AuD - Zusammenfassung

Moritz Gerhardt

1 Inhaltsverzeichnis

2 Was ist ein Algorithmus?

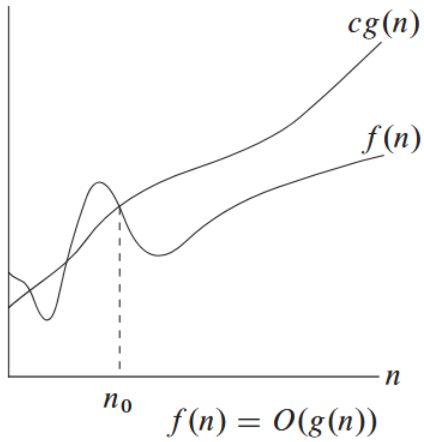
Ein Algorithmus beschreibt eine Handlungsvorschrift zur Umwandlung von Eingaben in eine Ausgabe.
Dabei sollte ein Algorithmus im allgemeinen folgende Vorraussetzungen erfüllen:

1. Bestimmt:
   - Determiniert: Bei gleicher Eingabe liefert der Algortihmus gleiche Ausgabe.
     $\Longrightarrow$ Ausgabe nur von Eingabe abhängig, keine äußeren Faktoren.
   - Determinismus: Bei gleicher Eingabe läuft der Algorithmus immer gleich durch die Eingabe.
     $\Longrightarrow$ Gleiche Schritte, Gleiche Zwischenstände.
2. Berechenbar:
   - Finit: Der Algorithmus ist als endlich definiert. (Theoretisch)
   - Terminierbar: Der Algorithmus stoppt in endlicher Zeit. (Praktisch)
   - Effektiv: Der Algorithmus ist auf Maschine ausführbar.
3. Andwendbar:
   - Allgemein: Der Algorithmus ist für alle Eingaben einer Klasse anwendbar, nicht nur für speziellen Fall.
   - Korrekt: Wenn der Algorithmus ohne Fehler terminiert, ist die Ausgabe korrekt.

3 Laufzeitanalyse

3.1 O Notation

Die O-Notation wird grundsätzlich für *Worst-Case* Laufzeiten verwerdendet. Sie gibt also eine obere Schranke an, die der Algorithmus im schlechtesten Fall erreicht. Dabei wird oft zwischen Big O-Notation und Little o-Notation unterschieden. Ein Graph zur Repräsentation der O-Notation ist hier zu sehen:



3.1 (a) Big-O Notation

Mathematische Definition:

$$O(g(n)) = \{f : \exists c \in \mathbb{R}_{>0}, n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)$$

Es existieren die positiven Konstanten c und n_0 , sodass für alle $n \geq n_0$ gilt, dass $f(n) \geq 0$ und $f(n) \leq c \cdot g(n)$. Das bedeutet, dass die Funktion $f(n)$ für $n \to \infty$ den gleichen Wachstumsfaktor hat wie die Funktion $g(n)$. Einfache Berechnung findet wie folgt statt (anhand vom Beispiel $f(n) = 5n^2 + 2n$):

1. Finde den Term mit dem höchsten Wachstumsfaktor ($5n^2$)
2. Konstanten werden weggelassen (n^2)
3. Demnach ist $f(n) = O(n^2)$

Dies kann man dann im Rückschluss so anwenden: Um die Konstanten c und n_0 zu finden, wird die obige gleichung benutzt:

1. Simplifiziere die Ungleichung $5n^2 + 2n \leq c \cdot n^2$ zu $5 + \frac{2}{n} \leq c$
2. Da $n \geq n_0$ kann man die Gleichung für $n \geq 1$ auflösen um die Konstanten c und n_0 zu finden.
   $\implies 5 + \frac{2}{1} = 7 \leq c \implies c \geq 7$
3. Dementsprechend kann man dann die Konstanten $c = 7$ und $n_0 = 1$ auswählen.

3.1 (b) Little-o Notation

Mathematische Notation:

$$O(g(n)) = \{f : \exists c \in \mathbb{R}_{>0}, n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) < c \cdot g(n)$$

Es existieren die positive Konstanten c und n_0, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt, dass $f(n) \geq 0$ und $f(n) < c \cdot g(n)$. Little-o Notation unterscheidet sich also von Big-O Notation nur oberen Schranke. Während bei Big-O der Wachstumsfaktor beider Funktion gleich sein kann ($f(n) = c \cdot g(n)$), gilt bei Little-o, dass der Wachstumsfaktor der Funktion $f(n)$ kleiner ist als der Wachstumsfaktor der Funktion $g(n)$.
Einfache Berechnung findet analog zu Big-O wie folgt statt (anhand vom Beispiel $f(n) = 5n^2 + 2n$):

1. Finde den Term mit dem höchsten Wachstumsfaktor ($5n^2$)
2. Konstanten werden weggelassen (n^2)
3. Demnach ist $f(n) = o(n^2)$

Hier muss allerdings noch geprüft werden, ob der Wachstumsfaktor der Funktion $f(n)$ kleiner ist als der Wachstumsfaktor der Funktion $g(n)$. Wenn ja, ist die Little-o Notation korrekt für $g(n)$.
Um zu zeigen, dass $f(n) = o(g(n))$:

1. Finde den Limes des simplifizierten Ausdrucks $\frac{f(n)}{g(n)}$, der die Wachstumsrate der Funktion $f(n)$ zur Wachstumsrate der Funktion $g(n)$ vergleicht.
   - $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+2n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} 5 + \frac{2}{n} = 5$
     $\Longleftarrow \frac{2}{n}$ für $n \to \infty = 0$
2. Da der Limes $\neq 0$ ist, bedeutet das, dass der Wachstum von $f(n)$ nicht geringer ist als der von $g(n)$. Deshalb müssen wir ein Polynomgrad hochgehen, weswegen $f(n) = o(n^3)$ sein muss.
3. Um nun die Konstanten c und n_0 zu finden müssen wir einfach $\frac{f(n)}{g(n)}$ auflösen
   - $\frac{5n^2+2n}{n^3} < c$
   - $\frac{5}{n} + \frac{2}{n^2} < c$
   - $\frac{5}{n} < c$, da $\frac{2}{n^2}$ für $n \to \infty$ schneller abfällt als $\frac{5}{n}$
   - Für $c = 1$ muss dann $n_0 > 5$ sein und kann somit als $n_0 = 6$ gewählt werden.

3.1 (c) Rechenregeln

Sind sowohl für $Big - O$ als auch $Little - o$ gültig

- **Konstanten:**

  $$f(n) = a \text{ mit } a \in \mathbb{R}_{>0} \implies f(n) = O(1)$$

  Ist die Funktion konstant, so ist die Komplexität $O(1)$.

- **Skalare Multiplikation:**

  $$f(n) = O(g(n)) \implies a \cdot f(n) = O(g(n))$$

  Multiplikation der Funktion ändert die Komplexität nicht.

- **Addition:**

  $$f_1(n) = O(g_1(n)),\ f_2(n) = O(g_2(n)) \implies f_1(n) + f_2(n) = O(\max\{g_1(n), g_2(n)\})$$

  Die Komplexität der Summe zweier Funktionen ist der Maximalwert der Komplexität der beiden Funktionen.

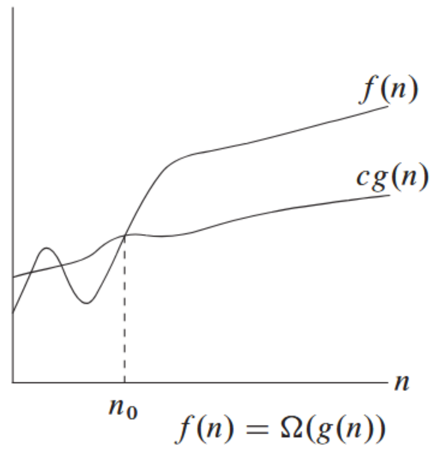
- **Multiplikation:**

  $$f_1(n) = O(g_1(n)),\ f_2(n) = O(g_2(n)) \implies f_1(n) \cdot f_2(n) = O(g_1(n) \cdot g_2(n))$$

  Die Komplexität des Produkts zweier Funktionen ist das Produkt der Komplexität der beiden Funktionen.

3.2 Ω Notation

Ähnlich zur O Notation, allerdings geht es hier um den *Best-Case* also minimale Anzahl der Schritten, die ein Algorithmus ausführt.



Wird auch wieder in Ω und ω aufgeteilt, die sich nur darin unterscheiden, wie strikt die Grenze ist.

3.2 (a) Ω Notation

Mathematische Definition:

$$\Omega(g(n)) = \{f : \exists c \in \mathbb{R}_{>0}, n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : 0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n)$$

Es existieren die positiven Konstanten c und n_0 , sodass für alle $n \geq n_0$ gilt, dass $0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n)$. Das bedeutet, dass der Wachstumsfaktor von $f(n) \geq c \cdot g(n)$ ist.

Die Berechnung von Ω ist leider nicht immer so simpel wie die Berechnung von O Notation. Nehme zum Beispiel einen Linearen Suchalgorithmus, der eine Liste so lange durchläuft, bis er die gesuchte Zahl gefunden hat. Die Komplexität ist $O(n)$, da, wenn das Element an letzter Stelle steht alle Eingaben durchlaufen werden müssen. Gleichermaßen kann es aber sein, dass das Element an erster Stelle steht, was dann die Komplexität $\Omega(1)$ besitzt. Dies muss allerdings durch Analyse des Algorithmus selbst erkannt werden und kann nicht aus der Funktionsrepräsentation ermittelt werden.
Gilt allerdings nicht sowas, wie vorzeitiger Abbruch bei Suche, so kann Ω ähnlich zu O verwendet werden (Anhand vom Beispiel $f(n) = 5n^2 + 2n$):

1. Finde den Term mit dem höchsten Wachstumsfaktor ($5n^2$)
2. Konstanten werden weggelassen (n^2)
3. Demnach ist $f(n) = \Omega(n^2)$
   Da $5n^2 + 2n$ für $n \to \infty$ mindestens so schnell wächst wie n^2.

Um Werte für c und n_0 zu finden, kann das Prinzip wie in O Notation verwendet werden, jedoch auf der Definition von Ω angepasst (Umgekehrtes Gleichheitszeichen).

3.2 (b) ω Notation

Mathematische Definition:

$$\omega(g(n)) = \{f : \exists c \in \mathbb{R}_{>0}, n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : 0 \leq c \cdot g(n) < f(n)$$

Es existieren die positiven Konstanten c und n_0 , sodass für alle $n \geq n_0$ gilt, dass $0 \leq c \cdot g(n) < f(n)$.
Das bedeutet, dass der Wachstumsfaktor von $f(n) > c \cdot g(n)$ ist.

Für die Bestimmung von ω gilt das selbe wie für Ω, nur das zusätzlich noch folgendes beachtet werden muss:

- Hat der Algorithmus einen konstanten Best-Case, so ist ω nicht anwendbar, da $\omega < 1$ sinnlos ist, da per Definition die Komplexität nicht kleiner als 1 sein kann und so der Best-Case schon durch Ω definiert ist.
- Falls nicht konstant, dann muss bei ω ähnlich zu Little-o herausgefunden werden, ob der Wachstumsfaktor von $f(n)$ strikt größer ist als der Wachstumsfaktor der Funktion $g(n)$.
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$
  - Wenn $lim = \infty$, so gilt $\omega(g(n))$
  - Andernfalls muss der Polynomgrad von $g(n)$ verringert werden:
    $\longrightarrow n^x = n^{x-1} \implies n = 1$

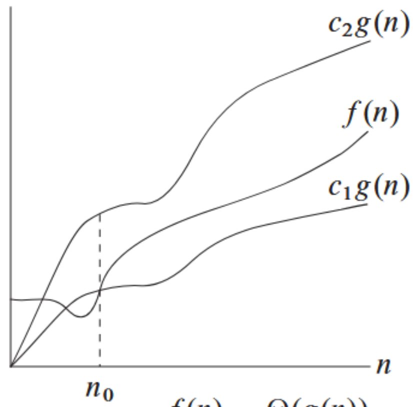
3.2 (c) Rechenregeln

Sind sowohl für $Big - \Omega$ als auch $Little - \omega$ gültig

- **Konstanten:**
  $$f(n) = a \text{ mit } a \in \mathbb{R}_{>0} \implies f(n) = \Omega(1)$$
  Ist die Funktion konstant und positiv, so ist die Komplexität $\Omega(1)$.
- **Skalare Multiplikation:**
  $$f(n) = \Omega(g(n)) \implies a \cdot f(n) = \Omega(g(n)) \text{ für } a > 0$$
  Eine positive skalare Multiplikation der Funktion ändert die Komplexität nicht.
- **Addition:**
  $$f_1(n) = \Omega(g_1(n)),\ f_2(n) = \Omega(g_2(n)) \implies f_1(n) + f_2(n) = \Omega(\min\{g_1(n), g_2(n)\})$$
  Die Komplexität der Summe zweier Funktionen ist der Minimalwert der Komplexität der beiden Funktionen.
- **Multiplikation:**
  $$f_1(n) = \Omega(g_1(n)),\ f_2(n) = \Omega(g_2(n)) \implies f_1(n) \cdot f_2(n) = \Omega(g_1(n) \cdot g_2(n))$$
  Die Komplexität des Produkts zweier Funktionen ist das Produkt der Komplexität der beiden Funktionen.

3.3 Θ Notation

Θ Notation kombiniert O und Ω Notation. Das heißt sie stellt Durchschnittswachstum (Average-Case) einer Funktion dar und liegt somit zwischen O und Ω.



$f(n) = \Theta(g(n))$

Mathematische Notation:

$$\Theta(g(n)) = \{f : \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}, n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : 0 \leq c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$$

Es existieren die positiven Konstanten c_1, c_2 und n_0 , sodass für alle $n \geq n_0$ gilt, dass $0 \leq c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$. $f(n) = \Theta(g(n)) \iff f(n) = O(g(n)) \wedge f(n) = \Omega(g(n))$.

Die Berechnung von Θ läuft dementsprechend auch ähnlich zu O und Ω ab (Anhand vom Beispiel $f(n) = 5n^2 + 2n$).

1. Finde den Term mit dem höchsten Wachstumsfaktor ($5n^2$)
2. Konstanten werden weggelassen (n^2)
3. Demnach ist $f(n) = \Theta(n^2)$
   Da $5n^2 + 2n$ für $n \to \infty$ mindestens so schnell wächst wie n^2.

Die Berechnung der Konstanten ist allerding ein klein wenig komplizierter, da es eine mehr gibt. Prinzipiell bleibt es aber gleich:

- Simplifiziere die Gleichung: $c_1 \cdot n^2 \leq 5n^2 + 2n \leq c_2 \cdot n^2 = c_1 \leq 5 + \frac{2}{n} \leq c_2$
- Da hier für alle $n > 0$ der mittlere Term positiv ist, kann man $n_0 = 1$ wählen.
- Dadurch erhalten wir $c_1 \leq 5 + \frac{2}{1} = 7 \leq c_2$, wodurch man hier die Konstanten dann z.B. $c_1 = 7$ und $c_2 = 7$ für $n_0 = 1$ auswählen kann.

3.4 Rekursiongleichungen

Im Allgemeinen wird $T(n)$ als die maximale Anzahl von Schritten für Eingaben der Größe n angenommen.
So gilt als allgemeine Form für Rekursiongleichungen:

$$T(n) = a \cdot T(\tfrac{n}{b}) + f(n)$$

mit a $\geq$ 1 und b $>$ 1 und $f(n)$ asymptotisch positiv.

Dies ist so anzunehmen, dass das Problem in a Teilprobleme der Größe $\frac{n}{b}$ aufgeteilt wird.
Demnach benötigt das Lösen jedes Teilproblems immer $T(\frac{n}{b})$ Zeit
Die Funktion f(n) umfasst hierbei dann die Kosten der anderen Operation wie Aufteilen und Zusammenfügen.

3.4 (a) Mastertheorem

Das Mastertheorem bietet eine einfache Weise an die Laufzeit von verschiedene Rekursionsgleichungen abzuschätzen.
Dabei wird die oben genannte Form vorrausgesetzt.
So gibt es im Mastertheorem grundsätzlich drei verschiedene Fälle:

1. $f(n) = O(n^{log_b a - \epsilon})$ für ein $\epsilon > 0$
   Wenn f(n) polynomiell kleiner ist als $n^{\log_b a}$
   - Hier ist die Rekursion wichtiger als die sonstigen Operationen.
   - Demnach: $T(n) = \Theta(n^{log_b a})$
2. $f(n) = \Theta(n^{log_b a})$
   Wenn f(n) und $n^{\log_b a}$ gleiche Größenordnung haben
   - Hier tragen Rekursion und sonstige Operationen die selbe Signifikanz
   - Demnach: $T(n) = \Theta(n^{log_b a} \cdot \log n)$
3. $f(n) = \Omega(n^{log_b a + \epsilon})$ für ein $\epsilon > 0$
   Wenn f(n) polynomiell größer ist als $n^{\log_b a}$
   - Hier sind die anderen Operationen dominanter.
   - (Unter der Bedingung: $a \cdot f(\frac{n}{b}) \leq c \cdot f(n)$ für ein $c < 1$)
     (Anders: Der rekursive Teil der Funktion $a \cdot f(\frac{n}{b})$ ist proportional, aber kleiner als der nicht-rekursive Teil $f(n)$. Skalar von c $<$ 1 impliziert ähnlichen, aber kleineren Wachstum für n $\to\infty$)
   - Demnach: $T(n) = \Theta(n^{log_b a})$

4 Sortieren

4.1 Sortierproblem

Sortieralgorithmen sind die wohl am häufigsten verwendeten Algorithmen. Hierbei wird als Eingabe eine Folge von Objekten gegeben, die nach einer bestimmten Eigenschaft sortiert werden. Der Algorithmus soll die Eingabe in der richtigen Reihenfolge (nach einer bestimmten Eigenschaft) zur Ausgabe umwandeln. Es wird hierbei meist von einer total geordneten Menge ausgegangen. (Alle Elemente sind miteinander vergleichbar).
Eine Totale Ordnung wird wie folgt definiert:

Eine Relation $\leq$ auf M ist eine totale Ordnung, wenn:

- Reflexiv: $\forall x \in M : x \leq x$
  (x steht in Relation zu x)
- Transitiv: $\forall x, y, z \in M : x \leq y \land y \leq z \implies x \leq z$
  (Wenn x in Relation zu y steht und y in Relation zu z steht, so folgt, dass x in Relation zu z steht)
- Antisymmetrisch: $\forall x, y \in M : x \leq y \land y \leq x \implies x = y$
  (Wenn x in Relation zu y steht und y in Relation zu x steht, so folgt, dass x = y)
- Totalität: $\forall x, y \in M : x \leq y \lor y \leq x$
  (Alle Elemente müssen in einer Relation zueinander stehen)

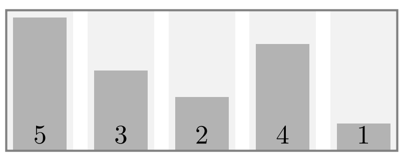
4.2 Insertion Sort

```java
class InsertionSort {
    void insertionSort(int[] arr) {
        for (int i = 1; i < arr.length; i++) {
            // 1 to n - 1
            int key = arr[i];
            int j = i - 1;
            while (j >= 0 && arr[j] > key) {
                // Loops backwards through the array starting at i - 1
                // until it finds an element that is greater than the key or the beginning of the array
                arr[j + 1] = arr[j];
                // Shifts the element to the right
                j--;
            }
            arr[j + 1] = key;
            // Assigns the key to the correct position
        }
    }
}
```

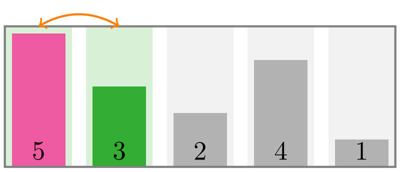
4.2 (a) Vorgehensweise

Die Eingabe wird von links nach rechts durchlaufen startend bei $i = 1$. Das Element i wird dann mit allen Element verglichen, die links von i stehen, bis es 0 erreicht oder das die Einfügestelle gefunden wurde (Vor einem Element, das kleiner als das Element i ist). Die Elemente, die im betrachteten Bereich liegen und größer sind werden während dem Durchlauf eins nach rechts verschoben.

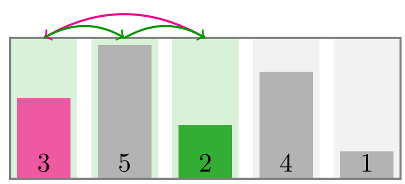
4.2 (b) Visuelle Darstellung



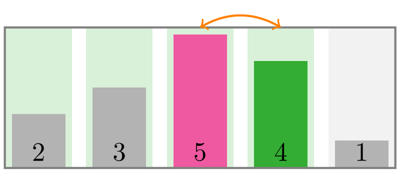
Anfangszustand



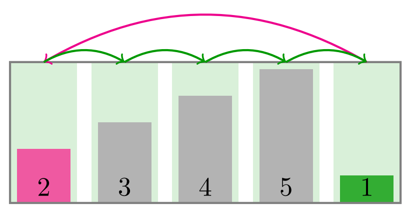
1. Iteration



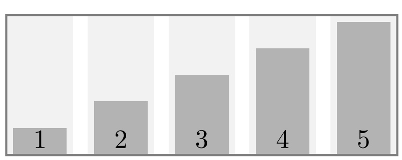
2. Iteration



3. Iteration



4. Iteration



Endzustand

Grün ist das momentan betrachte Element/Bereich. Magenta der Einfügepunkt des Elements.

4.2 (c) Komplexität

- **Worst-Case:**
  - Der Worst-Case ist ein array, der in reverse order sortiert ist.
  - Demnach muss jedes Element den kompletten array durchlaufen.
  - Dies ergibt eine Worst-Case Laufzeit von $\Theta(n^2)$
- **Best-Case:**
  - Der Best-Case ist ein array, der schon sortiert ist.
  - Demnach muss kein Element verschoben werden, aber trotzdem muss bei jedem Element einmal geprüft werden, ob es größer als sein Vorgänger ist.
  - Dies ergibt eine Best-Case Laufzeit von $\Theta(n)$
- **Average-Case:**
  - Der Average-Case ist ein array, der in random order sortiert ist.
  - Demnach muss für jedes Element der array durchschnittlich bis zur Hälfte durchlaufen werden.
  - Nach der quadratischen Steigerung für große Zahlen ist die Hälfte aber irrelevant, weswegen $\Theta(n^2)$ ist.

Algorithmus: Insertion Sort

Durch **!(A[j]=<key)** wohldefiniert

```
insertionSort(A)
FOR i=1 TO A.length-1 DO
   // insert A[i] in pre-sorted sequence A[0..i-1]
   key=A[i];
   j=i-1; // search for insertion point backwards
   WHILE j>=0 AND A[j]>key DO
         A[j+1]=A[j]; // move elements to right
         j=j-1;
   A[j+1]=key;
```

Wir beginnen mit **i=1**, aber erstes Element ist **A[0]**

Short Circuit Evaluation (wie in Java):
Wenn erste AND-Bedingung **false**, wird zweite Bedingung nicht mehr ausgewertet

Algorithmen und Datenstrukturen | Marc Fischlin | SS 24 | 02 Sortieren | 10

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Cryptoplexity

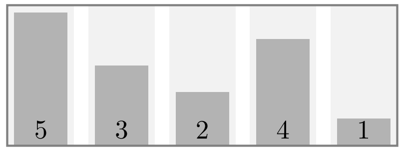
4.3 Bubble Sort

```java
class BubbleSort {

    void bubbleSort(int[] arr) {
        for(int i = arr.length - 1; i > 0; i--) {
            // Runs from arr.length - 1 to 0 (non exclusive)
            // (i = 0 would immediately terminate)
            boolean sorted = true;
            for(int j = 0; j < i; j++) {
                // Runs from 0 to i - 1
                if(arr[j] > arr[j + 1]) {
                    // If the current element is greater than the next
                    // Swap them
                    int temp = arr[j];
                    arr[j] = arr[j + 1];
                    arr[j + 1] = temp;
                    sorted = false;
                }
            }
            if(sorted)
                break;
        }
    }
}
```

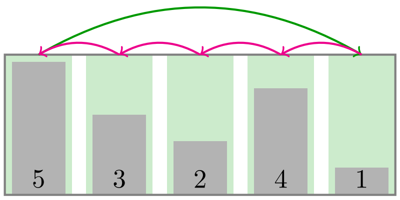
4.3 (a) Vorgehensweise

BubbleSort durchläuft die Eingabe umgekehrt zu InsertionSort: Während bei InsertionSort erst ein Element in einem Teil der Eingabe sortiert wird und der Bereich pro Iteration größer wird, wird bei BubbleSort zuerst der komplette array1 durchlaufen und beieinander liegende Elemente getauscht, wenn sie größer/kleiner sind und der Bereich mit Iteration weiter eingeschränkt. D.h., dass nach der ersten Iteration bereits das größte Elemente an richtiger Stelle steht, nach der zweiten das zweitgrößte etc.
Hier in dem Beispiel handelt es sich schon um einen optimierten BubbleSort. Dafür wird zusätzlich der Boolean sorted erstellt, der angibt, ob die Eingabe nach dem ersten durchlauf schon sortiert ist, was der Fall ist, wenn kein Element vertauscht wurde. Ist dies der Fall müssen keine weitern Iteration mehr durchgeführt werden und der Algorithmus kann vorzeitig abgebrochen werden. Dies führt zu einem besseren Best-Case.
Im Vergleich zu InsertionSort ist BubbleSort meist inefektiver als InsertionSort, obwohl sie die gleichen Komplexitäten haben. Das liegt daran, dass InsertionSort weniger Operationen ausführen muss.

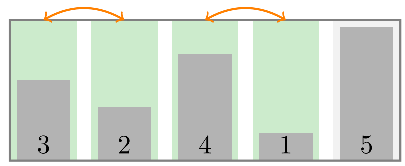
4.3 (b) Visuelle Darstellung



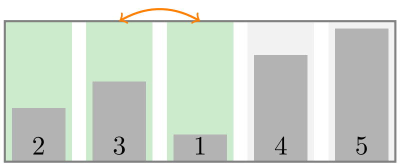
Anfangszustand



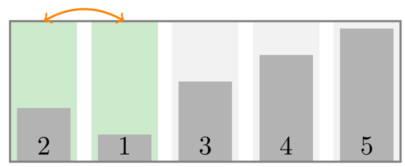
1. Iteration



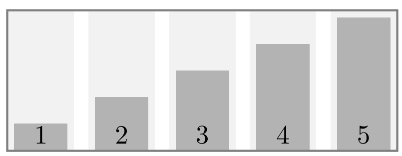
2. Iteration



3. Iteration



4. Iteration



Endzustand

Pfeile repräsentieren Bewegung über eine Iteration, nicht einzelne Schritte. Grün repräsentiert den bearbeiteten Bereich.

4.3 (c) Komplexität

- **Worst-Case:**
  - Die Eingabe liegt in reverse order vor.
  - Das heißt, das jedes Element immer vom Anfang bis zum Ende des Bereichs durchgewechselt werden muss.
  - Die Komplexität beträgt also $\Theta(n^2)$
- **Best-Case:**
  - Die Eingabe ist bereits sortiert.
  - Das heißt der Algorithmus muss die Eingabe nur einmal durchlaufen um zu schauen, ob Elemente getauscht werden.
  - Die Komplexität beträgt also $\Theta(n)$
  - (Bei nicht optimierten BubbleSort, läuft der Algorithmus immer komplett durch $\implies \Theta(n^2)$)
- **Average-Case:**
  - Die Eingabe ist zufällig sortiert.
  - Im Durchschnitt müssen die Elemente demnoch in den meisten Fällen getauscht werden.
  - Die Komplexität beträgt also $\Theta(n^2)$

Was macht der folgende Sortier-Algorithmus Bubble-Sort?

```
bubbleSort(A)
FOR i=A.length-1 DOWNTO 0 DO
   FOR j=0 TO i-1 DO
      IF A[j]>A[j+1] THEN SWAP(A[j],A[j+1]);
         //temp=A[j+1]; A[j+1]=A[j]; A[j]=temp;
```

Welche Laufzeit hat der Algorithmus?

Wie verhält er sich im Vergleich zu Insertion Sort?

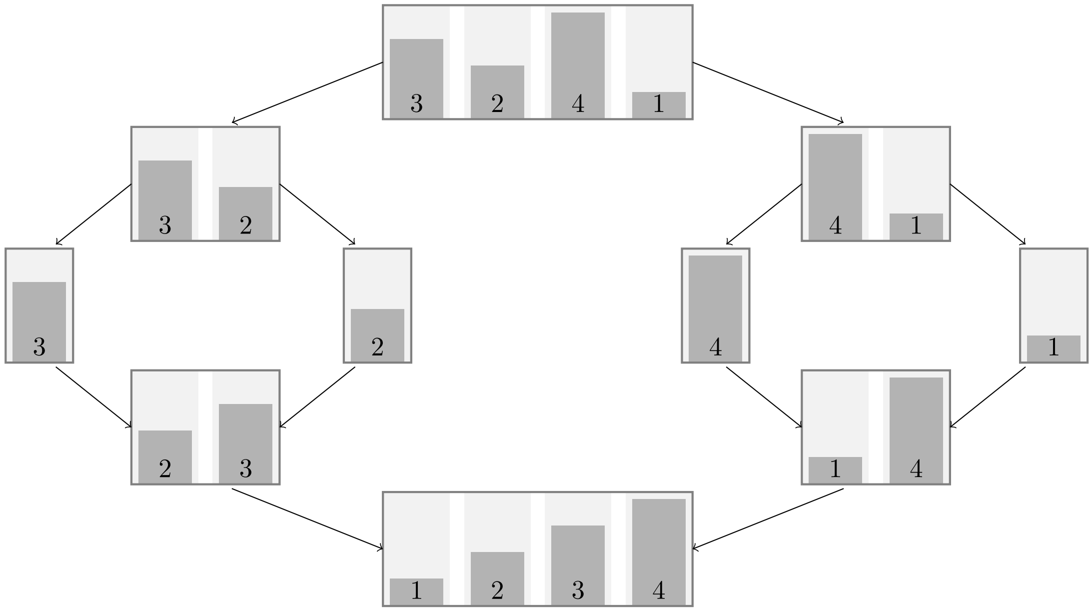
4.4 Merge Sort

```java
class MergeSort {
    void mergeSort(int[] arr, int left, int right) {
        if (left < right) {
            // left < right, otherwise the region has no elements
            int mid = (left + right) / 2; // Integer division -> round down
            // Split the region into two halves and do the recursive calls
            mergeSort(arr, left, mid);
            mergeSort(arr, mid + 1, right);
            // Merge the two (now sorted) halves
            merge(arr, left, mid, right);
        }
    }

    private void merge(int[] arr, int left, int mid, int right) {
        int[] temp = new int[right - left + 1];
        // Create a temporary array to store the merged elements

        int p = left;
        int q = mid + 1;
        for (int i = 0; i < right - left + 1; i++) {
            // Loops for each element in the region
            if (q > right || (p <= mid && arr[p] <= arr[q])) {
                // If p > mid the left half is finished, therefore the element needs to be in right half
                // Otherwise p needs to be <= mid and the element at p needs to be <= the element at q
                temp[i] = arr[p];
                p++;
                // Adds the element at p to the temporary array and increases p
            }
            else {
                temp[i] = arr[q];
                q++;
                // Adds the element at q to the temporary array and increases q
            }
        }
        // Copy the merged elements from the temporary array back to the original array
        for (int i = 0; i < right - left + 1; i++)
            arr[left + i] = temp[i];
            // left + 0 is the start of the region
    }
}
```

4.4 (a) Vorgehensweise

Die Eingabe wird jeweils immer in der Mitte in zwei Teile aufgeteilt, die jeweils wieder aufgeteilt werden. Dies passiert so lange, bis alle Elemente einzeln vorhanden sind. Danach werden immer zwei dieser enstandenen Teillisten so zusammengeführt, dass sie geordnet sind. Dies wird dann wieder durchgeführt, bis alle Elemente in der Eingabe vorhanden sind und nun auch sortiert. Dieses Prinzip wird auch *Divide-and-Conquer* genannt. Bei *Divide* wird die Eingabe in zwei Teile aufgeteilt. Bei *Conquer* werden diese Teile sortiert. Dies geschieht durch die Zusammenführung von den einelementigen Teillisten, die trivial sortiert sind.

4.4 (b) Visuelle Darstellung



4.4 (c) Komplexität

- **Worst-Case:**
  - Der Algorithmus funktioniert unabhängig von der Sortiertheit der Eingabe, demnach gibt es keine Worst-Case Eingabe.
  - Die Eingabe kann $\log n$ ($\log_2 n$)mal in zwei aufgeteilt werden kann. Zusätzlich benötigt der Algorithmus zum Kombinieren von den Teillisten n
  - Es ergibt sich also die Komplexität von $\Theta(n \log n)$
- **Best-Case:**
  - Wie zuvor angesprochen, läuft der Algorithmus unabhängig von der Sortiertheit der Eingabe, demnach gibt es keine Best-Case Eingabe und der Best-Case ist gleich dem Worst-Case.
  - Es ergibt sich also $\Theta(n \log n)$
- **Average-Case:**
  - Wie oben, für alle Fälle gleich, also $\Theta(n \log n)$

Algorithmus: Merge Sort

Wir sortieren im Array **A** zwischen Position **left** (links) und **right** (rechts)

```
mergeSort(A,left,right) //initial left=0,right=A.length-1

IF left<right THEN  //more than one element
   mid=floor((left+right)/2);  // middle (rounded down)
   mergeSort(A,left,mid);      // sort left part
   mergeSort(A,mid+1,right);   // sort right part
   merge(A,left,mid,right);    // merge into one
```

genauer: letzter Index des linken Teils

$$mid = \left\lfloor \frac{right - left + 1}{2} \right\rfloor + \frac{2left}{2} - 1 \;=\; \left\lfloor \frac{right + left - 1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{right + left}{2} \right\rfloor$$

Anzahl Elemente /2 (gerundet)

Offset (beginnend mit 0)

Beispiele:
left=3, right=4, mid=3
left=3, right=5, mid=4

Algorithmus: Merge (für sortierte Teillisten)

rechte Liste noch aktiv und [linke Liste bereits abgearbeitet oder nächstes Element rechts]

rechte Liste bereits abgearbeitet oder [linke Liste noch aktiv und nächstes Element links]

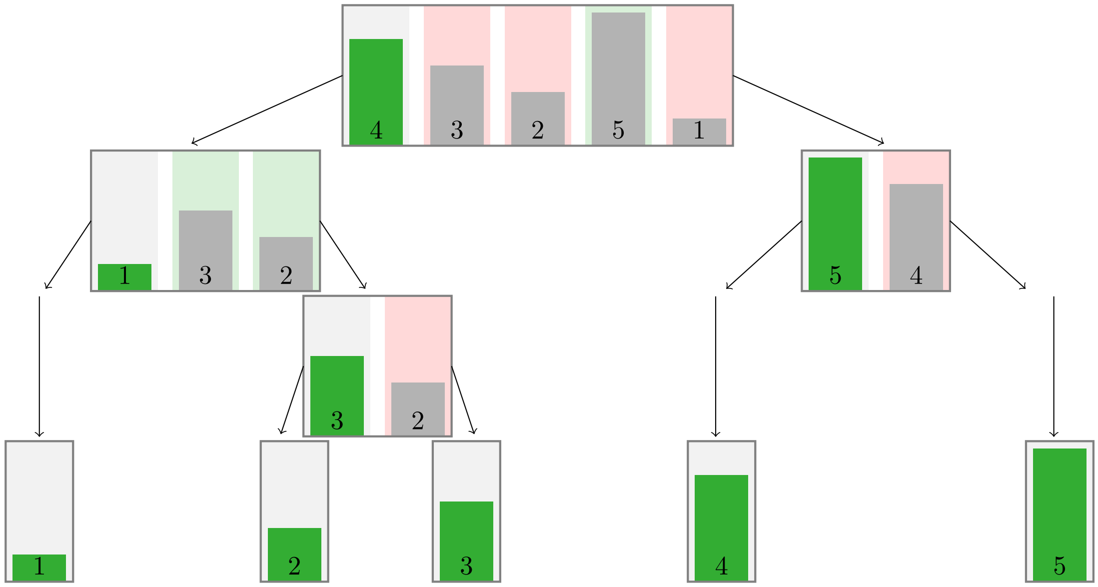
```
merge(A,left,mid,right) // requires left<=mid<=right
    //temporary array B, right-left+1 elements

p=left; q=mid+1;           // position left, right
FOR i=0 TO right-left DO   // merge all elements
   IF q>right OR (p=<mid AND A[p]=<A[q]) THEN
      B[i]=A[p];
      p=p+1;
   ELSE  //next element at q
      B[i]=A[q];
      q=q+1;
FOR i=0 TO right-left DO A[i+left]=B[i]; //copy back
```

4.5 Quicksort

```java
class Quicksort {
    void quickSort(int[] arr, int left, int right) {
        if (left < right) {
            // Region contains more than one element
            int part = partition(arr, left, right);
            quickSort(arr, left, part);
            quickSort(arr, part + 1, right);
        }
    }

    private int partition(int[] arr, int left, int right) {
        int pivot = arr[left];
        // Pivot is the first element in the region

        int p = left - 1;
        int q = right + 1;
        while (p < q) {
            do p++; while (arr[p] < pivot);
            do q--; while (arr[q] > pivot);
            // Increase / decrease p and q until the elements are bigger/smaller-equal pivot
            if (p < q) {
                /* p < q here means that theres a number bigger equal pivot on the left side
                and a number smaller equal than the pivot on the right side
                Therefore, we swap them to sort them into their halves*/
                int temp = arr[p];
                arr[p] = arr[q];
                arr[q] = temp;
                // Swap arr[p] and arr[q]
            }
        } /* This loop runs until p and q cross each other
        which means that */
        return q;
        // q is the index at which:
        // all indices greater than q contain elements bigger equal pivot
        // all indices smaller equal q contain elements smaller equal pivot
    }
}
```

Quicksort funktioniert vom Prinzip ähnlich zu Mergesort. Auch hier wird die Eingabe in zwei Teillisten aufgeteilt und der rekursiv wiederholt. Hier findet die Sortierung allerdings anders statt. Anstatt die Sortierung durch die Zusammenführung zweier Listen zu realisieren, werden hier die einzelnen Elemente anhand des Vergleiches an einem anderen Elementes links oder rechts von diesem eingeordnet. Dies führt durch das *Divide-and-Conquer* Prinzip dazu, dass die Eingabe die Element in die zwei Teile, größer und kleiner des Pivots einordnet. Diese beiden Teile werden dann wiederum genauso behandelt, bis schließlich der gesamte array1 geordnet ist.
Bei der Implementation wird häufig anstatt den Pivot als erstes Element des Bereiches zu definieren, dieser zufällig gewählt, was zu einem besseren average-case führt, wenn die Eingabe bereits einigermaßen sortiert ist. Quicksort ist zwar in der Theorie in den meisten Situationen nicht unbedingt besser als Merge sort auf die Komplexität bezogen, in der Praxis aber oft schneller, durch die Ineffizienz von Kopieroperationen, die für Quicksort wegfallen.

4.5 (a) Visuelle Darstellung



4.5 (b) Komplexität

- **Worst-Case:**
  - Im Worst-Case wird für pivot immer das größte oder kleinste Element verwendet, was sehr unausgeglichenen Partitionen erzeugt.
  - Dies würde eine Rekursionstiefe von n bedeuten
  - Pro Rekursion muss dann der Bereich immernoch mit n durchlaufen werden
  - Dies bedeutet eine Worst-Case Laufzeit von $\Theta(n^2)$
- **Best-Case:**
  - Im Best-Case wird immer das Element als pivot verwendet, das den Median der Liste bildet, was die Partitionen immer ausbalanciert.
  - Dies bedeutet eine Rekursionstiefe von $\log n$
  - Pro Rekursion muss dann der Bereich immernoch mit n durchlaufen werden
  - Dies bedeutet eine Best-Case Laufzeit von $\Theta(n \log n)$
- **Average-Case:**
  - Im Average-Case wird ein zufälliges Element als pivot verwendet, wodurch die Partitionen im mittel gleich sind.
  - Dies bedeutet eine Rekursionstiefe von $\log n$
  - Pro Rekursion muss dann der Bereich immernoch mit n durchlaufen werden
  - Dies bedeutet eine Average-Case Laufzeit von $\Theta(n \log n)$

Algorithmus: Quicksort

```
quicksort(A,left,right) //initial left=0,right=A.length-1

IF left<right THEN  //more than one element
  q=partition(A,left,right);   // q partition index
  quicksort(A,left,q);         // sort left part
  quicksort(A,q+1,right);      // sort right part
```

```
partition(A,left,right) //req.left<right,ret.left..right-1

pivot=A[left];
p=left-1; q=right+1;  //move from left resp. right
WHILE p<q DO
   REPEAT p=p+1 UNTIL A[p]>=pivot; //left up
   REPEAT q=q-1 UNTIL A[q]=<pivot; //right down
   IF p<q THEN Swap(A[p],A[q]);
return q          // A[left..q], A[q+1..right]
```

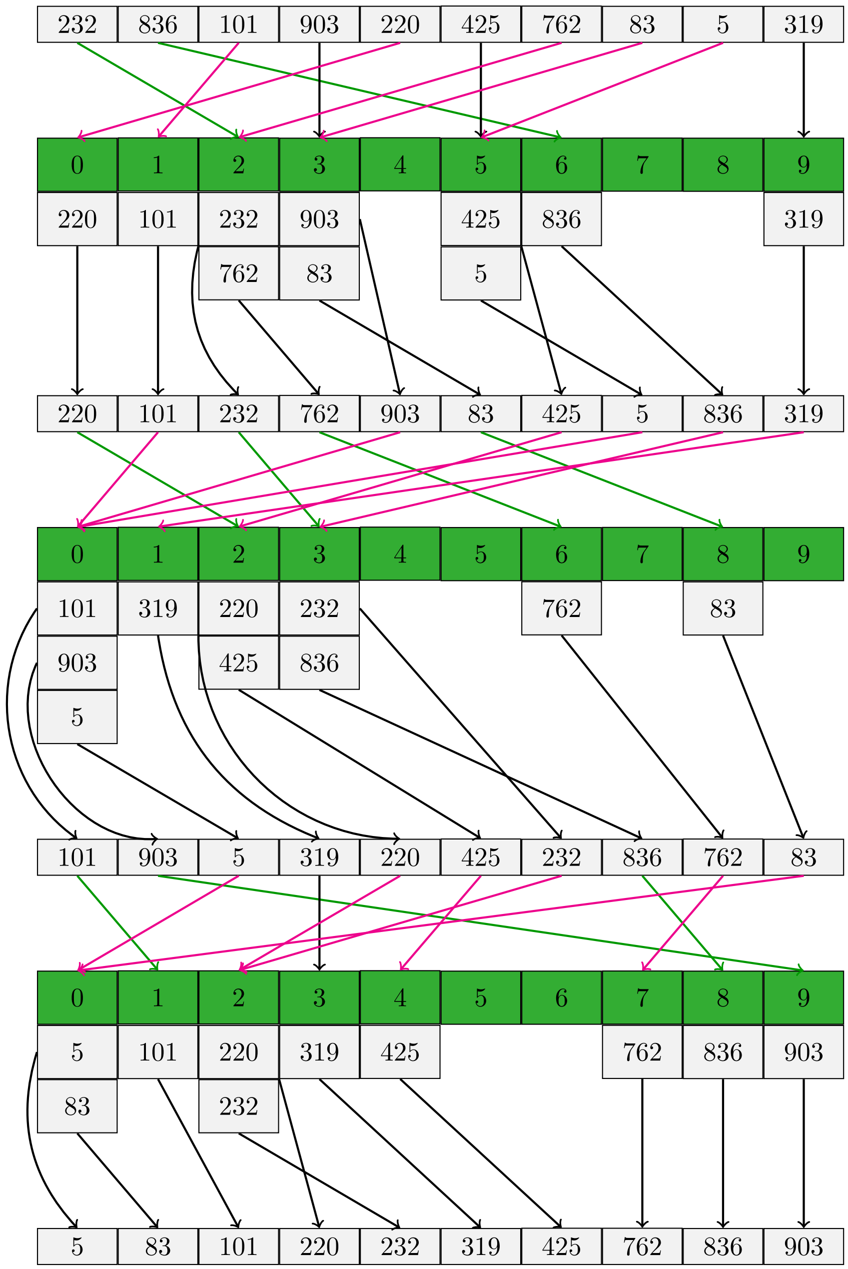
4.6 Radix Sort

```java
import java.util.ArrayList;

class RadixSort {
    int D = 10; // possible unique digits
    int d; // Max amount of digits
    ArrayList<Integer>[] buckets = new ArrayList[D];

    void radixSort(int[] arr) {
        d = amountDigits(arr);
        for (int i = 0; i < d; i++) {
            // for each digit in the array, 0 least significant
            for (int j = 0; j < arr.length; j++)
                putBucket(arr, i, j);
            // Sorts the numbers into their buckets
            int a = 0;
            for (int k = 0; k < D; k++) {
                for (int b = 0; b < buckets[k].size(); b++) {
                    arr[a] = buckets[k].get(b);
                    a++;
                }
                buckets[k].clear();
            }
            // Reads out the buckets in order
        }
    }

    private void putBucket(int[] arr, int i, int j) {
        int z = arr[j] / (int) Math.pow(D, i) % D;
        // Gets the ith digit of the number
        int b = buckets[z].size();
        // size is next free index
        buckets[z].add(b, arr[j]);
        // puts the number in the bucket z at position b
        // Depending on implementation might need to increase size manually
    }

    private int amountDigits(int[] arr) {
        int max = arr[0];
        for (int i = 1; i < arr.length; i++) {
            if (arr[i] > max)
                max = arr[i];
        }
        // Get the biggest number
        return (int) (Math.log(max)/Math.log(D) + 1);
        // Get the amount of digits of the number
        // log(max)/log10(D) is equal to log_D(max)
    }
}
```

4.6 (a) Vorgehensweise

Bei RadixSort wird die Eingabe für jede Dezimalstelle sortiert. D.h., dass die Eingabe zuerst anhand von der 1er-Stelle sortiert wird, dann der 10er-Stelle, und so weiter.
Dies geschieht durch die Einordnung der Elemente in "Buckets", die jeweils einen möglichen Wert für die Dezimalstelle darstellen(z.B. {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}). Nachdem alle Werte in Buckets eingeordnet wurden, werden diese Buckets nun nach Signifikanz ausgelesen (0 ist kleiner als 9, also werden 0 zuerst ausgelesen) und nach der bearbeiteten Ziffer sortiert in die Eingabe zurückgefügt. Dadurch liegt der array1 für die Ziffer nun sortiert da.
Dies wird nun für die nächste Dezimalstelle wiederholt, wodurch die Eingabe jetzt für die ersten beiden Dezimalstellen sortiert ist. Dies wird wiederholt, bis alle Dezimalstellen durchlaufen sind, wodurch dann alle Werte sortiert sind.

4.6 (b) Visuelle Darstellung



Die Farben haben keine spezielle Bedeutung und dienen nur der Visualisierung.

4.6 (c) Komplexität

- Da bei RadixSort die Eingabe nur von der Anzahl der möglichen Ziffernvariationen D, der Eingabelänge n und die maximale Anzahl der Ziffern d abhängig ist, ist der Algorithmus für **Best-, Worst- und Average-case** gleich.
- Dieser beträgt im Allgemeinen $O(d \cdot (n + D))$
- D wird aber oft als Konstant angesehen, weshalb $O(d \cdot n)$ oft verwendet wird.
- Wenn man zusätzlich noch d als konstant ansieht so ergibt sich lineare Laufzeit $O(n)$
- Nähert sich D n an, so ergibt sich allerdings eine Laufzeit von $O(n \log n)$, da $d = \Theta(\log_D n)$ gilt.

Laufzeit

Gesamtlaufzeit $O(d\cdot(n+D))$

```
radixSort(A) // keys: d digits in range [0,D-1]
// B[0][],…, B[D-1][] buckets (init: B[k].size=0)

FOR i=0 TO d-1 DO //0 least, d-1 most sign. digit
   FOR j=0 TO n-1 DO putBucket(A,B,i,j);
   a=0;
   FOR k=0 TO D-1 DO     //rewrite to array
       FOR b=0 TO B[k].size-1 DO
           A[a]=B[k][b]; //read out bucket in order
           a=a+1;
       B[k].size=0;      //clear bucket again
return A
```

$O(n)$

$O(n)$ Schritte (alles in **A** kopieren)

$O(D)$

```
putBucket(A,B,i,j) // call-by-reference
z=A[j].digit[i]; // i-th digit of A[j]
b=B[z].size;     // next free spot
B[z][b]=A[j];
B[z].size=B[z].size+1;
```

O(1)

Algorithmen und Datenstrukturen | Marc Fischlin | SS 24 | 02 Sortieren | 143

5 Grundlegende Datenstrukturen

5.1 Stacks

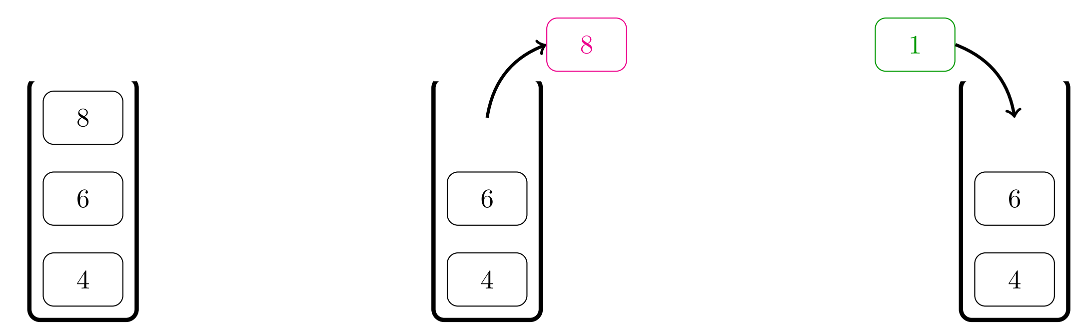
Stacks operieren unter dem ”First in - Last out” (FILO) Prinzip. Ähnlich zu einem Kartendeck, wo die unterste (Erste Karte) die ist, die als letztes gezogen wird.
Stacks werden normalerweise mit den folgenden Funktionen erstellt:

- `new(n)`: Erstellt einen neuen Stack.
- `isEmpty`: gibt an ob der Stack leer ist.
- `pop`: gibt das oberste Element des Stacks zurück und enfernt es vom Stack.
- `push(k)`: Fügt `k` auf den Stack hinzu

Eine mögliche Implementation auf Grundlage eines Arrays wäre:

```java
class Stack {
    private int[] arr;
    private int top;
    Stack(int size) {
        arr = new int[size];
        top = -1;
        // Creates a new array with size
    }
    boolean isEmpty() {
        return top < 0;
        // Returns true if empty
    }
    int pop() { // O(1)
        return arr[top--];
        // Removes and returns the top element
    }
    void push(int k) { // O(1)
        arr[++top] = k;
        // Adds an element
    }
}
```

Push und Pop schmeißen Fehlermeldung wenn Stack leer bzw. voll ist. Oft als Stack underflow und Stack overflow benannt. Hier wär es automatisch IndexOutOfBounds.
Oft werden Stacks auch mit variabler Größer implementiert. Dies kann über verschiedene Wege passieren, zum Beispiel Kopieren des arrays in einen größeren Array oder implementation über mehrere Arrays (z.B. über Linked List). Häufig wird das erstere so implementiert, dass der Array in einen Array mit doppelter Größe kopiert wird.



Example Stack *Pop* *Push*

Stacks als Array: Algorithmen

Annahme: maximale Größe MAX des Stacks vorher bekannt

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
S	12	47	17	98	9				

S.top

```
new(S)

S.A[]=ALLOCATE(MAX);
S.top=-1;
```

```
isEmpty(S)

IF S.top<0 THEN
    return true
ELSE
    return false;
```

```
pop(S)

IF isEmpty(S) THEN
    error ‘underflow‘
ELSE
    S.top=S.top-1;
    return S.A[S.top+1];
```

```
push(S,k)

IF S.top==MAX-1 THEN
    error ‘overflow‘
ELSE
    S.top=S.top+1;
    S.A[S.top]=k;
```


Feldarbeit: Algorithmen

RESIZE(S,m)
reserviert neuen Speicher der Größe **m**, kopiert **S.A** um, und lässt **S.A** auf neuen Speicher zeigen

```
new(S)

S.A[]=ALLOCATE(1);
S.top=-1;
S.memsize=1;
```

```
isEmpty(S)

IF S.top<0 THEN
    return true
ELSE
    return false;
```

```
pop(S)

IF isEmpty(S) THEN
  error ‘underflow‘
ELSE
  S.top=S.top-1;
  IF 4*(S.top+1)==S.memsize THEN
     S.memsize=S.memsize/2;
     RESIZE(S,S.memsize);
  return S.A[S.top+1];
```

```
push(S,k)

S.top=S.top+1;
S.A[S.top]=k;
IF S.top+1==S.memsize THEN
  S.memsize=2*S.memsize;
  RESIZE(S,S.memsize);
```

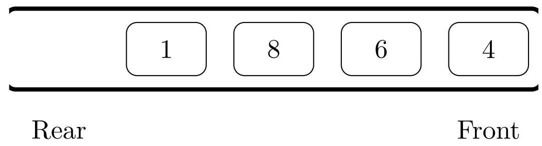
5.2 Queues

Queues funktionieren entgegengesetzt zu Stacks. Sie funktionieren nach dem FIFO-Prinzip (First in - First out). Kann als Warteschleife dargestellt werden. Die Person, die sich als erstes anstellt, kommt auch als erstes dran. Queues werden normalerweise mit den folgenden Funktionen erstellt:

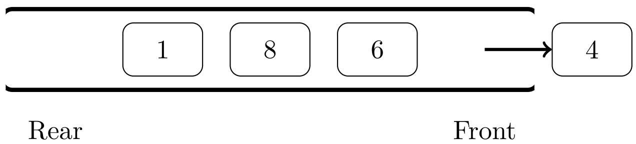
- `new(n)`: Erstellt einen neuen Queue.
- `isEmpty`: gibt an ob der Queue leer ist.
- `enqueue(k)`: Fügt `k` auf den Queue hinzu
- `dequeue`: gibt das erste Element des Queues zurück und entfernt es vom Queue.

Hier ist die Implementation für Queues wie folgt:

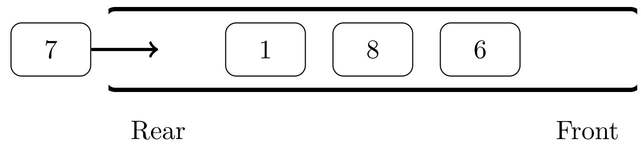
```java
class Queue {
    private int[] arr;
    private int front;
    private int back;

    Queue(int size) {
        arr = new int[size];
        front = -1;
        back = -1;
    }

    boolean isEmpty() {
        return back == -1;
    }

    boolean isFull() {
        return (front + 1) % arr.length == back;
        // If front + 1 is equal to back, the queue is full
        // Modulo makes this usable for cyclic arrays
    }

    void enqueue(int k) { // O(1)
        if (isFull()) {
            throw new UException("Queue is full");
        } else{
            if (isEmpty())
                front = 0;
            back = (back + 1) % arr.length;
            // Modulo so that cyclic arrays work
            arr[back] = k;
        }
    }

    int dequeue() { // O(1)
        if (isEmpty()) {
            throw new UException("Queue is empty");
        } else {
            int temp = arr[front];
            front = (front + 1) % arr.length;
            // Modulo so that cyclic arrays work
            if (front == back) {
                front = -1;
                back = -1;
            }
            // If front and back are equal, the queue is empty -> reset
            return temp;
        }
    }
}
```



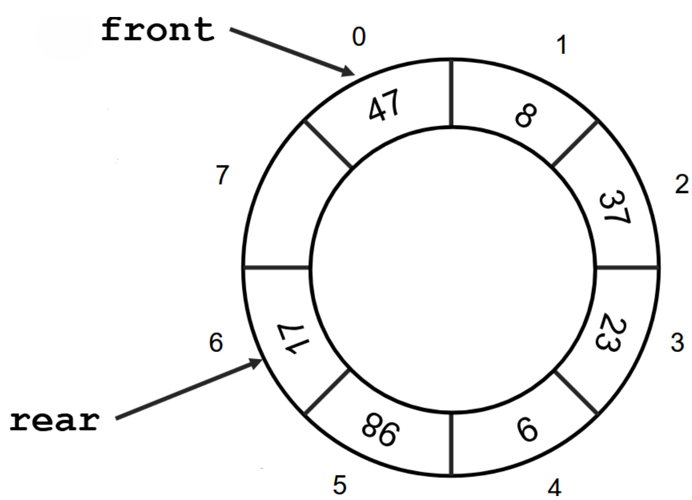
Example non-cyclic Queue



Dequeue



Enqueue



Cyclic Queue

Queues als zyklisches Array: Algorithmen

`Q` leer, wenn
`front==rear+1 mod MAX`
und **`empty==true`**

`Q` voll, wenn
`front==rear+1 mod MAX`
und **`empty==false`**

```
new(Q)

Q.A[]=ALLOCATE(MAX);
Q.front=0;
Q.rear=-1;
Q.empty=true;
```

```
isEmpty(Q)

return Q.empty;
```

```
dequeue(Q)

IF isEmpty(Q) THEN
  error `underflow`
ELSE
  Q.front=Q.front+1 mod MAX;
  IF Q.front==Q.rear+1 mod MAX
     THEN Q.empty=true;
  return Q.A[Q.front-1 mod MAX];
```

```
enqueue(Q,k)

IF Q.front==Q.rear+1 mod MAX
                 AND !Q.empty THEN
  error `overflow`
ELSE
  Q.rear=Q.rear+1 mod MAX;
  Q.A[Q.rear]=k;
  Q.empty=false;
```


Queues durch Liste: Algorithmen

```
new(Q)

Q.front=nil;
Q.rear=nil;
```

```
isEmpty(Q)

IF Q.front==nil THEN
   return true
ELSE
   return false;
```

```
dequeue(Q)

IF isEmpty(Q) THEN
   error `underflow`
ELSE
   x=Q.front;
   Q.front=Q.front.next;
   return x;
```

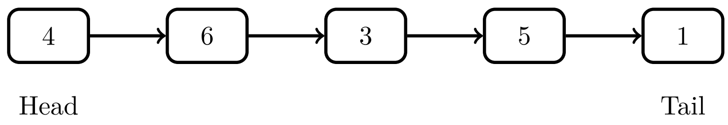
```
enqueue(Q,x)

IF isEmpty(Q) THEN
     Q.front=x;
ELSE
     Q.rear.next=x;
x.next=nil;
Q.rear=x;
```

5.3 Linked List

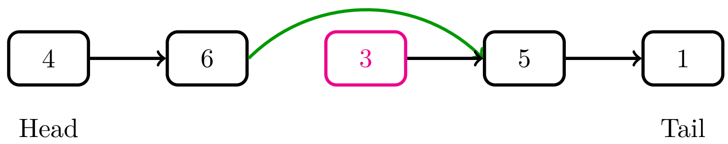
Eine einfache Linked List besteht aus mehreren Elementen, die jeweils immer einen Wert und eine Referenz auf das nächste Element in der Liste haben. Diese Struktur hat den Vorteil, dass sie keine festgelegte Größe hat, das Einfügen in $O(1)$ stattfindet, einfach zu implementieren ist und im Speicher nicht als Block, sondern einzelne Referenzen steht. Eine einfache Linked List kann wie folgt implementiert werden:

```java
class LinkedList {
    class LinkedElement {
        Integer key = null;
        LinkedElement next = null;

        LinkedElement(Integer key) {
            this.key = key;
        }
    }
    LinkedElement head = null; // First element in list
    LinkedElement tail = null; // Last element in list

    void insert(int k) { // O(1)
        LinkedElement elem = new LinkedElement(k);
        if (head == null) {
            head = elem;
            tail = elem;
        }
        else {
            tail.next = elem;
            tail = elem;
        }
    }

    void delete(int k) { // O(n)
        LinkedElement prev = null;
        LinkedElement curr = head;
        while (curr != null && curr.key != k) {
            prev = curr;
            curr = curr.next;
        }
        if (curr == null)
            throw new UException("Element not found");

        if (prev != null) {
            prev.next = curr.next;
            if (curr == tail)
                tail = prev;
        } else {
            head = curr.next;
        }
    }

    LinkedElement search(int k) { // O(n)
        LinkedElement curr = head;
        while (curr != null && curr.key != k)
            curr = curr.next;
        if (curr == null)
            throw new UException("Element not found");
        return curr;
    }
}
```

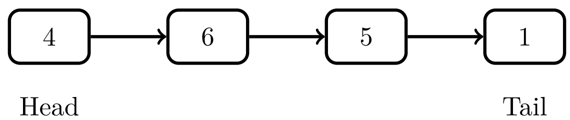
Diese Implementation benutzt einen Head und Tail, hat aber nur Referenz für das nächste Element in der Liste. Eine alternative Implementation wäre Tail wegzulassen und den Nodes eine previous-Referenz zu geben. Damit könnte man beim Einfügen das Element vorne an den Head anzuhängen und die neue Node als Head zuzuweisen. `search` bleibt gleich, bei `delete` muss lediglich die previous Referenz angepasst werden.



Linked List

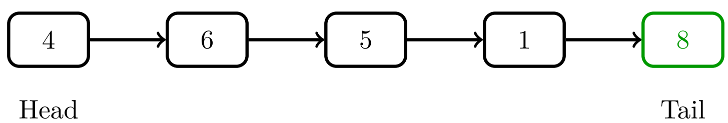


Delete Outcome



Delete Quasi Outcome

Die 3 Node wird zwar nicht wirklich "gelöscht", allerdings wird die Referenz aus der Liste genommen, wodurch keine Referenz mehr auf diese Node besteht.



Insert of 8

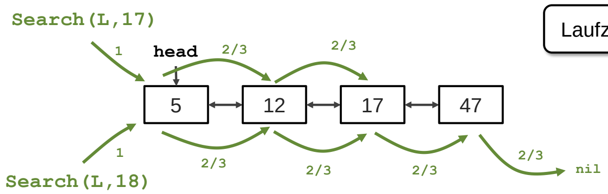
8 wird an tail angehängt und wird dann zum tail

Elementare Operationen auf verketteten Listen

```
search(L,k)   //returns pointer to k in L (or nil)

current=L.head;

WHILE current != nil AND current.key != k DO
    current=current.next;
return current;
```

short circuit evaluation (wie in Java)

Laufzeit= $\Theta(n)$

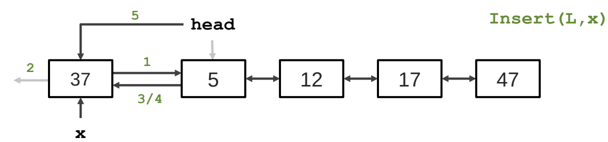


Elementare Operationen auf verketteten Listen

```
insert(L,x)    //inserts element x in L

x.next=L.head;
x.prev=nil;
IF L.head != nil THEN
   L.head.prev=x;
L.head=x;
```

call-by-reference bzw. call-by-value für Objekte wie in Java

Laufzeit= $\Theta(1)$

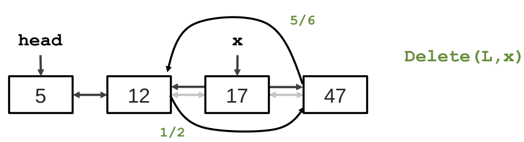


Elementare Operationen auf verketteten Listen

```
delete(L,x)   //deletes element x from L

IF x.prev != nil THEN
     x.prev.next=x.next
ELSE
     L.head=x.next;
IF x.next != nil THEN
     x.next.prev=x.prev;
```

Laufzeit= $\Theta(1)$

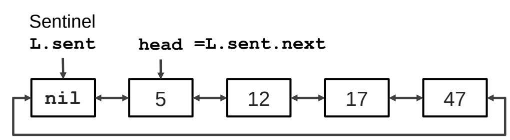
Achtung: Löschen eines **Wertes** `k` kostet Zeit $\Omega(n)$



Vereinfachung per Wächter/Sentinels

```
delete(L,x)   //deletes element x from L

IF x.prev != nil THEN
     x.prev.next=x.next
ELSE
     L.head=x.next;
IF x.next != nil THEN
     x.next.prev=x.prev;
```

Ziel: eliminiere die Spezialfälle für Listenanfang/-ende



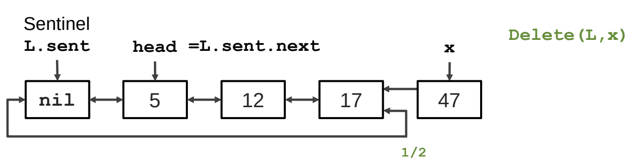
Sentinel ist „von außen“ nicht sichtbar

Leere Liste besteht nur aus Sentinel

Löschen mit Sentinels

```
deleteSent(L,x)
      // deletes x from L with sentinel

x.prev.next=x.next;
x.next.prev=x.prev;
```

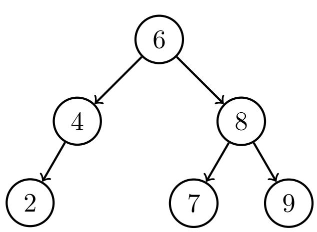
Andere Operationen wie Einfügen und Löschen müssen auch angepasst werden



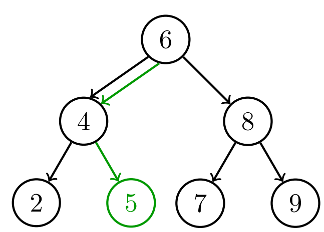
5.4 Binary Search Tree

Ein Binary Search Tree ist eine Datenstruktur, die aus mehreren Nodes besteht, die jeweils pointer zu drei Nodes besitzt: Left, Right und Parent.
Hierbei repräsentiert Left und Right die Nodes, die unter der current Node stehen und Parent die, die über der current Node steht. Dabei ist im Binary Search Tree (Im Gegensatz zum normalen Search Tree) Left immer kleiner als die Node und Right immer größer gleich der Node.
Dies erlaubt es Elemente in dem Tree schnell zu finden, da nicht alle Elemente durchlaufen werden müssen, sondern immer nur ein Pfad, bei dem das Element größer/kleiner ist.
Ein idealer Binary Search Tree ist so balanziert, dass beide Seiten des Baumes die selbe Anzahl an Knoten besitzen. Dies wäre eine ideale Höhe von $h = \log n$. Ein schlechter Binary Search Tree allerdings ist unbalanziert, so dass der Worst-Case so aussieht, dass alle Nodes jeweils maximal ein Kind haben. Dies wäre effektiv gleich einer LinkedList.

```
class BSTree {
    class BSTNode {
        Integer key;
        BSTNode left;
        BSTNode right;
        BSTNode parent;
        BSTNode(Integer k) {
            key = k;
        }
    }
    BSTNode root;
    void insert(BSTNode z) { // Omega(1), O(h), Theta(h)
        BSTNode x = root; // Traversal starting from the root
        BSTNode px = null; // Parent of x, initially null
        while(x != null) {
            px = x;
            if (z.key < x.key)
                x = x.left;
            else
                x = x.right;
        }// Traversing the tree until finding the insertion point
        z.parent = px; // Sets the parent of the node to be inserted
        if (px == null) // px only null if the tree is empty-> loop never runs -> z is root
            root = z;
        else if (z.key < px.key) // Key smaller -> left child
            px.left = z;
        else // Key bigger -> right child
            px.right = z;
        // May add the same node twice as it doesn't check for duplicates
    }
```

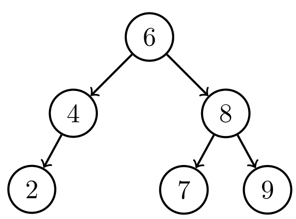


Before insert

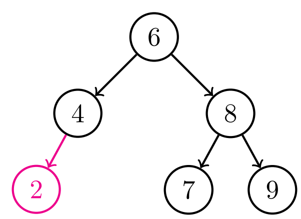


Insert 5

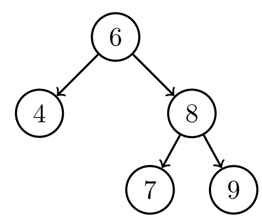
```java
void delete(BSTNode z) { // Omega(1), O(h), Theta(log n)
    if (z.left == null) // If z has no left, transplants the right to z's position
        transplant(z, z.right);
    else if (z.right == null) // If z has no right, transplants the left to z's position
        transplant(z, z.left);
    else { // If z has both left and right children
        BSTNode y = z.right;
        while (y.left != null)
            // Finds the next biggest element of z = smallest in right subtree of z
            y = y.left;
        if (y.parent != z) { // If the next biggest element y is not child of z
            transplant(y, y.right); // Transplants the right child of y to y's position
            y.right = z.right; // The right child of y becomes the right child of z
            y.right.parent = y; // The parent of the right child of y becomes y
        }
        transplant(z, y); // Transplants y to z's position
        y.left = z.left; // The left child of y becomes the left child of z
        y.left.parent = y; // The parent of the left child of y becomes y
    }
}
void transplant(BSTNode u, BSTNode v) { // O(1)
    // Transplants v to the parent of u
    if (u.parent == null) // If u is the root, v becomes the new root
        root = v;
    else if (u == u.parent.left) // If u is a left child, v becomes a left child
        u.parent.left = v;
    else // If u is a right child, v becomes a right child
        u.parent.right = v;
    if (v != null) // If v is not null, v becomes a child of u's parent
        v.parent = u.parent;
}
```



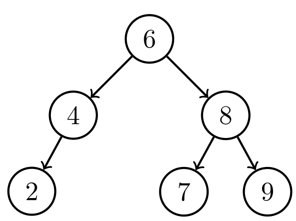
Leaf Deletion



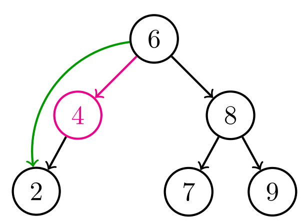
Delete 2



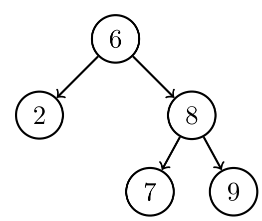
Result



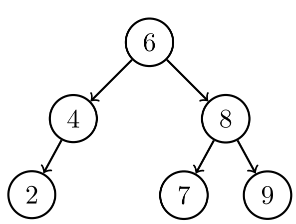
Half-Leaf Deletion



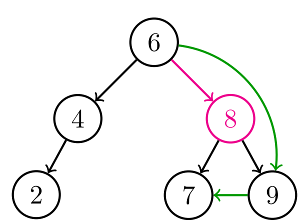
Delete 4



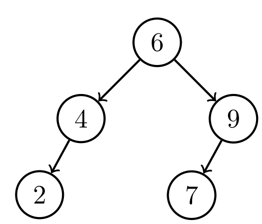
Result



Complete Node Deletion



Delete 8

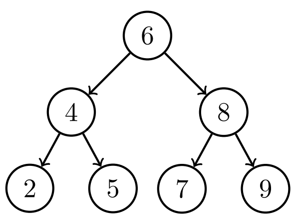


Result

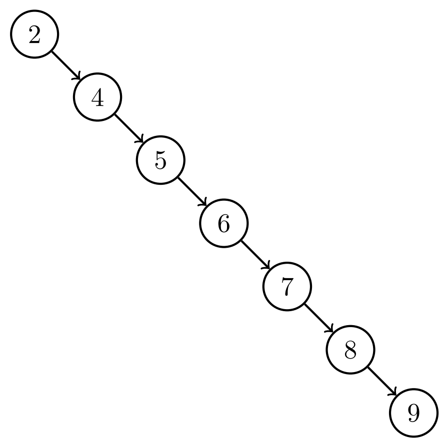
Leaves werden gelöscht, Half-Leaves durch Kind ersetzt, Complete Node durch Nachfolger (nächstgrößtes Element, kleinstes Element im rechten Teilbaum der Node) ersetzt.

```java
    BSTNode iterativeSearch(int k) { // O(h), Omega(1), Theta(log n)
        BSTNode curr = root;
        while (curr != null && curr.key != k) {
            if (k < curr.key)
                curr = curr.left;
            else
                curr = curr.right;
        }
        return curr; // Returns null if element not found
    }
    BSTNode recursiveSearch(int k, BSTNode curr) {// O(h), Omega(1), Theta(log n)
        if (curr == null)
            return null;
        if (k < curr.key)
            return recursiveSearch(k, curr.left);
        else if (k > curr.key)
            return recursiveSearch(k, curr.right);
        return curr; // Returns null if element not found
    }
```

```java
    void traversal(BSTNode curr) { // O(n)
        if (curr != null)
            return;
        // Any actions that should be done in a specific order can be done
        // Here for preorder traversal
        traversal(curr.left);
        // Here for inorder traversal
        traversal(curr.right);
        // Here for postorder traversal
        // Left and right can also be exchanged to traverse in reverse order
    }
}
```



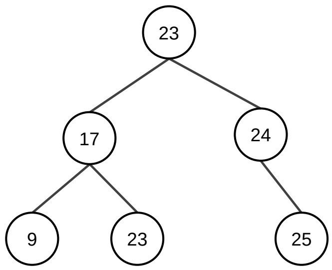
Ideal balanzierter BST ($h = \log n$)



Worst-Case unbalanzierter BST($h = n$)

Inorder-Traversieren von Binärbäumen

Beispielanwendung: Serialisierung



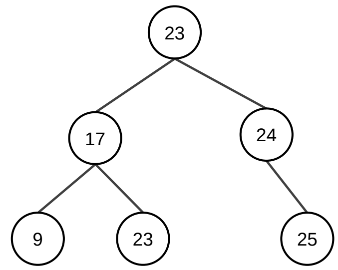

```
inorder(x)

IF x != nil THEN
     inorder(x.left);
     print x.key;
     inorder(x.right);
```

Bei Bedarf mit „Wrapper“
`inorderTree(T)=inorder(T.root)`

`inorder(T.root)` ergibt

9 17 23 23 24 25

Pre- und Postorder-Traversieren von Binärbäumen (II)




```
preorder(x)

IF x != nil THEN
     print x.key;
     preorder(x.left);
     preorder(x.right);
```

```
postorder(x)

IF x != nil THEN
     postorder(x.left);
     postorder(x.right);
     print x.key;
```

`preorder(T.root)` ergibt

23 17 9 23 24 25

`postorder(T.root)` ergibt

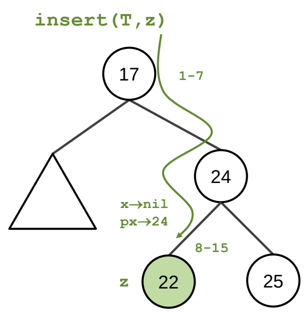
9 23 17 25 24 23

Iterative Suche im Binären Suchbaum

```
search(x,k)  //1.Aufruf x=root

IF x==nil OR x.key==k THEN
     return x;
IF x.key > k THEN
     return search(x.left,k)
ELSE
     return search(x.right,k);
```

```
iterative-search(x,k)  //Aufruf x=root

WHILE x != nil AND x.key != k DO
     IF x.key > k THEN
        x=x.left
     ELSE
        x=x.right;
return x;
```


Einfügen im BST

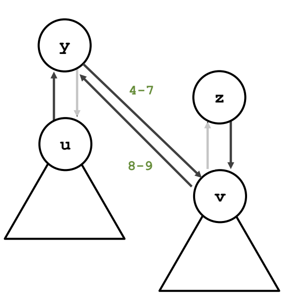



```
insert(T,z)
 //may insert z again
 //z.left==z.right==nil

1  x=T.root; px=nil;

2  WHILE x != nil DO
3      px=x;
4      IF x.key > z.key THEN
5         x=x.left
6      ELSE
7         x=x.right;
8  z.parent=px;
9  IF px==nil THEN
10     T.root=z
11 ELSE
12     IF px.key > z.key THEN
13        px.left=z
14     ELSE
15        px.right=z;
```

Laufzeit = $O(h)$

Löschen: Transplantation

hängt Teilbaum **v** an Elternknoten von **u**



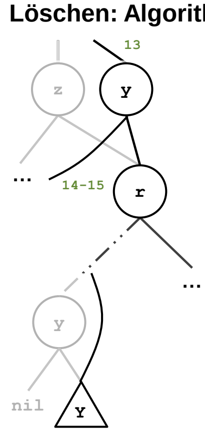

```
transplant(T,u,v)

1  IF u.parent==nil THEN
2     T.root=v
3  ELSE
4     IF u==u.parent.left THEN
5        u.parent.left=v
6     ELSE
7        u.parent.right=v;
8  IF v != nil THEN
9     v.parent=u.parent;
```

zur Erinnerung

Laufzeit = $\Theta(1)$

Löschen: Algorithmus (IV)

Laufzeit = $O(h)$




```
delete(T,z)

1  IF z.left==nil THEN
2     transplant(T,z,z.right)
3  ELSE
4     IF z.right==nil THEN
5        transplant(T,z,z.left)
6     ELSE
7        y=z.right;
8        WHILE y.left != nil DO y=y.left;

9        IF y.parent != z THEN
10          transplant(T,y,y.right);
11          y.right=z.right;
12          y.right.parent=y;
13       transplant(T,z,y);
14       y.left=z.left;
15       y.left.parent=y;
```

6 Fortgeschrittene Datenstrukturen

6.1 Red-Black Tree

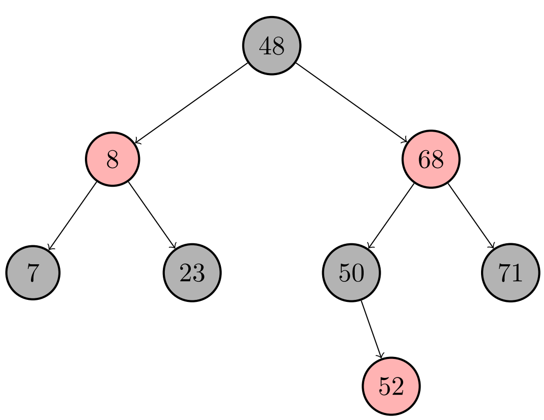
Ein Red-Black Tree ist eine Art Binary-Search Tree. Zusätzlich zu diesem besitzen die Nodes in einem RB Tree noch das Attribut `color`. Die Nodes werden also entweder als `red` oder `black` definiert. Dies dient zur Einhaltung der Red-Black-Regeln, durch die die Effizienz der Datenstruktur im Vergleich zum BST verbessert wird.
Die Regeln sind:

1. **Jeder Knoten ist entweder schwarz oder rot**
2. **Die Wurzel ist schwarz**
3. **Rote Knoten haben keine Roten Kinder**
4. **Jeder Pfad von einem Knoten zu seinen Nachkommen besitzt die selbe Anzahl an schwarzen Knoten**

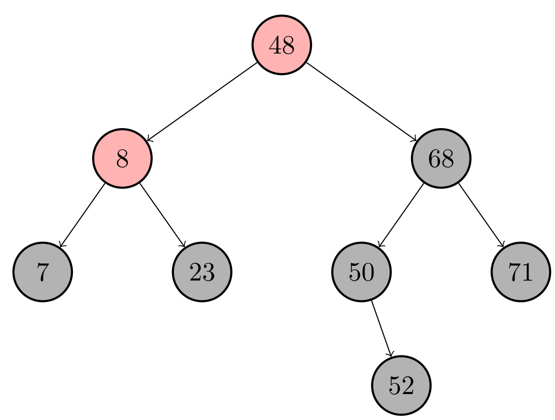
$\Longrightarrow$ Hat ein Knoten nur ein Kind, so muss dieses Kind Rot sein, ansonsten ist die Anzahl an schwarzen Knoten auf dem Pfad unterschiedlich zu den anderen Pfaden.

Der Vorteil von RBT zu BST ist, dass während ein BST unausgewogen sein kann, was in einem Worst-Case von $h = n$ resultiert, im RBT durch die Regeln eine maximale Höhe von $h = \log n$ sichergestellt, was die Worst-Case Laufzeit der Algorithmen deutlich verbessert.

```java
class RBTree {
    class RBNode {
        Integer key;
        RBNode left;
        RBNode right;
        RBNode parent;
        Color color;
        RBNode(Integer k) {
            key = k;
        }
    }
    RBNode sent;
    RBNode root = null;
    RBTree() {
        sent = new RBNode(null);
        sent.color = Color.BLACK;
        sent.left = sent;
        sent.right = sent;
        // Sentinel always points to itself ->
        // node.parent.parent and its children will never result in null references
    }
    // Traversal and search are the same as BSTree
```



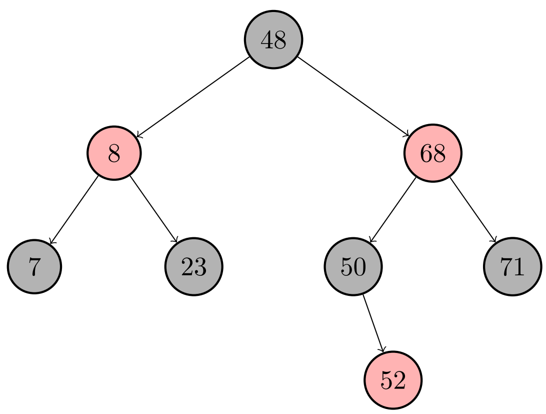
Richtig Konstruierter RBT



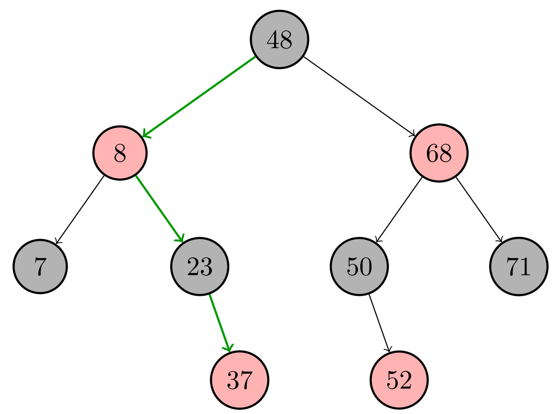
Falsch Konstruierter RBT

```java
void insert(RBNode z) { // Omega(1), O(log n), Theta(log n)
    // Very similar to BSTree, with addition of color and parent of sentinel instead of null
    RBNode x = root; // Traversal starting from the root
    RBNode px = sent; // Parent of x, initially sentinel unlike BST
    while (x != null) {
        px = x;
        if (z.key < x.key)
            x = x.left;
        else
            x = x.right;
    }// Traversing the tree until finding the insertion point
    z.parent = px; // Sets the parent of the node to be inserted
    if (px == sent) // px only sentinel if the tree is empty -> loop never runs -> z is root
        root = z;
    else if (z.key < px.key) // Key smaller -> left child
        px.left = z;
    else // Key bigger -> right child
        px.right = z;
    z.color = Color.RED; // Sets color of new Node to red, will not necessarily stay red
    fixColorsAfterInsertion(z); // Fixes colors in tree after insertion to maintain RB properties
    // May add the same node twice as it doesn't check for duplicates
}
```

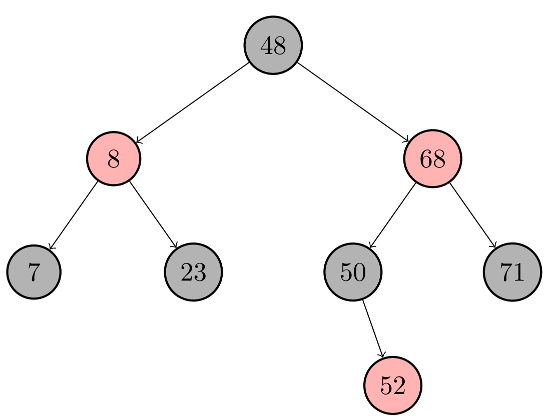
Einfügen funktioniert grundlegend gleich zu BST, allerdings wird am Ende die Farbe des neuen Knotens auf rot gesetzt und anschließend die Regeln des RBTs (falls verletzt) wieder hergestellt.



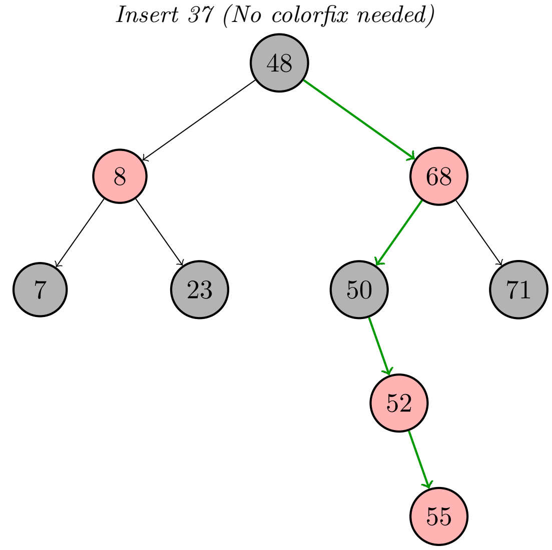
Before



Insert 37 (No colorfix needed)

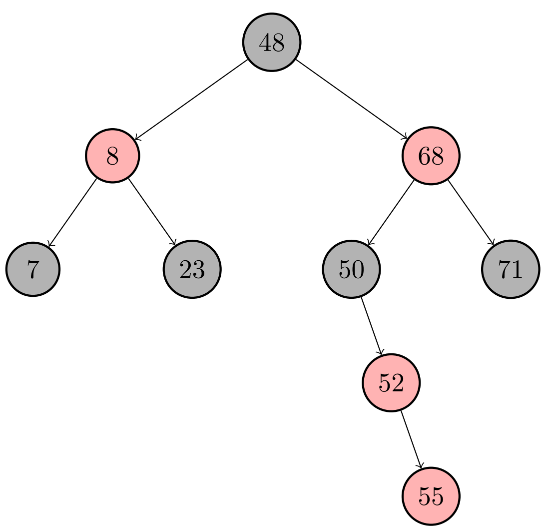


Before

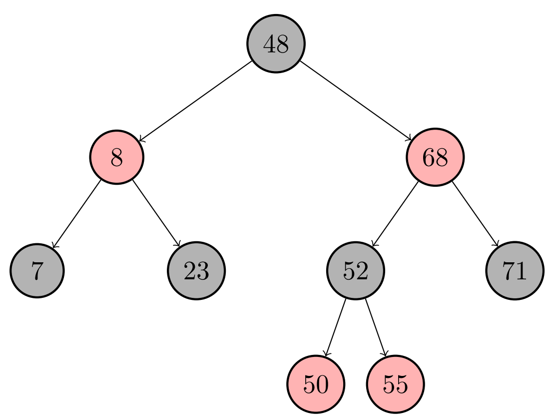


Insert 55 (Colorfix needed)

```java
void fixColorsAfterInsertion(RBNode z) { // Omega(1), O(log n), Theta(log n)
    while (z.parent.color == Color.RED) { // While z's parent is red
        if (z.parent == z.parent.parent.left) { // If z's parent is a left child
            RBNode y = z.parent.parent.right; // Gets sibling of z's parent
            if (y != null && y.color == Color.RED) { // CASE 1: z's parent is a left child and sibling is red
                z.parent.color = Color.BLACK; // Set z's parent to black
                y.color = Color.BLACK; // Set z's uncle to black
                z.parent.parent.color = Color.RED; // Set z's grandparent to red
                z = z.parent.parent; // Set z to z's grandparent
            } else { // CASE 2: z's parent is a left child and sibling is black
                if (z == z.parent.right) { // If z is a right child
                    z = z.parent; // Set z to z's parent
                    rotateLeft(z); // Rotate new z to left
                }
                z.parent.color = Color.BLACK; // Set z's parent to black
                z.parent.parent.color = Color.RED; // Set z's grandparent to red
                rotateRight(z.parent.parent); // Rotate z's grandparent to right
            }
        } else { // If z's parent is a right child
            // Same as above but with right and left exchanged
            RBNode y = z.parent.parent.left;
            if (y != null && y.color == Color.RED) { // CASE 3: z's parent is a right child and sibling is red
                z.parent.color = Color.BLACK;
                y.color = Color.BLACK;
                z.parent.parent.color = Color.RED;
                z = z.parent.parent;
            } else { // CASE 4: z's parent is a right child and sibling is black
                if (z == z.parent.left) {
                    z = z.parent;
                    rotateRight(z);
                }
                z.parent.color = Color.BLACK;
                z.parent.parent.color = Color.RED;
                rotateLeft(z.parent.parent);
            }
        }
    }
    root.color = Color.BLACK; // Set root to black, as it always should be
}
```



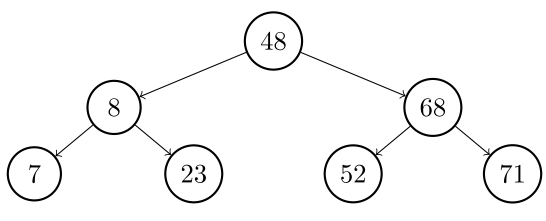
Fix needed at 55



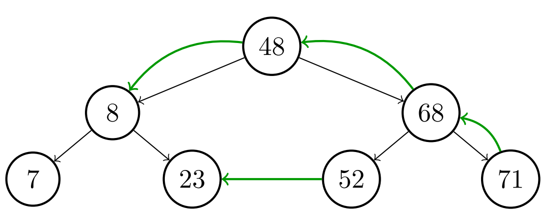
Fixed (Case 4)

Zum Wiederherstellen der RBT-Regeln muss der Baum an bestimmten Knoten rotiert werden.

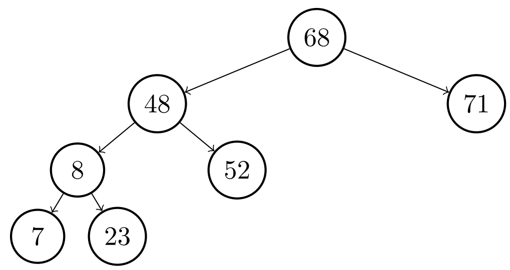
```java
void rotateLeft(RBNode x) { // O(1)
    RBNode y = x.right;
    x.right = y.left; // Set x's right child to y's left child
    if (y.left != null) // If y has a left child
        y.left.parent = x; // Set y's left child's parent to x
    y.parent = x.parent; // Set y's parent to x's parent
    if (x.parent == sent) // If x is the root, set y to be the root
        root = y;
    else if (x == x.parent.left) // If x is a left child, set x's parent's left child to y
        x.parent.left = y;
    else // If x is a right child, set x's parent's right child to y
        x.parent.right = y;
    y.left = x; // Set y's left child to x
    x.parent = y; // Set x's parent to y
}
void rotateRight(RBNode x) { // O(1)
    // Same as rotateLeft but with right and left exchanged
    RBNode y = x.left;
    x.left = y.right;
    if (y.right != null)
        y.right.parent = x;
    y.parent = x.parent;
    if (x.parent == sent)
        root = y;
    else if (x == x.parent.right)
        x.parent.right = y;
    else
        x.parent.left = y;
    y.right = x;
    x.parent = y;
}
```



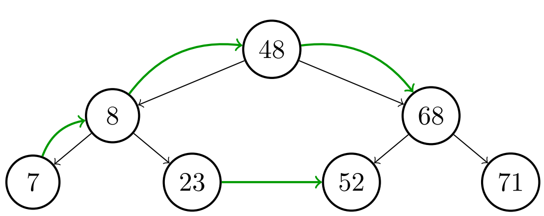
Before



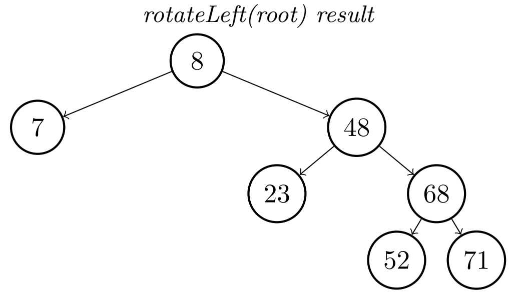
rotateLeft(root)



rotateLeft(root) result

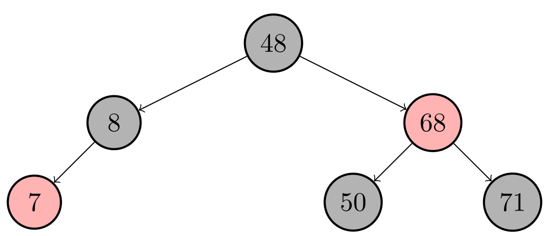


rotateRight(root)

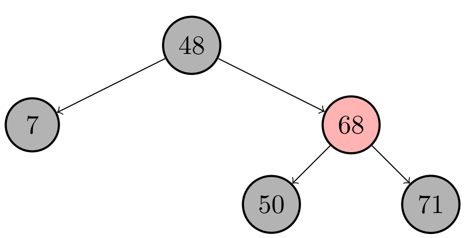


rotateRight(root) result

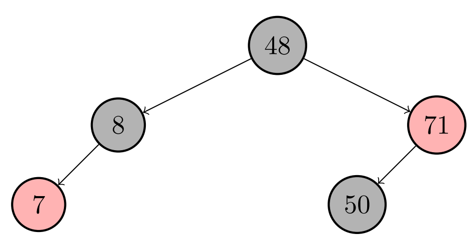
```java
void delete(RBNode z) { // Omega(1), O(log n), Theta(log n)
    RBNode a = z.parent; // a represent node with black depth imbalance
    int dbh = 0; // delta black height, -1 for right, 1 for left leaning
    if (z.left == null && z.right == null) { // CASE 1: z is a leaf
        if (z.color == Color.BLACK && z != root) { // If z is black
            if (z == z.parent.left) // If z is a left child
                dbh = -1; // Set delta black height to -1
            else // If z is a right child
                dbh = 1; // Set delta black height to 1
        }
        transplant(z, null); // Transplant null to zs parent
    } else if (z.left == null) { // CASE 2: z only has a right child
        RBNode y = z.right;
        transplant(z, z.right);
        y.color = z.color;
    } else if (z.right == null) { // CASE 3: z only has a left child
        RBNode y = z.left;
        transplant(z, z.left);
        y.color = z.color;
    } else { // CASE 4: z has two children
        RBNode y = z.right;
        a = y;
        boolean wentLeft = false;
        while (y.left != null) { // find next biggest Node
            a = y;
            y = y.left;
            wentLeft = true;
        }
        if (y.parent != z) { // If next biggest element is not child of z
            transplant(y, y.right);
            y.right = z.right;
            y.right.parent = y;
        }
        transplant(z, y);
        y.left = z.left;
        y.left.parent = y;
        if (y.color == Color.BLACK) {
            if (wentLeft) // Tree imbalanced depending on y location
                dbh = -1;
            else
                dbh = 1;
        }
        y.color = z.color;
    }
    if (dbh != 0) // If black height imbalance
        fixColorsAfterDeletion(a, dbh);
}
```



Before



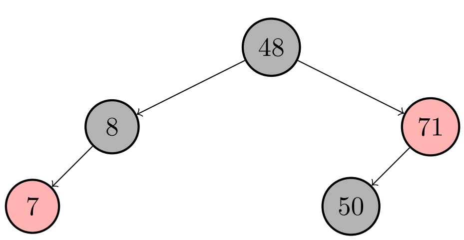
Delete 8 (No colorfix needed, Case 3)



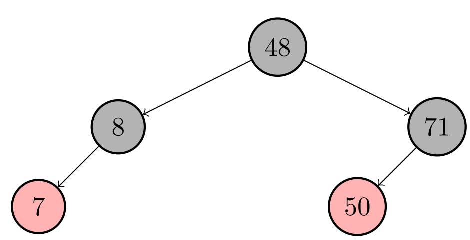
Delete 68 (Colorfix needed, Case 4, dbh = 1, skewed left)

```java
    void fixColorsAfterDeletion(RBNode a, int dbh) { // Omega(1), O(log n), Theta(log n)
        if (dbh == -1) { // Extra black node on the right
            RBNode x = a.left;
            RBNode b = a.right;
            RBNode c = b.left; // Left child of right child of a
            RBNode d = b.right; // Right child of right child of a
            if (x != null && x.color == Color.RED) {
                // Easy case: x is red
                x.color = Color.BLACK;
            } else if (a.color == Color.BLACK
                    && b.color == Color.RED) {
                // Case 1: a black, b red
                rotateLeft(a);
                a.color = Color.RED;
                b.color = Color.BLACK;
                fixColorsAfterDeletion(a, dbh);
            } else if (a.color == Color.RED
                    && b.color == Color.BLACK
                    && (c == null || c.color == Color.BLACK)
                    && (d == null || d.color == Color.BLACK)) {
                // Case 2a: a red, b black, c and d black
                a.color = Color.BLACK;
                b.color = Color.RED;
            } else if (a.color == Color.BLACK
                    && b.color == Color.BLACK
                    && (c == null || c.color == Color.BLACK)
                    && (d == null || d.color == Color.BLACK)) {
                // Case 2b: a black, b black, c and d black
                b.color = Color.RED;
                if (a == a.parent.left)
                    dbh = 1;
                else if (a == a.parent.right)
                    dbh = -1;
                else
                    dbh = 0;
                fixColorsAfterDeletion(a.parent, dbh);
            } else if (b.color == Color.BLACK
                    && c != null && c.color == Color.RED
                    && (d == null || d.color == Color.BLACK)) {
                // Case 3: a either, b black, c red, d black
                rotateRight(b);
                c.color = Color.BLACK;
                fixColorsAfterDeletion(a, dbh);
            } else if (b.color == Color.BLACK
                    && d!= null && d.color == Color.RED) {
                // Case 4: a either, b black, c either, d red
                rotateLeft(a);
                b.color = a.color;
                a.color = Color.BLACK;
                d.color = Color.BLACK;
                }
```

```java
        } else { // Extra black node on the left
            // Same as above but with right and left exchanged
            RBNode x = a.right;
            RBNode b = a.left;
            RBNode c = b.right; // Right child of left child of a
            RBNode d = b.left; // Left child of left child of a
            if (x != null && x.color == Color.RED) {
                // Easy case: x is red
                x.color = Color.BLACK;
            } else if (a.color == Color.BLACK
                    && b.color == Color.RED) {
                // Case 1: a black, b red
                rotateRight(a);
                a.color = Color.RED;
                b.color = Color.BLACK;
                fixColorsAfterDeletion(a, dbh);
            } else if (a.color == Color.RED
                    && b.color == Color.BLACK
                    && (c == null || c.color == Color.BLACK)
                    && (d == null || d.color == Color.BLACK)) {
                // Case 2a: a red, b black, c and d black
                a.color = Color.BLACK;
                b.color = Color.RED;
            } else if (a.color == Color.BLACK
                    && b.color == Color.BLACK
                    && (c == null || c.color == Color.BLACK)
                    && (d == null || d.color == Color.BLACK)) {
                // Case 2b: a black, b black, c and d black
                b.color = Color.RED;
                if (a == a.parent.right)
                    dbh = 1;
                else if (a == a.parent.left)
                    dbh = -1;
                else
                    dbh = 0;
                fixColorsAfterDeletion(a.parent, dbh);
            } else if (b.color == Color.BLACK
                    && c != null && c.color == Color.RED
                    && (d == null || d.color == Color.BLACK)) {
                // Case 3: a either, b black, c red, d black
                rotateLeft(b);
                c.color = Color.BLACK;
                fixColorsAfterDeletion(a, dbh);
            } else if (b.color == Color.BLACK
                    && d!= null && d.color == Color.RED) {
                // Case 4: a either, b black, c either, d red
                rotateRight(a);
                b.color = a.color;
                a.color = Color.BLACK;
                d.color = Color.BLACK;
            }
        }
        // All cases except 2b mean end of the method in this or the next instance. 2b can go on tho.
    }
```



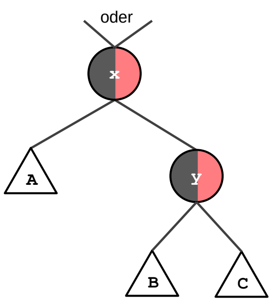
Before fix



Fixed (Case 2a)

```
    void transplant(RBNode u, RBNode v) { // O(1)
        // Transplants v to the position of u
        if (u.parent == sent) // If u is the root, v becomes the new root
            root = v;
        else if (u == u.parent.left) // If u is a left child, v becomes a left child
            u.parent.left = v;
        else // If u is a right child, v becomes a right child
            u.parent.right = v;
        if (v != null) // If v is not null, v becomes a child of u's parent
            v.parent = u.parent;
    }
}
```

Rotation: Algorithmus (I)




```
rotateLeft(T,x) //x.right!=nil

y=x.right;
x.right=y.left;
IF y.left != nil THEN
    y.left.parent=x;
y.parent=x.parent;
IF x.parent==T.sent THEN
    T.root=y
ELSE
    IF x==x.parent.left THEN
        x.parent.left=y
    ELSE
        x.parent.right=y;
y.left=x;
x.parent=y;
```

Laufzeit = $\Theta(1)$

Einfügen

Funktioniert wie beim binären Suchbaum (mit Sentinel)

```
insert(T,z)
//z.left==z.right==nil;

x=T.root; px=T.sent;
WHILE x != nil DO
     px=x;
     IF x.key > z.key THEN
        x=x.left
     ELSE
        x=x.right;
z.parent=px;
IF px==T.sent THEN
     T.root=z
ELSE
     IF px.key > z.key THEN
        px.left=z
     ELSE
        px.right=z;
z.color=red;
fixColorsAfterInsertion(T,z);
```

Änderung:
Farbe des neuen Knoten auf rot setzen, dann RSB-Bedingung wieder herstellen

Aufräumen

```
fixColorsAfterInsertion(T,z)

WHILE z.parent.color==red DO
  IF z.parent==z.parent.parent.left THEN
      y=z.parent.parent.right;
      IF y!=nil AND y.color==red THEN
         z.parent.color=black;
         y.color=black;
         z.parent.parent.color=red;
         z=z.parent.parent;
      ELSE
         IF z==z.parent.right THEN
             z=z.parent;
             rotateLeft(T,z);
         z.parent.color=black;
         z.parent.parent.color=red;
         rotateRight(T,z.parent.parent);
  ELSE
      … //exchange left and right
T.root.color=black;
```


Löschen: Transplant mit Sentinels

```
transplant(T,u,v) //with Sent

IF u.parent==T.sent THEN
   T.root=v
ELSE
   IF u==u.parent.left THEN
      u.parent.left=v
   ELSE
      u.parent.right=v;
IF v != nil THEN
   v.parent=u.parent;
```

Zur Erinnerung:
funktioniert auch, wenn
`v==nil`

Löschen: Algorithmus (I)

`a` Zeiger auf Knoten, in dem „tiefste“ Imbalance entstehen könnte

`dsh` =ΔSH für Knoten `a` (`nil`=0, `left`=+1, `right`=–1)

```
delete(T,z)

a=z.parent; dsh=nil;
IF z.left==z.right==nil THEN // z leaf
   IF z.color==black AND z!=T.root THEN
      IF z.parent.left==z THEN dsh=right ELSE dsh=left;
   transplant(T,z,nil);
ELSE IF z.left==nil THEN   // z half leaf
   y=z.right;
   transplant(T,z,z.right);
   y.color=z.color;
ELSE IF z.right==nil THEN  //z half leaf
   y=z.left;
   transplant(T,z,z.left);
   y.color=z.color;
ELSE …
```

In den Fällen muss `y.color==red` sein, sonst SH-Regel verletzt; einfach `y` umhängen und Farbe von `z` kopieren

Löschen: Algorithmus (II)

Analog zu BST

```
…
ELSE // z has two children
   y=z.right; a=y; wentleft=false;
   WHILE y.left != nil DO
      a=y; y=y.left; wentleft=true;
   IF y.parent != z THEN
      transplant(T,y,y.right);
      y.right=z.right;
      y.right.parent=y;
   transplant(T,z,y);
   y.left=z.left;
   y.left.parent=y;
   IF y.color==black THEN
      IF wentleft THEN dsh=right ELSE dsh=left;
   y.color=z.color;
IF dsh!=nil THEN fixColorsAfterDeletion(T,a,dsh);
```

Fallunterscheidung nach `y` rechtes oder linkes Kind

erzeugt Imbalance, je nachdem, ob `y` rechtes oder linkes Kind war

Löschen: Farben korrigieren (I)

notwendig: `b!=nil` für `dsh=right`

```
fixColorsAfterDeletion(T,a,dsh)

IF dsh==right THEN //extra black node on the right
  x=a.left; b=a.right; c=b.left; d=b.right;
  IF x!=nil AND x.color==red THEN
     x.color=black;
  ELSE IF a.color==black AND b.color==red THEN
     rotateLeft(T,a);
     a.color=red; b.color=black;
     fixColorsAfterDeletion(T,a,dsh);
  ELSE IF a.color==red AND b.color==black
          AND (c==nil OR c.color==black)
          AND (d==nil OR d.color==black) THEN
     a.color=black; b.color=red;
  ELSE IF …
```

einfacher Fall: `x` ist rot

Fall I: `a` schwarz, `b` rot

Fall IIa: `a` rot, `b` schwarz, `c,d` nicht rot

außer im Fall IIb führen rekursive Aufrufe im nächsten Schritt zum Rekursionsende

Löschen: Farben korrigieren (II)

```
fixColorsAfterDeletion(T,a,dsh)
…
 ELSE IF a.color==black AND b.color==black
        AND (c==nil OR c.color==black)
        AND (d==nil OR d.color==black) THEN
    b.color=red;
    IF a==a.parent.left THEN dsh=left
    ELSE IF a==a.parent.right THEN dsh=right ELSE dsh=nil;
    fixColorsAfterDeletion(T,a.parent,dsh);
 ELSE IF b.color==black AND c!=nil AND c.color==red
        AND (d==nil OR d.color==black) THEN
    rotateRight(T,b);
    c.color=black; b.color=black;
    fixColorsAfterDeletion(T,a,dsh);
 ELSE IF b.color==black AND d!=nil AND d.color==red THEN
    rotateLeft(T,a);
    b.color=a.color; a.color=black; d.color=black;
ELSE // dsh==left, extra black node on the left
   … //exchange left and right
```

Fall IIb: `a, b` schwarz, `c,d` nicht rot

Fall III: `b` schwarz, `c` rot, `d` nicht rot

Fall IV: `b` schwarz, `d` rot

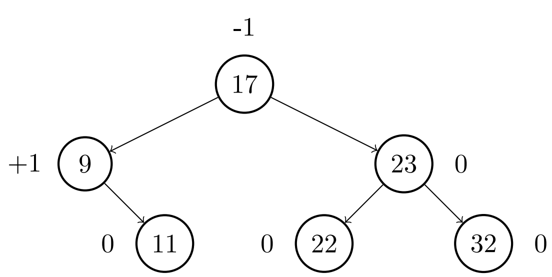
Fall linkslastig

6.2 AVL Trees

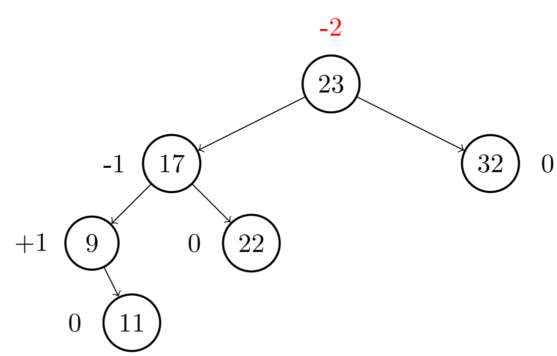
Ein **A**delson-**V**elsky **L**andis Tree ist ein BST, der sich selbst balanziert um eine Höhe von $h = \log n$ zu garantieren. Er wird so definiert, **dass die Höhendifferenz von zwei Teilbäumen unter einem Knoten jeweils maximal 1 ist**.
Im Vergleich zu RBT ist der AVLT in der Höhe strikter. So ist die maximale Höhe im AVL $h = 1.44 \cdot \log n$, während er im RBT nur $2 \cdot \log n$. So haben AVLTs zwar die bessere Effizienz in Suchvorgängen, jedoch benötigen sie beim Insert oder Delete meist mehr Rotationen. Demnach bieten sich AVLTs eher bei Fällen an, wo mehr Suchvorgänge stattfinden im Vergleich zu den Insert/Delete Vorgängen. Muss der Baum oft modifiziert werden so bietet sich ein RBT besser an.

```java
class AVLTree {
    class AVLNode {
        Integer key;
        int height;
        AVLNode left;
        AVLNode right;
        AVLNode(Integer k) {
            key = k;
            height = 1;
        }
    }
    AVLNode root;
    // Search and traversal like in BST
    int height(AVLNode n) {
        return (n == null) ? -1 : n.height;
    }
    void updateHeight(AVLNode n) {
        n.height = 1 + Math.max(height(n.left), height(n.right));
    }
    int getBalance(AVLNode n) {
        return (n == null) ? 0 : height(n.right) - height(n.left);
    }
```

Visuell gleich zu einem Best-Case ausgewogenen BST.



Balanced Tree



Unbalanced Tree

```java
// Rotations work a bit different as in other Trees as we don't have parents.
// Does not update the tree itself -> just returns the new root of the rotated subtree
// Does not need to check for null reference as right.left/left.right respectively
// are always well defined when called in insert and delete
AVLNode rotateLeft(AVLNode x) { // O(1)
    AVLNode y = x.right;
    AVLNode z = y.left;
    y.left = x;
    x.right = z;
    updateHeight(x);
    updateHeight(y);
    return y;
}
AVLNode rotateRight(AVLNode x) { // O(1)
    AVLNode y = x.left;
    AVLNode z = y.right;
    y.right = x;
    x.left = z;
    updateHeight(x);
    updateHeight(y);
    return y;
}
```

Während die Function ein wenig abgeändert ist, ist das Endergebnis bei richtiger Anwendung (nicht inPlace) gleich.

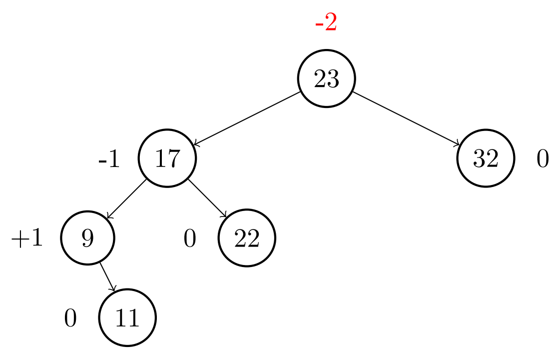
```java
AVLNode insert(AVLNode partRoot, int key) { // O(h) = O(log(n))
    if (partRoot == null) // Found insertion point
        return new AVLNode(key);
    else if (key < partRoot.key) // If node smaller than partRoot -> go left
        partRoot.left = insert(partRoot.left, key);
    else if (key > partRoot.key) // If node bigger than partRoot -> go right
        partRoot.right = insert(partRoot.right, key);
    else // If node == partRoot -> throw exception
        throw new UException("Duplicate node");
    return fixBalance(partRoot);
    // Rebalance every node above the inserted node.
}
```

Funktioniert prinzipiell gleich zu den anderen Trees, aber ist nicht in-place und muss zusätzlich noch alle subtrees balanzieren.

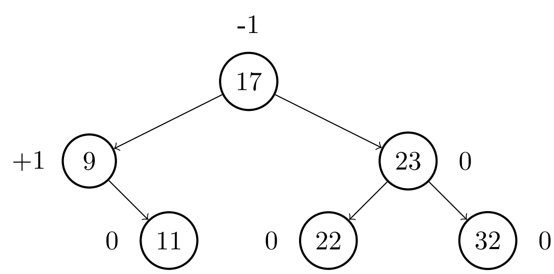
```java
AVLNode delete(AVLNode node, int key) { // O(h) = O(log(n))
    if (node == null) {// Node not found
        return node;
    } else if (key < node.key) {
        node.left = delete(node.left, key);
    } else if (key > node.key) {
        node.right = delete(node.right, key);
    } else { // Node found -> Commence deletion
        if (node.left == null || node.right == null) // If half leaf or leaf
            node = (node.left == null) ? node.right : node.left;
        else { // If complete node
            AVLNode next = node.right;
            while (next.left != null) {
                next = next.left;
            }
            node.key = next.key;
            node.right = delete(node.right, next.key);
        }
    }
    return fixBalance(node); // Rebalance every node above the deleted node
}
```

Wie bei rotate und insert, prinzipiell gleich zu den anderen Trees, aber ist nicht in-place und muss zusächlich alle subtrees balanzieren.

```
    AVLNode fixBalance(AVLNode z) { // O(1)
        updateHeight(z);
        int balance = getBalance(z);
        if (balance > 1) { // If right heavy
            if (height(z.right.right) > height(z.right.left)) {
                z = rotateLeft(z);
            } else {
                z.right = rotateRight(z.right);
                z = rotateLeft(z);
            }
        } else if (balance < -1) { // If left heavy
            if (height(z.left.left) > height(z.left.right)) {
                z = rotateRight(z);
            } else {
                z.left = rotateLeft(z.left);
                z = rotateRight(z);
            }
        }
        return z;
    }
}
```



Unbalanced Tree after insert of 11



Balanced Tree after fixup

Einfügen: Laufzeit

Gesamtlaufzeit $O(h) = O(\log n)$

Laufzeit = $O(h)$

Laufzeit = $O(h)$, da Suche nach unbalanciertem Knoten Richtung Wurzel in $O(h)$, und Rebalancieren nur einmal nötig

```
insert(T,z)
//z.left==z.right==nil;

x=T.root; px=T.sent;
WHILE x != nil DO
    px=x;
    IF x.key > z.key THEN
       x=x.left
    ELSE
       x=x.right;
z.parent=px;
IF px==T.sent THEN
    T.root=z
ELSE
    IF px.key > z.key THEN
       px.left=z
    ELSE
       px.right=z;
fixBalanceAfterInsertion(T,z);
```

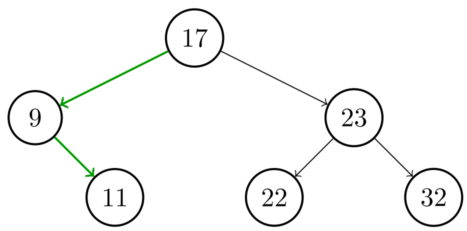
6.3 Splay Trees

Splay Trees sind BSTs, die sich mit jedem Aufruf neu reorganisieren. Dies tun sie indem sie das betrachtete Element an die Wurzel verschieben. So ist der Splay Tree nicht unbedingt wie RBT und AVLT gut balanziert, jedoch besonders effektiv, wenn einige Elemente öfters gesucht werden als andere. Da diese Bäume sich nicht wirklich selbst balanzieren, sind Splay Trees ungeeignet für Fälle wo alle Werte ungefähr gleich viel gesucht werden, da im Durchschnitt mehr Zeit gebraucht wird ein Wert zu finden und diesen an die Wurzel zu verschieben als in anderen Trees.

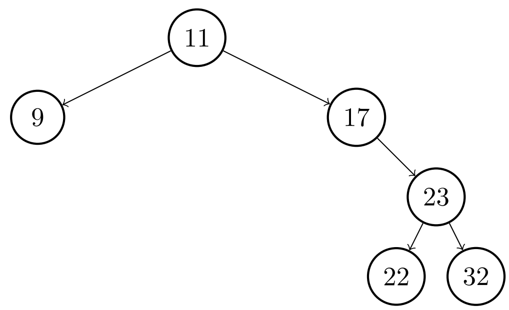
```java
class SplayTree extends BSTree {
    //Same Nodes as BSTree
    void splay(BSTNode z) { // O(h)
        while(z != root) {
            if (z.parent.parent == null) // If father is root
                zig(z);
            else {
                if (z == z.parent.parent.left.left || z == z.parent.parent.right.right)
                    zigZig(z);
                else
                    zigZag(z);
            }
        }
    }
    void zig(BSTNode z) { // O(1)
        if (z == z.parent.left)
            rotateRight(z.parent);
        else
            rotateLeft(z.parent);
    }
    void zigZig(BSTNode z) { // O(1)
        if (z == z.parent.left) {
            rotateRight(z.parent.parent);
            rotateRight(z.parent);
        } else {
            rotateLeft(z.parent.parent);
            rotateLeft(z.parent);
        }
    }
    void zigZag(BSTNode z) { // O(1)
        if (z == z.parent.left) {
            rotateRight(z.parent);
            rotateLeft(z.parent.parent);
        } else {
            rotateLeft(z.parent);
            rotateRight(z.parent.parent);
        }
    }
    //Rotate works the same as in RBTree
```

Sieht visuell praktisch wie ein normaler BST aus.

```java
BSTNode search(int key) { // O(h), like BSTree, with additional splay
    BSTNode x = root;
    while(x != null && x.key != key) {
        if (key < x.key)
            x = x.left;
        else
            x = x.right;
    }
    if (x == null)
        return null;
    splay(x);
    return root; // After splay the root is the searched node
}
```

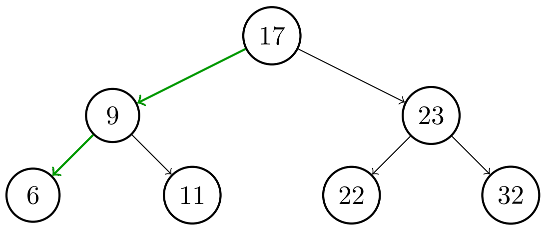


Search for 11

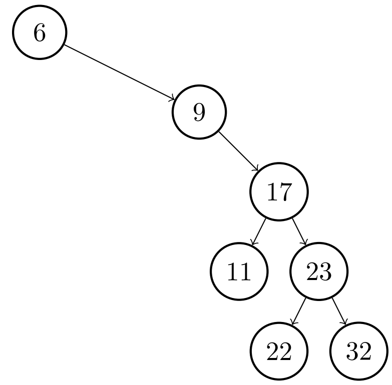


Splay 11 (zigzag)

```
void insert (BSTNode z) { // O(h)
    super.insert(z); // Inserts node using BSTrees insert
    splay(z); // Splays node to the root
}
```

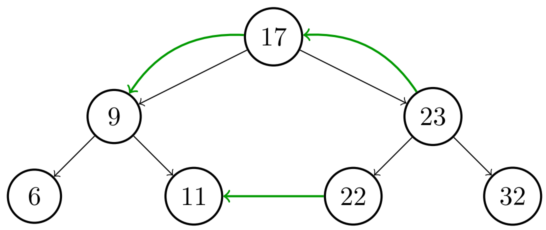


Insert 6

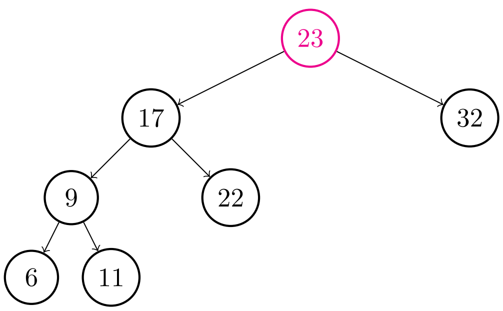


Splay 6 (zigzig)

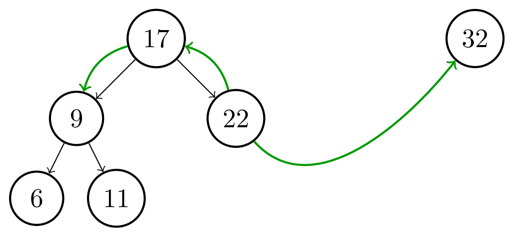
```java
    void delete (BSTNode z) { // O(h)
        splay(z);
        BSTNode r = root.right; // Save right child
        BSTNode biggestL = root.left; // Save left child
        root.right.parent = null; // Remove parent reference of right child of root
        root.left.parent = null; // Remove parent reference of left child of root
        root = biggestL; // Set root to left child
        while (biggestL.right != null) // Get biggest node in left subtree
            biggestL = biggestL.right;
        splay(biggestL); // Splay biggest node -> becomes root
        root.right = r; // Put right subtree back in place
        r.parent = root; // Change parent of right subtree root
    }
}
```



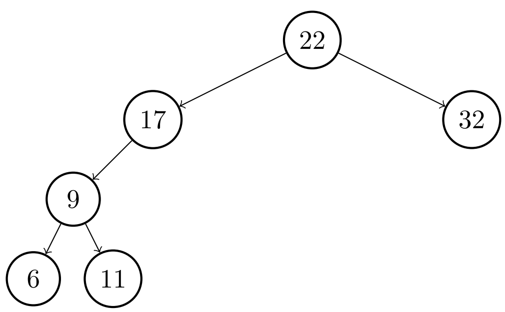
Before delete 23



Splay 23 (zig)



delete 23



Splay biggest node in left subtree (22) and append right subtree

Splay-Operation

Gesamtlaufzeit $O(h)$

```
splay(T,z)

WHILE z != T.root DO
   IF z.parent.parent==nil THEN
      zig(T,z);
   ELSE
      IF z==z.parent.parent.left.left OR
         z==z.parent.parent.right.right THEN
         zigZig(T,z);
      ELSE
         zigZag(T,z);
```

Laufzeit:
Bei jeder Iteration wird **z** mindestens einen Level nach oben rotiert

```
zigZig(T,z)

IF z==z.parent.left THEN
   rotateRight(T,z.parent.parent);
   rotateRight(T,z.parent);
ELSE
   rotateLeft(T,z.parent.parent);
   rotateLeft(T,z.parent);
```

zig und **zigZag** analog

Suchen

```
search(T,k)

x=T.root;

WHILE x != nil AND x.key != k DO
   IF x.key < k THEN
      x=x.right
   ELSE
      x=x.left;

IF x==nil THEN
   return nil
ELSE
   splay(T,x);
   return T.root;
```

Laufzeit $O(h)$

Alternativ: „splaye“ dann letzten besuchten Knoten bei erfolgloser Suche nach oben

Laufzeit $O(h)$

Gesamtlaufzeit $O(h)$

6.4 Binary Heap Trees

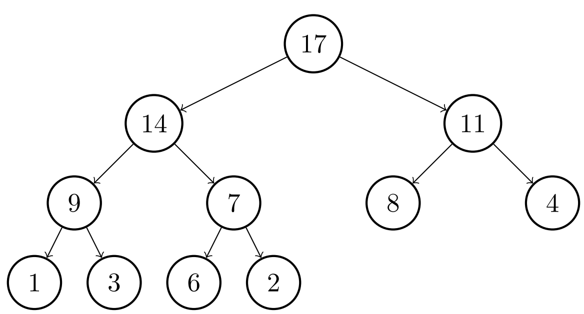
Im Allgemeinen ist ein Binary Heap wie folgt definiert:

- Bis auf das unterste Level ist der Baum vollständig gefüllt und im untersten Level ist er von links befüllt.
- $\forall x \neq root : x.parent.key \geq x.key$

Binary Heaps unterscheiden sich von den anderen hier behandelten Trees insofern, dass sie keine BSTs sind. Das heißt, dass rechte Kinder eines Knotens nicht unbedingt größer als dieser sind und linke Kinder dieses Knotens nicht unbedingt kleiner. Sie sind so organiesiert, dass sie Werte nach Ebenen sortieren. Bei Max heaps zum Beispiel steht der größte Wert in der Wurzel und der kleinste Wert irgendwo in der untersten Ebene. So ergibt sich bei Max heaps also die Eigenschaft, dass die parent node einer node immer größer ist als die node selber. Dies erlaubt einen sehr schnellen Zugriff auf das größte Element. Diese Eigenschaft kann sehr gut genutzt werden um Werte zu sortieren. Zudem sind Binary Heaps anders konstruiert als andere Trees, sie besitzen nämlich keine Nodes perse, sondern sind nur über Positionen in einem array gespeichert. Die Beziehungen zwischen den Nodes ergeben sich durch Formeln:

- **Parent**: $parent(i) = \lceil i/2 \rceil - 1$
- **Left Child**: $left(i) = 2 \cdot (i + 1) - 1$
- **Right Child**: $right(i) = 2 \cdot (i + 1)$

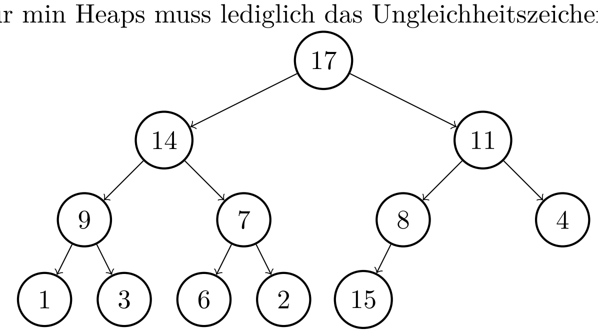
```java
class BinaryMaxHeap {
    Integer[] heap;
    int size; // Size used to insert new elements at the first empty index
    BinaryMaxHeap(int n) { // Creates new heap with size n
        heap = new Integer[n];
        size = 0;
    }
    BinaryMaxHeap(Integer[] arr) { // Creates heap from array
        arrayToHeap(arr);
    }
    void arrayToHeap(Integer[] arr) { // Used to transfer array to heap
        heap = arr.clone();
        size = 0;
        for (Integer i: arr) {
            if (i == null) break;
            size++;
        }
    }
    int parent(int i) {
        return (int) Math.ceil((double) i / 2) - 1;
    }
    int left(int i) {
        return 2 * (i + 1) - 1;
    }
    int right(int i) {
        return 2 * (i + 1);
    }
    boolean isEmpty() {
        return size == 0;
    }
```



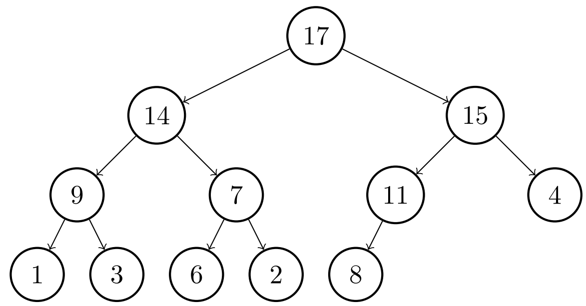
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
17	14	11	9	7	8	4	1	3	6	2	nil

```
void insert(int k) { // O(h) = O(log n)
    size++;
    heap[size - 1] = k; // Add new element at first empty index
    int i = size - 1;
    while (i > 0 && heap[i] > heap[parent(i)]) { // Moves upward through tree
        int temp = heap[i];
        heap[i] = heap[parent(i)];
        heap[parent(i)] = temp; // Swap elements if child is bigger than parent
        i = parent(i); // Move up
    }
}
```

Für min Heaps muss lediglich das Ungleichheitszeichen umgedreht werden.



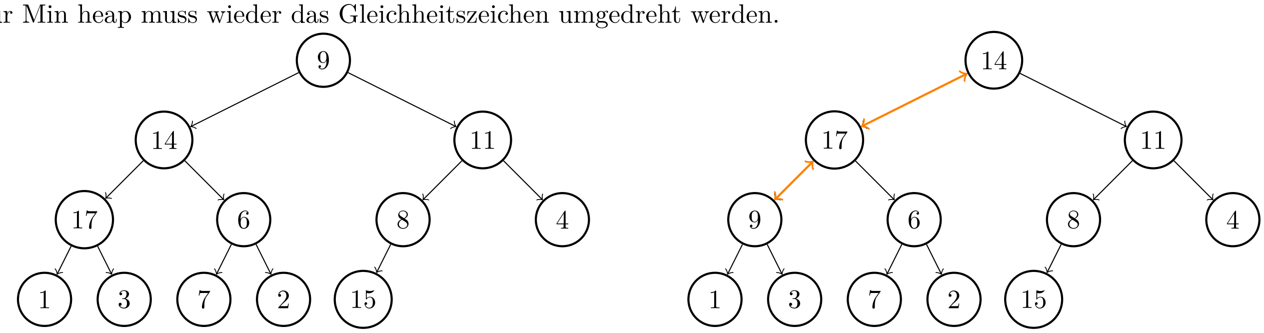
Insert 15, before fixup



After fixup

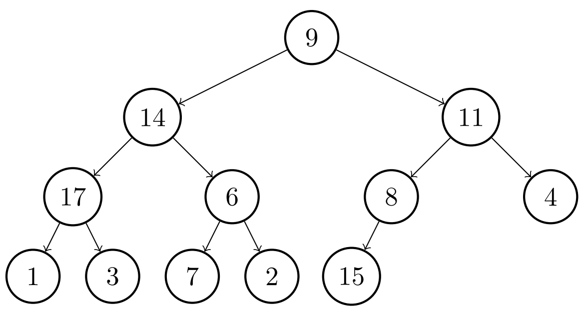
```
void heapify(int i) { // O(h) = O(log n)
    // Used if heap is new unsorted array.
    // If heap was build using insert, this should not be necessary
    int max = i;
    int l = left(i);
    int r = right(i);
    if(l < size && heap[i] < heap[l]) // If left child is bigger than i
        max = l; // Set max to left
    if(r < size && heap[max] < heap[r]) // if right child is bigger than max (i or left)
        max = r; // Set max to right
    if(max != i) { // If max is not i -> max is left or right
        int temp = heap[i];
        heap[i] = heap[max];
        heap[max] = temp;
        // Swap i and max
        heapify(max); // max is now i
        // Move down the tree
    }
}
```

Tut essenziell das selbe wie der zweite Teil von Insert, nur in umgekehrter Reihenfolge (oben nach unten) und rekursiv.
Für Min heap muss wieder das Gleichheitszeichen umgedreht werden.

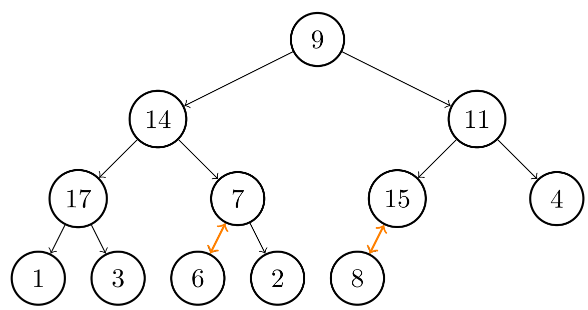


Before *Heapify root*

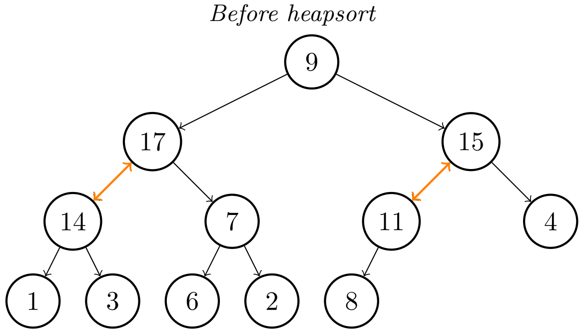
```
    void buildHeap() { // O(nh) = O(n log n)
        for(int i = parent(size - 1); i >= 0; i--)
            heapify(i); // Calls heapify on each node starting from the second to last row
        // Heap should now be sorted accordingly -> biggest node at root
    }
    int[] heapSort() { // O(nh) = O(n log n)
        // Assumes new array for heap
        buildHeap(); // Sorts heap accordingly
        int[] res = new int[size]; // Create new array for sorted result
        int i = 0;
        while(!isEmpty())
            res[i++] = extractMax(); // Extract max and add to array
        return res; // Array is now sorted in reverse natural order
    }
    int extractMax() { // O(h) = O(log n)
        if(isEmpty())
            throw new UException("Underflow");
        int max = heap[0]; // Biggest value at root
        heap[0] = heap[size - 1]; // Sets root to last element
        size--; // Decrease size
        heapify(0); // Heapify new root
        return max;
    }
}
```



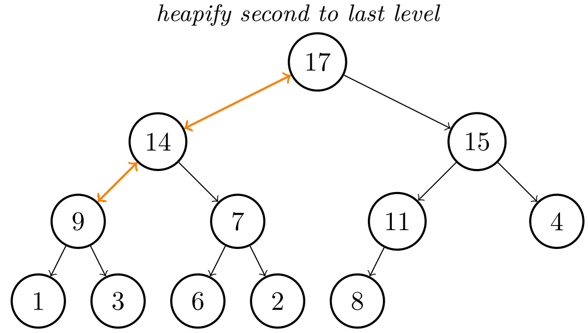
Before heapsort



heapify second to last level



heapify third to last level

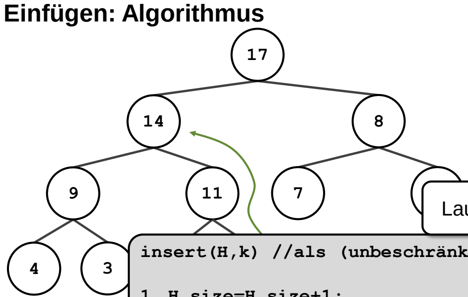


heapify last level

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
17	15	14	11	9	8	7	6	4	3	2	1

Extracted array

Einfügen: Algorithmus



Laufzeit $O(h) = O(\log n)$

```
insert(H,k) //als (unbeschränktes) Array

H.size=H.size+1;
H.A[H.size-1]=k;

i=H.size-1;
WHILE i>0 AND H.A[i] > H.A[i.parent]
   SWAP(H.A,i,i.parent);
   i=i.parent;
```


Lösche Max: Algorithmen

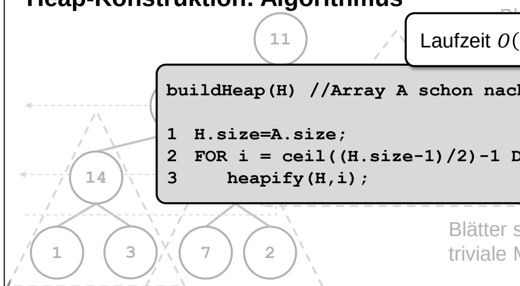
```
extract-max(H) //als (unbeschränktes) Array

IF isEmpty(H) THEN
   return error 'underflow'
ELSE
   max=H.A[0];
   H.A[0]=H.A[H.size-1];
   H.size=H.size-1;
   heapify(H,0);
   return max;
```

Laufzeit $O(h) = O(\log n)$

```
heapify(H,i) //als (unbeschränktes) Array

maxind=i;
IF i.left<H.size AND H.A[i]<H.A[i.left] THEN
   maxind=i.left;
IF i.right<H.size AND H.A[maxind]<H.A[i.right] THEN
   maxind=i.right;

IF maxind != i THEN
   SWAP(H.A,i,maxind);
   heapify(H,maxind);
```

Laufzeit $O(h) = O(\log n)$

Heap-Konstruktion: Algorithmus



Laufzeit $O(n \cdot h) = O(n \cdot \log n)$

```
buildHeap(H) //Array A schon nach H.A kopiert

H.size=A.size;
FOR i = ceil((H.size-1)/2)-1 DOWNTO 0 DO
   heapify(H,i);
```

Blätter sind für sich triviale Max-Heaps

Baue rekursiv per **heapify** Max-Heaps für Teilbäume

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	9	8	14	6	17	4	1	3	7	2

Heap-Sort

Laufzeit $O(n \cdot h) = O(n \cdot \log n)$

```
heapSort(H) //Array A schon nach H.A kopiert

buildHeap(H);
WHILE !isEmpty(H) DO PRINT extract-max(H);
```

Gibt Einträge in Array **A** in absteigender Größe aus

Alternativ: speichere in jeder **WHILE**-Iteration **max=extract-max(H)** in **H.A[H.size]=max**, um sortierte Liste am Ende aufsteigend im Array **A** zu haben.

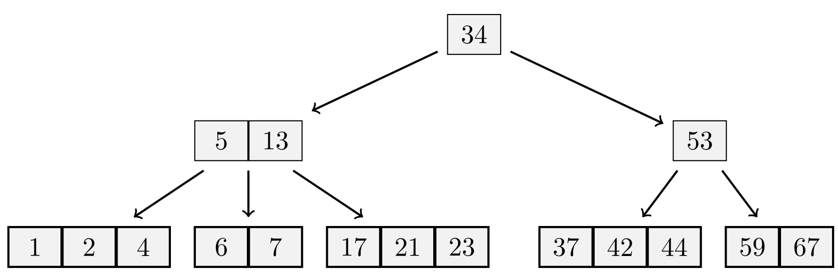
6.5 B-Tree

B-Trees (B hat keine festgelegte Bedeutung) unterscheiden sich sehr von den anderen Trees. Erstens sind sie keine Binary Trees. Ein B-Tree vom Grad t wird so definiert, dass

- Jede Node besitzt minimal $t-1$ Werte und t Kinder (Außer root)
- Jede Node besitzt maximal $2 \cdot t - 1$ Werte und $2 \cdot t$ Kinder
- Die Werte innerhalb eines Knotens sind aufsteigend sortiert
- Alle Blätter haben die gleiche Höhe
- Jeder innere Knoten mit m Werten hat m + 1 Kinder
  $\implies$ für alle Werte k_j in j-ten Kind gilt: $k_0 \leq key[0] \leq k_1 \leq key[1] \leq \ldots \leq key[m-1] \leq k_m$

Ein B-Tree kann somit in einem Knoten mehr als einen Wert und mehr als zwei Kinder besitzen. B-Trees balanzieren sich zudem auch selber, wodurch sie sehr effektiv Operationen in logarithmischer Laufzeit ausführen. Zudem ist durch die Anzahl der Werte die in einem Knoten gespeichert werden können und die Anzahl an Kinder die ein Knoten haben kann die Höhe des Baumes deutlich niedriger. B-Trees bieten sich so sehr für Disk-Based Operationen an, da sie die Anzahl an Disk-Access reduziert im Vergleich zu anderen Trees. Sie bieten sich also besonders für sehr große Datenbanken auf Festplatten an, sind aber im Vergleich zu den anderen Trees bei kleineren Eingaben weniger effizient.

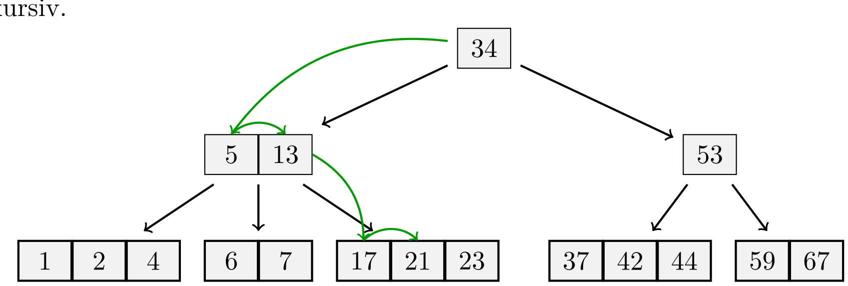
```java
class BTree {
    class BNode {
        int[] keys; // array of all keys in the node
        int t; // degree, defines the maximum number of keys in the node
        BNode[] children; // array of children to the node
        int n; // current number of keys in the node, used to find the first free index
        boolean isLeaf; // true if the node is a leaf node -> no children
    }
    BNode root;
    final int t;
    BTree(int t) {
        root = null;
        this.t = t;
    }
```



B-Tree example (Degree $t = 2$)

```java
class BTree {
    class BNode {
        int findKey(int k) { // Finds index of key in node, i = n if not in node
            int i = 0;
            while (i < n && keys[i] < k) i++;
            return i;
        }
        boolean inNode(int i) {
            return (i < n && keys[i] == 0);
        }
        BNode search(int k) {
            int i = findKey(k); // find key
            if (inNode(i)) // If k in node
                return this;
            if (isLeaf) // If k not in node and node is leaf, k doesnt exist in tree
                return null;
            return children[i].search(k); // search for k in corresponding child
        }
    }
    void search (int k) {
        if (root == null) {
            System.out.println("Tree is empty");
            return;
        }
        root.search(k); // Search for k
    }
}
```

Der Suchalgorithmus ist relativ simpel. Er durchläuft die key-Werte der Wurzel, bis es beim Element angelangt, das größer oder gleich dem Suchwert ist. Ist der Wert gleich, so gibt es den Knoten zurück. Andernfalls, wenn der Knoten keine Kinder hat, existiert der Wert nicht, ansonsten durchsucht der Algorithmus das Kind, das den Wert beinhalten sollte rekursiv.

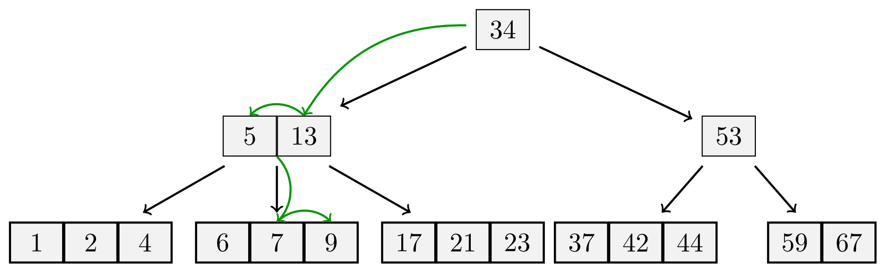


Search 21

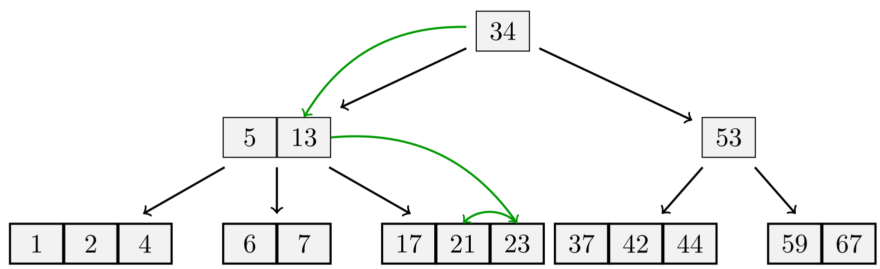
```java
class BTree {
    class BNode {
        int findKey(int k) { // Finds index of key in node, i = n if not in node
            int i = 0;
            while (i < n && keys[i] < k) i++;
            return i;
        }
        boolean inNode(int i) {
            return (i < n && keys[i] == 0);
        }
        void insertNonFull(int k) { // Omega(1), O(t), Theta(t)
            int i = n -1; // first free index
            if (isLeaf) { // If node has no children
                while (i >= 0 && keys[i] > k) {
                    keys[i + 1] = keys[i];
                    i--;
                } // Moves through the array and moves elements bigger than k to the right
                // Creates insertion point
                keys[i + 1] = k; // Inserts k
                n++; // Increases number of keys
            } else { // If node has children
                while (i >= 0 && keys[i] > k) i--; // Moves through array and finds insertion point
                if (children[i + 1].n == 2 * t - 1) { // If insertion child is full
                    splitChild(i + 1, children[i + 1]); // Splits insertion child
                    if (keys[i + 1] < k) // If key at insertion point is smaller than k
                        i++; // Move insertion point one to the right
                }
                children[i + 1].insertNonFull(k); // Insert k into insertion child
            }
        }
        void splitChild(int i, BNode y) {
            BNode z = new BNode(y.t, y.isLeaf); // Creates new node akin to y
            z.n = t - 1; // Has half the number of keys as the node to be split
            for (int j = 0; j < t - 1; j++) // Copies the second half of the keys to the new node
                z.keys[j] = y.keys[j + t];
            if (!y.isLeaf) { // If y has children
                for (int j = 0; j < t; j++) // Copies the second half of the children to the new node
                    z.children[j] = y.children[j + t];
            }
            y.n = t - 1; // Node now has half the keys it had before
            for (int j = n; j > i; j--) // Searches for insertion point of new child
                children[j + 1] = children[j];
            children[i + 1] = z; // Inserts new child
            for (int j = n - 1; j >= i; j--) // Creates insertion point for new key
                keys[j + 1] = keys[j];
            keys[i] = y.keys[t - 1]; // Inserts new key
            n++; // Increases number of keys
        }
    }
    void insert(int k) {
        if (root == null) {// If tree is empty
            root = new BNode(t, true); // Create root
            root.keys[0] = k; // Insert k
            root.n = 1; // Increase number of keys
        } else { // If tree is not empty
            if (root.n == 2 * t - 1) { // If root is full
                BNode s = new BNode(t, false); // Create new node
                s.children[0] = root; // set root as first child of new node
                s.splitChild(0, root); // Split root
                int i = 0;
                if (s.keys[0] < k) i++; // If only key in new node is smaller than k, move insertion
    point
                s.children[i].insertNonFull(k); // Insert k in corresponding child
                root = s; // sets new node as root
            } else // If root is not full
                root.insertNonFull(k); // Simply insert
        }
    }
}
```

Prinzipiell folgt dieser Algorithmus einfach der Folge:

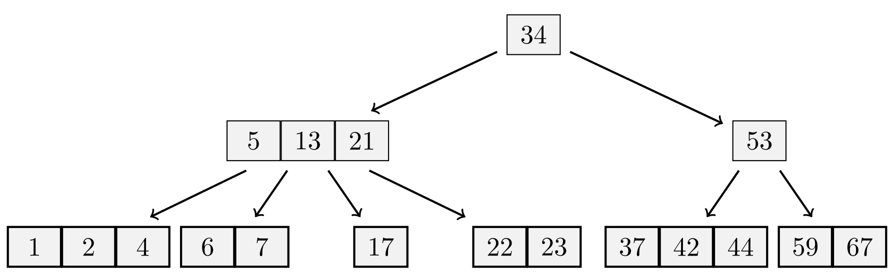
1. Finde Einfügepunkt
2. Wenn Node schon $2 \cdot t - 1$ Werte besitzt, splitte es
    - Teile Node in zwei Nodes mit je $t - 1$ Werten
    - Der mittlere Knoten wird in den Elternknoten eingefügt
    - Wenn dadurch der Elternknoten $2 \cdot t - 1$ Werte besitzt, splitte diesen rekursiv nach oben
3. Wert am Einfügepunkt einfügen



Insert 9 (Simple Case)



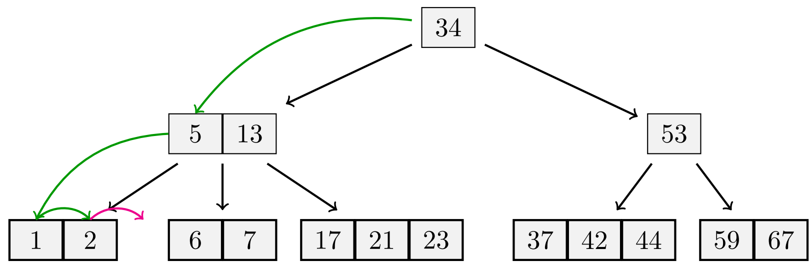
Before Insert 22 (Needs splitting)



Insert 22

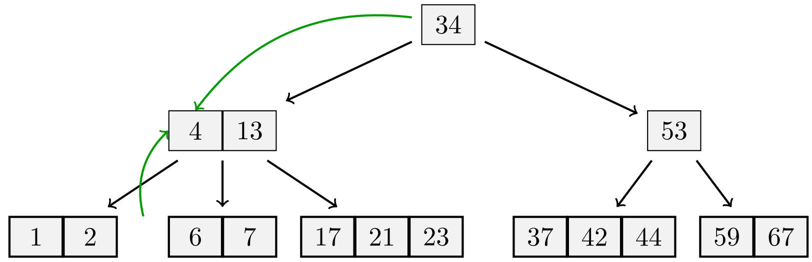
```java
class BTree {
    class BNode {
        int findKey(int k) { // Finds index of key in node, i = n if not in node
            int i = 0;
            while (i < n && keys[i] < k) i++;
            return i;
        }
        boolean inNode(int i) {
            return (i < n && keys[i] == 0);
        }
        int getPredecessor(int i) {
            BNode child = children[i];
            while (!child.isLeaf)
                child = child.children[child.n];
            return child.keys[child.n - 1];
        }
        int getSuccessor(int i) {
            BNode child = children[i + 1];
            while (!child.isLeaf)
                child = child.children[0];
            return child.keys[0];
        }
        void fill(int i) {
            if (i != 0 && children[i - 1].n >= t) // If the previous child is filled more than half
                borrowFromPrev(i);
            else if (i != n && children[i + 1].n >= t) // If the next child is filled more than half
                borrowFromNext(i);
            else // If both children are not filled more than half
                if (i != n) // Merge with next child
                    merge(i);
                else // Merge with previous child
                    merge(i - 1);
        }
        void borrowFromPrev(int i) {
            BNode child = children[i];
            BNode sibling = children[i - 1]; // Get previous child, to be borrowed from
            for (int j = child.n - 1; j >= 0; j--)// Move keys to the right
                child.keys[j + 1] = child.keys[j];

            if (!child.isLeaf)
                for (int j = child.n; j >= 0; j--) // Move children to the right
                    child.children[j + 1] = child.children[j];
            child.keys[0] = keys[i - 1]; // Move key from parent to child
            if (!child.isLeaf) // Move children if not child not a leaf
                child.children[0] = sibling.children[sibling.n];
            keys[i - 1] = sibling.keys[sibling.n - 1]; // Move key from sibling to parent
            child.n++; // Increase number of keys in child
            sibling.n--; // Decrease number of keys in sibling
        }
        void borrowFromNext(int i) {
            BNode child = children[i];
            BNode sibling = children[i + 1]; // Get next child, to be borrowed from
            child.keys[child.n] = keys[i]; // Move key from parent to child
            if (!child.isLeaf) // if child isnt a leaf move last first child of sibling to child
                child.children[child.n + 1] = sibling.children[0];
            keys[i] = sibling.keys[0]; // Move key from sibling to parent
            for (int j = 1; j < sibling.n; j++)// Move keys to the left
                sibling.keys[j - 1] = sibling.keys[j];
            if (!sibling.isLeaf)
                for (int j = 1; j <= sibling.n; j++)// Move children to the left
                    sibling.children[j - 1] = sibling.children[j];
            child.n++; // Increase number of keys in child
            sibling.n--; // Decrease number of keys in sibling
        }
        void merge(int i) {
            BNode child = children[i];
            BNode sibling = children[i + 1];
            child.keys[t - 1] = keys[i]; // Move key from parent to child
            for (int j = 0; j < sibling.n; j++) // Move keys from sibling to second half of child
                child.keys[j + t] = sibling.keys[j];
```

```
            if (!child.isLeaf)
                for (int j = 0; j <= sibling.n; j++) // Move children from sibling to second half of child
                    child.children[j + t] = sibling.children[j];
            for (int j = i + 1; j < n; j++) // Move keys to fill the gap created by moving to child
                keys[j - 1] = keys[j];
            for (int j = i + 2; j <= n; j--) // Move children to fill the gap created by moving to child
                children[j - 1] = children[j];
            child.n += sibling.n + 1;
            n--;
        }
        void delete(int k) {
            int i = findKey(k);
            if (inNode(i)) {
                if (isLeaf)
                    deleteFromLeaf(i);
                else
                    deleteFromNonLeaf(i);
            } else {
                if (isLeaf) {
                    System.out.println("Key not found");
                    return;
                }
                boolean flag = (i == n); // if key is present in subtree of last child
                if (children[i].n < t) // If child that contains key has less than t keys
                    fill(i); // Fill that child
                if (flag && i > n) // If key is present in subtree of last child
                    children[i - 1].delete(k); // Delete from that subtree
                else // If key is not present in subtree of last child
                    children[i].delete(k); // Delete from that subtree
            }
        }
        void deleteFromLeaf (int i) {
            for (int j = i + 1; j < n; j++) // Move all keys after i to the left
                keys[j - 1] = keys[j];
            n--; // reduce number of keys
        }
        void deleteFromNonLeaf (int i) {
            int k = keys[i];
            if (children[i].n >= t) { // If child that contains key has more than t keys
                int pred = getPredecessor(i); // Get predecessor
                keys[i] = pred; // Replace key with predecessor
                children[i].delete(pred); // Delete predecessor from child
            } else if (children[i + 1].n >= t) {// If child that contains key has more than t keys
                int succ = getSuccessor(i); // Get successor
                keys[i] = succ; // Replace key with successor
                children[i + 1].delete(succ); // Delete successor from child
            } else { // If both children have less than t keys
                merge(i); // Merge children
                children[i].delete(k); // Delete key from child
            }
        }
    }
    void delete(int k) {
        if (root == null) {
            System.out.println("Tree is empty");
            return;
        }
        root.delete(k); // Delete k
        if (root.n == 0) { // If root is empty
            if (root.isLeaf) // If root is leaf -> tree is empty
                root = null; // Delete root
            else
                root = root.children[0]; // Replace root with its child
        }
    }
}
```



Delete 4 (Simple Case)

Wenn der Knoten in einem Blatt steht kann er einfach rausgenommen werden.



Delete 5 (Replace with predecessor in child)

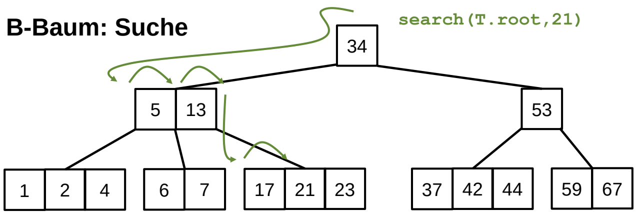
Im Fall, dass der Wert in einem inneren Knoten steht, geht der Algorithmus so vor:

1. Ersetze den Wert mit dem Vorgänger im Kind (Wenn Kind mindestens t Werte besitzt).
2. Wenn es nicht genug Werte besitzt, ersetze den Wert mit dem Nachfolger im Kind (Wenn Kind mindestens t Werte besitzt).
3. Wenn beide Kinder weniger als t Werte besitzen, verbinde die beiden Knoten und den zu löschenden Wert zu einem Knoten und lösche nun den Wert aus dem Knoten

Da dieser Algorithmus bereits beim Suchen den Baum umorganisiert um unnötioge Operationen zu sparen gilt zudem, dass beim Suchen, wenn die Wurzel des Unterbaums, der den Wert beinhalten muss $t-1$ Werte besitzt und ein unmittelbares Geschwisternode mit mindestens t Werten besitzt, man einen Wert vom Parent in den Knoten tut und diesen mit dem Wert aus dem Geschwisternode ersetzt.

Wenn beide Nodes, also die Wurzel des Unterbaumes und die Geschwisternode $t-1$ Werte haben, verbinde sie.

B-Baum: Suche




```
search(x,k)

WHILE x != nil DO
   i=0;
   WHILE i < x.m AND x.key[i] < k DO i=i+1;
   IF i < x.m AND x.key[i]==k THEN
      return (x,i);
   ELSE
      x=x.child[i];
return nil;
```

maximal $2t = O(1)$ Iterationen

Laufzeit $O(t \cdot h) = O(\log_t n)$

B-Baum Einfügen (informell)

Laufzeit $O(t \cdot h) = O(\log_t n)$

```
insert(T,z)

1  Wenn Wurzel schon 2t-1 Werte, dann splitte Wurzel
2  Suche rekursiv Einfügeposition:
3     Wenn zu besuchendes Kind 2t-1 Werte, splitte es erst
4  Füge z in Blatt ein
```

Aktueller Knoten hat zu diesem Zeitpunkt weniger als $2t - 1$ Werte, sonst wäre er vorher geteilt worden. Beim Splitten des Kindes kann der mittlere Wert daher problemlos im aktuellen Knoten eingefügt werden.

Auch Blatt hat zu diesem Zeitpunkt weniger als $2t - 1$ Werte.

B-Baum Löschen (informell)

Laufzeit $O(t \cdot h) = O(\log_t n)$

```
delete(T,k)

1  Wenn Wurzel nur 1 Wert und beide Kinder t-1 Werte,
   verschmelze Wurzel und Kinder (reduziert Höhe um 1)
2  Suche rekursiv Löschposition:
3     Wenn zu besuchendes Kind nur t-1 Werte,
      verschmelze es oder rotiere/verschiebe
4  Entferne Wert k in inneren Knoten/Blatt
```

Aktueller Knoten hat zu diesem Zeitpunkt mindestens t Werte, sonst wäre er vorher verschmolzen worden oder es wäre rotiert worden. Beim Verschmelzen/Verschieben des Kindes kann die Anzahl der Werte im aktuellen Knoten nicht unter $t - 1$ fallen.

Entfernen aus Blatt problemlos, da mindestens t Werte. Entfernen im inneren Knoten durch Verschieben oder Verschmelzen.

7 Probabilistische Datenstrukturen

7.1 Deterministisch und Probabilistisch

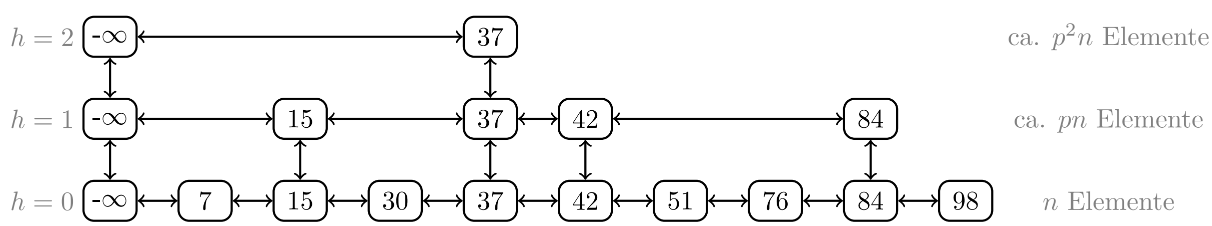
Bisher waren alle Datenstrukturen deterministisch, d.h., dass für die selben Eingaben das Verhalten immer gleich sein wird.
Bei probabilistischen Datenstrukturen ist das Verhalten nicht nur von Eingaben abhängig, sondern auch von zufälligen Faktoren.

Aspekt	Deterministische Datenstrukturen	Probabilistische (Randomisierte) Datenstrukturen
Vorteile		
Leistungsgarantien	Bietet garantierte Worst-Case-Zeitkomplexität.	Bietet gute durchschnittliche Leistung, oft schneller in der Praxis.
Vorhersehbarkeit	Verhalten ist für die gleichen Eingaben vorhersehbar und konsistent.	Flexibler und vermeidet Worst-Case-Szenarien unter typischen Bedingungen.
Worst-Case-Behandlung	Speziell entwickelt, um Worst-Case-Szenarien zu handhaben.	Vermeidet Worst-Case-Szenarien durch probabilistische Methoden.
Einfachheit	Konzeptuell einfach mit klaren Regeln (z.B. AVL-Baum-Rotationen).	Oft einfacher in der Implementierung, ohne komplexe Ausgleichsoperationen.
Stabilität	Deterministisches Verhalten führt zu stabilen und wiederholbaren Ergebnissen.	Flexibel und widerstandsfähig gegenüber unterschiedlichen Eingabemustern.
Nachteile		
Komplexität in der Implementierung	Erfordert oft komplexe Ausgleichslogik (z.B. Rot-Schwarz-Bäume, AVL-Bäume).	Einfacher, aber schwerer probabilistisch zu analysieren.
Speicherbedarf	Kann zusätzlichen Speicher für die Speicherung von Ausgleichsinformationen erfordern.	Kann speichereffizient sein, aber einige Strukturen (z.B. Bloom-Filter) können eine geringe Fehlerquote aufweisen.
Handhabung spezifischer Eingaben	Kann bei bestimmten Eingabemustern schlecht abschneiden (z.B. Quicksort mit sortierten Eingaben).	Vermeidet schlechte Leistung bei bestimmten Eingaben durch Zufälligkeit.
Vorhersehbarkeit	Vorhersehbar und kann von einem Gegner ausgenutzt werden (z.B. Hash-Kollisionsangriffe).	Weniger vorhersehbar, wodurch die Wahrscheinlichkeit sinkt, dass gegnerische Eingaben zu einer Worst-Case-Leistung führen.
Komplexität in der Analyse	Einfacher zu analysieren und zu verstehen in Bezug auf Worst-Case-Verhalten.	Erfordert probabilistische Analyse, um Leistungsgarantien zu verstehen.
Wesentliche Unterschiede		
Leistungsgarantien	Strikte Worst-Case-Leistungsgarantien.	Konzentriert sich auf erwartete durchschnittliche Leistung.
Verhalten unter adversen Bedingungen	Kann unter adversen Bedingungen erheblich nachlassen (z.B. bestimmte Hashing-Methoden).	Robuster gegenüber adversen Bedingungen aufgrund von Zufälligkeit.
Implementierungskomplexität	Kann mehr Aufwand erfordern, um eine optimale Leistung zu gewährleisten (z.B. Ausbalancierung von Bäumen).	Typischerweise einfacher zu implementieren mit guter durchschnittlicher Leistung.
Anwendungsfälle	Geeignet für Anwendungen, bei denen Worst-Case-Leistung entscheidend ist.	Ideal für Anwendungen, bei denen die durchschnittliche Leistung wichtiger ist.

7.2 Skip-Lists

Skip-Lists sind eine Datenstruktur, die einer Linked-List sehr ähnelt. Sie baut auf der selben grundlegenden Struktur auf, erweitert diese jedoch noch zusätzlich. So haben Elemente in einer Skip-List nicht nur `next` (und eventuell `prev`) sondern auch noch `up` und `down`.
Die Struktur einer Skip-List ähnelt sogesehen mehreren aufeinandergestapelten Linked-Lists. Beim Aufbau der Skip-List wird für jedes Element zufällig ausgesucht, auf wie vielen Ebenen es abgebildet ist. Dies ergibt den Vorteil, dass diese Struktur beim `insert`, `delete` und `search` eine average time complexity von $O(\log n)$ besitzt, was sie mit balanzierten Bäumen (AVLT, RBT...) vergleichbar macht. Der Vorteil von Skip-Lists über Bäume sind unter anderem, dass sie einfacherer zu implementieren sind und weniger Speicher brauchen. Die Nachteile bilden hierbei die schlechte Worst-Case Performance von $O(n)$.
Skip-Lists werden oft in Datenbanken genutzt um Daten nach einer spezifierten Ordnung zu speichern, aber auch für Datensätze, die oft modifiziert werden müssen, da das anwenden von anderen Algorithmen auf Skip-Lists oft relativ einfach ist.

```
class SkipList {
    class SkipNode {
        int key;
        SkipNode next;
        SkipNode prev;
        SkipNode down;
        SkipNode up;
        SkipNode(int k) {
            key = k;
        }
    }
    SkipNode head; // First node in highest level
    int height; // starts at 0 -> biggest list at height = 0
    final double P = 0.5; // Probability of inserted node being added to express list
    SkipList() {
        head = new SkipNode(Integer.MIN_VALUE);
        height = 0;
    }
```

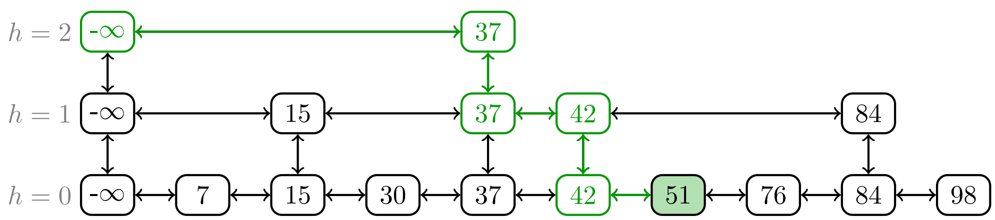


Example

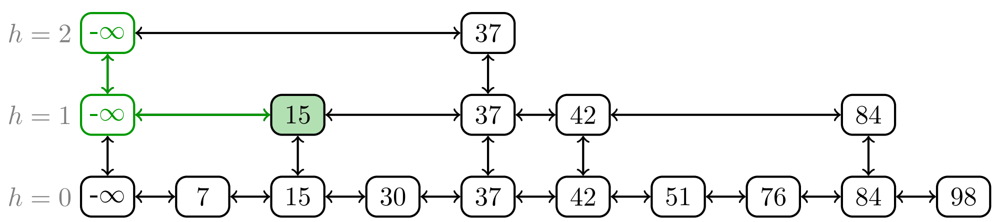
Die Anzahl der Elemente auf einer Ebene nimmt ungefähr nach dem Schema $p^h \cdot n$ ab, wobei p die Wahrscheinlichkeit und h die Höhe ist.

Der Suchalgorithmus ist relativ simpel. Er startet beim Head (Höchster Knoten des Starts) und durchläuft jedes Level in order, bis der nächste Knoten größer ist als der gesuchte Knoten / `null` ist. Dann geht er an dem Knoten nach unten und durchsucht diese Liste weiter. Dies geschieht, bis er entweder den Wert gefunden hat, in welchem Fall er den gefundenen Knoten zurück gibt, oder bis er null erreicht, was bedeutet, dass der Wert nicht in der Liste ist.

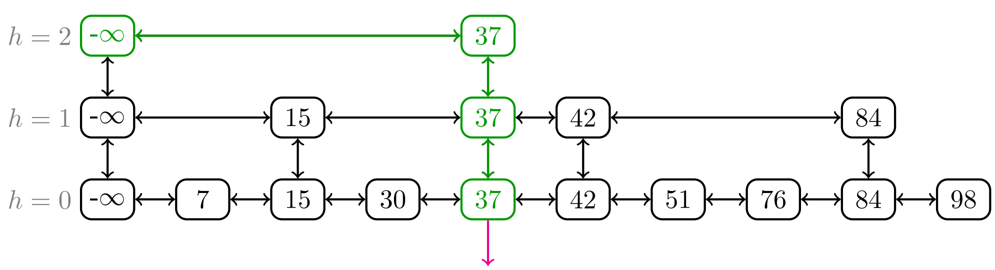
```java
SkipNode search(int k) {
    SkipNode curr = head;
    while (curr != null) {
        if (curr.key == k) // key found
            return curr;
        else if (curr.next != null && curr.next.key <= k) // If next key is less than or equal to k
            curr = curr.next; // move along the list
        else // If next key is greater than k
            curr = curr.down; // move down the list
    }
    return null; // key not found
}
```



Search 51



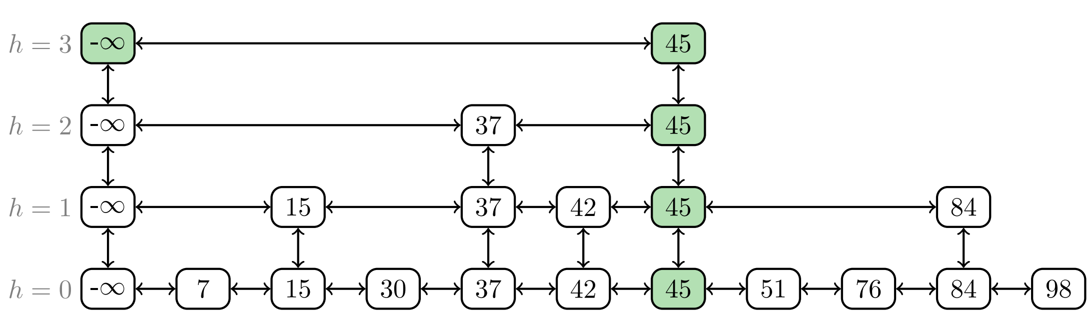
Search 15



Search 40

Einfügen in die Skip-List ist ein wenig komplizierter, aber auch grundlegend simpel. Erst einmal muss ermittelt werden auf wie viele Ebenen der Wert hinzugefügt werden muss. Dies kann über eine vom Element abhängige Formel oder auch andere Methoden zum erzeugen einer zufälligen Zahl geschehen. Nachdem dieses Level ermittelt wurde, muss, falls notwendig die Liste um die noch nicht vorhandenen Ebenen ergänzt werden. Dies geschieht dadurch, dass man die `Head` Node nach oben erweitert, den `height`-Counter erhöht und den Head auf den neuen Head aktualisiert. Nachdem dies geschehen ist wird nun die Liste wie beim `search`-Algorithmus durchgangen um die Einfügestelle zu ermitteln. Beim Durchlauf werden zusätzlich noch die zukünftigen Vorgängerknoten in einem Array vermerkt. Nachdem werden nun die Knoten auf den bestimmten Ebenen eingefügt.

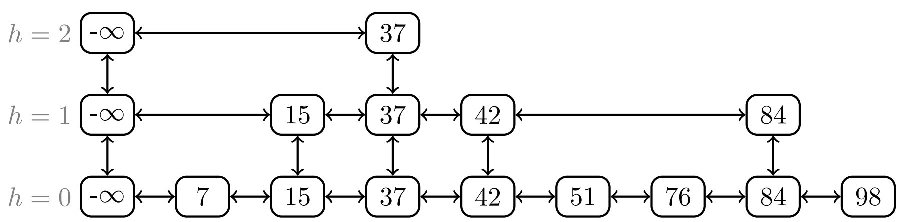
```java
int randomLevel() { // Used to determine in how many lists a node will be added
    double r = Math.random();
    int lvl = 0;
    while (r < P) {
        lvl++;
        r = Math.random();
    }
    return lvl;
}
void insert(int k) {
    int lvl = randomLevel();
    while (lvl > height) { // If needed increase list height and add required heads
        head.up = new SkipNode(Integer.MIN_VALUE);
        head.up.down = head;
        head = head.up;
        height++;
    }
    SkipNode[] prevs = new SkipNode[height + 1]; // Holds the previous nodes in each list
    SkipNode curr = head;
    for (int i = height; i >= 0; i--) { // For each level starting from the highest
        while (curr.next != null && curr.next.key < k)
            // Loops through current list until next key is greater than or equal to k
            curr = curr.next;
        if (curr.key == k) return; // key already in list
        prevs[i] = curr; // Adds current node as a predecessor to the new node
        curr = curr.down; // Moves down in the list
    }
    int count = 0; // counter for number of lists in which the new node has been added
    SkipNode dwn = null; // Holds the node that is the down node of the node in a level
    while (count <= lvl) { // Add new nodes to lists in lvl
        SkipNode newNode = new SkipNode(k);
        newNode.next = prevs[count].next; // Includes the new node in the list
        newNode.prev = prevs[count];
        if (prevs[count].next != null) // If there is a next node
            prevs[count].next.prev = newNode; // change previous to new node
        prevs[count].next = newNode; // change next to new node
        newNode.down = dwn; // connect newNode to itself on a lower level
        if (dwn != null) // If added to more than 1 level
            dwn.up = newNode; // connect lower level to newNode
        dwn = newNode; // Update dwn
        count++; // Update counter
    }
}
```



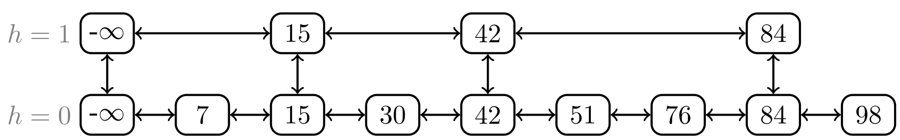
Insert 45 with randomLevel = 3

Delete ist wieder relativ simpel. Es wird erstmal die zu löschende Node gesucht. Nachdem muss lediglich die Referenzen von den Vor- und Nachgängern abgeändert werden, sodass das Element selbst nichtmehr in der Liste ist. Dies muss nun lediglich nur für jede Ebene wiederholt werden.

```
    void delete(int k) {
        SkipNode node = search(k); // Find first node in list that has k
        while (node != null) { // Moves down from the found node
            // Remove node from list by removing its references
            node.prev.next = node.next;
            if (node.next != null)
                node.next.prev = node.prev;
            if (node.next == null
                    && node.prev.key == Integer.MIN_VALUE
                    && node.prev.down != null) {
                // If deleted node is the last node in the list, reduce list height and update head
                node.prev.down.up = null;
                head = node.prev.down;
                height--;
            }
            node = node.down;
        }
    }
}
```



Delete 30



Delete 37

Skip-Liste: Suchalgorithmus

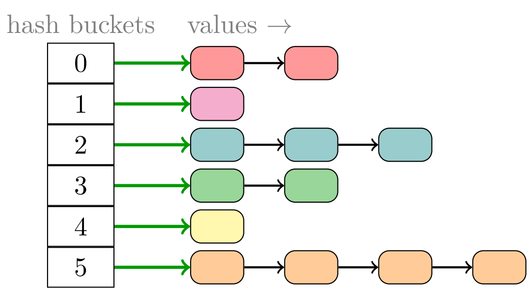
```
search(L,k)

current=L.head;
WHILE current != nil DO
   IF current.key == k THEN return current;
   IF current.next != nil AND current.next.key =< k
   THEN current=current.next
   ELSE current=current.down;
return nil;
```

Laufzeit hängt von Expresslisten ab

7.3 Hash Tables

Hash Tables sind eine sehr effiziente Datenstruktur, die Einfügen, Löschen und Suchen in Konstanter Zeit erlaubt. Sie funktioniert dadurch, dass sie keine Datenstruktur zum Suchen durchlaufen muss, sondern anhand des gesuchten Elements eine sogennante Hash-Funktion berechnet. Diese wird dann auf die Länge der grundlegenden Array-Struktur komprimiert und als Index genutzt um ein Element einzufügen/zu finden.
Zwar sind die Hash-Funktionen meist so groß, dass es sehr unwahrscheinlich ist, dass zwei Objekte den gleichen Hash-Code haben, jedoch wird dieses mit der Komprimierung schwierig. Deshalb werden bei der Implementation von Hash Tables oft verschiedene Taktiken genutzt um Double Hashing einzubinden. Die wohl bekannteste ist es den Hash Table mit einer Linked List zu implementieren.
Normal sind die Aufrufe in konstanter Zeit, durch die Implementation mit Linked List verschlechtert sich dies aber im Worst-Case zu $O(n)$.

```java
import java.util.Objects;

class HashTable <K, V> {
    class HashNode <K, V> {
        K key;
        V value;
        final int hashCode;
        HashNode<K, V> next;
        HashNode(K key, V value, int hashCode) {
            this.key = key;
            this.value = value;
            this.hashCode = hashCode;
        }
    }
    private int numBuckets;
    private HashNode<K, V>[] buckets;
    HashTable(int numBuckets) {
        this.numBuckets = numBuckets;
        this.buckets = new HashNode[numBuckets];
    }
    private int hashCode(K key) {
        return Objects.hashCode(key); // 0 if key == null
    }
    private int getBucketIndex(K key) {
        return Math.abs(hashCode(key) % numBuckets); // Hashcode can be negative, index cant
    }
```



Example structure

Einfügen, Suchen und Löschen funktionieren Prinzipiell gleich zu dem in LinkedLists, nachdem der korrekte Hash Bucket gefunden wurde.

```java
    void put(K key, V value) { // Theta(1), sogar worstcase (vorne einfügen)
        int bucketIndex = getBucketIndex(key); // search index of bucket where key should be
        HashNode<K, V> head = buckets[bucketIndex]; // search head of bucket
        buckets[bucketIndex] = new HashNode<>(key, value, hashCode(key)); // create new node
        if (head != null)
            buckets[bucketIndex].next = head; // connect new node to head
    }
    V get(K key) { // Theta(1), O(n)
        int bucketIndex = getBucketIndex(key); // search index of bucket where key should be
        HashNode<K, V> head = buckets[bucketIndex]; // search head of bucket
        while (head != null) { // goes through the buckets list
            if (head.key.equals(key) && head.hashCode == hashCode(key)) // if key is found
                return head.value; // return value
            head = head.next; // move head to next
        }
        return null; // If key not found -> return null
    }
    V remove(K key) { // Theta(1), O(n)
        int bucketIndex = getBucketIndex(key); // search index of bucket where key should be
        HashNode<K, V> head = buckets[bucketIndex]; // search head of bucket
        HashNode<K, V> prev = null; // search prev of head
        while (head != null) { // goes through the buckets list
            if (head.key.equals(key) && head.hashCode == hashCode(key)) { // if key is found
                if (prev == null) // if key is the head
                    buckets[bucketIndex] = head.next; // move head to next
                else // if key is not the head
                    prev.next = head.next; // change references
                return head.value; // return removed value
            }
            prev = head; // move prev to head
            head = head.next; // move head to next
        }
        return null; // If key not found -> return null
    }
}
```

7.4 Bloom Filter

Ein Bloom-Filter ist eine Datenstruktur, die benutzt wird um schnell herauszufinden, ob ein Element in einer Datenstruktur vorkommt. Sie ist ideal für große Datensätze, bei denen *false-positives* akzeptabel sind, *false-negatives* nicht. D.h. sie können zuverlässig sagen, ob ein Element vorkommt, können aber auch anschlagen, wenn ein Element nicht explizit eingefügt wurde.
Bloom Filter sind sehr effizient, da sie zum einem nicht die Elemente selbst speichern, sondern nur ihre Anwesenheit, zum anderen, da das Einfügen und Auslesen auch sehr schnell ist mit $O(k)$ mit k die Anzahl der Funktionen.
Nachteile von Bloom Filtern sind die *false-positives*, die sehr komplizierte deletion (Ein Element rauslöschen kann auch anderes rauslöschen, was *false-negatives* erzeugt) und die festgelegte Größe.
Sie werden häufig genutzt um Caches und Spam zu filtern, aber auch um bspw. zu schauen, ob ein Passwort häufig verwendet wird.

```java
import java.util.function.Function;
class BloomFilter {
    Function<String, Integer>[] functions;
    boolean[] bloomFilter;
    int bloomSize;
    BloomFilter(int bloomSize, Function<String, Integer>[] functions) {
        this.functions = functions; // functions that will be used
        this.bloomSize = bloomSize; // size of the bloom filter
        bloomFilter = new boolean[bloomSize]; // defaults to false
    }
    void exampleFunctions() {
        functions = new Function[3];
        functions[0] = (String s) -> s.length() % bloomSize;
        functions[1] = (String s) -> s.charAt(0) % bloomSize;
        functions[2] = (String s) -> s.charAt(s.length() - 1) % bloomSize;
    }
```

Bei diesen Beispielfunktionen, könnte man z.B. **Dance** einfügen, was aber die gleichen bits wie **Dodge** belegt. Demnach würde bei der Suche für **Dodge** ein *false-positive* erzeugt werden. False-Positives werden immer wahrscheinlicher je mehr Elemente eingefügt werden und je kleiner der Bloom Filter ist. Natürlich sind sie aber auch grundlegend von den Functions, bezüglich der Komplexität, Probabilistik und Anzahl, abhängig. Diese Beispielfunktionen sind relativ schlecht, da sie simpel sind, was im Endeffekt in mehr *false-positives* resultiert. Abstraktere, komplexere Funktionen funktionieren hierbei meist besser, da sie nicht an Adjezenz der Eingaben festhalten.

Einfügen ist sehr simpel. Es müssen lediglich die Funktionen auf die Eingabe angewendet werden und die entsprechenden Bits danach umgestellt werden.

```java
void addToBloom(String x) { // O(k), k = number of functions
    for (Function<String, Integer> function : functions) { // for each function
        bloomFilter[function.apply(x)] = true; // add to bloom
    }
}
```

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Before (bloomSize = 16)

Insert "hello":

- $x_0 = "hello".length() \,\%\, 16 = 5$
- $x_1 = (int)\,'h' = 104 \,\%\, 16 = 8$
- $x_2 = (int)\,'o' = 111 \,\%\, 16 = 15$

x_0 x_1 x_2

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1

Insert "world":

- $x_0 = "world".length() \,\%\, 16 = 5$
- $x_1 = (int)\,'w' = 119 \,\%\, 16 = 7$
- $x_2 = (int)\,'d' = 100 \,\%\, 16 = 4$

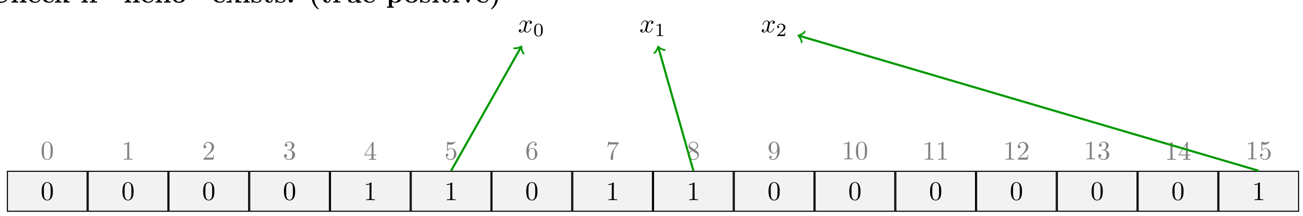
x_0 x_1 x_2

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1

Das Durchsuchen des Bloom-Filters läuft fast identisch zum Einfügen ab. Es müssen wieder mittels der Funktionen die passenden Werte der Eingabe gefunden werden. Diese werden dann verwendet um zu schauen, ob alle benötigten Bits im Bloom-Filter vorhanden sind. Wenn alle da sind ist das Element im Bloom-Filter enthalten, allerdings kann dies auch wahr für Werte sein, die nicht explizit eingefügt wurden (false-positive).

```java
    boolean isInBloom(String x) { // O(k), k = number of functions
        for (Function<String, Integer> function : functions) { // for each function
            if (!bloomFilter[function.apply(x)]) // if not in bloom
                return false; // One function is not in bloom -> false
        }
        return true; // If all functions are present in bloom -> true
    }
}
```

Check if "hello" exists: (true-positive)

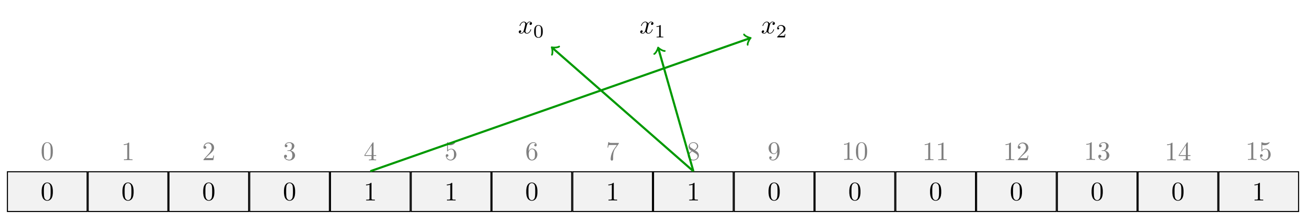


0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1

$\Longrightarrow$ Existenz im Bloom Filter

Check if "harassed" exists: (false-positive)

- $x_0 = "harassed".length() \,\%\, 16 = 8$
- $x_1 = (int)\,'h' = 104 \,\%\, 16 = 8$
- $x_2 = (int)\,'d' = 100 \,\%\, 16 = 4$

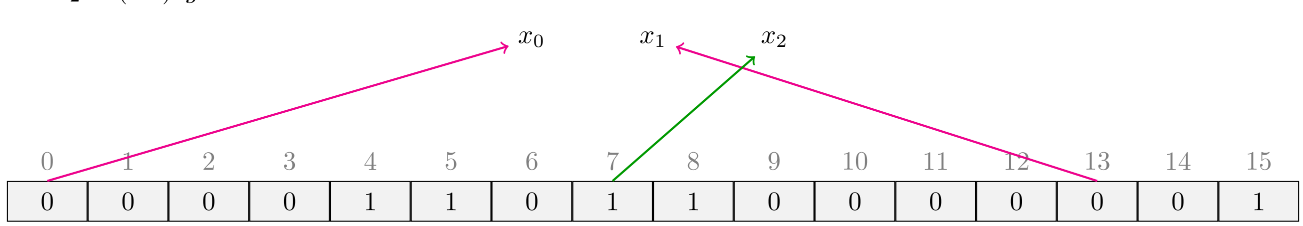


0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1

$\Longrightarrow$ Existenz im Bloom Filter obwohl nicht spezifisch eingefügt

Check if "misunderstanding" exists: (true-negative)

- $x_0 = "misunderstanding".length() \,\%\, 16 = 0$
- $x_1 = (int)\,'m' = 109 \,\%\, 16 = 13$
- $x_2 = (int)\,'g' = 103 \,\%\, 16 = 7$



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1

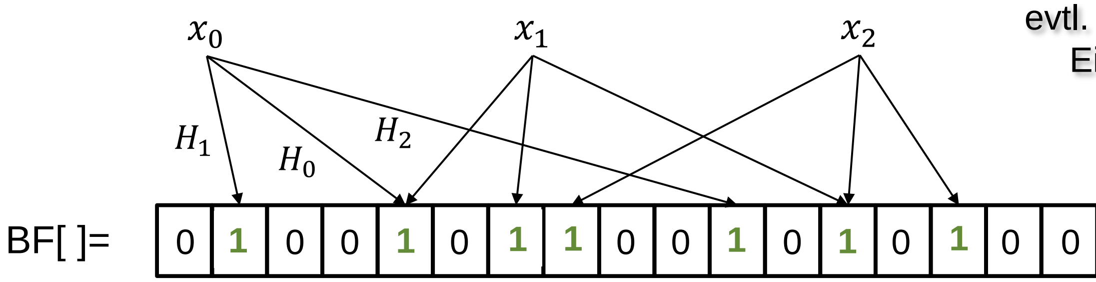
$\Longrightarrow$ keine Existenz im Bloom Filter

Bloom-Filter: Erstellen (II)

```
initBloom(X,BF,H) //H array of functions H[j]
FOR i=0 TO BF.length-1 DO BF[i]=0;
FOR i=0 TO X.length-1 DO
   FOR j=0 TO H.length-1 DO
      BF[H[j](X[i])]=1;
```

1. Initialisiere Array mit 0-Einträgen

2. Schreibe für jedes Element in jede Bit-Position $H_0(x_i), \ldots, H_{k-1}(x_i)$ eine 1



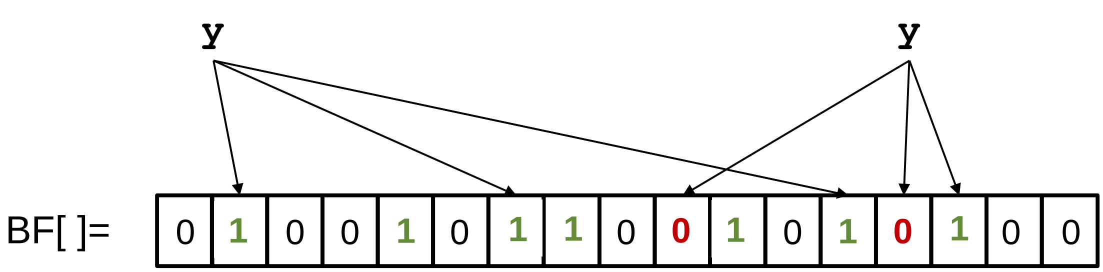
evtl. werden dabei Einträge erneut auf 1 gesetzt

Bloom-Filter: Suchen

```
searchBloom(BF,H,y) //H array of functions H[j]
result=1;
FOR j=0 TO H.length-1 DO
   result=result AND BF[H[j](y)];
return result;
```

Gib an, dass **y** im Wörterbuch, wenn genau alle k Einträge für **y** in **BF=1** sind

in Wörterbuch: nicht in Wörterbuch:



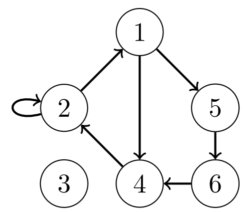
8 Graphen Algorithmen

8.1 Graphen

Der abstrakter Datentyp der Graphen besteht im Grunde aus verschiedenen Knoten (vertices V), die Kanten (edges E) zu anderen Knoten haben. Sogesehen sind auch Bäume immer Graphen, wenn auch beschränkter.

8.1 (a) Gerichtete Graphen

Gerichtete Graphen sind Graphen bei denen die edges E immer nur in eine Richtung sind. D.h., dass eine Kante von Knoten u nach Knoten v **nicht** gleichzusetzen ist wie eine Kante von Knoten v nach Knoten u.
In normaler Notation werden Kanten im Schema $(u, v) \in E$ angegeben, was eine Kante von Knoten u nach Knoten v darstellt.



Example

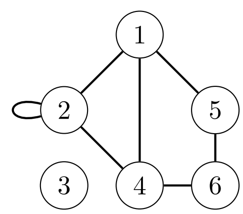
$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$E = \{(1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (4, 2), (5, 6), (6, 4)\}$

(3 hat keine Kanten weg oder zu sich, ist aber trotzdem Teil des Graphs)

8.1 (b) Ungerichtete Graphen

Ungerichtete Graphen unterscheiden sich von gerichteten Graphen nur in der Hinsicht, dass die Kanten $(u, v) \in E$ und $(v, u) \in E$ gleichzusetzen sind.



Example

$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$E = \{\{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 2\}, \{2, 2\}\{2, 4\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}\}$

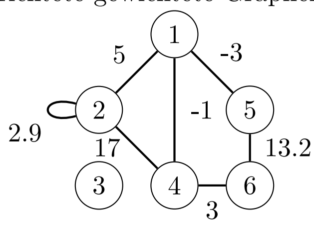
(Geschweifte Klammern stellen ungerichtete Kante dar)

8.1 (c) Pfade

Ein Knoten v ist von einem Knoten u dann erreichbar, wenn es einen Pfad $(w_1, w_2, \ldots, w_k) \in V^k$ für den $(w_i, w_{i+1}) \in E$ für $i = 1, 2, \ldots, k-1$ und $w_1 = u$ und $w_k = v$ gibt.
(Ein Knoten ist immer von sich selbst erreichbar (leerer Pfad $k = 1$))
Dabei ist die Länge des Pfades mit $k - 1 =$ Anzahl der Kanten gegeben. $shortest(u, v) =$ Länge des kürzesten Pfades von u nach v.

8.1 (d) Gewichtete Graphen

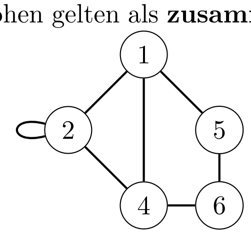
Gewichtete Graphen haben zusätzlich bei den Kanten ein Gewicht. Dieses kann unterschiedliche Dinge, je nach Kontext bedeuten, bspw. könnte ein gewichteter Graph dazu genutzt werden Zugverbindungen darzustellen, wo die Knoten Haltestellen, die Kanten Zugverbindungen und die Gewichte die Entfernung darstellen.
Die Notation hierzu ist $w((u,v))$. Für ungerichtete gewichtete Graphen ist $w((u,v)) = w((v,u))$



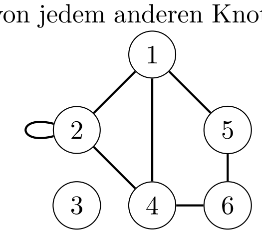
Example

8.1 (e) Zusammenhänge

Ungerichtete Graphen gelten als **zusammenhängend**, wenn jeder Knoten von jedem anderen Knoten erreichbar ist.

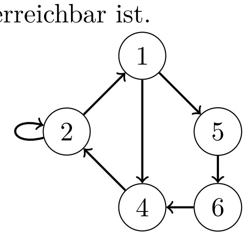


Zusammenhängend

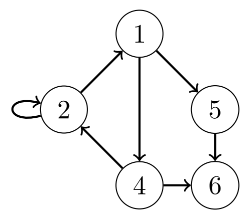


Nicht zusammenhängend

Ein gerichteter Graph gilt als **stark zusammenhängend**, wenn jeder Knoten von jedem anderen Knoten (beachte Kantenrichtung) erreichbar ist.



Zusammenhängend

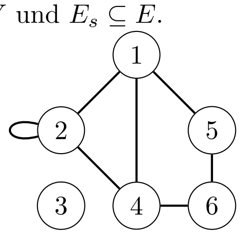


Nicht zusammenhängend

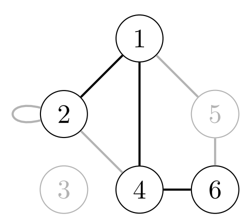
Kein Pfad von 5 nach 1. (Richtung von (4,6) geändert)

8.1 (f) Subgraphen

Ein Subgraph ist ein Graph, bei dem alle Kanten und Knoten auch in dem übergeordneten Graph liegen.
So gilt also $V_s \subseteq V$ und $E_s \subseteq E$.



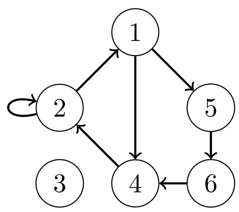
Main Graph



Subgraph

8.1 (g) Darstellungen

Adjazenzmatrix:
Die Adjazenzliste stellt alle Kanten von einem Knoten zu anderen Knoten in jeder Zeile dar.

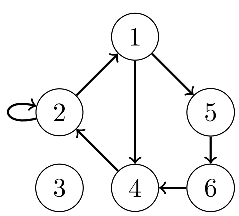


Example

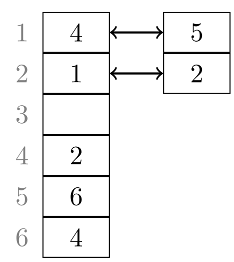
to→ from ↓	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	1	1	0
2	1	1	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0
4	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	1
6	0	0	0	1	0	0

Für ungerichtete Graphen ist die Adjazenzmatrix spiegelsymmetrisch zur Hauptdiagonalen.
Die Adjazenzmatrix hat die Eigenschaft, dass der Eintrag $a_{i,j}^{(m)}$ (i-te Zeile, j-te Spalte der m-ten (A^m) Potenz der Matrix A) die Anzahl der Wege von Knoten i zum Knoten j mit genau m Kanten besitzt.

Adjazenzliste:
Die Adjazenliste stellt die Kanten von einem Knoten zu anderen Knoten als Array mit verketteten Listen dar.



Example

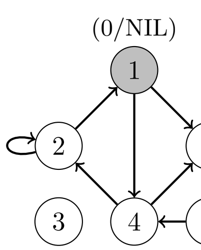


8.2 Breadth-First Search (BFS)

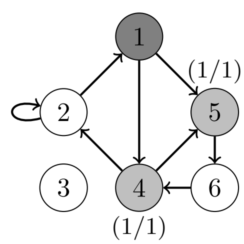
Der Breadth-First Search Algorithmus funktioniert nach dem Prinzip, dass von dem Startpunkt aus erst alle direkten Nachbarn besucht werden. Anschließend werden alle Nachbarn der direkten Nachbarn besucht und so weiter. Allgemein basiert dieser Algorithmus also eher auf der Queue Mechanik, er fügt zuerst alle Werte hinzu und bearbeitet dann den zuerst hinzugefügten Wert.

```
// G: graph with (V,E), s: start
Function breadthFirstSearch(G,s):
    // for all nodes except s:
    ForEach u in V-{s} do
        u.color = WHITE; u.dist = +∞; u.pred = NIL; // Initializes all nodes to appropriate values
    s.color = GRAY; s.dist = 0; s.pred = NIL; // Initializes s at the first node
    Q = new Queue(); // Initializes queue for saving order
    Q.enqueue(s); // add s as first node to queue
    // While there is an unfinished node with a path from s:
    While !isEmpty(Q) do
        u = Q.dequeue();
        // For all nodes adjacent to u:
        ForEach  v in Adj(u) do
            // If v has not been visited yet:
            If v.color == WHITE then
                v.color = GRAY; // Mark node as visited
                v.dist = u.dist + 1; // set distance
                v.pred = u; // set predecessor
                Q.enqueue(v); // Add node to queue
        u.color = BLACK; // Mark current node as finished
```

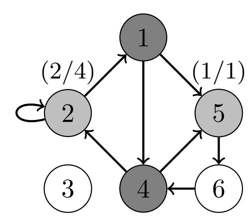
In diesem Code wird der Status der Knoten über Farben angegeben. `WHITE` bedeutet noch nicht besucht, `GRAY` bedeutet besucht, `BLACK` bedeutet beendet.



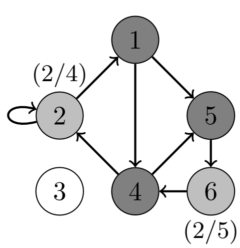
Q = (1)



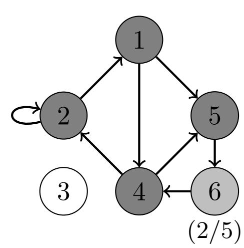
Q = (4,5)



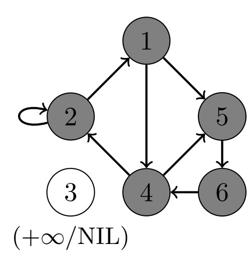
Q = (5,2)



Q = (2,6)



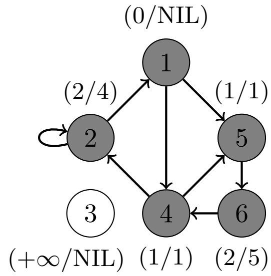
Q = (6)



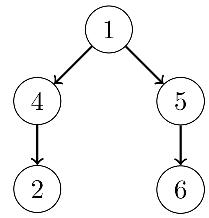
Q = ()

Der erste Wert in den Klammern ist der Schritt, an dem der Knoten entdeckt wurde. Der zweite Wert ist der Vorgängerknoten.

Nach dem Ausführen von BFS kann man durch die jetzt gegebenen Vorgängern einen Subgraphen ableiten.



Graph nach BFS



Abgeleiteter Subgraph

Der Subgraph ist durch $V^s_{pred} = \{v \in V | v.pred \neq \text{NIL}\} \cup \{s\}$ und $E^s_{pred} = \{(v.pred, v) | v \in V^s_{pred} - \{s\}\}$ gegeben. D.h. bedeutet, dass der Subgraph alle von s erreichbaren Knoten enthält und für jeden Knoten im Subgraph genau ein Pfad von s, der auch automatisch der kürzeste Pfad von s zu v ist, existiert.

Um alle Knoten auf dem kürzesten Pfad zwischen zwei Knoten auszugeben kann der folgende Algorithmus verwendet werden.

```
// G: Graph mit (V,E), s: Startknoten, v: Zielknoten
Function printShortestPath(G, s, v):
    // if end == start:
    If v == s then
        print s;
    // if end nodes predecessor is NIL (no path):
    Else If v.pred == NIL then
        print "no path from s to v";
    Else
        printShortestPath(G, s, v.pred); // Recursion (backwards from end to start)
        print v;
```

BFS: Algorithmus

dist =Distanz von s
pred =Vorgängerknoten

```
BFS(G,s) //G=(V,E), s=source node in V

FOREACH u in V-{s} DO
   u.color=WHITE; u.dist=+∞; u.pred=NIL;
s.color=GRAY; s.dist=0; s.pred=NIL;
newQueue(Q);
enqueue(Q,s);
WHILE !isEmpty(Q) DO
   u=dequeue(Q);
   FOREACH v in adj(G,u) DO
      IF v.color==WHITE THEN
         v.color=GRAY; v.dist=u.dist+1; v.pred=u;
         enqueue(Q,v);
   u.color=BLACK;
```

WHITE =Knoten noch nicht besucht
GRAY=in Queue für nächsten Schritt
BLACK =fertig

adj(G,u) = Liste aller Knoten $v \in V$ mit $(u, v) \in E$
(Reihenfolge irrelevant)

Kürzeste Pfade ausgeben

Laufzeit* = $O(|V|)$
*ohne BFS

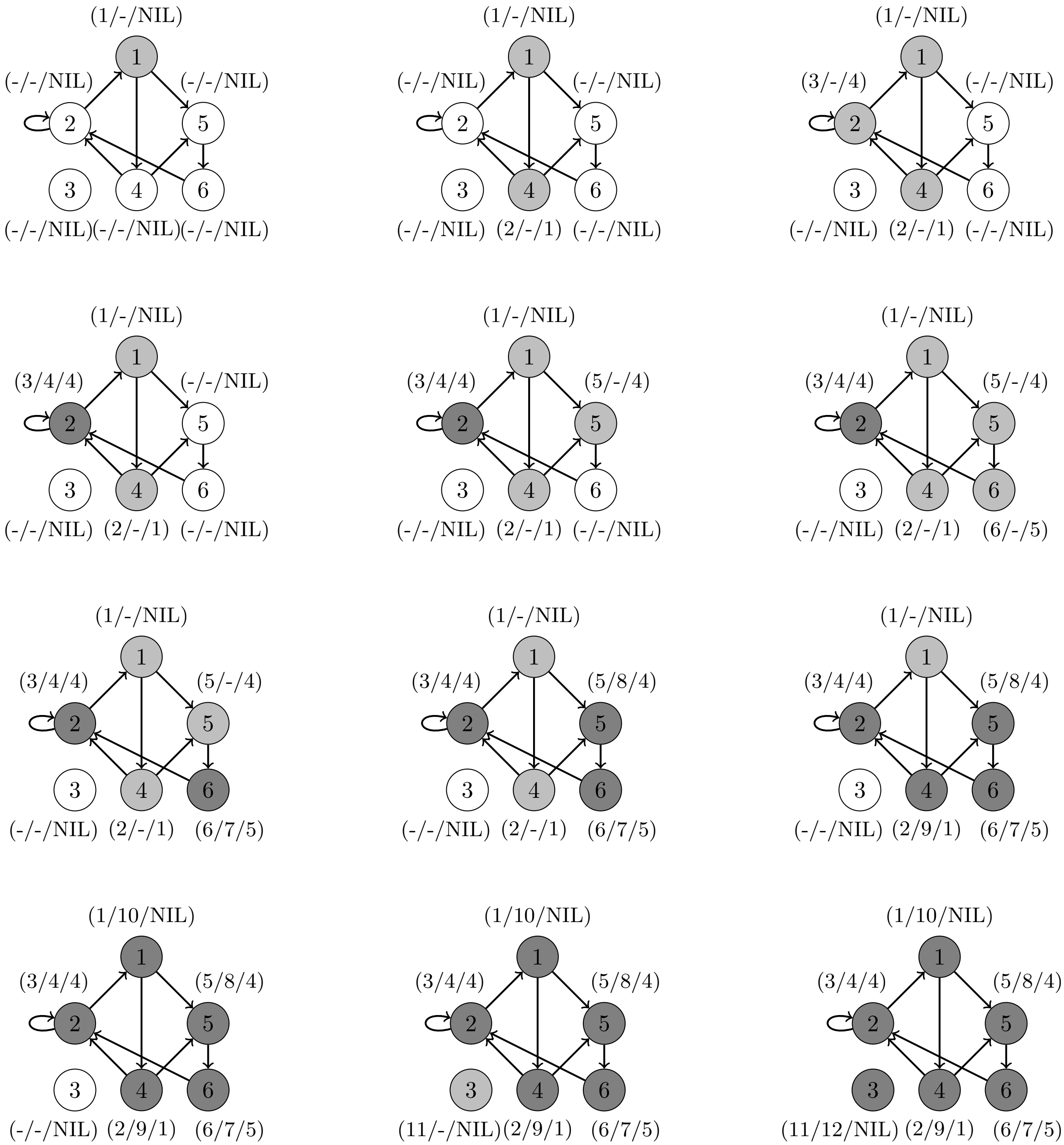
```
PRINT-PATH(G,s,v)
//assumes that BFS(G,s) has already been executed

IF v==s THEN
   PRINT s
ELSE
   IF v.pred==NIL THEN
      PRINT ‘no path from s to v‘
   ELSE
      PRINT-PATH(G,s,v.pred);
      PRINT v;
```

8.3 Depth-First Search (DFS)

Das Prinzip des Depth-First Search Algorithmus ist, dass im Gegensatz zu BFS nicht erst alle Nachbarn eines Knotens besucht werden, sondern immer erst ein Pfad zuende gebracht wird, bevor ein anderer besucht wird. Der Algorithmus geht also solange einen Pfad ab, bis er an einem Knoten keine neuen Knoten mehr findet, wodurch er dann einen Knoten zurück geht und von diesem den nächsten Pfad abgeht. Dies macht er solange, bis er alle Pfade abgelaufen ist.
Allgemein kann man als Unterschied zu BFS sagen, dass dieser Algorithmus mehr der Stack Datenstruktur ähnelt, da sie zuerst die Knoten merkt und dann den zuletzt hinzugefügten Knoten verarbeitet.

```
// G: graph with (V,E)
Function depthFirstSearch(G):
    // for all nodes in the graph:
    ForEach u in V do
        u.color = WHITE; u.pred = NIL; // Initializes all nodes to appropriate values
    time = 0; // Initializes time to 0
    // for all nodes in the graph:
    ForEach u in V do
        // if node not visited:
        If u.color == WHITE then
            visit(G,u);

Function visit(G,u):
    u.color = GRAY; u.disc = ++time // Mark node as visited and set discovery time
    // for all nodes adjacent to u:
    ForEach v in u.adj do
        // if node not visited:
        If v.color == WHITE then
            v.pred = u; // set predecessor
            visit(G,v);
    u.color = BLACK; u.finish = ++time; // Mark node as finshed and set finish time
```

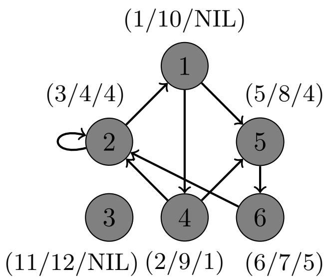
Der Algorithmus hat im Gegensatz zu BFS keinen angegebenen Startknoten, sondern geht die Knoten nach natural Order an.



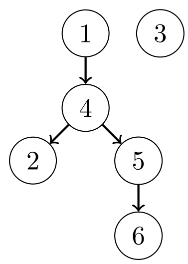
(Discovery/Finish/Predecessor)

Wie bei BFS auch, kann man hier nun einen abgeleiteten Subgraphen erstellen. Unterschiedlich zu BFS aber, stellt dieser nun nicht unbedingt die kürzesten Pfade zwischen zwei Knoten dar. Zusätzlich kann dieser Subgraph genutzt werden um die einzelnen Kanten zu klassifizieren, was in den kommenden Algorithmen wichtig wird. Für die Kantenklassifizierung gilt:

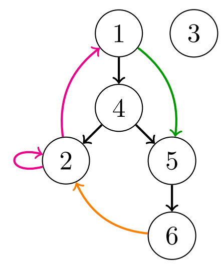
- **Baumkante:** Alle Kanten in G_{pred}
- **Keine Baumkante:**
  - **Vorwärtskante:** Alle Kanten in G zu *Nachkommen* in G_{pred}.
  - **Rückwärtskante:** Alle Kanten in G zu *Vorfahren* in G_{pred} (inkl. Schleifen).
  - **Kreuzkante:** Alle Kanten, die nicht Baum-, Vorwärts, oder Rückwärtskante sind.



G



G_{pred}



G_{pred} mit Kanten (Baumkanten, Vorwärtskante, Rückwärtskante, Kreuzkante)

Man kann die Kantenarten auch schon während DFS klassifizieren. Sei (u,v) die gerade betrachtete Kante. Dann ist (u,v):

- **Baumkante:** Wenn v.color == WHITE
- **Rückwärtskante:** Wenn v.color == GRAY
- **Vorwärtskante:** Wenn v.color == BLACK und u.disc < v.disc
- **Kreuzkante:** Wenn v.color == BLACK und u.disc > v.disc

Zusätzlich ist es wichtig zu wissen, dass es in ungerichteten Graphen nur Baum- und Rückwärtskanten gibt.

DFS: Algorithmus

Laufzeit = $O(|V|+|E|)$

```
DFS(G) //G=(V,E)

FOREACH u in V DO
   u.color=WHITE;
   u.pred=NIL;
time=0;
FOREACH u in V DO
   IF u.color==WHITE THEN
      DFS-VISIT(G,u)
```

time globale Variable

```
DFS-VISIT(G,u)

time=time+1;
u.disc=time;
u.color=GRAY;
FOREACH v in adj(G,u) DO
   IF v.color==WHITE THEN
      v.pred=u;
      DFS-VISIT(G,v);
u.color=BLACK;
time=time+1;
u.finish=time;
```

disc = discovery time
finish=finish time

Topologisches Sortieren mittels DFS

```
TOPOLOGICAL-SORT(G) // G=(V,E) dag

newLinkedList(L);
run DFS(G) but, each time a node is finished,
insert in front of L
return L.head
```

Laufzeit = $O(|V|+|E|)$

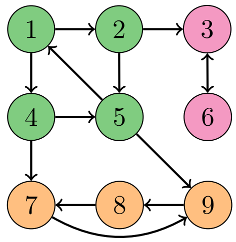
da Einfügen
in Liste vorne
in Zeit $O(1)$

8.4 Strongly Connected Components (SCC)

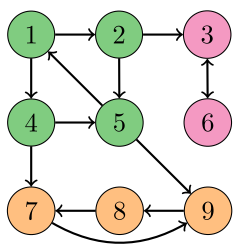
Eine starke Zusammenhangskomponente (Strongly Connected Components (SCC)) ist eine Knotenmenge $C \subseteq V$ für die gilt:

- Zwischen je zwei Knoten u,v $\in C$ gibt es einen Pfad von u nach v.
- C ist maximal - Es gibt keine Menge $D \subseteq V$ mit $C \subseteq D$ für die ersteres gilt.

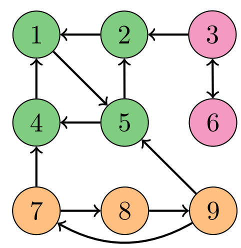
Ein Graph kann somit mehrere SCCs enthalten, diese können sich aber nicht überschneiden. Zwei SCCs C, D mit $u, v \in C$ und $w, x \in D$ mit einem Pfad u $\rightarrow$w können also keinen Pfad x $\rightarrow$v besitzen, ansonsten wären sie gleich.



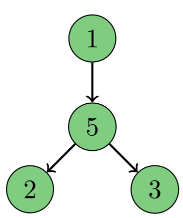

```
// Graph with (V,E)
Function stronglyConnectedComponents(G):
    depthFirstSearch(G); // Needs to sort vertices by finish time
    compute G^T; // Transposed graph - Graph with (V,E^T) with all edges reversed
    depthFirstSearchDescending(G^T); // Main loop goes through vertices by descending finish time
    output each DFS tree in depthFirstSearchDescending() as one SCC;
```



G

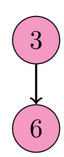


G^T - Transposed Graph(V,E^T), SCCs bleiben gleich, aber Richtungen ändern sich $\rightarrow$Verschiedene SCCs nicht mehr miteinander verbunden



SCC 1 output

SCC 2 output

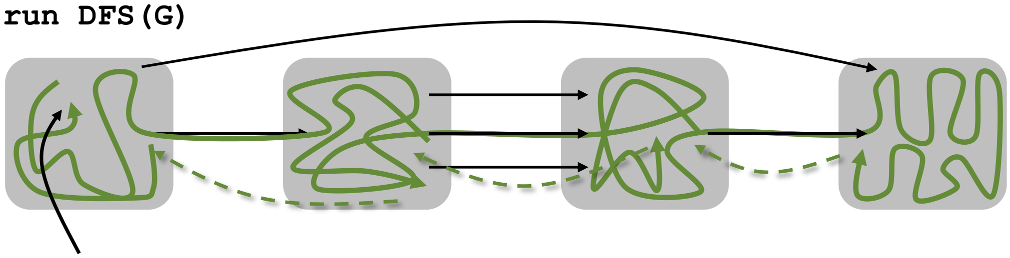


SCC 3 output

SCC Algorithmus: Idee (I)

```
SCC(G) // G=(V,E) directed graph

1   run DFS(G)
2   compute G^T
3   run DFS(G^T) but visit vertices in main loop
       in descending finish time from step 1
4   output each DFS tree in 3 as one SCC
```

1 run DFS(G)



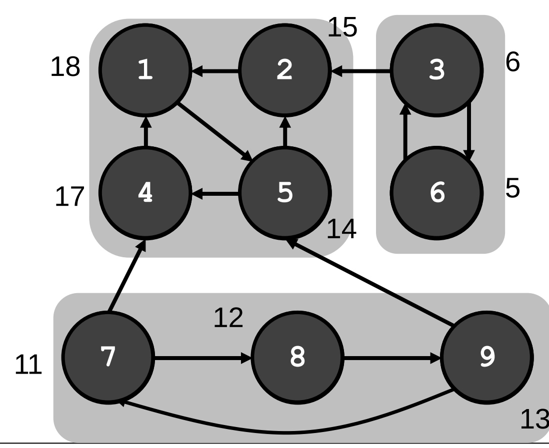
Knoten mit höchster **finish** time liegt in dieser SCC

Bild nimmt zusammenhängenden Graphen an, funktioniert aber auch allgemein, dann nacheinander für die zusammenhängenden Subgraphen

SCC Algorithmus: Beispiel (II)

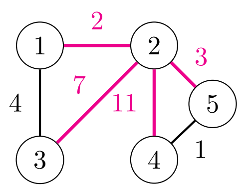
```
SCC(G) // G=(V,E) directed graph

1   run DFS(G)
2   compute G^T
3   run DFS(G^T) but visit vertices in main loop
       in descending finish time from 1
4   output each DFS tree in 3 as one SCC
```

umgedrehte Kanten

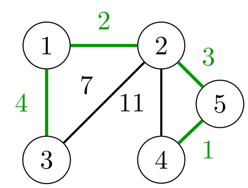


8.5 Minimale Spannbäume (MST)

Für einen zusammenhängenden, ungerichteten, gewichteten Graph $G = (V, E)$ mit Gewichten w ist ein Subgraph $T = (V, E_T)$ ein Spannbaum, wenn T azyklisch ist und alle Knoten verbindet.
Ein Spannbaum ist also der Graph mit der minimalen Anzahl an Kanten, die aber trotzdem noch Pfade zu allen Knoten darstellen.
Ein **minimaler** Stammbaum hat zusätzlich noch die Eigenschaft, dass $w(T) = \sum_{\{u,v\} \in E_T} w(u, v)$ minimal im Vergleich zu allen anderen Spannbäumen ist. Einfach gesagt heißt das, dass das Gesamtgewicht des minimalen Spannbaums kleiner ist, als die Gesamtgewichte aller anderen Spannbäume.



Ein Spannbaum



Minimaler Spannbaum

Sichere Kanten

Eine sichere Kante ist eine Kante die in jedem Fall im minimalen Spannbaum enthalten ist. Um eine sichere Kante zu finden kann man beispielsweise den Spannbaum aufteilen. Die leichteste Kante, die dann die beiden Teilgraphen miteinander verbindet ist dann eine sichere Kante.
Anders ausgedrückt: **Sei A Teilmenge eines MST, (S, V-S) Schnitt, der A respektiert und {u,v} die leichte Kante, die den Schnitt überbrückt. Dann ist {u,v} eine sichere Kante für A.**
Hierbei gilt:

- {u,v} sicher für A wenn A ∪{u,v} Teilmenge eines MST
  (Sicher wenn Vereinigung von A und {u,v} eine Teilmenge des MST ist)
- Schnitt (S, V-S) partioniert Knoten des Graphen in zwei Mengen.
  (Schnitt teilt die Knotenmenge in S und V - S)
- {u,v} überbrückt (S, V-S), wenn u ∈ S und v ∈ S.
  (Kante überbrückt Schnitt, wenn die Knoten der Kante in unterschiedlichen Teilen des Schnitts sind)
- (S, V-S) respektiert A ⊆ E, wenn keine Kante {u,v} aus A den Schnitt überbrückt.
  (Es existiert noch keine Kante in A, die den Schnitt überbrückt)
- {u,v} leichte Kante für (S, V-S), wenn w(u,v) minimal für alle Kanten, die den Schnitt überbrücken.
  (Kante ist die leichteste Kante, wenn es keine leichtere Kante gibt, die den Schnitt überbrückt)

8.5 (a) Kruskals Algorithmus

Kruskals Algorithmus funktioniert nach dem Prinzip, dass erstmal für alle Knoten eine Untermenge erstellt wird. Anschließend werden alle Kanten des Graphen nach Gewicht sortiert und dann in aufsteigender Reihenfolge durchlaufen. Hierbei werden die beiden Knoten der betrachteten Kante überprüft, ob sie der gleichen Menge angehören. Falls ja, bedeutet dies, dass es schon einen Pfad im MST zwischen den beiden Knoten gibt, andernfalls wird die leichteste Kante zum MST hinzugefügt und die beiden Mengen, denen die Knoten angehören vereinigt. Wenn alle Kanten durchlaufen wurden ist der MST fertig konstruiert und kann zurückgegeben werden.

```
// Complexity: O(|E| · log |E|) or O(|E| · log |V|)  (log |E| = Θ log |V|, because |V| − 1 ≤ |E| ≤ |V^2|)
Function MSTKruskal(G,w):
    A = ∅; // Empty Set of edges →represents MST
    ForEach v in V do
        set(v) = {v}; // Creates a set for each node, containing only that node
    sort edges according to weight in increasing order;
    // Iterate through all edges in increasing order of weight
    ForEach {u,v} ∈E do
        // if the sets are the same the nodes already belong to the same set, that means that an edge
           connecting the two nodes is already in the MST →no new edge should be added to avoid
           cycles
        If set(u) != set(v) then
            A = A ∪{u,v}; // Add edge to MST
            union(G,u,v); // unite the two sets
    return A; // Return MST
```

8.5 (b) Prims Algorithmus

Der Prim Algorithmus funktioniert nach dem Prinzip, dass es für jeden Knoten alle Kanten zu seinen Nachbarn durchgeht um die Kante mit dem kleinsten Gewicht zu finden. Der MST wird durch die `pred` Referenz der Knoten gebildet.

```
// Complexity: O(|E| + |V| · log |V|)
// r is the starting node →works with any node in the graph
Function MSTPrim(G,w,r):
    ForEach v in V do
        v.key = ∞; v.pred = NIL; // key represents lightest weight of an edge to v in the MST. MST
           not created yet →start with biggest value.
    r.key = −∞; // Starting nodes key is set to −∞ as its supposed to be worked on first.
    Q = V; // Q is a queue containing all nodes.
    // While there are still nodes that have not been worked on:
    While !isEmpty(Q) do
        u = extractMin(Q); // Extract the node with the smallest key
        // For all nodes adjacent to u:
        ForEach v in Adj(u) do
            // If v has not been visited yet and the weight of the edge is smaller than the current
               lightest edge to v:
            If v ∈ Q and w(u,v) < v.key then
                v.key = w(u,v); // Update the key of v
                v.pred = u; // Update the predecessor of v
```

Sowohl Kruskals als auch Prims Algorithmus funktionieren nicht für gerichtete Graphen. Sie finden zwar beide **einen** Spannbaum, aber nicht immer den **minimalen** Spannbaum.

Allgemeiner MST-Algorithmus: Idee

```
genericMST(G,w) // G=(V,E) undirected, connected graph
                   w weight function
A=∅
WHILE A does not form a spanning tree for G DO
   find safe edge {u,v} for A
   A = A∪{{u,v}}
return A
```

A Teilmenge der Kanten eines MST

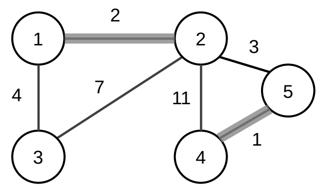
Kante **{u,v}** ist sicher („safe“) für **A**,
wenn **A ∪ {{u,v}}** noch Teilmenge eines MST ist

Algorithmus von Kruskal

UNION(G,u,v) setzt $set(w) = set(u) \cup set(v)$
für alle Knoten $w \in set(u) \cup set(v)$

```
MST-Kruskal(G,w) // G=(V,E) undirected, connected graph
                    w weight function
A=∅
FOREACH v in V DO set(v)={v};
Sort edges according to weight in nondecreasing order
FOREACH {u,v} in E according to order DO
   IF set(u)!=set(v) THEN
      A = A∪{{u,v}}
      UNION(G,u,v);
return A
```

wenn **set(u)==set(v)**,
dann wären Knoten schon
verbunden und {u,v} erzeugte Zyklus



Zu jedem Knoten v sei $set(v)$ Menge von mit v durch **A** verbundenen Knoten. Zu Beginn ist $set(v) = \{v\}$.

$set(u), set(v)$ sind disjunkt oder identisch

Im Beispiel $set(1) = \{1,2\}, set(4) = \{4,5\}$.

Algorithmus von Prim

(Wahl des Wurzelknoten beliebig)

```
MST-Prim(G,w,r) // r root in V, MST given through v.pred values

FOREACH v in V DO {v.key=∞; v.pred=NIL;}
r.key=-∞; Q=V;
WHILE !isEmpty(Q) DO
  u=EXTRACT-MIN(Q); //smallest key value
  FOREACH v in adj(u) DO
    IF v∈Q and w({u,v})<v.key THEN
       v.key=w({u,v});
       v.pred=u;
```

Idee: Algorithmus fügt, beginnend mit Wurzelknoten, immer leichte Kante zu zusammenhängender Menge hinzu

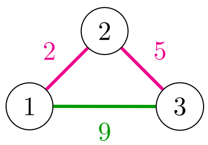
Auswahl der nächsten Kante gemäß **key**-Wert, der stets aktualisiert wird

A implizit definiert durch
$\mathbf{A} = \{ \{\mathbf{v}, \mathbf{v.pred}\} \mid \mathbf{v} \in V - (\{r\} \cup Q) \}$

8.6 Kürzesten Pfade

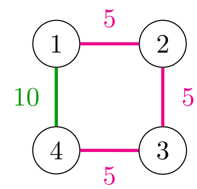
8.6 (a) Single Source Shortest Path (SSSP)

Bei den SSSP Algorithmen geht es darum, den Pfad mit dem geringsten Gewicht von einem Knoten zu einem anderen zu finden. Damit unterscheiden sie sich von den BFS Algorithmus, da dieser Algorithmus zwar den kürzesten Weg gemäß Kantenanzahl findet, jedoch Gewicht ignoriert. Zudem unterscheiden sie sich auch von den MST Algorithmen, die zwar die Wege mit den geringsten Gewichten finden, jedoch müssen alle Knoten in diesem Graph enthalten sein, wodurch sie eventuell nicht den kürzesten Weg zwischen zwei spezifischen Knoten finden.



BFS

Kürzester Pfad, aber nicht geringstes Gewicht.



MST

Spiegelt nicht den leichtesten Pfad 1 →4 wieder.

Ein paar Regeln für SSSP Algorithmen sind, dass Zyklen nicht Teil des leichtesten Pfades sein können. Positiv gewichtete Zyklen würden nur Gewicht hinzufügen, was nicht gewollt ist. Negative könnten beliebig oft durchlaufen werden für einen beliebig leichten Pfad, was praktisch keinen Sinn ergibt. Negative Kanten sind okay, Negative Zyklen nicht.
Ein Teilpfad s →x des kürzesten Pfads s →x →z ist auch immer der kürzeste Pfad von s →x.
Alle Algorithmen für SSSP funktionieren über das Konzept von **Relaxation**. Hierbei wird die Distanz eines Knotens v verringert, wenn durch eine anliegende Kante (u,v) eine kürzere Distanz möglich ist.

```
// G: graph with (V,E), u and v nodes, w weight function
Function relax(G, u, v, w):
    // if the distance of the node v is bigger than the distance of the node u + the weight of the
       edge (u,v)
    If v.dist > u.dist + w(u, v) then
        v.dist = u.dist + w(u, v); // Assign the new distance to the node v
        v.pred = u; // Update predecessor of v
```

Die Initialisierung bleibt auch gleich:

```
// G: graph with (V,E), s startnode, w weight function
Function initSSSP(G, s, w):
    ForEach v in V do
        v.dist = ∞; // Set all distances to ∞
        v.pred = NIL; // Set predecessor to NIL
    s.dist = 0; // Set the distance of the startnode to 0
```

8.6 (b) Bellman-Ford Algorithmus

```
// Complexity: Θ(|E| · |V|)
// G: graph with (V,E), s startnode, w weight function
Function BellmanFordSSSP(G, s, w):
    initSSSP(G, s, w); // Set all distances (except s) to ∞ and the predecessor to NIL
    // Runs once for every Vertices - s since the predecessor of s is NIL →Shortest path has at
       most |V|-1 edges
    For i = 1 to |V|-1 do
        // for every edge in the graph
        ForEach (u,v) in E do
            relax(G, u, v, w); // Relax every edge
    // At this point the prev references should make up the lightest path from each node to s
    // This does not yet check for negative cycles, which would falsify the result.
    // Check every edge for negative cycles
    ForEach (u,v) in E do
        // if the edge after relaxation can still be improved, that implies a negative cycle
        If v.dist > u.dist + w(u, v) then
            return false; // Negative cycle →return false
    return true; // No negative cycle →return true
```

8.6 (c) DAG (Directed Acyclic Graph) Algorithmus

Dieser Algorithmus hat zwar im Vergleich zu Bellman-Ford eine bessere Komplexität, ist aber nur für azyklische Graphen geeignet. Er nutzt die Eigenschaft der topologischen Reihenfolge um Kanten nicht öfter angehen zu müssen.

```
// Complexity: Θ(|E| + |V|)
Function DAGTopoSSSP(G, s, w):
    initSSSP(G, s, w); // Set all distances (except s) to ∞ and the predecessor to NIL
    execute topological sorting; // topological sorted graph is graph in which each vertex u appears
       before every vertex v for all edges (u,v). Only for acyclic graphs
    // for every vertex in topological order. Processing them in this order ensures that for a
       vertex u all vertices with edges to u have already been processed.
    ForEach u in V (in topological order) do
        // for every adjacent vertex v
        ForEach v in adj(u) do
            relax(G, u, v, w); // Relax every adjacent edge
```

8.6 (d) Dijkstra Algorithmus

Dijkstras Algorithmus funktioniert zwar auch für zyklische Graphen, jedoch hat er Probleme mit negativen Kanten. Diese können aber entfernt werden, indem man alle Kantengewichte mit dem absoluten Wert der leichtesten negativen Kante zusammenaddiert.

```
// Complexity: Θ(|V| · log |V| + |E|)
Function DijkstraSSSP(G, s, w):
    initSSSP(G, s, w); // Set all distances (except s) to ∞ and the predecessor to NIL
    Q = V; // Q is a queue containing all nodes.
    While !isEmpty(Q) do
        u = extractMin(Q); // Extract the node with the smallest key
        // For all nodes adjacent to u:
        ForEach v in Adj(u) do
            relax(G, u, v, w); // Relax every adjacent edge
```

8.6 (e) A* Algorithmus

Der A* Algorithmus ist eine abgewandelte Version des Dijkstra Algorithmus. Dabei geht der Algorithmus auf das Problem ein, dass der Dijkstra Algorithmus den lokal gesehenen günstigsten Schritt sucht, dabei aber die Zielrichtung ignoriert, was zu überflüssigen Operationen führen kann.
Ist in der Praxis oft schneller als Dijkstra, hat aber den selben Nachteil, dass er nicht mit negativen Kanten klarkommt. Zusätzlich ist die Spacial complexity schlechter als Dijkstra, wegen der zusätzlichen heuristic.

```
// Complexity: Θ(|V| · log |V| + |E|)
// s start, t target
Function A*SSSP(G, s, t, w):
    initSSSP(G, s, w); // Set all distances (except s) to ∞ and the predecessor to NIL
    Q = V; // Q is a queue containing all nodes. Additionally the nodes are sorted according to the
        distance AND heuristic value of the vertex which ensure that the nodes closer to the target
        are processed first.
    While !isEmpty(Q) do
        u = extractMin(Q); // Extract the node with the smallest key
        // If u is the target:
        If u == t then
            break;
        // For all nodes adjacent to u:
        ForEach v in Adj(u) do
            relax(G, u, v, w); // Relax every adjacent edge
```

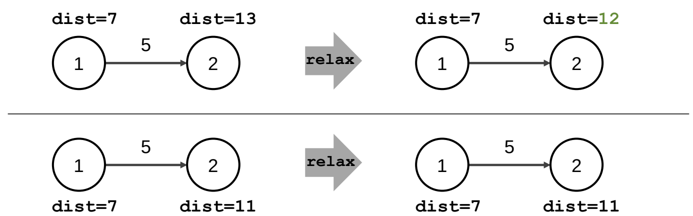
Bei Ungerichteten Graphen können zwar Bellman-Ford und Dijkstra ausgeführt werden, jedoch muss für Bellman-Ford beachtet werden, dass keine Kante ein negatives Gewicht haben kann, da diese direkt einen negativen Zyklus impliziert. Wenn man aber bei Dijkstra die Gewichte direkt alle positiv macht kann dieser bedenkenslos ausgeführt werden.
Nimmt man an, dass die Kanten nicht negativ sind, ist es besser direkt Dijkstra zu nutzen.
Die Kanten {u,v} entsprechen sogesehen den Kanten (u,v) und (v,u). (Alle gleiches Gewicht.)

Relax!

Idee: verringere aktuelle Distanz von Knoten v, wenn durch Kante (u, v) kürzere Distanz erreichbar:

Zu Beginn Distanz = ∞ für alle Knoten ≠ s

```
relax(G,u,v,w)

IF v.dist > u.dist + w((u,v)) THEN
   v.dist=u.dist + w((u,v));
   v.pred=u;
```



Algorithmen und Datenstrukturen | Marc Fischlin | SS24 | 06 Graphen-Algorithmen | 129

Bellman-Ford-Algorithmus

```
Bellman-Ford-SSSP(G,s,w)

1  initSSSP(G,s,w);
2  FOR i=1 TO |V|-1 DO
3     FOREACH (u,v) in E DO
4        relax(G,u,v,w);
5  FOREACH (u,v) in E DO
6     IF v.dist > u.dist+w((u,v)) THEN
7        return false;
8  return true;
```

```
initSSSP(G,s,w)

1  FOREACH v in V DO
2     v.dist=∞;
3     v.pred=NIL;
4  s.dist=0;
```

prüft zusätzlich, ob „negativer Zyklus" erreichbar (=**`false`**)

Laufzeit = $\theta(|E| \cdot |V|)$

wegen geschachtelter **`FOR`**-Schleifen in **2** und **3**

Algorithmen und Datenstrukturen | Marc Fischlin | SS24 | 06 Graphen-Algorithmen | 130

A*-Algorithmus (II)

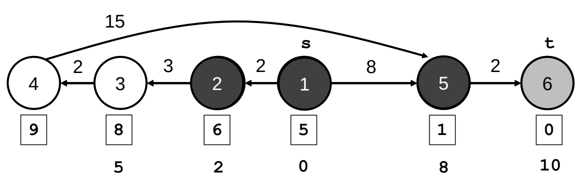
(nicht-negative Kantengewichte)

Idee: füge Heuristik hinzu, die „vom Ziel her denkt"

```
A*(G,s,t,w)
init(G,s,t,w);
Q=V; //let S=V-Q
WHILE !isEmpty(Q) DO
   u=EXTRACT-MIN(Q);
   IF u==t THEN break;
   FOREACH v in adj(u) DO
      relax(G,u,v,w);
```

jeder Knoten **`u`** bekommt zusätzlich Wert **`u.heur`** zugewiesen (Beispiel: Abstand Luftlinie vom Ziel)

Minimum über **`u.dist + u.heur`**

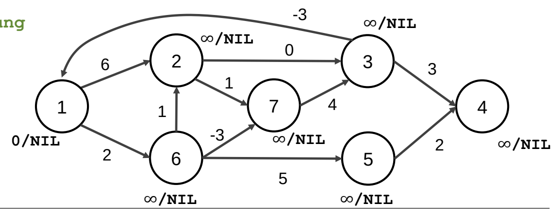


Algorithmen und Datenstrukturen | Marc Fischlin | SS24 | 06 Graphen-Algorithmen | 174

Bellman-Ford: Beispiel (I)

```
Bellman-Ford-SSSP(G,s,w)

1  initSSSP(G,s,w);
2  FOR i=1 TO |V|-1 DO
3     FOREACH (u,v) in E DO
4        relax(G,u,v,w);
5  FOREACH (u,v) in E DO
6     IF v.dist > u.dist+w((u,v)) THEN
7        return false;
8  return true;
```

`Initialisierung für s=1 in 1`



Algorithmen und Datenstrukturen | Marc Fischlin | SS24 | 06 Graphen-Algorithmen | 137

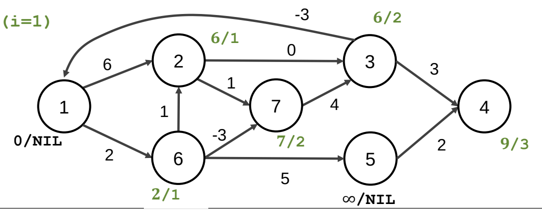
Bellman-Ford: Beispiel (II)

```
Bellman-Ford-SSSP(G,s,w)

1  initSSSP(G,s,w);
2  FOR i=1 TO |V|-1 DO
3     FOREACH (u,v) in E DO
4        relax(G,u,v,w);
5  FOREACH (u,v) in E DO
6     IF v.dist > u.dist+w((u,v)) THEN
7        return false;
8  return true;
```

Kanten in **FOREACH** in **3** gemäß lexikographischer Ordnung: (1,2), (1,6), (2,3), ...

FOR-Schleife 2 `(i=1)`

```
relax(1,2)
relax(1,6)
relax(2,3)
relax(2,7)
relax(3,1)
relax(3,4)
relax(5,4)
```



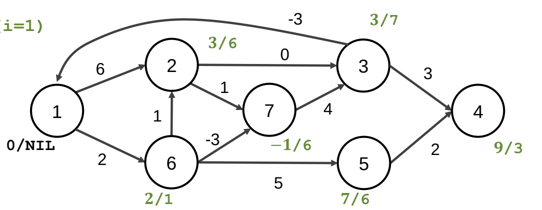
Algorithmen und Datenstrukturen | Marc Fischlin | SS24 | 06 Graphen-Algorithmen | 138

Bellman-Ford: Beispiel (III)

```
Bellman-Ford-SSSP(G,s,w)

1  initSSSP(G,s,w);
2  FOR i=1 TO |V|-1 DO
3     FOREACH (u,v) in E DO
4        relax(G,u,v,w);
5  FOREACH (u,v) in E DO
6     IF v.dist > u.dist+w((u,v)) THEN
7        return false;
8  return true;
```

FOR-Schleife 2 `(i=1)`

```
relax(6,2)
relax(6,5)
relax(6,7)
relax(7,3)
```



Algorithmen und Datenstrukturen | Marc Fischlin | SS24 | 06 Graphen-Algorithmen | 139

Bellman-Ford: Beispiel (IV)

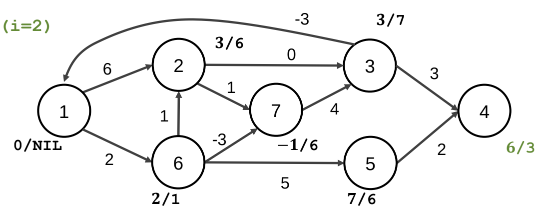
```
Bellman-Ford-SSSP(G,s,w)

1  initSSSP(G,s,w);
2  FOR i=1 TO |V|-1 DO
3     FOREACH (u,v) in E DO
4        relax(G,u,v,w);
5  FOREACH (u,v) in E DO
6     IF v.dist > u.dist+w((u,v)) THEN
7        return false;
8  return true;
```

Keine Änderungen mehr in den folgenden Iterationen

Algorithmus gibt `true` zurück

FOR-Schleife 2 `(i=2)`

```
relax(1,2)
relax(1,6)
relax(2,3)
relax(2,7)
relax(3,1)
relax(3,4)
relax(5,4)
```

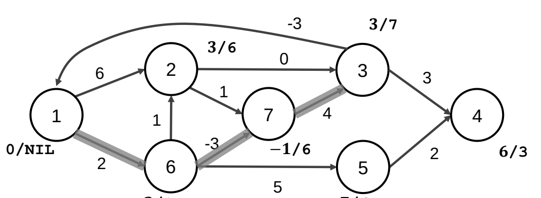


Algorithmen und Datenstrukturen | Marc Fischlin | SS24 | 06 Graphen-Algorithmen | 140

Bellman-Ford: Beispiel (V)

```
Bellman-Ford-SSSP(G,s,w)

1  initSSSP(G,s,w);
2  FOR i=1 TO |V|-1 DO
3     FOREACH (u,v) in E DO
4        relax(G,u,v,w);
5  FOREACH (u,v) in E DO
6     IF v.dist > u.dist+w((u,v)) THEN
7        return false;
8  return true;
```

Kürzester Weg z.B. von 1 zu 3 durch Vorgängerwerte gegeben

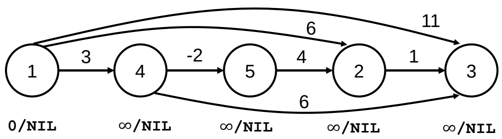


Algorithmen und Datenstrukturen | Marc Fischlin | SS24 | 06 Graphen-Algorithmen | 141

SSSP-Algorithmus für Dags: Beispiel (I)

```
TopoSort-SSSP(G,s,w) // G dag

1  initSSSP(G,s,w);
2  execute topological sorting
3  FOREACH u in V in topological order DO
4     FOREACH v in adj(u) DO
5        relax(G,u,v,w);
```

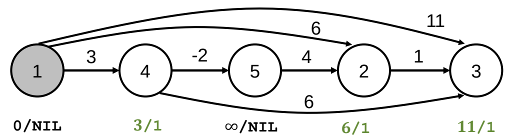
Initialisierung für s=1 in 1
und Sortieren in 2



SSSP-Algorithmus für Dags: Beispiel (II)

```
TopoSort-SSSP(G,s,w) // G dag

1  initSSSP(G,s,w);
2  execute topological sorting
3  FOREACH u in V in topological order DO
4     FOREACH v in adj(u) DO
5        relax(G,u,v,w);
```

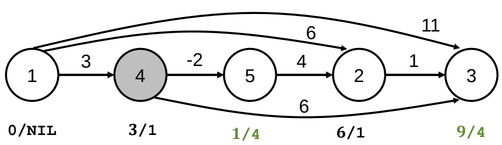
3 FOREACH (u=1)



SSSP-Algorithmus für Dags: Beispiel (III)

```
TopoSort-SSSP(G,s,w) // G dag

1  initSSSP(G,s,w);
2  execute topological sorting
3  FOREACH u in V in topological order DO
4     FOREACH v in adj(u) DO
5        relax(G,u,v,w);
```

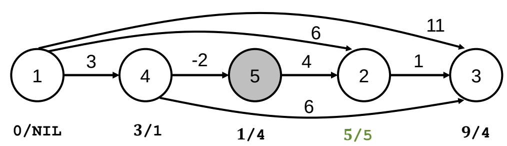
3 FOREACH (u=4)



SSSP-Algorithmus für Dags: Beispiel (IV)

```
TopoSort-SSSP(G,s,w) // G dag

1  initSSSP(G,s,w);
2  execute topological sorting
3  FOREACH u in V in topological order DO
4     FOREACH v in adj(u) DO
5        relax(G,u,v,w);
```

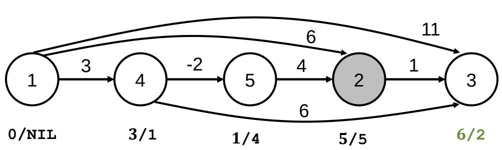
3 FOREACH (u=5)



SSSP-Algorithmus für Dags: Beispiel (V)

```
TopoSort-SSSP(G,s,w) // G dag

1  initSSSP(G,s,w);
2  execute topological sorting
3  FOREACH u in V in topological order DO
4     FOREACH v in adj(u) DO
5        relax(G,u,v,w);
```

3 FOREACH (u=2)



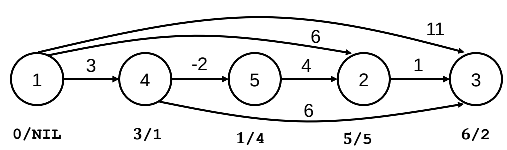
SSSP-Algorithmus für Dags: Korrektheit+Laufzeit

```
TopoSort-SSSP(G,s,w) // G dag

1  initSSSP(G,s,w);
2  execute topological sorting
3  FOREACH u in V in topological order DO
4     FOREACH v in adj(u) DO
5        relax(G,u,v,w);
```

Korrektheit:
Kanten auf einem kürzesten Pfad werden nacheinander „gelockert“

(vgl. Bellman-Ford)

Laufzeit = $\theta(|E|+|V|)$



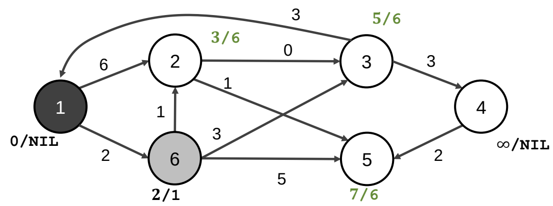
Dijkstra-Algorithmus: Beispiel (III)

```
Dijkstra-SSSP(G,s,w)

1  initSSSP(G,s,w);
2  Q=V; //let S=V-Q
3  WHILE !isEmpty(Q) DO
4     u=EXTRACT-MIN(Q); //wrt. dist
5     FOREACH v in adj(u) DO
6        relax(G,u,v,w);
```

Voraussetzung: $w((u,v)) \geq 0$ **für alle Kanten**

3 WHILE (u=6)

relax(6,2)
relax(6,3)
relax(6,5)



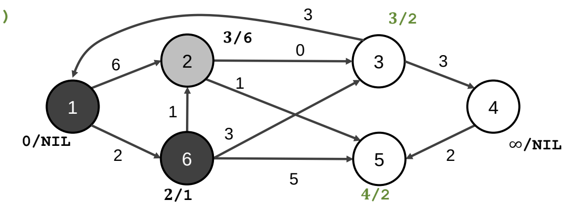
Dijkstra-Algorithmus: Beispiel (IV)

```
Dijkstra-SSSP(G,s,w)

1  initSSSP(G,s,w);
2  Q=V; //let S=V-Q
3  WHILE !isEmpty(Q) DO
4     u=EXTRACT-MIN(Q); //wrt. dist
5     FOREACH v in adj(u) DO
6        relax(G,u,v,w);
```

Voraussetzung: $w((u,v)) \geq 0$ **für alle Kanten**

3 WHILE (u=2)

relax(2,3)
relax(2,5)



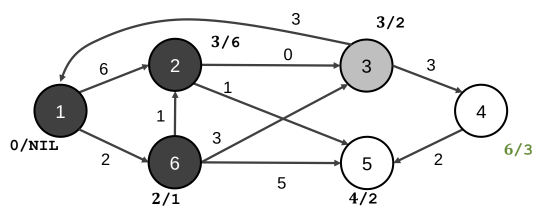
Dijkstra-Algorithmus: Beispiel (V)

```
Dijkstra-SSSP(G,s,w)

1  initSSSP(G,s,w);
2  Q=V; //let S=V-Q
3  WHILE !isEmpty(Q) DO
4     u=EXTRACT-MIN(Q); //wrt. dist
5     FOREACH v in adj(u) DO
6        relax(G,u,v,w);
```

Voraussetzung: $w((u,v)) \geq 0$ **für alle Kanten**

3 WHILE (u=3)

relax(3,1)
relax(3,4)

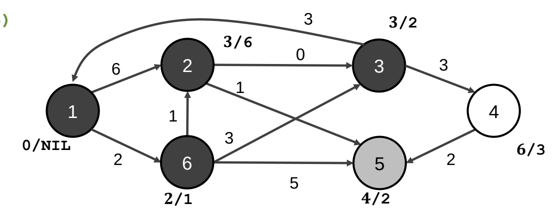


Dijkstra-Algorithmus: Beispiel (VI)

```
Dijkstra-SSSP(G,s,w)

1  initSSSP(G,s,w);
2  Q=V; //let S=V-Q
3  WHILE !isEmpty(Q) DO
4     u=EXTRACT-MIN(Q); //wrt. dist
5     FOREACH v in adj(u) DO
6        relax(G,u,v,w);
```

Voraussetzung: $w((u,v)) \geq 0$ **für alle Kanten**

3 WHILE (u=5)



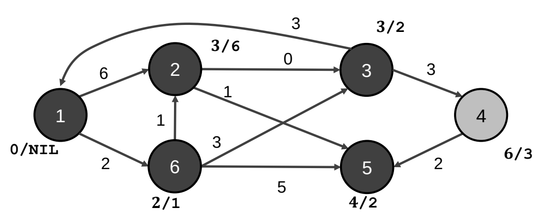
Dijkstra-Algorithmus: Beispiel (VII)

```
Dijkstra-SSSP(G,s,w)

1  initSSSP(G,s,w);
2  Q=V; //let S=V-Q
3  WHILE !isEmpty(Q) DO
4     u=EXTRACT-MIN(Q); //wrt. dist
5     FOREACH v in adj(u) DO
6        relax(G,u,v,w);
```

Voraussetzung: $w((u,v)) \geq 0$ **für alle Kanten**

3 WHILE (u=4)

relax(4,5)

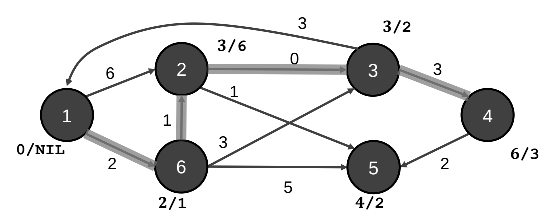


Dijkstra-Algorithmus: Beispiel (VIII)

```
Dijkstra-SSSP(G,s,w)

1  initSSSP(G,s,w);
2  Q=V; //let S=V-Q
3  WHILE !isEmpty(Q) DO
4     u=EXTRACT-MIN(Q); //wrt. dist
5     FOREACH v in adj(u) DO
6        relax(G,u,v,w);
```

Voraussetzung: $w((u,v)) \geq 0$ **für alle Kanten**

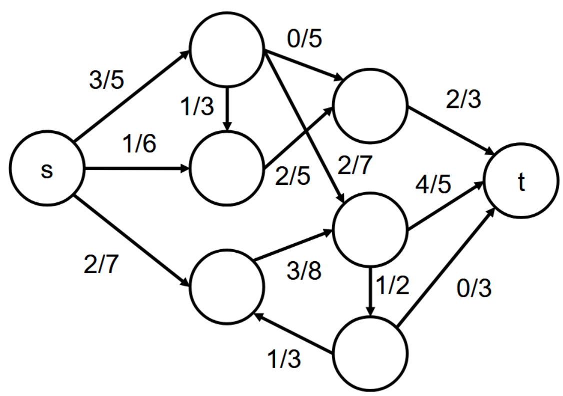
Beispiel: kürzester Weg 1→4



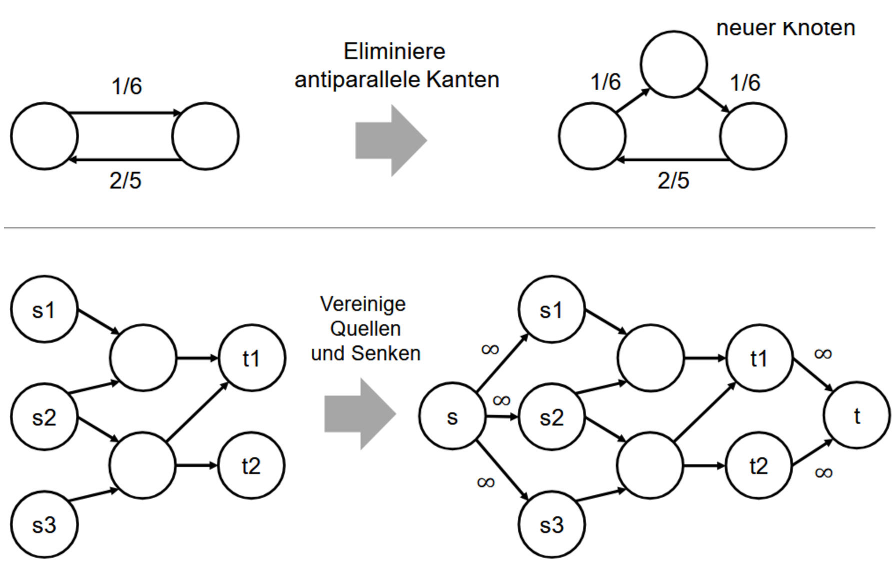
8.7 Maximaler Fluss

Das grundsätzliche Konzept von Flüssen ist, dass Graphen sogesehen nicht nur ein Gewicht haben, sondern zwei. Dabei repräsentiert eines den aktuellen Fluss und das andere den maximalen. Bei Flussgraphen gilt dann, dass alle Knoten außer Start s und Target t gleichen eingehenden und ausgehenden Fluss haben. Formal:
Ein Flussnetzwerk ist ein gewichteter, gerichteter Graph G = (V,E) mit Kapazitätsgewicht c, so dass c(u,v) ≥ 0 für (u,v) $\in$ E und c(u,v) = 0 für (u,v) $\notin$ E, mit zwei Knoten s,t $\in$ V (Quelle, Senke), sodass jeder Knoten von s aus erreichbar ist und t von jedem Knoten aus erreichbar ist.
Zusätzlich ist der Fluss einer Kante minimal 0 sein kann und maximal der Kapazität der Kante entsprechen kann. Zusätzlich ist der Gesamt**ein**fluss gleich dem Gesamt**aus**fluss eines Knoten. (Input = Output) Formal:
Ein Fluss f: V$\times$ V $\rightarrow\mathbb{R}$ für ein Flussnetzwerk G = (V,E) mit Kapazitätsgewicht c und Quelle s und Senke t erfüllt $0 \leq f(u,v) \leq c(u,v)$ *für (u,v) $\in$ E. Zusätzlich gilt für u $\in$ V - {s,t}:* $\sum_{v\in V} f(u,v) = \sum_{v\in V} f(v,u)$

Außerdem gibt es noch den Wert eines Flusses. dieser spiegelt wieder, wie viel Fluss insgesamt von der Quelle zur Senke transportiert wird (Prinzipiell Fluss der Quelle: Ausfluss der Quelle - Einfluss der Quelle). Formal:
Der Wert |f| eine Flusses f:V$\times$ V $\rightarrow\mathbb{R}$ für ein Flussnetzwerk G = (V,E) mit Kapazität c und Quelle s und Senke t ist |f| = $\sum_{v\in V} f(s,v) - \sum_{v\in V} f(v,s)$ *(Ausfluss der Quelle - Einfluss der Quelle)*
Der maximale Fluss beschreibt den maximaler Ausfluss der Quelle, der, unter der Beachtung der Kapazitäten in die Senke fließen kann.



|f| = 6, nicht maximal, da z.B. über obere Kanten noch +1 könnte.



Verschiedene Transformationen von Flüssen

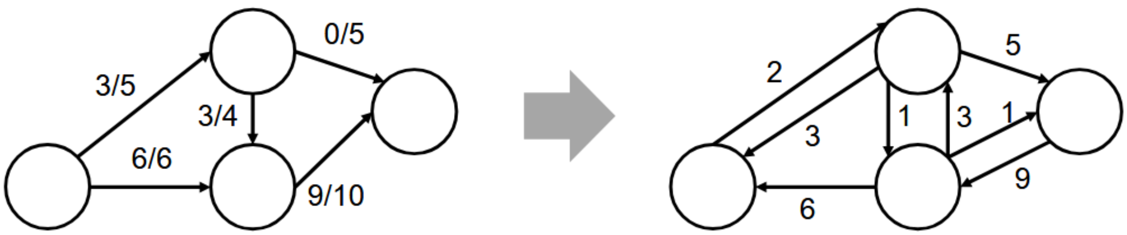
8.7 (a) Ford-Fulkerson Algorithmus

Der Ford-Fulkerson Methode zufolge wird im Flussgraphen ein Pfad von s zu t gesucht, der noch erweiterbar bzgl. des Flusses ist. Hierbei wird aber nicht der eigentlich Graph genutzt, sondern der sogenannte Restkapazitätsgraph. Dieser Graph stellt die Restkapazitäten einer Kante aufgeteilt auf Vorwärts- und Rückwärtskante dar. Dabei gilt für die Vorwärtskante $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$ (Wie viel freie Kapazität die Kante hat), wenn (u,v) $\in$ E und die Rückwärtskante $c_f(u, v) = f(v, u)$ (Wie viel Kapazität die Kante schon besetzt), wenn (u,v) $\in$ E. Andernfalls ist $c_f(u, v) = 0$.

Restkapazität:

$$c_f(u,v) = \begin{cases} c(u,v) - f(u,v) & \text{falls } (u,v) \in E \\ f(v,u) & \text{falls } (v,u) \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Formelle Restkapazität



Restkapazitätsgraph

Im Restkapazitätsgraph ist es nun also so, dass wenn eine Kante von einem Knoten wegführt, dieser noch Kapazität übrig hat und der Fluss an dieser Kante erhöht werden kann. Demnach muss in diesem Graphen jetzt nur noch ein Pfad von s nach t gefunden werden, dessen Existenz impliziert, dass der maximale Fluss noch nicht erreicht ist. Demnach können auf diesem Pfad die Restkapazitäten angepasst werden. Formell:
Finde Pfad von s zu t in G_f und erhöhe (für Kanten in G) bzw. erniedrige (für nicht-Kanten) um Minimum $c_f(u, v)$ aller Werte auf dem Pfad in G

```
// Complexity: O(|E| · u · |f*|), u = max capacity, |f*| = max flow
// s start, t target, c capacity function
Function FordFulkerson(G, s, t, c):
    ForEach e in E do
        e.flow = 0; // Initializes all flow values to 0
    // goes through every possible path with free capacity
    While path p from s to t exists in G_f do
        c_f(p) = min{c_f(u,v) : (u,v) ∈p}; // Minimum of all flow values on the path
        // Changes the flow values on the path
        ForEach e in p do
            // If edge e in p →total flow, else remaining capacity
            If e in E then
                e.flow += c_f(p); // Add minimal flow to edge
            Else
                e.flow -= c_f(p); // Subtract minimal flow from edge
```

Ford-Fulkerson-Algorithmus

```
Ford-Fulkerson(G,s,t,c)

FOREACH e in E DO e.flow=0;
WHILE there is path p from s to t in G_flow DO
    c_flow(p) = min {c_flow(u,v) | (u,v) in p }
    FOREACH e in p DO
        IF e in E THEN
            e.flow=e.flow+ c_flow(p)
        ELSE
            e.flow=e.flow- c_flow(p)
```

Z.B. wenn in jeder Iteration der Fluss nur um $1/u = 0.1$ erhöht wird

Laufzeit = $O(|E| \cdot u \cdot |f^*|)$

Pfadsuche z.B. per BFS oder DFS

(wobei f^* maximaler Fluss und Fluss um bis zu $1/u$ pro Iteration wächst)

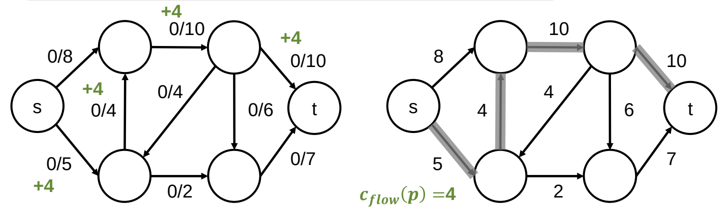
Laufzeit = $O(|V| \cdot |E|^2)$

(mit Verbesserung nach Edmonds-Karp)

Ford-Fulkerson-Algorithmus: Beispiel (I)

```
Ford-Fulkerson(G,s,t,c)

FOREACH e in E DO e.flow=0;
WHILE there is path p from s to t in G_flow DO
    c_flow(p) = min {c_flow(u,v) | (u,v) in p }
    FOREACH e in p DO
        IF e in E THEN
            e.flow=e.flow+ c_flow(p)
        ELSE
            e.flow=e.flow- c_flow(p)
```

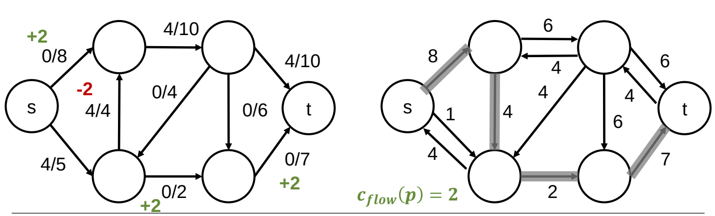
Restkapazitäts-graph



Ford-Fulkerson-Algorithmus: Beispiel (II)

```
Ford-Fulkerson(G,s,t,c)

FOREACH e in E DO e.flow=0;
WHILE there is path p from s to t in G_flow DO
    c_flow(p) = min {c_flow(u,v) | (u,v) in p }
    FOREACH e in p DO
        IF e in E THEN
            e.flow=e.flow+ c_flow(p)
        ELSE
            e.flow=e.flow- c_flow(p)
```

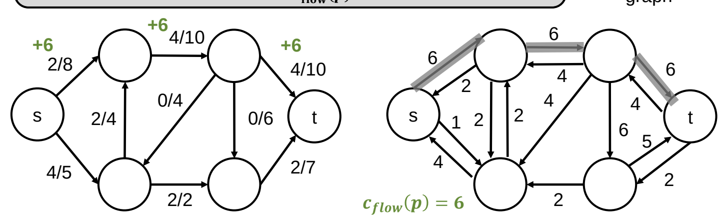
Restkapazitäts-graph



Ford-Fulkerson-Algorithmus: Beispiel (III)

```
Ford-Fulkerson(G,s,t,c)

FOREACH e in E DO e.flow=0;
WHILE there is path p from s to t in G_flow DO
    c_flow(p) = min {c_flow(u,v) | (u,v) in p }
    FOREACH e in p DO
        IF e in E THEN
            e.flow=e.flow+ c_flow(p)
        ELSE
            e.flow=e.flow- c_flow(p)
```

Restkapazitäts-graph

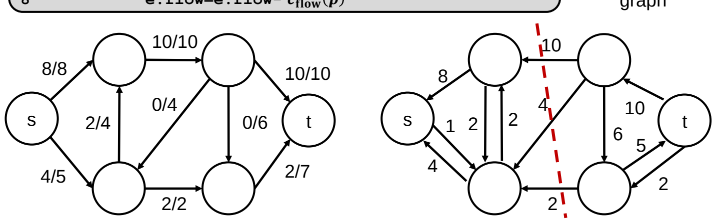


Ford-Fulkerson-Algorithmus: Beispiel (IV)

```
Ford-Fulkerson(G,s,t,c)

FOREACH e in E DO e.flow=0;
WHILE there is path p from s to t in G_flow DO
    c_flow(p) = min {c_flow(u,v) | (u,v) in p }
    FOREACH e in p DO
        IF e in E THEN
            e.flow=e.flow+ c_flow(p)
        ELSE
            e.flow=e.flow- c_flow(p)
```

Kein Pfad mehr im Restkapazitäts-Graph

Restkapazitäts-graph



9 Advanced Design

9.1 Divide & Conquer

9.2 Backtracking

9.3 Dynamic Programming

9.4 Greedy Algorithms