $[a, b]$ .

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (\pi, \xi), \delta(\pi) < \eta \implies \left| \sum_{\pi, \xi}(\varphi) - \int_a^b \varphi(x) \, dx \right| < \varepsilon.$$

## DÉMONSTRATION

Si  $\varphi$  est en escalier, il existe  $\lambda_i$ , pour  $i = 1, \dots, n$  tels que

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{1}_{I_i}.$$

Soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que pour toute subdivision pointée  $(\pi, \xi)$  telle que  $\delta(\pi) < \eta$  et

$$\left| \sum_{\pi, \xi} (\mathbb{1}_{J_i}) - \int_a^b \mathbb{1}_{J_i}(x) dx \right| < \varepsilon/(2n)$$

et on conclut par l'inégalité triangulaire.

#### THÉORÈME 1.20 (RIEMANN)

Soit  $f : [a, b]$  RIEMANN-intégrable. Alors pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $\eta > 0$  tel que pour toute subdivision  $(\pi, \xi)$  telle que  $\delta(\pi) < \eta$  :

$$\left| \sum_{\pi, \eta} f - \int_a^b f \right| < \varepsilon.$$

#### DÉMONSTRATION

$f$  est RIEMANN-intégrable si, et seulement si

$$\sup_{\varphi_1 \leq f} \int_a^b \varphi_1 = \int_a^b f = \inf_{\varphi_2 \geq f} \int_a^b \varphi_2.$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $\varphi_1, \varphi_2$  en escaliers qui encadrent  $f$  et dont les intégrales sont  $\varepsilon/2$  proches de  $f$ . Comme  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont RIEMANN-intégrables, il existe  $\eta_1, \eta_2 > 0$  tels que pour toute subdivision  $(\pi, \xi)$  telle que  $\delta(\pi) < \min(\eta_1, \eta_2) = \eta$ .

$$\left| \sum_{\pi, \xi} \varphi_1 - \int_a^b \varphi_1 \right| < \varepsilon/2 \text{ et } \left| \sum_{\pi, \xi} \varphi_2 - \int_a^b \varphi_2 \right| < \varepsilon/2.$$

#### LEMME 1.21 (Relation de CHASLES)

Soient  $a < b < c$ .  $f$  est RIEMANN-intégrable sur  $[a, c]$  si, et seulement si,  $f$  est RIEMANN-intégrable sur  $[a, b]$  et  $[b, c]$  et

$$\int_a^c f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt.$$

On a

$$\int_a^b f - \varepsilon \leq \int_a^b \varphi_1 - \varepsilon/2$$

Soit  $(\pi, \xi)$  tel que  $\delta(\pi) < \eta$  alors

$$\int_a^b f - \varepsilon \leq \sum_{\pi, \xi} \varphi_1 \leq \sum_{\pi, \xi} f.$$

On a de même

$$\int_a^b f + \varepsilon \geq \sum_{\pi, \xi} f$$

on a alors

$$\left| \int_a^b f - \sum_{\pi, \xi} f \right| \leq \varepsilon.$$

## 1.1 Continuité

DÉFINITION 1.22 (Continuité sur un compact)

$f$  est continue sur  $[a, b]$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in [a, b], \exists \eta > 0, \forall y \in [a, b], |x - y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

DÉFINITION 1.23 (Continuité uniforme sur un compact)

$f$  est uniformément continue sur  $[a, b]$  si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in [a, b]^2, |x - y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

THÉORÈME 1.24 (HEINE)

$f$  est continue sur  $[a, b]$  si, et seulement si,  $f$  est uniformément continue sur  $[a, b]$ .

THÉORÈME 1.25

Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$  alors  $f$  est RIEMANN-intégrable sur  $[a, b]$ .

DÉMONSTRATION

Soit  $(\pi = (n, (x_0, \dots, x_n)))$  une subdivision de  $[a, b]$ . Soient  $\varepsilon > 0$  et

$$\varphi_\pi : x \mapsto f(a)\mathbb{1}_a(x) + \sum_{i \in \{1, \dots, n\}} f(x_i)\mathbb{1}_{[x_{i-1}, x_i]}(x).$$

Comme  $f$  est continue sur un compact, elle est uniformément continue sur  $[a, b]$ . Donc

$$\exists \eta > 0, \forall (x, y), |x - y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

donc pour  $\pi$  telle que  $\delta(\pi) < \eta$  on a

$$|f(x) - \varphi_\pi(x)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Comme  $\varphi_\pi$  est en escaliers,  $f$  est RIEMANN-intégrable.

THÉORÈME 1.26

Si  $f$  est monotone sur  $[a, b]$ , alors  $f$  est RIEMANN-intégrable.

DÉMONSTRATION

Soit  $\varepsilon > 0$  et  $\pi$  une subdivision telle que  $x_i - x_{i-1} = h$  et  $h < \varepsilon/[f(b) - f(a)]$ . On pose

$$\varphi_1 : x \mapsto \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\mathbb{1}_{[x_{i-1}, x_i]}(x)$$

et

$$\varphi_2 : x \mapsto \sum_{i=1}^n f(x_i)\mathbb{1}_{[x_{i-1}, x_i]}(x).$$

On a

$$\int_a^b \varphi_1(x) dx = h[f(a) + f(a+h) + \dots + f(a+(n-1)h)]$$

et

$$\int_a^b \varphi_2(x) dx = h[f(a+h) + \dots + f(b)]$$

d'où

$$\int_a^b (\varphi_1 - \varphi_2)(x) dx = h(f(b) - f(a)) < \varepsilon.$$

### THÉORÈME 1.27

Si  $f$  est  $C^1$  sur  $[a, b]$  alors

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt.$$

### DÉMONSTRATION

Soit  $\pi$  une subdivision  $(n, (x_0, \dots, x_n))$ . Par le théorème des accroissements finis,

$$\forall i, \exists \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

D'où

$$\sum_{\pi, \xi} f' = \sum_{i=1}^n f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(x_i) - f(x_{i-1}) = f(b) - f(a).$$

De plus,  $f'$  est intégrable donc

$$\lim_{\delta(\pi) \rightarrow 0} \sum_{\pi, \xi} (f') = \int_a^b f'(t) dt$$

d'où

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt.$$

## 2 INTÉGRALE DOUBLE DE FONCTIONS À DEUX VARIABLES

### 2.1 Intégration sur un rectangle

Soit  $P = [a, b] \times [c, d]$  un pavé de  $\mathbf{R}^2$ .

#### DÉFINITION 2.1

Une subdivision de  $P$  est la donnée d'un couple  $(\pi_x, \pi_y)$  où  $\pi_x$  (resp.  $\pi_y$ ) est une subdivision de  $[a, b]$  (resp.  $[c, d]$ ).

Si  $\pi_x = (x_0, x_1, \dots, x_m)$  et  $\pi_y = (y_0, y_1, \dots, y_n)$  alors les rectangles de la subdivision sont les

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i[ \times [y_{j-1}, y_j[$$

pour tous  $1 \leq i \leq m$  et  $1 \leq j \leq n$ .

#### DÉFINITION 2.2

La fonction  $\varphi : P \rightarrow \mathbf{R}$  est en escaliers s'il existe une subdivision  $\pi$  de  $P$  telle que  $\varphi$  est constante sur les rectangles de  $\pi$ .  $\pi$  est alors une subdivision adaptée à  $\varphi$ .

#### DÉFINITION 2.3

Soit  $\varphi$  une fonction en escaliers sur  $P = [a, b] \times [c, d]$ . L'intégrale de  $\varphi$  sur  $P$  est définie par

$$\int_P \varphi = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_{i,j} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

où  $((x_0, \dots, x_m), (y_0, \dots, y_n))$  est une subdivision adaptée à  $\varphi$  et  $c_{i,j}$  est la valeur de  $\varphi$  sur  $R_{i,j}$ .

## DÉFINITION 2.4

Soit  $f : P \rightarrow \mathbf{R}$  bornée. Soient  $M$  (resp.  $m$ ) la borne supérieure (resp. inférieure) des intégrales des fonctions en escaliers inférieures (resp. supérieures) à  $f$  en tout point sur  $P$ .

$f$  est *intégrable au sens de RIEMANN* si  $M = m$  et on définit

$$\int_P f = M = m.$$

## DÉFINITION 2.5

Soit  $f : P \rightarrow \mathbf{R}$  bornée.  $f$  est intégrable sur  $P$  si pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  en escaliers telles que  $\varphi_1 \leq f \leq \varphi_2$  et

$$\int_P \varphi_2 - \varphi_1 < \varepsilon.$$

## PROPOSITION 2.6

Soit  $f : P \rightarrow \mathbf{R}$  bornée.  $f$  est RIEMANN-intégrable si, et seulement si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\varphi, \psi$  en escaliers telles que  $|f - \varphi| \leq \psi$  et

$$\int_P \psi < \varepsilon.$$

## PROPOSITION 2.7

Soit  $P$  un pavé de  $\mathbf{R}^2$  et soient  $f$  et  $g$  RIEMANN-intégrables sur  $P$ . Alors :

1. pour tous  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ ,  $\lambda f + \mu g$  est RIEMANN-intégrable et

$$\int_P \lambda f + \mu g = \lambda \int_P f + \mu \int_P g ;$$

2. l'application  $(x, y) \mapsto |f(x, y)|$  est RIEMANN-intégrable sur  $P$  et

$$\left| \int_P f \right| \leq \int_P |f|.$$

## DÉFINITION 2.8

Soit  $\pi$  une subdivision de  $P = [a, b] \times [c, d]$ . On prend pour tous  $i, j$  dans les bornes de  $\pi$ ,  $\xi_{ij} \in R_{ij}$ .  $(\pi, \xi)$  est une *subdivision pointée*.

## DÉFINITION 2.9

Soit  $f : P \rightarrow \mathbf{R}$  et  $(\pi, \xi)$  une subdivision pointée. La somme de RIEMANN associée est

$$\sum_{\pi, \xi} (f) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\xi_{ij}) |R_{ij}|$$

où  $|R_{ij}|$  est l'aire de  $R_{ij}$ .

## DÉFINITION 2.10

Si  $\pi = (\pi_x, \pi_y)$  est une subdivision de  $P$ . Alors  $\delta(\pi) = \max(\delta(\pi_x), \delta(\pi_y))$  est le *pas* de  $\pi$ .

## THÉORÈME 2.11 (RIEMANN)

Soit  $f : P \rightarrow \mathbf{R}$ . Si  $f$  est RIEMANN-intégrable sur  $P$  alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (\pi, \xi), \delta(\pi) < \eta \implies \left| \sum_{\pi, \xi} (f) - \int_P f \right| < \varepsilon.$$

REMARQUE. Si  $\varphi$  est une fonction en escaliers sur  $P$  alors il existe une subdivision  $\pi$  de  $P$  et  $(c_{ij}) \in \mathbf{R}^{nm}$  telle que pour tous  $x, y \in [a, b[ \times [c, d[$

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \mathbb{1}_{R_{ij}}(x, y).$$

## LEMME 2.12 (FUBINI pour les fonctions en escaliers)

Soit  $\varphi : P \rightarrow \mathbf{R}$  en escaliers.

1. Pour tout  $x \in [a, b]$  (resp.  $y \in [c, d]$ ), la fonction  $y \mapsto \varphi(x, y)$  (resp.  $x \mapsto \varphi(x, y)$ ) est en escaliers.
2. La fonction

$$x \mapsto \int_c^d \varphi(x, y) dy$$

est en escaliers sur  $[a, b]$ . De même,

$$y \mapsto \int_a^b \varphi(x, y) dx$$

est en escaliers sur  $[c, d]$ .

3. On a

$$\int_P \varphi = \int_a^b \left( \int_c^d \varphi(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b \varphi(x, y) dx \right) dy.$$

## DÉMONSTRATION (2. et 3.)

Par la remarque et la linéarité de l'intégrale, il suffit de le montrer pour les fonctions indicatrices de  $Q = I \times J = [\alpha, \beta[ \times [\gamma, \delta[ \subset P$ . On prend donc  $\varphi = \mathbb{1}_Q$ . On a :

$$\int_P \mathbb{1}_Q = (\beta - \alpha)(\delta - \gamma).$$

Pour tous  $(x, y) \in P$ ,

$$\mathbb{1}_Q(x, y) = \mathbb{1}_{[\alpha, \beta[}(x) \mathbb{1}_{[\gamma, \delta[}(y).$$

Ainsi,

$$\int_c^d \mathbb{1}_Q(x, y) dy = \mathbb{1}_{[\alpha, \beta[} \int_c^d \mathbb{1}_{[\gamma, \delta[}(y) dy = \mathbb{1}_{[a, b[}(x)(\delta - \gamma).$$

Donc

$$\int_a^b \int_c^d \mathbb{1}_Q(x, y) dy dx = (\beta - \alpha)(\delta - \gamma).$$

Et de même en considérant  $[a, b]$  en premier temps.

## THÉORÈME 2.13 (FUBINI)

Soit  $f : P \rightarrow \mathbf{R}$  avec  $P = [a, b] \times [c, d]$  et  $f$  est RIEMANN-intégrable sur  $P$ .

Si pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $y \mapsto f(x, y)$  est RIEMANN-intégrable sur  $[c, d]$  alors

$$x \mapsto \int_c^d f(x, y) dy$$

est RIEMANN-intégrable sur  $[a, b]$  et

$$\int_P f = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx.$$

De même en échangeant les rôles de  $x$  et  $y$ .

$$\int_P f = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy.$$

#### DÉMONSTRATION

On note

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) \, dy$$

définie pour tout  $x \in [a, b]$ . On montre que  $F$  est RIEMANN-intégrable sur  $[a, b]$ , *i.e.* pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\left| \int_P f - \int_a^b F(x) \, dx \right| < \varepsilon.$$

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\varphi_1, \varphi_2$  en escaliers sur  $P$  telles que  $\varphi_1 \leq f \leq \varphi_2$  et  $\int_P (\varphi_2 - \varphi_1) < \varepsilon$ . On pose pour tout  $x \in [a, b]$ ,

$$\Phi_1(x) = \int_c^d \varphi_1(x, y) \, dy \leq F(x) \leq \int_c^d \varphi_2(x, y) \, dy = \Phi_2(x).$$

Comme  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  sont en escaliers et

$$\int_a^b \Phi_2 - \Phi_1 = \int_P (\varphi_2 - \varphi_1) < \varepsilon$$

par le lemme précédent,  $F$  est intégrable. De plus

$$\int_P \varphi_1 = \int_a^b \Phi_1 \leq \int_a^b F \leq \int_a^b \Phi_2 = \int_P \varphi_2$$

et donc

$$\int_P \varphi_1 - \varphi_2 \leq \int_a^b F - \int_P f \leq \int_P (\varphi_2 - \varphi_1)$$

d'où

$$\left| \int_a^b F - \int_P f \right| \leq \int_P \varphi_2 - \varphi_1 < \varepsilon.$$

## 2.2 Intégration sur domaines plus généraux

#### DÉFINITION 2.14

$f$  est RIEMANN-intégrable à support borné sur  $\mathbf{R}^2$  s'il existe un pavé  $P$  tel que  $f(x) = 0$  pour  $x \notin P$  et si  $f$  est RIEMANN-intégrable sur tout pavé  $Q \supset P$ . Dans ce cas, on note

$$\int_Q f = \int f.$$

#### DÉFINITION 2.15

Soit  $A \subset \mathbf{R}^2$ . On dit que  $A$  est *quarrable* si :

1.  $A$  est borné ;

2.  $\mathbb{1}_A$  est RIEMANN-intégrable à support borné.

L'aire de la surface est donnée par

$$|A| = \int \mathbb{1}_A.$$

PROPOSITION 2.16

Soit  $g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  positive et RIEMANN-intégrable alors

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in [a, b], 0 \leq y \leq g(x) \right\}$$

est un ensemble quarrable de  $\mathbf{R}^2$  et

$$|A| = \int_a^b g(x) \, dx.$$

DÉFINITION 2.17

Soit  $A \subset \mathbf{R}^2$  quarrable et soit  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ . On dit que  $f$  est RIEMANN-intégrable sur  $A$  si  $\mathbb{1}_A f$  est RIEMANN-intégrable à support borné. On définit

$$\int_A f = \int \mathbb{1}_A f = \int_P \mathbb{1}_A f$$

où  $P \supset A$ .

PROPOSITION 2.18

Soit  $g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ , positive et RIEMANN-intégrable. Soit

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in [a, b], 0 \leq y \leq g(x) \right\}.$$

Soit  $f$  RIEMANN-intégrable sur  $A$  et telle que pour tout  $x \in [a, b]$ , la fonction  $y \mapsto f(x, y)$  est RIEMANN-intégrable sur  $[0, g(x)]$ . Alors l'application

$$x \mapsto \int_0^{g(x)} f(x, y) \, dy$$

est RIEMANN-intégrable sur  $[a, b]$  et

$$\int_a^b \int_0^{g(x)} f(x, y) \, dy \, dx = \int_A f.$$

EXEMPLE. Avec  $[a, b] = [0, 1]$ ,  $g(x) = x$  et  $f(x, y) = x^2 y$  on a :

$$\begin{aligned} \int_A f &= \int_0^1 \int_0^x x^2 y \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 x^2 \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^x \, dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^4}{2} \, dx \\ &= \left[ \frac{x^5}{10} \right]_0^1 = \frac{1}{10}. \end{aligned}$$



### 2.3 Coordonnées polaires

EXEMPLE. On cherche à intégrer sur le domaine

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0 \right\}$$

la fonction

$$f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)/2}.$$

$$\int_D f = \int_{-R}^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} e^{-(x^2+y^2)/2} dy dx.$$

L'application :

$$T: \begin{cases} ]0, +\infty[ \times ]-\pi, \pi[ \rightarrow \mathbf{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\} \\ (r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) \end{cases}$$

est inversible.

PROPOSITION 2.19

Soit  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ , RIEMANN-intégrable sur un domaine quarrable  $D$ . Soit  $\hat{f}$  définie sur  $]0, +\infty[ \times ]-\pi, \pi[$  par

$$\hat{f}(r, \theta) = r f(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Alors  $\hat{f}$  est intégrable sur  $T^{-1}(D)$  et

$$\int_D f = \int_{T^{-1}(D)} \hat{f}.$$

$$\int_D f = \int_0^R \int_0^\pi r e^{-r^2/2} d\theta dr = \pi \int_0^R r e^{-r^2/2} = \pi(1 - e^{-R^2/2}).$$

Pour

$$D_R = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2 \right\}$$

on a

$$\int_{D_R} f = 2 \int_D f = 2\pi(1 - e^{-R^2/2}).$$

PROBLÈME.

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx \\ I^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2} dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{D_R} f = 2\pi \\ I &= \sqrt{2\pi}. \end{aligned}$$

## Chapitre 4

# Suites et séries de fonctions

### 1 SUITES DE FONCTIONS

#### 1.1 Définitions

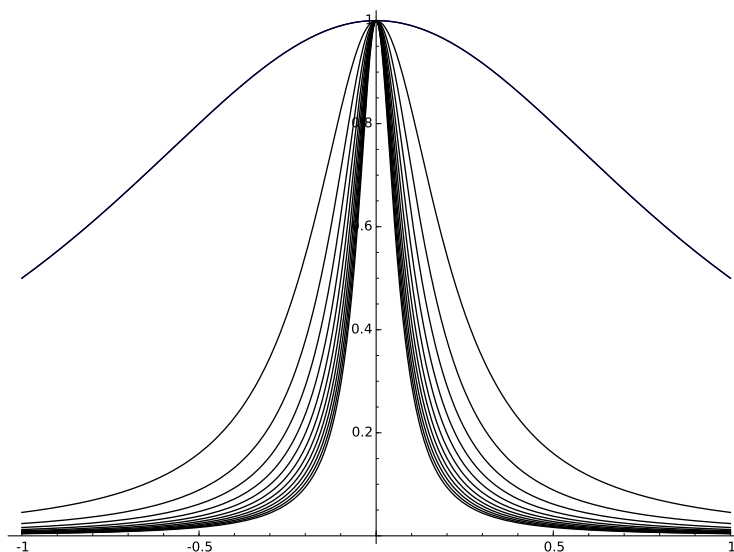
EXEMPLE. Pour  $n \in \mathbf{N}$ , on définit

$$\forall x \in \mathbf{R}, f_n(x) = \frac{1}{1 + nx^2}.$$

Pour tout  $x$  non nul,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + nx^2} = 0.$$

Si  $x = 0$ , alors  $f_n(0) = 1$  pour tout  $n$ .



$f_n$  « tend » vers la fonction :

$$\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = \delta_{x,0}$$

et on a montré que pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

Soit  $X \subset \mathbf{R}$ .

#### DÉFINITION 1.1

Soit  $f_n : X \rightarrow \mathbf{R}$  définie pour  $n \in \mathbf{N}$ .

On dit que  $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge simplement (ou ponctuellement) vers  $f : X \rightarrow \mathbf{R}$  si

$$\forall x \in X, \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x).$$

REMARQUE. La limite simple d'une suite de fonctions continues n'est pas nécessairement continue.

DÉFINITION 1.2

Soit  $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ . La norme uniforme de  $f$  est

$$\|f\|_{X,u} = \sup \{|f(x)| \mid x \in X\}.$$

Si  $f$  n'est pas bornée sur  $X$  alors  $\|f\|_{X,u} = +\infty$ .

REMARQUE. Si  $x \mapsto |f(x)|$  atteint son maximum sur  $X$  en  $x_0$  alors  $\|f\|_{X,u} = |f(x_0)|$ .

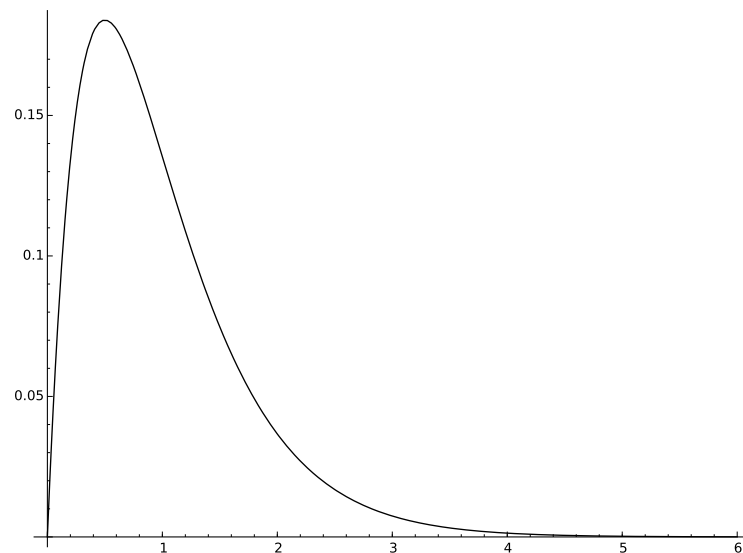
DÉFINITION 1.3

La distance entre  $f, g : X \rightarrow \mathbf{R}$  est

$$d(f, g) = \|f - g\|_{X,u}.$$

EXEMPLES.

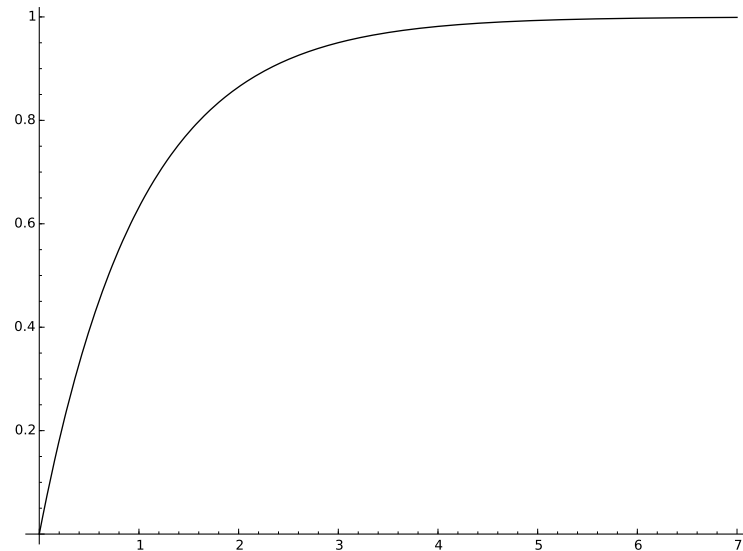
1. Soit  $a \in \mathbf{R}_+^*$  et  $f : x \mapsto xe^{-ax}$  pour  $x \in X = [0, +\infty[$ .



On a

$$\|f\| = \frac{1}{ea}.$$

2. Pour  $f : x \mapsto 1 - e^{-x}$ .



On a

$$\|f\| = 1.$$

#### DÉFINITION 1.4

Soit  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel. Soit  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbf{K}$ . C'est une norme si :

1. pour tous  $x, y \in E$ ,  $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$  ;
2. pour tout  $\lambda \in \mathbf{K}$  et pour tout  $x \in E$ ,  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  ;
3. pour tout  $x \in E$ ,  $\|x\| = 0$  si, et seulement si,  $x = 0$ .

EXEMPLES. Soit  $C([a, b])$  l'ensemble des fonctions continues définies sur  $[a, b]$ . On définit, pour  $f \in C([a, b])$ , et  $p > 0$ ,

$$\|f\|_p = \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

et alors  $\|\cdot\|_p$  est une norme, la norme  $L^p$ .

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

est une norme.

#### PROPOSITION 1.5

Soit  $X \subset \mathbf{R}$ .  $\|\cdot\|_{X,u}$  est une norme sur l'espace vectoriel des fonctions bornées sur  $X$ .

#### DÉFINITION 1.6

Soit  $f_n : X \rightarrow \mathbf{R}$  pour  $n \in \mathbf{N}$ . La suite  $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge uniformément vers  $f : X \rightarrow \mathbf{R}$  si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{X,u} = 0.$$

#### PROPOSITION 1.7

La convergence uniforme implique la convergence simple.

**DÉMONSTRATION**

Supposons que  $f_n$  converge uniformément vers  $f$  sur  $X$ . On sait que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \|f_n - f\| < \varepsilon.$$

En particulier,

$$\forall x \in X, |f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|$$

d'où le résultat.

**DÉFINITION 1.8**

Soit  $X \subset \mathbf{R}$ .  $x_0 \in \mathbf{R}$  est adhérent à  $X$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists y \in X, |x - y| < \varepsilon.$$

L'ensemble des points adhérents à  $X$  est notée  $\overline{X}$ .

**1.2 Suites de nombres réels et normes**

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite telle que  $a_n \in \mathbf{R}$  pour tout  $n$  entier.

S'il existe  $a \in \mathbf{R}$  tel que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbf{N}$  tel

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq N \implies |a_n - a| < \varepsilon.$$

**DÉFINITION 1.9**

On dit que  $(a_n)$  est une suite de CAUCHY si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, \forall m \in \mathbf{N}, (n \geq N \text{ et } m \geq N) \implies |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

**PROPOSITION 1.10**

Si  $(a_n)$  est une suite de nombres réels, elle est convergente si, et seulement si, elle est de CAUCHY.

**REMARQUES.** Soit  $E$  un espace vectoriel muni d'une norme,  $\|\cdot\|$ .

1. Pour tous  $v, w \in E$ ,  $|||v| - |w|| \leq \|v - w\|$ .
2. Une suite de vecteurs  $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge vers  $v \in E$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq N \implies \|v_n - v\| < \varepsilon.$$

3. D'après le premier et le second point, si  $(v_n)$  converge vers  $v$  alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|v_n\| = \|v\|.$$

**1.3 Limites fonctionnelles**

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $X \rightarrow \mathbf{R}$ , telle que  $\lim f_n(x)$  existe pour tout  $x \in X$ .

Soit  $f(x) = \lim f_n(x)$ .

Soit  $x_0 \in \overline{X}$ , est-ce qu'on a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)?$$

**PROPOSITION 1.11**

Soit  $(f_n)$  une suite convergent uniformément vers  $f$  sur  $X$ . Si pour  $x_0 \in \overline{X}$  tel que pour tout  $n$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = l_n \in \mathbf{R}$ , alors  $\lim l_n$  existe.

**DÉMONSTRATION**

On montre que  $(l_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est de CAUCHY. Pour tout  $x \in X$  et pour tous  $n, m \in \mathbf{N}$ ,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_{X,u}.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f_n(x) - f_m(x)| = |l_n - l_m| \leq \|f_n - f_m\|.$$

Or pour tout  $\varepsilon > 0$  on peut prendre  $n$  et  $m$  assez grands tels que  $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$  par hypothèse de convergence uniforme.

**THÉORÈME 1.12**

Soit  $(f_n)$  une suite uniformément convergente vers  $f$  sur  $X$ . Soit  $x_0 \in \overline{X}$  tel que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = l_n$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ . Alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x).$$

**DÉMONSTRATION** (Technique des trois  $\varepsilon$ )

On montre que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, |x - x_0| < \eta \implies |f(x) - l| < \varepsilon$$

où  $l = \lim l_n$ . Pour tout  $n_0 \in \mathbf{N}$ ,

$$|f(x) - l| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - l_{n_0}| + |l_{n_0} - l|.$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Par définition des limites, il existe  $n_0$  tel que pour tout  $x$ ,  $|f(x) - f_{n_0}(x)|$  et  $|l_{n_0} - l|$  par  $\varepsilon/3$ . Il existe également  $\eta > 0$  tel que si  $x \in X$  et si  $|x - x_0| < \eta$  alors  $|f_{n_0}(x) - l_{n_0}| < \varepsilon/3$ . Finalement, pour  $x \in X$  tel que  $|x - x_0| < \eta$  on a  $|f(x) - l| < \varepsilon$ .

**1.4 Continuité****THÉORÈME 1.13**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbf{R}$  et soit  $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$  avec pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $f_n : I \rightarrow \mathbf{R}$  continue en  $x_0 \in I$ . Si  $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge uniformément vers  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ . Alors  $f$  est continue en  $x_0$ . En particulier, la limite uniforme de fonctions continues sur  $X$  est continue sur  $X$ .

**DÉMONSTRATION**

$f_n$  est continue en  $x_0$ , donc pour tout  $n \in \mathbf{N}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = f_n(x_0).$$

On veut montrer que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ . Mais on sait que

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_0)$$

donc il faut montrer

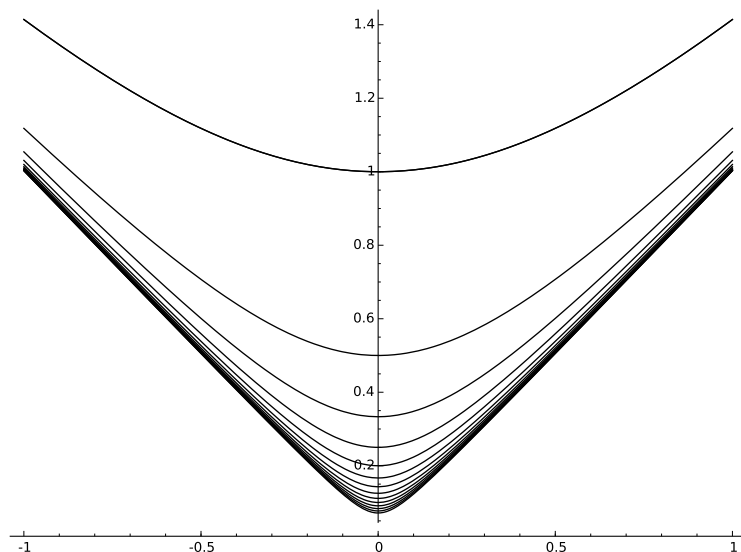
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x).$$

Mais c'est vrai par le résultat précédent.

REMARQUE. La convergence uniforme ne préserve pas la dérivabilité. En effet, la suite  $(f_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  définie sur  $\mathbf{R}$  par

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$$

converge uniformément vers  $x \mapsto |x|$  qui n'est pas dérivable en 0.



## 1.5 Dérivabilité

### PROPOSITION 1.14

Soit  $I$  un intervalle ouvert et soit  $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$  avec pour tout  $n$ ,  $f_n : I \rightarrow \mathbf{R}$  dérivable sur  $I$  et tel que la suite  $(f'_n)$  converge uniformément sur  $I$  vers  $g$ .

S'il existe  $x_0 \in I$  tel que  $(f_n(x_0))$  converge alors  $(f_n(x))$  converge pour tout  $x \in I$ .

En particulier, si  $f(x) = \lim f_n(x)$  alors pour tout  $J \subset I$  borné,  $(f_n)$  converge uniformément sur  $J$  vers  $f$ .

### DÉMONSTRATION

On montre que pour tout  $x \in I$ , la suite de terme général  $f_n(x) - f_n(x_0)$  est une suite de CAUCHY. Pour  $y_n = f_n(x) - f_n(x_0)$  et  $\varphi(x) = f_m(x) - f_n(x)$  on a :

$$|y_m - y_n| = |\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq |\varphi'(c)| |x - x_0|$$

où  $c \in I$  d'après le théorème des accroissements finis. Mais

$$|\varphi'(c)| = |f'_m(c) - f'_n(c)| \leq \|f'_m - f'_n\|$$

qui peut être rendu suffisamment petit pour  $n$  assez grand.

### THÉORÈME 1.15

Soit  $I$  un intervalle ouvert. Soit  $f_n : I \rightarrow \mathbf{R}$  des fonctions indexées par  $n \in \mathbf{N}$ , dérivables et telles que :

1. La suite  $(f'_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge uniformément vers  $g : I \rightarrow \mathbf{R}$  sur  $I$ .
2. Il existe  $x_0 \in I$  tel que  $(f_n(x_0))$  converge.

Alors :

1.  $(f_n(x))$  converge pour tout  $x \in I$  et on pose  $f(x) = \lim f_n(x)$ .
2. Pour tout intervalle  $J$  borné dans  $I$ ,  $(f_n)$  converge uniformément sur  $J$ .
3.  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  est dérivable et  $f' = g$ .

DÉMONSTRATION 1. Déjà démontré.

2. On regarde pour  $x \in I$ ,

$$\left| \overbrace{f_m(x) - f_m(x_0)}^{y_m} - \overbrace{(f_n(x) - f_n(x_0))}^{y_n} \right| \leq \|f'_m - f'_n\| |x - x_0| ..$$

En passant à la limite  $n \rightarrow +\infty$  on a :

$$|f_m(x) - f_m(x_0) - (f(x) - f(x_0))| \leq \|f'_m - g\| |x - x_0|.$$

En effet, si  $(h_n)$  converge uniformément vers  $h$  alors  $\lim \|h_n\| = \|h\|$ .

Soit  $J \subset [-M, M]$ . On a alors pour tout  $x \in J$ ,

$$|f_m(x) - f_m(x_0) - (f(x) - f(x_0))| \leq 2M\|f'_m - g\|$$

et donc

$$|f_m(x) - f(x)| \leq 2M\|f'_m - g\| + |f_m(x_0) - f(x_0)|$$

mais comme le membre de droite ne dépend pas de  $x$ ,

$$\|f_m - f\| \leq 2M\|f'_m - g\| + |f_m(x_0) - f(x_0)|$$

et le membre de droite tend bien vers 0 quand  $m \rightarrow +\infty$ .

3. Soit  $x_1 \in I$ , on pose  $I^* = I \setminus \{x_1\}$  et  $f_n^*$  définie sur  $I^*$  par

$$f_n^*(x) = \frac{f_n(x) - f_n(x_1)}{x - x_1}.$$

On pose également pour  $x \in I^*$  :

$$f^*(x) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}.$$

On montre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f^* - f_n^*\| = 0.$$

On sait que pour tout  $x \in I^*$ ,

$$|f_n^*(x) - f_m^*(x)| \leq \|f'_n - f'_m\|.$$

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N$  tel que pour tous  $n, m \geq N$  on a  $\|f'_n - f'_m\| \leq \varepsilon$  et on fait tendre  $m$  vers l'infini ce qui donne

$$|f_n^*(x) - f^*(x)| \leq \varepsilon$$

pour  $n \geq N$  et pour tout  $x \in I^*$ . Finalement,

$$\sup_{x \in I^*} |f_n^*(x) - f^*(x)| \leq \varepsilon.$$

CONTRE-EXEMPLE. On considère sur  $[0, 1]$  :

$$f_n(x) = x \left( 1 + \frac{1}{n} \right) + (-1)^n.$$

On a  $f'_n(x) = 1 + 1/n$ , pour  $g = 1$  on a  $\|f'_n - g\| \rightarrow 0$  mais  $(f_n(x))$  ne converge nulle part.

## 1.6 Intégrabilité

En posant  $f_n(x) = x^n$  pour  $x \in [0, 1]$  on a que  $f_n$  ne converge pas uniformément vers  $\delta_{1,x}$  mais pourtant  $\int_0^1 f_n \rightarrow 0$  et  $\int_0^1 \delta_{1,x} dx = 0$ . On a pu dans ce cas échanger l'intégrale



et la limité alors que la convergence n'est pas uniforme.

### THÉOREME 1.16

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions intégrables sur  $[a, b]$  qui converge uniformément vers  $f$  sur  $[a, b]$ . Alors  $f$  est intégrable et

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n.$$

### PROPOSITION 1.17

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ . Si pour tout  $\alpha > 0$  il existe  $f_\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  telle que :

1.  $\|f_\alpha - f\| \leq \alpha$  ;
2.  $f_\alpha$  est intégrable sur  $[a, b]$  ;

alors  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$ .

### DÉMONSTRATION

Soit  $\varepsilon > 0$  et soit  $\alpha = \varepsilon/[4(b-a)]$ . Il existe  $f_\alpha$  et  $g_1, g_2$  en escaliers telles que  $g_1 \leq f_\alpha \leq g_2$  et  $\int g_2 - g_1 < \varepsilon/2$ .  $f_\alpha$  est intégrable et  $\|f - f_\alpha\| \leq \alpha$ . On définit  $h_1 = g_1 - \alpha$  et  $h_2 = g_2 + \alpha$  en escaliers. On a :

$$h_1 = g_1 - \alpha \leq f_\alpha - \alpha \leq f \leq f_\alpha + \alpha \leq g_2 + \alpha = h_2.$$

De plus  $\int g_2 - g_1 < \varepsilon/2 + 2\alpha(b-a) = \varepsilon$ .

### DÉMONSTRATION (Théorème)

Il reste à démontrer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

Mais

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| = \left| \int_a^b (f_n - f) \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq (b-a) \|f_n - f\| \rightarrow 0.$$

## 2 SÉRIES DE FONCTIONS

### 2.1 Rappel sur les séries numériques

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite de nombres complexes. Soit  $(S_n)_{n \in \mathbf{N}}$ , de terme général

$$\forall n \in \mathbf{N}, S_n = \sum_{k=0}^n a_k,$$

la suite des sommes partielles.

1. On dit que la série de terme général  $a_n$  converge si  $(S_n)$  converge et on note la limite  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ .
2. On dit que  $\sum a_n$  converge absolument si  $\sum |a_n|$  converge. Si  $\sum |a_n|$  converge alors  $\sum a_n$  converge.
3. Si  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont deux suites de nombres réels positifs telles que  $a_n \leq b_n$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ . Alors si  $\sum b_n$  converge alors  $\sum a_n$  converge.

## 2.2 Séries de fonctions

Soit  $X$  une partie de  $\mathbf{R}$ . Soit  $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite d'applications de  $X \rightarrow \mathbf{R}$ . Pour tout  $x \in X$ ,  $(f_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$  est une suite numérique. On peut considérer le problème de la convergence de  $\sum f_n(x)$  pour  $x \in X$ .

### DÉFINITION 2.1

Pour tous les  $x \in X$  tels que  $\sum f_n(x)$  converge, on définit

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n f_k(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x).$$

On définit  $(S_n)_{n \in \mathbf{N}}$  la suite de fonctions définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in X, S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x).$$

Si  $S$  est défini pour  $X' \subset X$  alors  $S$  est la *limite simple* de  $(S_n)$  sur  $X'$ .

REMARQUE. Si  $\sum f_n(x)$  converge de somme  $S$ , on définit  $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$  et on a  $\lim R_n(x) = 0$ . Réciproquement, soient  $S : X \rightarrow \mathbf{R}$  et  $(R_n)$  vérifiant pour tout  $n \in \mathbf{N}$  :

$$R_n(x) = S(x) - \sum_{k=0}^n f_k(x) = S(x) - S_n(x).$$

Si pour  $x \in X$ ,  $\lim R_n(x) = 0$  alors  $\sum f_n(x)$  converge de somme  $S(x)$ .

### DÉFINITION 2.2 (Convergence normale)

Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions définies sur  $X \neq \emptyset$  et à valeurs dans  $\mathbf{R}$ .  $\sum f_n$  converge *normalement* si la série numérique  $\sum \|f_n\|_{X,u}$  est convergente.

EXEMPLE. Pour

$$X_1 = \left\{ x \in \mathbf{R} \mid |x| \leq \frac{1}{2} \right\}$$

et  $h_n(x) = x^n$ , la série  $\sum h_n(x)$  converge normalement sur  $X_1$ . En effet,

$$\|h_n\|_{X_1,u} = \sup_{x \in X_1} |h_n(x)| = \frac{1}{2^n}$$

et  $\sum 1/2^n$  converge en tant que série géométrique de raison  $1/2$ . Mais sur

$$X_2 = \{x \in \mathbf{R} \mid |x| \leq 1\}$$

on a  $\|h_n\|_{X_2,u} = 1$  et donc  $\sum \|h_n\|_{X_2,u}$  diverge.

### DÉFINITION 2.3

Soit  $\sum f_n$  pour  $f_n : X \rightarrow \mathbf{C}$  une série de fonctions. Soit  $(v_n)$  une suite de nombres réels strictement positifs. On dit que  $\sum v_n$  est une série majorante pour  $\sum f_n$  si

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in X, |f_n(x)| \leq v_n.$$

## PROPOSITION 2.4

$\sum f_n$  est normalement convergente si, et seulement si, elle admet une série majorante convergente.

EXEMPLE. On regarde la série de la suite  $(f_n)$  définie sur  $X$  par

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}, f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1 + nx^8 + x^{24} + n^2}.$$

On a pour tout  $n \in \mathbf{N}$  et tout  $x \in \mathbf{R}$  :

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{1 + n^2} \sim \frac{1}{n^2}$$

qui est de série convergente. Donc  $\sum f_n$  est normalement convergente.

## PROPOSITION 2.5

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions définies de  $X$  dans  $\mathbf{R}$  telle que  $\sum f_n$  converge normalement. Alors  $(S_n)$  est uniformément convergente vers  $S$  où  $S(x) = \lim S_n(x)$  pour tout  $x \in X$ .

## DÉMONSTRATION

On procède en deux parties.

1. On montre que la limite de  $S_n(x)$  quand  $n \rightarrow +\infty$  existe pour tout  $x \in X$  si, et seulement si,  $\sum f_n(x)$  est convergente. On a

$$\sum_{k=0}^n |f_k(x)| \leq \sum_{k=0}^n \|f_k\|_{X,u} = T_n$$

et  $T_n$  converge car  $\sum \|f_n\|_{X,u}$  converge. Par comparaison  $\sum |f_n(x)|$  converge. Donc pour tout  $x \in X$ ,  $\sum |f_n(x)|$  converge et donc  $\sum f_n(x)$  converge et donc  $S(x) = \sum f_n(x)$  est bien définie.

2. On montre que le reste converge uniformément vers 0, *i.e.*

$$\sup_{x \in X} |S(x) - S_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Pour tout  $n \in \mathbf{N}$  et tout  $x \in X$ ,

$$\begin{aligned} |S(x) - S_n(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_{X,u}. \end{aligned}$$

Mais

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_{X,u} \rightarrow 0$$

car c'est le reste de  $\sum \|f_n\|_{X,u}$ .

## THÉORÈME 2.6

Soit  $X \subset \mathbf{R}$  et  $x_0 \in \overline{X}$ . Si  $\sum f_n$  converge normalement sur  $X$  et si  $f_n$  admet une limite

en  $x_0$  alors on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

DÉMONSTRATION

On a

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x).$$

On sait que  $S_n$  converge uniformément, on en conclut en utilisant le théorème d'échange de limites pour les suites de fonctions.

THÉORÈME 2.7

Soit  $\sum f_n$  qui converge normalement sur  $X$  et telle que  $f_n$  est une fonction continue sur  $X$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ . Alors

$$S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$$

est une fonction continue.

THÉORÈME 2.8

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbf{R}$  et soit  $f_n : I \rightarrow \mathbf{R}$  dérivable sur  $I$  pour tout  $n$  et telle que

1.  $\sum f'_n$  converge normalement ;
2. il existe  $x_0$  tel que  $\sum f_n(x_0)$  converge.

Alors  $\sum f_n(x) = S(x)$  est dérivable pour tout  $x \in I$  et  $S'(x) = \sum f'_n(x)$ .

THÉORÈME 2.9

Soit  $\sum f_n$  qui converge normalement sur  $[a, b]$  et telle que  $f_n$  est intégrable pour tout  $n$ .

Alors  $\sum f_n$  est intégrable sur  $[a, b]$  et

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n.$$

# Chapitre 5

## Séries entières

### 1 DÉFINITIONS

#### 1.1 Série entière et rayon de convergence

##### DÉFINITION 1.1

Soient  $x_0 \in \mathbf{R}$  et  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite de nombres réels. Une *série entière* sur  $\mathbf{R}$  est une série de fonctions notée

$$\forall x \in \mathbf{R}, \sum_{n \geq 0} a_n (x - x_0)^n$$

qui est  $\sum f_n$  où  $f_n : x \mapsto a_n (x - x_0)^n$  pour tout  $x$  réel.

On se demande pour quels  $x \in \mathbf{R}$ , la série  $\sum a_n (x - x_0)^n$  converge.

##### EXEMPLES.

1. On regarde la série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{2^n}.$$

- Si  $x = 0$  alors la série converge, vers 0.
  - Si  $x = 1$  alors la série est géométrique et elle converge car de raison  $1/2$ .
  - Si  $x = -1$  alors la série converge à nouveau (absolument).
  - Si  $x = 2$  alors la série diverge.
  - Si  $x = 2 - \varepsilon$  avec  $\varepsilon$  petit alors la série converge.
- Finalement, pour  $x \in ]-2, 2[$ , la série converge.

2. Pour la série :

$$\sum_{n \geq 0} 2^n x^n$$

le disque de convergence est  $] -1/2, 1/2[$ .

3. Avec

$$\sum_{n \geq 0} 2^{n^2} x^n$$

la série converge uniquement pour  $x = 0$ .

4. De même, la série

$$\sum_{n \geq 0} n! x^n$$

ne converge que pour  $x = 0$ .

## DÉFINITION 1.2

Soit  $\sum a_n x^n$  une série entière. On définit :

$$B = \left\{ r \in \mathbf{R}_+ \mid \sup_{n \in \mathbf{N}} |a_n r^n| < \infty \right\}.$$

## LEMME 1.3

$B$  est un intervalle de la forme  $[0, R[$  ou  $[0, R]$  avec  $R \in [0, +\infty]$ .

## DÉMONSTRATION

On montre que si  $r > 0$  et  $r \in B$  et si  $r'$  est tel que  $0 < r' < r$  alors  $r' \in B$ . On a bien

$$\forall n \in \mathbf{N}, |a_n (r')^n| \leq |a_n| r^n \leq M < \infty.$$

## DÉFINITION 1.4

Le *rayon de convergence* de la série entière  $\sum a_n x^n$  est  $R = \sup B$ .

## PROPOSITION 1.5

Soit  $\sum a_n x^n$  une série entière et soit  $0 < R \leq \infty$ .

1. Pour tout  $x \in \mathbf{R}$ , si  $|x| < R$  alors  $\sum a_n x^n$  converge absolument.
2. Pour tout  $\eta > 0$  avec  $\eta < R$ ,  $\sum a_n x^n$  converge normalement sur  $[-\eta, \eta]$ .
3.  $\sum a_n x^n$  diverge si  $|x| > R$ .

## DÉMONSTRATION

On remarque que le deuxième point implique le premier.

2. Soit  $\eta$  tel que  $0 < \eta < R$ . Pour tout  $x \in [-\eta, \eta]$ ,

$$|a_n x^n| \leq |a_n| \eta^n = |a_n| (\eta + \varepsilon)^n \frac{\eta^n}{(\eta + \varepsilon)^n}$$

avec  $\varepsilon > 0$  tel que  $\eta + \varepsilon < R$ . Mais pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on a  $|a_n| (\eta + \varepsilon)^n \leq M$  et donc

$$|a_n x^n| \leq M \left( \frac{\eta}{\eta + \varepsilon} \right)^n$$

mais

$$\frac{\eta}{\eta + \varepsilon} = q < 1$$

et  $\sum M q^n$  converge absolument.

3. Si  $|x| > R$  alors la suite  $(|a_n x^n|)_{n \in \mathbf{N}}$  n'est pas bornée. Nécessairement,  $\lim |a_n x^n| \neq 0$  si elle existe et donc la série  $\sum a_n x^n$  diverge.

## 1.2 Disque de convergence

## DÉFINITION 1.6

Soit  $\sum a_n x^n$  une série entière et soit  $R > 0$  son rayon de convergence. Le *disque de convergence* de  $\sum a_n x^n$  est l'ensemble  $\{x \in \mathbf{R} \mid |x| < R\} = ]-R, R[$ .

REMARQUE. Pour  $R$  fini, il n'y a pas de règle générale sur la convergence de  $x = \pm R$ .

EXEMPLE. La série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^\alpha}$$

avec  $\alpha \geq 0$  a pour rayon de convergence  $R = 1$ .

1. Si  $\alpha = 0$  alors  $\sum x^n$  ne converge pas pour  $x = \pm 1$ .
2. Si  $\alpha = 1$  alors la série  $\sum x^n/n$  diverge pour  $x = 1$  et converge pour  $x = -1$ .
3. Si  $\alpha = 2$  alors la série converge pour  $x = \pm 1$ .

RAPPEL. Soit  $\sum a_n$  une série de termes général  $a_n \geq 0$ .

1. Critère de D'ALEMBERT. Si  $\lambda = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$  (dans le cas où cette limite existe) alors :
  - si  $\lambda < 1$  alors  $\sum a_n$  converge ;
  - si  $\lambda > 1$  alors  $\sum a_n$  diverge.
2. Critère de CAUCHY. Si  $\lambda = \lim (a_n)^{1/n}$  (lorsque cette limite existe) alors
  - si  $\lambda < 1$  alors la série  $\sum a_n$  converge ;
  - si  $\lambda > 1$  alors  $\sum a_n$  diverge.

EXEMPLES.  $R$  est l'unique (voir la proposition 3) réel positif tel que  $\sum a_n x^n$  converge absolument pour  $|x| < R$  et diverge pour  $|x| > R$ .

— On considère la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}.$$

On veut montrer qu'il existe  $R > 0$  tel que si  $|x| < R$  alors  $\sum |x|^n/n$  converge. On applique le critère de CAUCHY :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{|x|^n}{n} \right)^{1/n} &= |x| \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n} \right)^{1/n} \\ &= |x| \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{n} \ln n} \\ &= |x| \end{aligned}$$

et donc par le critère de CAUCHY, pour  $|x| < 1$  la série converge et pour  $|x| > 1$  la série diverge. D'où  $R = 1$ .

— Pour

$$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$$

on a

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x^{n+1}|}{|x^n|} \frac{n^2}{(n+1)^2} = |x|$$

et donc par le critère de D'ALEMBERT,  $R = 1$ .

#### PROPOSITION 1.7

Soit  $\sum a_n x^n$  une série entière. Si  $\lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$  existe dans  $[0, +\infty]$  alors

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

#### PROPOSITION 1.8

Soit  $\sum a_n x^n$  une série entière. Si  $\lim |a_n|^{1/n}$  existe dans  $[0, +\infty]$  alors

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{1/n}}.$$

EXEMPLES.

— On considère la série  $\sum a_n x^n$  avec pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $a_n$  défini par :

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n!} & \text{si } n \text{ impair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On réécrit cette série sous la forme

$$\sum_{k \geq 0} a_{2k+1} x^{2k+1} = x \sum_{k \geq 0} a_{2k+1} x^{2k} = x \sum_{k \geq 0} c_k y^k$$

avec  $c_k = a_{2k+1}$  et  $y = x^2$ . Comme  $c_k \neq 0$  pour tout  $k \in \mathbf{N}$ , on peut appliquer le critère de D'ALEMBERT.

$$\begin{aligned} R &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{c_k}{c_{k+1}} \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(2k+3)!}{(2k+1)!} \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

— On prend cette fois

$$a_n = \begin{cases} 2^n & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{k \geq 0} a_{2k} x^{2k} = \sum_{k \geq 0} c_k y^k$$

et on applique le critère de CAUCHY. On obtient :

$$\begin{aligned} R' &= \frac{1}{\lim_{k \rightarrow +\infty} (c_k)^{1/k}} \\ &= \frac{1}{\lim_{k \rightarrow +\infty} 2^{\frac{2k}{k}}} \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Donc si  $|x^2| = x^2 < 1/4$  la série  $\sum a_n x^n$  converge, si  $x^2 > 1/4$  alors la série diverge. Donc le rayon de la série  $\sum a_n x^n$  est  $1/2$ .