

## TD1

## Limites, continuité, dérivation

**Exercice 1 :**

Soit  $f : [0; 1] \longrightarrow [0; 1]$  une fonction continue.  
Montrer que  $\exists x \in [0; 1]$  tel que  $f(x) = x$ .

**Exercice 2 :**

Donner la dérivée des fonctions suivantes :

- $f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$
- $g(x) = \ln |x + \sqrt{x^2 + 1}|$

**Exercice 3 :**

Calculer les limites suivantes :

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^7}{e^x}$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$  où  $a$  et  $b$  sont des réels non nuls
3.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n}$ , où  $n \in \mathbb{N}$
4.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ , où  $n \in \mathbb{N}$
5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - x}{x^3}$

**Exercice 4 :**

- Donner le développement limité à l'ordre 5 en  $x = 0$  de la fonction  $x \rightarrow \sin(x + x^3)$
- Donner le développement limité à l'ordre 2 en  $x = 0$  de la fonction  $x \rightarrow \ln(\sqrt{1+x+x^2})$
- Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$