Universidad de Buenos Aires

Facultad de Ingeniería

2do Cuatrimestre de 2019

[72.12 / 95.04] Análisis Numérico

Búsqueda de raíces

Ascensor

Integrantes:		Padrón
Francisco, Otero	francisco.otero19@gmail.com	96116
Lucas, Otero	otero.lucas@outlook.com	99192
Irene, Sólimo	ib.solimo@gmail.com	98308
Agustín, More	agustin427more@gmail.com	102914

Observaciones:

Introducción

Para el siguiente trabajo práctico investigaremos los factores físicos que describen el movimiento de un ascensor (cargado o no) entre dos pisos, *a* y *b*.

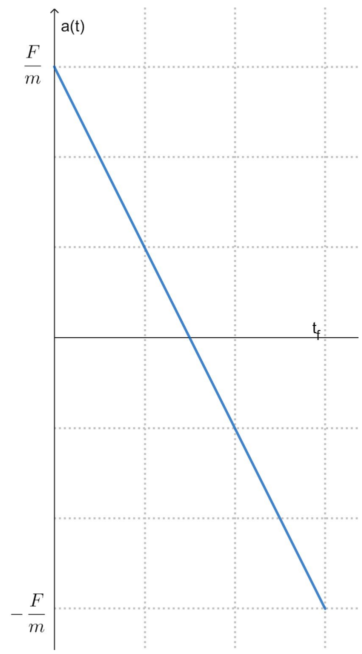
En cuanto a la cinemática del problema, describiremos la función desplazamiento x(t), la función velocidad v(t) y la función aceleración a(t), con sus respectivos parámetros y gráficos.

Para la dinámica del problema, tomaremos en cuenta las variables *F* (fuerza) y *m* (masa), dimensionando la función *F = m.a.* Para ello, haremos distinción entre el caso de un ascensor lleno (número de personas = *n*) y uno vacío (número de personas = 0).

Luego, basándonos en el método de Newton-Raphson y en base a los datos anteriores, calcularemos utilizando código de máquina el valor *t* de tiempo donde encontraremos la aceleración al 30% (para nuestro caso elegimos el valor positivo de la aceleración), para el caso del ascensor vacío, a la mitad de la capacidad máxima o lleno.

Funciones

Para poder obtener las funciones, se parte desde la función aceleración, que será de la forma:



Donde F es la fuerza que ejerce el motor del ascensor, m es la masa total del sistema personas-cabina. Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\sum F = m.a$$

Uno llega a que $a_0 = \dfrac{F}{m}$.

Se propone un modelo lineal para la aceleración, ya que coincide con el comportamiento real en el sentido de que al iniciar el movimiento comienza acelerando y a medida que se acerca al destino el mismo va desacelerando. Además, el modelo lineal es más sencillo para obtener las siguientes funciones.

A partir de la gráfica se puede ver que la función que satisface es de la forma:

$$a(t) = b - p.x = \frac{F}{m} - 2.\frac{F}{m.t_f}t$$

Que corresponde con la recta que pasa por los puntos:

$$(0, \frac{F}{m}) \text{ y } (t_f, -\frac{F}{m})$$

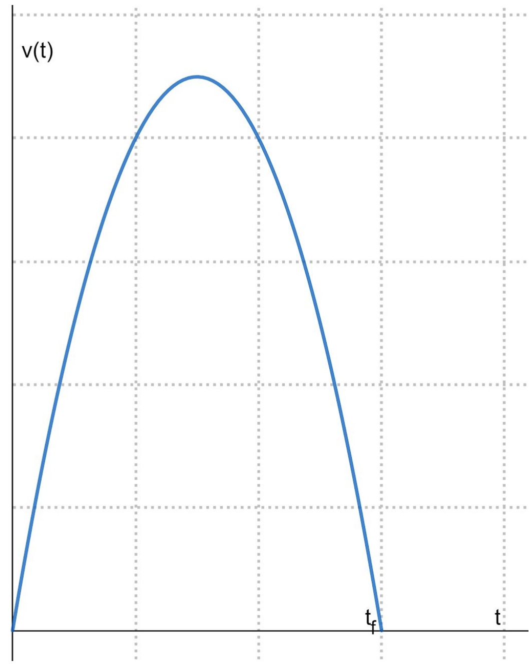
A partir de la aceleración, apelando a las ecuaciones de la cinemática:

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \int_{t=0}^{t} a.dt = \int_{v=0}^{v} dv$$

Con las condiciones de $v(t=0)=0$ y $v(t=t_f)=0$, es decir, parte y termina en reposo, se obtiene la función:

$$v(t) = \frac{F}{m}t - \frac{F}{m.t_f}t^2$$

La gráfica de la velocidad será de la forma:

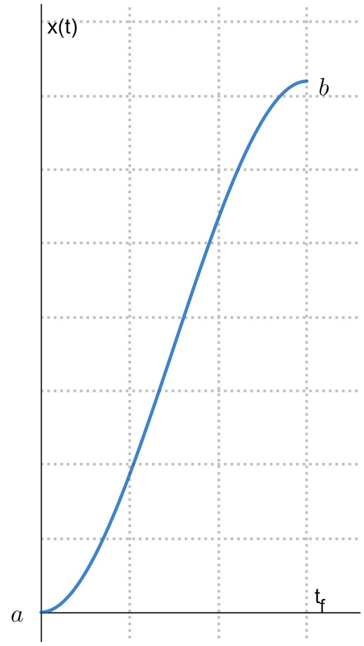


Gráfica analítica velocidad / tiempo

Finalmente, para obtener la posición en función del tiempo se procede de la misma manera que para obtener la velocidad, con las condiciones $x(t=0)=\alpha$ y $x(t=t_f)=\beta$, donde α y β son la altura del primer y último piso, respectivamente.

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_{t=0}^{t} v.dt = \int_{x=\alpha}^{x} dx$$

$$x(t) = \alpha + \frac{F}{2m}t^2 - \frac{F}{3m.t_f}t^3$$



Gráfica analítica posición / tiempo

Tanto F, m, α y β son datos obtenidos de la investigación, para poder completar las funciones, se necesita conseguir el valor t_f, que es el tiempo que tarda el ascensor en ir desde α hasta β. Apelando a la condición de que la posición del sistema en el tiempo t_f tiene que ser β, es decir, $x(t_f) = \beta$, reemplazando en la función de posición, se obtiene:

$$x(t_f) = \beta \Rightarrow \alpha + \frac{F}{2m}t_f^2 - \frac{F}{3m.t_f}t_f^3 = \beta$$

$$\Rightarrow \alpha + \frac{F}{2m}t_f^2 - \frac{F}{3m}t_f^2 = \beta$$

$$\Rightarrow \frac{F}{2m}t_f^2 - \frac{F}{3m}t_f^2 = \beta - \alpha \Rightarrow \frac{F}{6m}t_f^2 = \beta - \alpha$$

$$\Rightarrow t_f = \sqrt{\frac{6(\beta - \alpha).m}{F}}$$

Investigación

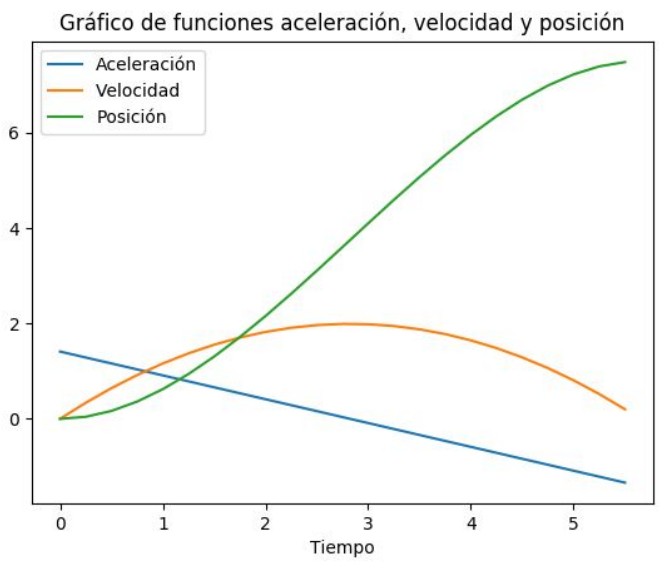
Al momento de buscar alturas posibles de pisos, se encontraron valores que rondan entre 2m y 3m, se decidió ir a un término medio de 2.5 metros por piso y se modeló un edificio de tres pisos, con lo cual, quedaron definidas las variables $\alpha = 0$ y $\beta = 7.5m$.

En relación a las personas se estimó un peso de 75kg por persona, y la capacidad del ascensor de 6 personas, con lo cual la masa máxima de personas es de 450kg. Y en relación al peso de la cabina, se encontraron modelos[1] de alrededor de 400kg. Resultando así la masa total que se empleará para las funciones $m = 850kg$.

Para evitar grandes aceleraciones en los casos extremos, se logró determinar la fuerza $F = 1200N$.

Quedando así las funciones para:

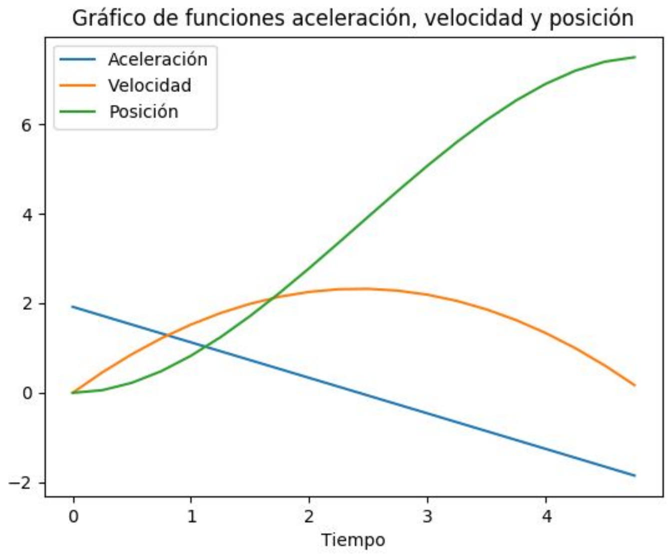
1. 6 Personas (Ascensor lleno):



$$x(t) = 0.705t^2 - 0.083t^3$$
$$v(t) = 1.411t - 0.25t^2$$
$$a(t) = 1.411 - 30.5t$$

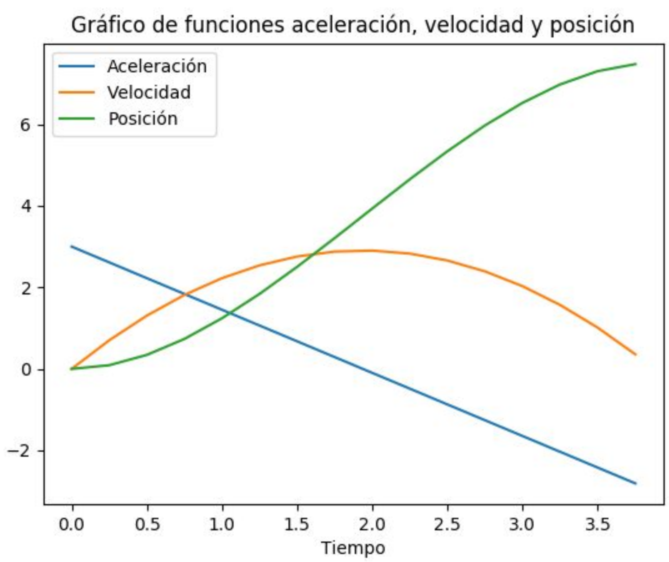
2. 3 Personas:

[1] Home lift elevator - Eleser https://www.eleser.es/en/product/homelift/



$$x(t) = 0.96t^2 - 0.132t^3$$
$$v(t) = 1.92t - 0.396t^2$$
$$a(t) = 1.92 - 30.793t$$

3. 0 personas (Ascensor vacío):



$$x(t) = 1.5t^2 - 0.258t^3$$
$$v(t) = 3t - 0.774t^2$$
$$a(t) = 3 - 31.549t$$

Método de Newton-Raphson

Uno de los puntos importantes del trabajo práctico es, mediante el uso del método de Newton-Raphson, calcular el tiempo en el cual se alcanza el 30% de la aceleración del sistema. La tarea en sí, sería simple utilizando la función de aceleración, que se trata de una función lineal, pero la consigna establece que se deba calcular solamente utilizando la función de posición.

El método de Newton-Raphson halla las raíces de una función, con lo cual se adapta el problema para que se pueda resolver con el método. Esto sería, formar una nueva función, y hallar la raíz de esa función. En este caso, se plante la función $g(t) = x(t) - x(t_{30\%})$, donde $t_{30\%}$ es el tiempo donde se alcanza el 30% de aceleración. Ahora bien, para encontrar el valor de $x(t_{30\%})$ se busca alguna relación entre el treinta por ciento la aceleración y el treinta por ciento de la posición.

Los pasos a seguir serán:

1. Calcular el 30% de la aceleración.
2. Calcular analiticamente el tiempo que tarda en llegar a esa aceleración en función de t_f, que es el tiempo que tarda en llegar a la máxima altura la cabina.
3. Calcular la máxima posición que se alcanza en función de t_f.
4. Calcular el valor de x en el valor de tiempo hallado en (2).
5. Calcular la razón entre $x(t_{30\%})$ y x_max.

Calculando punto por punto queda:

1. Calcular el 30% de la aceleración:

Por la forma en que se construyó la función aceleración, el máximo valor de aceleración es $a_{max} = \frac{F}{m}$, con lo cual el treinta por ciento es:

$$a_{30\%} = 0.3\frac{F}{m}$$

2. Calcular analiticamente el tiempo que tarda en llegar a esa aceleración:

Partiendo de la ecuación:

$$a_{30\%} = a(t)$$

Con:

$$a(t) = \frac{F}{m} - 2.\frac{F}{m.t_f}t$$

Desarrollando:

$$0.3\frac{F}{m} = \frac{F}{m} - 2.\frac{F}{m.t_f}t \Rightarrow$$

$$0.3 = 1 - \frac{2}{t_f}t \Rightarrow \frac{2}{t_f}t = 1 - 0.3 \Rightarrow t = \frac{0.7}{2}t_f \Rightarrow$$

$$t_{30\%} = 0.35t_f$$

Lo cual implica que, para alcanzar el 30% de aceleración (positiva), requiere utilizar el 35% del tiempo total que tarda en subir.

3. Calcular la máxima posición que se alcanza en función de t_f:

Con la ecuación de posición hallada en la sección de funciones, se calcula $x_{max} = \beta = x(t_f)$.

Partiendo de:

$$x(t) = \alpha + \frac{F}{2m}t^2 - \frac{F}{3m.t_f}t^3$$

Con la simplificación $\alpha = 0$, para poder hacer la razón en (5), y reemplazando $t = t_f$:

$$x(t_f) = \frac{F}{2m}t_f^2 - \frac{F}{3m.t_f}t_f^3 \Rightarrow$$

$$x(t_f) = \frac{F}{2m}t_f^2 - \frac{F}{3m}t_f^2 \Rightarrow$$

$$x(t_f) = \frac{F}{m}t_f^2(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) \Rightarrow$$

$$x(t_f) = \frac{F}{m}t_f^2(\frac{1}{6})$$

4. Calcular el valor de x en el valor de tiempo hallado en (2):

$$x(t_{30\%}) = \frac{F}{2m}t_{30\%}^2 - \frac{F}{3m.t_f}t_{30\%}^3, \text{ con: } t_{30\%} = 0.35t_f \Rightarrow$$

$$x(t_{30\%}) = \frac{F}{2m}(0.35t_f)^2 - \frac{F}{3m.t_f}(0.35t_f)^3 \Rightarrow$$

$$x(t_{30\%}) = \frac{F}{2m}(0.35)^2t_f^2 - \frac{F}{3m.t_f}(0.35)^3t_f^3 \Rightarrow$$

$$x(t_{30\%}) = \frac{F}{2m}(0.35)^2t_f^2 - \frac{F}{3m}(0.35)^3t_f^2 \Rightarrow$$

$$x(t_{30\%}) = \frac{F}{m}t_f^2(\frac{(0.35)^2}{2} - \frac{(0.35)^3}{3})$$

5. Finalmente, se procede a calcular el porcentaje que le corresponde a x cuando $t = t_{30\%}$.

$$\gamma = \frac{x(t_{30\%})}{x(t_f)} \Rightarrow$$

$$\gamma = \frac{\frac{F}{m}t_f^2(\frac{(0.35)^2}{2} - \frac{(0.35)^3}{3})}{\frac{F}{m}t_f^2(\frac{1}{6})} = \frac{\frac{(0.35)^2}{2} - \frac{(0.35)^3}{3}}{\frac{1}{6}} \Rightarrow$$

$$\gamma \approx 0.28175$$

En conclusión, cuando la aceleración llega al 30% de su valor máximo, la función de posición llega al 28% de su valor máximo, independiente de los valores que tomen los parámetros del problema.

Así, el problema original se convierte en hallar el tiempo t tal que la altura sea del 28% del valor de β, como ya se mencionó antes, es la altura máxima considerada.

Ahora, $g(t) = x(t) - \gamma.\beta$, donde γ es la razón calculada en (5).

El algoritmo de Newton-Raphson consiste en operar iterativamente con la fórmula:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$$

Que, para el caso que se está estudiando, se tiene que:

$$f(t) = g(t) \text{ y}$$

$$f'(t) = g'(t) = x'(t) = v(t)$$

Con lo cual, la sucesión queda definida como:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{g(p_{n-1})}{v(p_{n-1})}$$

Una vez conseguida la función a la cual se le debe hallar su raíz, el método de Newton-Raphson, requiere una semilla que se encuentre próxima a la raíz. Para conseguir la semilla, se propone realizar dos iteraciones con el método de bisección, entre los valores $0 \text{ y } t_f$, obteniendo los siguientes resultados:

1. Ascensor lleno (6 personas):

n	a	b	p	f(p)
0	0.00000	5.64579	2.82290	1.63687
1	0.00000	2.82290	1.41145	-0.94125

Semilla: 1.41145.

Búsqueda de la semilla con bisección. Caso 1.

Una vez conseguida la semilla, se procede a buscar la raíz con Newton-Raphson:

n	p	abs(p_n-p_n+1)
0	1.411448723829527	-
1	2.041268509929458	0.3085433313
2	1.976492944958721	0.0327729806
3	1.976028238571935	0.0002351719

Tiempo hasta alcanzar el 30% de aceleración: 1.976 s .

Tiempo hallado con N-R. Caso 1.

2. Ascensor a la mitad de capacidad (3 personas):

```
n: 3
 n  |    a    |    b    |    p    |  f(p)
----------------------------------------
 0  | 0.00000 | 4.84123 | 2.42061 | 1.63687
 1  | 0.00000 | 2.42061 | 1.21031 | -0.94125
Semilla:  1.21031.
```

Búsqueda de semilla. Caso 2.

```
 n  |         p         |  abs(p_n-p_n+1)
-------------------------------------------
 0  | 1.210307295689818 |       -       |
 1  | 1.750373306744296 | 0.3085433313 |
 2  | 1.694828718022857 | 0.0327729806 |
 3  | 1.694430235583654 | 0.0002351719 |
Tiempo hasta alcanzar el 30% de aceleración:  1.694 s .
```

Tiempo hallado con N-R. Caso 2.

3. Ascensor vacío:

```
 n  |    a    |    b    |    p    |  f(p)
----------------------------------------
 0  | 0.00000 | 3.87298 | 1.93649 | 1.63688
 1  | 0.00000 | 1.93649 | 0.96825 | -0.94125
Semilla:  0.96825.
```

Búsqueda de semilla. Caso 2.

```
 n  |         p         |  abs(p_n-p_n+1)
-------------------------------------------
 0  | 0.968245836551854 |       -       |
 1  | 1.400298645395437 | 0.3085433313 |
 2  | 1.355862974418285 | 0.0327729806 |
 3  | 1.355544188466923 | 0.0002351719 |
Tiempo hasta alcanzar el 30% de aceleración:  1.356 s .
```

Tiempo hallado con N-R. Caso 3.

Como condición de corte para Newton-Raphson, se definió una tolerancia de $\varepsilon = 10^{-3}$.

El valor de t se puede conseguir, también con la fórmula del paso (2), $t_{30\%} = 0.35t_f$, esto nos brinda una alternativa para poder comparar los valores conseguidos mediante el método numérico. La siguiente tabla ilustra lo mencionado para los tres casos (ascensor vacío, media capacidad, lleno):

n	t_{teorico}	$t_{\text{N-R}}$	$\|t_{\text{teorico}} - t_{\text{N-R}}\|$
0	1.35554417	1.35554418	1×10^{-8}
3	1.69443021	1.69443023	2×10^{-8}
6	1.97602821	1.97602823	2×10^{-8}

Tabla de comparación entre valores hallados por N-R y analíticamente.

Conclusión

Mediante el método de Newton-Raphson se logró aproximar la solución del problema con una gran precisión, ya que el error resultó del orden de 10^{-8}, y esto se logró con no más de cuatro iteraciones del método y con una tolerancia mucho mayor $\varepsilon = 10^{-3}$.

ANEXO I Código:

Para la implementación de código se utilizó Python con la versión 3.7. Adicionalmente se utilizaron las librerías matplotlib y numpy.

El código se encuentra dividido en los módulos:

- **busquedaRaices.py**: contiene los algoritmos de búsqueda de raíces,
- **funciones.py**: contiene las funciones descritas en la sección de Funciones,
- **graficador.py**: contiene los métodos que se utilizaron para realizar los gráficos de la sección de Investigación,
- **TP1.py**: es la entrada principal del programa, de ahí se ejecuta el método mostrado en la sección Método de Newton-Raphson.

Para ejecutar el código, se utilizan los siguientes comandos:

```
$ python3 TP1.py
! Genera las tablas de las iteraciones del método de N-R y bisección para los tres casos.
```

```
$ python3 graficador.py <número de personas>
! Grafica las funciones aceleración, velocidad y posición para el caso del número de personas indicados.
```