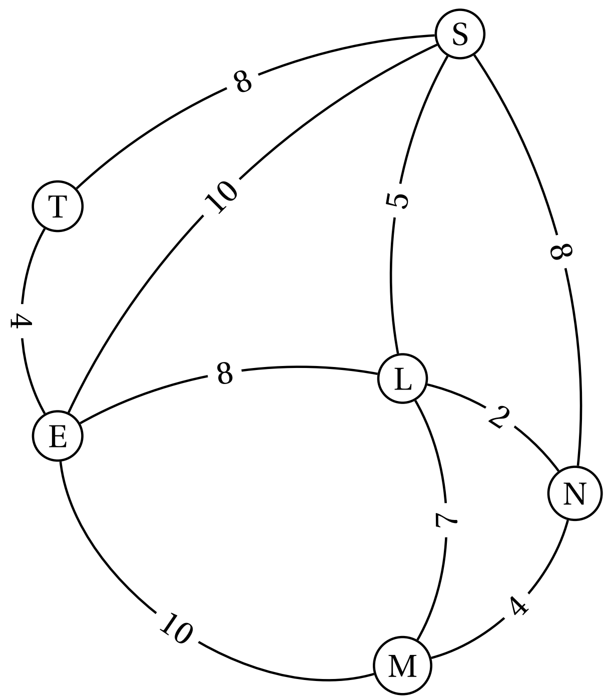
MATHS-COURS

ALGORITHME DE DIJKSTRA - ÉTAPE PAR ÉTAPE

L'algorithme de Dijkstra (*prononcer approximativement « Dextra »*) permet de trouver **le plus court chemin entre deux sommets d'un graphe** (orienté ou non orienté). Dans l'exemple du graphe ci-dessous, on va rechercher le chemin le plus court menant de M à S.



INITIALISATION :

On construit un tableau ayant pour colonnes chacun des sommets du graphe. On ajoute à gauche une colonne qui recensera les sommets choisis à chaque étape (cette colonne est facultative mais facilitera la compréhension de l'algorithme).

Puisque l'on part du sommet M, on inscrit, sur la première ligne intitulée « Départ », 0_{M} **dans la colonne M et \bm{\infty} dans les autres colonnes**.

Cela signifie qu'à ce stade, on peut rejoindre M en 0 minute et on n'a rejoint aucun autre sommet puisque l'on n'a pas encore emprunté de chemin...

	E	L	M	N	S	T
Départ	∞	∞	0_{M}	∞	∞	∞

MATHS-COURS

On sélectionne **le plus petit résultat** de la dernière ligne. Ici, c'est « 0_{M} » qui correspond au chemin menant au **sommet M** en 0 minute.

- **On met en évidence cette sélection** (nous l'écrirons en rouge mais il est également possible de la souligner, de l'entourer, etc.).
- **On inscrit le sommet retenu et la durée correspondante dans la première colonne** (ici on écrit M(0)).
- **On désactive les cases situées en dessous de notre sélection** en les grisant par exemple. En effet, on a trouvé le trajet le plus court menant à M ; il sera inutile d'en chercher d'autres.

	E	L	M	N	S	T
Départ	∞	∞	0_{M}	∞	∞	∞
M (0)						

À partir de M, on voit sur le graphe que l'on peut rejoindre E, L et N en respectivement 10, 7 et 4 minutes. Ces durées sont les durées les plus courtes ; elles sont inférieures au durées inscrites sur la ligne précédente qui étaient « ∞ ».

On inscrit donc \bm{10_{\text{M}}, 7_{\text{M}}} et \bm{4_{\text{M}}} dans les colonnes E, L et N. Le M situé en indice signifie que l'on vient du sommet M.

Enfin on complète la ligne en recopiant dans les cellules vides les valeurs de la ligne précédente.

	E	L	M	N	S	T
Départ	∞	∞	0_{M}	∞	∞	∞
M (0)	10_{M}	7_{M}		4_{M}	∞	∞

ÉTAPE 2 :

On sélectionne **le plus petit résultat** de la dernière ligne. Ici, c'est « 4_{M} » qui correspond au chemin menant au **sommet N** en 4 minutes.

- **On met en évidence cette sélection**.
- **On inscrit le sommet retenu et la durée correspondante dans la première colonne** : N (4).
- **On désactive les cases situées en dessous de notre sélection**. On a trouvé le trajet le plus court menant à N ; il dure 4 minutes.

N (4)						

À partir de N, on peut rejoindre L et S (on ne se préoccupe plus de M qui a été « désactivé »).

- **Si l'on rejoint L :** On mettra 2 minutes pour aller de N à L et 4 minutes pour aller de M à N (ces 4 minutes sont inscrites dans la première colonne) soit au total 6 minutes. **Ce trajet est plus rapide que le précédent** qui durait 7 minutes. **On indique donc \bm{6_{\text{N}}} dans la colonne L**. Le N situé en indice signifie que l'on vient du sommet N.
- **Si l'on rejoint S :** On mettra 8 minutes pour aller de N à S et 4 minutes pour aller de M à N soit au total 12 minutes. **Ce trajet est plus rapide que le précédent** qui était ∞. **On indique donc \bm{12_{\text{N}}} dans la colonne S**.

Puis on complète la ligne en recopiant dans les cellules vides les valeurs de la ligne précédente.

	E	L	M	N	S	T
Départ	∞	∞	0_M	∞	∞	∞
M (0)	10_M	7_M		4_M	∞	∞
N (4)	10_M	6_N			12_N	∞

ÉTAPE 3 :

On sélectionne **le plus petit résultat** de la dernière ligne. Ici, c'est « 6_N » qui correspond au chemin menant au **sommet L** en 6 minutes.

- **On met en évidence cette sélection**.
- **On inscrit le sommet retenu et la durée correspondante dans la première colonne** : L (6).
- **On désactive les cases situées en dessous de notre sélection**. On a trouvé le trajet le plus court menant à L ; il dure 6 minutes.

	E	L	M	N	S	T
Départ	∞	∞	0_M	∞	∞	∞
M (0)	10_M	7_M		4_M	∞	∞
N (4)	10_M	6_N			12_N	∞
L (6)						

À partir de L, on peut rejoindre E et S (on ne se préoccupe plus de M ni de N qui ont été « désactivés »).

On se contente donc de recopier le contenu précédent \bm{10_{\text{M}}} dans la colonne E.

- **Si l'on rejoint S :** On mettra 5 minutes pour aller de L à S et 6 minutes pour aller de M à L soit au total 11 minutes. **Ce trajet est plus rapide que le précédent** qui durait 12 minutes. **On indique donc \bm{11_{\text{L}}} dans la colonne S.**

IMPORTANT !

On inscrit la durée d'un trajet dans le tableau **uniquement si elle est inférieure** à la durée figurant sur la ligne précédente. Dans le cas contraire, on recopie la valeur précédente.

Puis on complète la ligne en recopiant dans les cellules vides les valeurs de la ligne précédente.

	E	L	M	N	S	T
Départ	∞	∞	0_M	∞	∞	∞
M (0)	10_M	7_M		4_M	∞	∞
N (4)	10_M	6_N			12_N	∞
L (6)	10_M				11_L	∞

ÉTAPE 4 :

On sélectionne **le plus petit résultat**. C'est « 10_M » qui correspond au chemin menant au **sommet E** en 10 minutes.

- **On met en évidence cette sélection.**
- **On inscrit le sommet retenu et la durée correspondante dans la première colonne** : E (10).
- **On désactive les cases situées en dessous de notre sélection**. On a trouvé le trajet le plus court menant à E ; il dure 10 minutes.

	E	L	M	N	S	T
Départ	∞	∞	0_M	∞	∞	∞
M (0)	10_M	7_M		4_M	∞	∞
N (4)	10_M	6_N			12_N	∞
L (6)	10_M				11_L	∞
E (10)						

À partir de E, on peut rejoindre S et T (on ne se préoccupe plus des autres sommets qui ont été « désactivés »).

Ce trajet N'EST PAS plus rapide que le précédent qui durait 11 minutes. **On se contente donc de recopier le contenu précédent \bm{11_{\text{L}}} dans la colonne S**.

- **Si l'on rejoint T :** On mettra 4 minutes pour aller de E à T et 10 minutes pour aller de M à E soit au total 14 minutes. **Ce trajet est plus rapide que le précédent** qui était ∞. **On indique donc \bm{14_{\text{E}}} dans la colonne T**.

	E	L	M	N	S	T
Départ	∞	∞	0_M	∞	∞	∞
M (0)	10_M	7_M		4_M	∞	∞
N (4)	10_M	6_N			12_N	∞
L (6)	10_M				11_L	∞
E (10)					11_L	14_E

ÉTAPE 5 :

On sélectionne **le plus petit résultat**. C'est « 11_L » qui correspond au chemin menant au **sommet S** en 11 minutes.

On a trouvé le trajet le plus court menant à S : il dure **11 minutes**. Comme c'est la question posée dans l'énoncé, il est inutile d'aller plus loin et le tableau est terminé !

	E	L	M	N	S	T
Départ	∞	∞	0_M	∞	∞	∞
M (0)	10_M	7_M		4_M	∞	∞
N (4)	10_M	6_N			12_N	∞
L (6)	10_M				11_L	∞
E (10)					11_L	14_E

Il reste toutefois à reconstituer le trajet qui correspond à cette durée de 11 minutes. En pratique, il est plus facile de trouver le trajet en sens inverse en « remontant » dans le tableau de la façon suivante :

- On part de notre point d'arrivée : **S**
- On recherche la cellule marquée en rouge de la colonne **S** ; elle contient 11_L. On note la lettre écrite en indice : **L**.
- On recherche la cellule marquée en rouge de la colonne **L** ; elle contient 6_N. On note la lettre écrite en indice : **N**.
- On recherche la cellule marquée en rouge de la colonne **N** ; elle contient 4_M. On note la lettre écrite en indice : **M**.

Le trajet optimal est donc **M - N - L - S**.

Enfin, on peut vérifier sur le graphe que ce trajet est correct et dure 11 minutes !

DANS CE CHAPITRE :

COURS

Graphes

EXERCICES

- ●●○ Graphes Algorithme de Dijkstra - Bac ES Métropole 2009
- ●●○ Graphes - Trajet minimal - Bac ES Polynésie française 2008
- ●●○ Graphe - Trajet minimal - Bac ES Amérique du Nord 2009
- ●●○ Graphes Trajet minimal - Bac ES Pondichéry 2009
- ●●○ Graphes - Bac blanc ES Sujet 1 - Maths-cours 2018 (spé)
- ●●○ Graphes - Bac blanc ES/L Sujet 3 - Maths-cours 2018 (spé)
- ●●○ Graphes : Algorithme de Dijksta

MÉTHODES

Algorithme de Dijkstra - Étape par étape

tableau de signe loi de probabilité fonction trigonométrique suite géométrique théorème de thalès polynôme second degré limites fonction affine théorème de pythagore fonction exponentielle division euclidienne trigonométrie python en seconde fonction paire loi normale algorithme de dijkstra tableau de variation fonction dérivée