Algorithmen und Datenstrukturen

Prof. Marc Fischlin, SS 2024

07

Fortgeschrittene Algorithmen-Entwurfsmethoden

Folien beruhen auf gemeinsamer Veranstaltung mit Christian Janson aus dem SS 2020

Auswahl Algorithmischer Entwurfsmethoden

Divide & Conquer

Löse rekursiv
(disjunkte) Teilprobleme

(Quicksort, Mergesort)

Backtracking

durchsuche iterativ
Lösungsraum

Dynamisches Programmieren

Löse rekursiv
(überlappende) Teilprobleme
durch Wiederverwenden

Greedy

baue Lösung aus Folge
lokal bester Auswahlen zusammen

(Kruskal, Prim, Dijkstra)

+Metaheuristiken: übergeordnete Methoden für Optimierungsprobleme

Divide & Conquer

(Fast Fourier Transform, FFT)

Idee der Fourier-Transformation

Beispiel:
Polynommultiplikation

Beispiel:
$T = \Omega(n^2)$

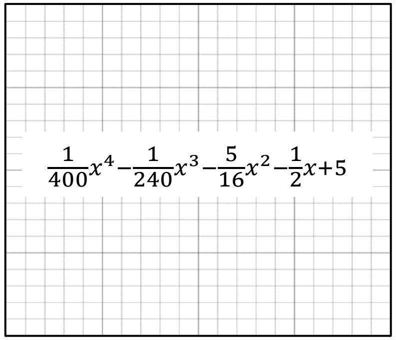
Beispiel:
FFT und inverse FFT
in Zeit $O(n \log n)$
per Divide & Conquer

Beispiel:
in Zeit $O(n)$

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\text{Problem in Darstellung X} \arrow[r, "\text{Transformiere in Zeit} \ll T"] \arrow[d, "\text{Löse in Zeit T}"'] \arrow[d, bend left=60, "\text{Gesamtzeit} \ll T"] & \text{Problem in Darstellung Y} \arrow[d, "\text{Löse in Zeit} \ll T"] \\
\text{Lösung in Darstellung X} & \text{Lösung in Darstellung Y} \arrow[l, "\text{Transformiere in Zeit} \ll T \text{ zurück}"']
\end{tikzcd}$$

Bilder erstellt mit `desmos.com`

Polynom: Koeffizientendarstellung (I)



$$p(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_{n-2} x^{n-2} + p_{n-1} x^{n-1}$$

mit $p_{n-1} \neq 0$ und $grad\big(p(x)\big) = n-1$

Gegeben beispielsweise als Array **`p[]`** der Koeffizienten **`p[i]`**

Schnelle Auswertung an Stelle **`w`** bei Koeffizientendarstellung (Horner-Methode):

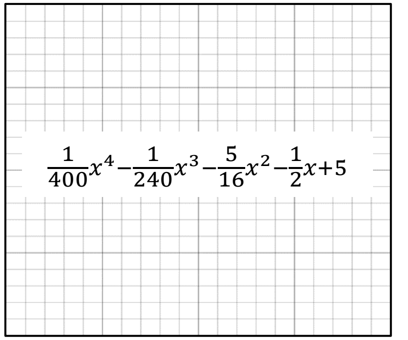
$$p(x) = (((p_{n-1}x + p_{n-2})x + p_{n-3}) \cdots\ p_1)x + p_0$$

```
PolyEval(p,n,w) // p[] array of n entries
  y=p[n-1];
  FOR i=n-2 DOWNTO 0 DO y=y*w+p[i];
  return y;
```

Laufzeit $\Theta(n)$

Bilder erstellt mit **desmos.com**

Polynom: Koeffizientendarstellung (II)



Multiplikation zweier Polynome $p(x), q(x)$, beide vom Grad $n-1$

$$p(x) \cdot q(x) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} p_i x^i\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} q_i x^i\right)$$ vom Grad $2n-2$

$$= \sum_{k=0}^{2n-2} \left(\sum_{j=0}^{k} p_j \cdot q_{k-j}\right) x^k$$ „Konvolution“

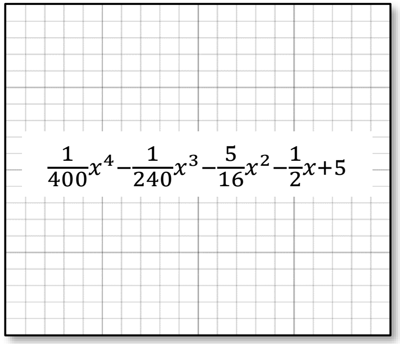
Geht das schneller?

```
PolyMult(p,q,n) // p,q arrays of n entries
r=ALLOC(2n-1);
FOR k=0 TO 2n-2 DO
   r[k]=0;
   FOR j=0 TO k DO r[k]=r[k]+p[j]*q[k-j];
return r;
```

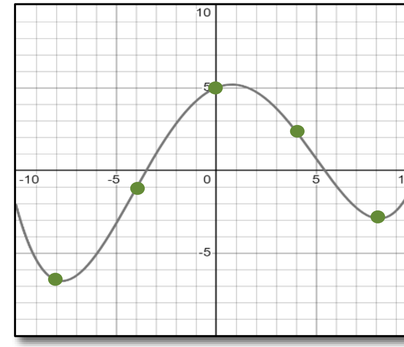
Laufzeit
$\Theta\left(\sum_{k=0}^{2n-2} k\right) = \Theta(n^2)$

Fourier-Transformation

(I)DFT=(Inverse) Diskrete Fourier-Transformation



„Transformiere in geeignetere Darstellung, rechne dort und transformiere zurück“



Multiplikation von $p(x), q(x)$
vom Grad $n-1$
in Koeffizientendarstellung

DFT

in Zeit $\Theta(n \log n)$
per FFT

Darstellung von $p(x), q(x)$
vom Grad $n-1$
in Punkt/Wert-Darstellung

per Konvolution
in Zeit $\Theta(n^2)$

Gesamtzeit $\Theta(n \log n)$

in Zeit $\Theta(n)$

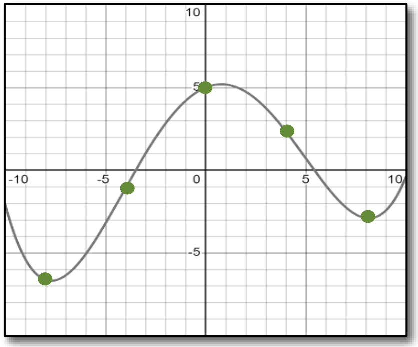
$r(x) = p(x) \cdot q(x)$
vom Grad $2n-2$
in Koeffizientendarstellung

in Zeit $\Theta(n \log n)$
per IFFT

IDFT

$r(x) = p(x) \cdot q(x)$
vom Grad $2n-2$
in Punkt/Wert-Darstellung

Polynome: Punkt/Wert-Darstellung (I)



$$p(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_{n-2} x^{n-2} + p_{n-1} x^{n-1}$$

mit $p_{n-1} \neq 0$ und $grad\big(p(x)\big) = n - 1$

Gegeben z.B. als Array **`p[]`** der Punkte/Werte **`p[i].x`**, **`p[i].y`**

Eindeutigkeit der Punkt/Wert-Darstellung

Jedes Polynom $p(x)$ über Körper vom Grad $\leq n-1$ lässt sich eindeutig durch n Punkt/Wert-Paare $(x_j, y_j)_{j=0,\ldots,n-1}$ für verschiedene x_j durch $y_j = p(x_j)$ beschreiben.

Zu $(x_j, y_j)_{j=0,\ldots,n-1}$ betrachte lineares Gleichungssystem in Variablen $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$:

$$
\begin{aligned}
p(x_0) &= p_0 + p_1 x_0 + p_2 x_0^2 + \cdots + p_{n-1} x_0^{n-1} = y_0 \\
p(x_1) &= p_0 + p_1 x_1 + p_2 x_1^2 + \cdots + p_{n-1} x_1^{n-1} = y_1 \\
&\vdots \\
p(x_{n-1}) &= p_0 + p_1 x_{n-1} + p_2 x_{n-1}^2 + \cdots + p_{n-1} x_{n-1}^{n-1} = y_{n-1}
\end{aligned}
$$

In Matrixform:

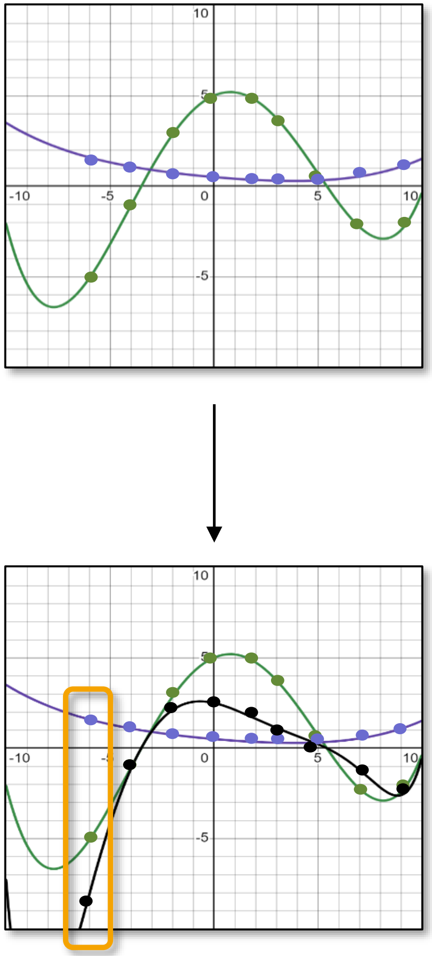
$$
\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & x_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}
$$

Vandermond-Matrix $V(x_0, \ldots, x_{n-1})$ mit
$\det V(x_0, \ldots, x_{n-1}) = \prod_{0 \leq i < j \leq n-1} (x_j - x_i)$

$\det V(x_0, \ldots, x_{n-1}) \neq 0$ für verschiedene x_j,
also eindeutige Lösung $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$

Polynome: Punkt/Wert-Darstellung (II)

Ziel: berechne Produkt $r(x) = \color{green}{\boldsymbol{p(x)}} \cdot \color{blue}{\boldsymbol{q(x)}}$



Polynom-Multiplikation in Punkt/Wert-Darstellung einfach (sofern gleiche x-Koordinaten $x_0, x_1, x_2, \ldots$ für p und q):

$$r(x_j) = \color{green}{\boldsymbol{p(x_j)}} \cdot \color{blue}{\boldsymbol{q(x_j)}} \text{ für alle } j = 0,1,\ldots,2n-2$$

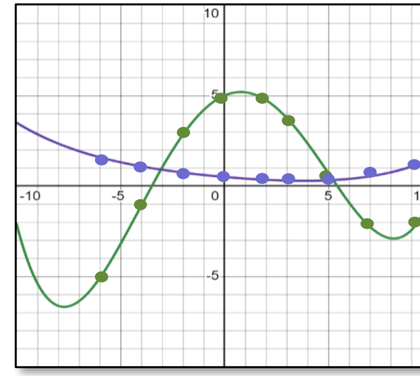
benötigen $2n-1$ Paare
(damit auch schon für p, q,
da r vom Grad $2n-2$)

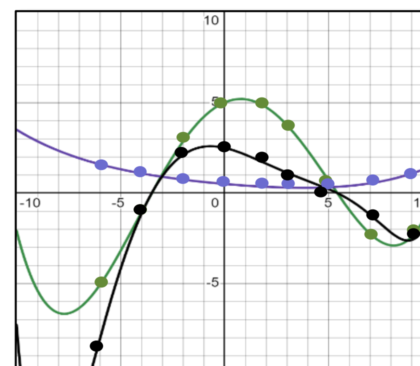
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
Cryptoplexity

Polynome: Punkt/Wert-Darstellung (III)

```
PolyMult(p,q,n)
// p,q arrays of 2n-1 entries x,y
// p[i].x=q[i].x for all i
r=ALLOC(2n-1);
FOR i=0 TO 2n-2 DO
    r[i].x = p[i].x;
    r[i].y = p[i].y * q[i].y;
return r;
```

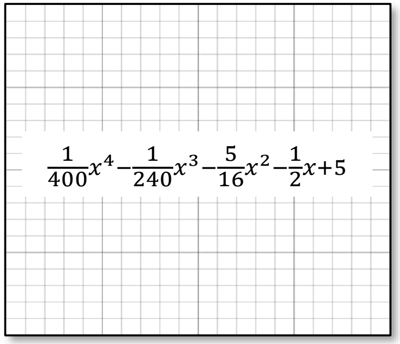
Laufzeit $\Theta(n)$

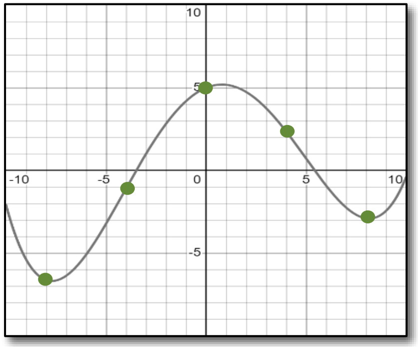




Bilder erstellt mit `desmos.com`

Diskrete Fourier-Transform berechnen (I)





$$p(x) = p_0 + p_1 x + \cdots + p_{n-1} x^{n-1}$$

$$DFT_n(p) = (x_j, p(x_j))_{j=0,\ldots,2n-2}$$

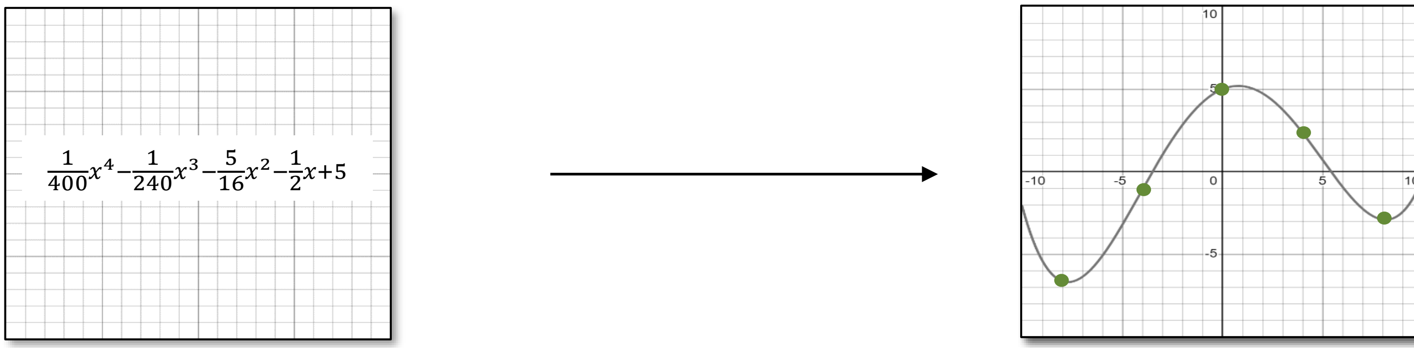
Problem:
Wir benötigen $2n-1$ Punkt/Werte-Paare

Auswertung des Polynoms nach Horner-Methode
kostet jeweils $\Theta(n)$ Schritte für jeden Punkt x_j

Gesamtaufwand für alle $2n-1$ Punkte wäre $\Theta(n^2)$!

Lösung: Verwende spezielle Werte x_j,
so dass schneller per Divide-&-Conquer berechenbar

Diskrete Fourier-Transform berechnen (II)



$$p(x) = p_0 + p_1 x + \cdots + p_{n-1} x^{n-1}$$

Schreibe $p(x)$ in folgender Form (n gerade):

$$p(x) = p_{even}(x^2) + x \cdot p_{odd}(x^2)$$

wobei

$$p_{even}(x) = p_0 + p_2 x + \cdots + p_{n-2} x^{(n-2)/2}$$

$$p_{odd}(x) = p_1 + p_3 x + \cdots + p_{n-1} x^{(n-2)/2}$$

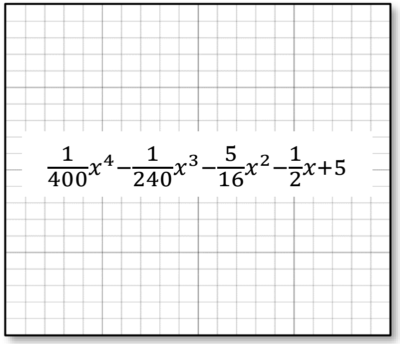
noch nicht (ganz) Problem halber Größe, um Divide-&-Conquer anzuwenden

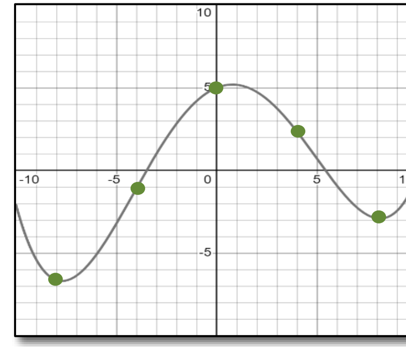
p_{even}, p_{odd} sind Polynome von ca. halbem Grad
– aber leider immer noch $2n-1$ Punkte x_j nötig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Cryptoplexity
Cryptography & Complexity Theory
Technische Universität Darmstadt
www.cryptoplexity.de

Diskrete Fourier-Transform berechnen (III)





$$p(x) = p_0 + p_1 x + \cdots + p_{n-1}x^{n-1}$$

Schreibe $p(x)$ in folgender Form (n gerade):

aber immer noch
$x_j \neq x_{j+n}$

$$p(x) = p_{even}(x^2) + x \cdot p_{odd}(x^2)$$

Verwende Werte x_j, so dass $x_j^2 = x_{j+n}^2$ für alle $j = 0{,}1, \dots, n-1$

Dann müssen p_{even}, p_{odd} vom Grad $\frac{n-2}{2} = \frac{n}{2} - 1$ nur an n Stellen $x_0^2, x_1^2, \dots, x_{n-1}^2$ ausgewertet werden

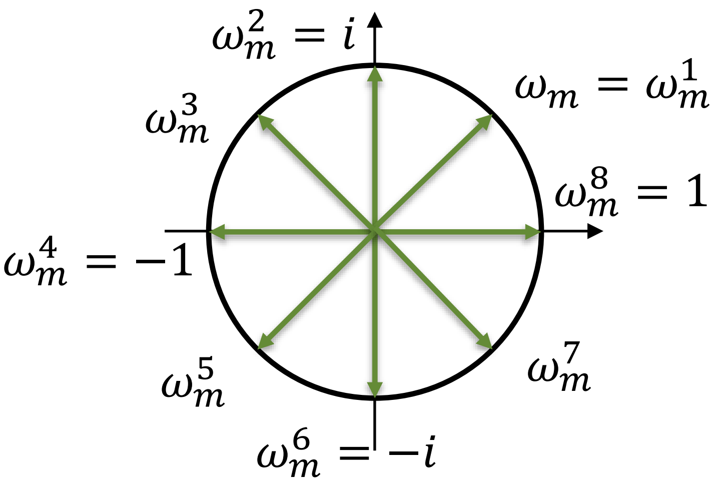
Problemgröße halbiert $\Rightarrow$ Divide-&-Conquer anwendbar

m-te primitive Einheitswurzeln

Eine m-te primitive Einheitswurzel ω_m über einem Körper erfüllt $\omega_m^m = 1$ und $\omega_m^i \neq 1$ für $i = 1,2,\ldots,m-1$.

Beispiel für komplexe Zahlen:

$$\omega_m = exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right) = \cos\frac{2\pi}{m} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{m}$$



$m = 8$

Für m-te primitive Einheitswurzel ω_m gilt für gerades m:

$$\left(\omega_m^i\right)^2 = \left(\omega_m^{i+m/2}\right)^2 \text{ für alle } i = 0,1,\ldots\frac{m}{2}-1$$

denn:

$$\left(\omega_m^{i+m/2}\right)^2 = \omega_m^{2i+m} = \omega_m^{2i} \cdot \underbrace{\omega_m^m}_{=1} = \left(\omega_m^i\right)^2$$

Ferner ist ω_m^2 eine $\frac{m}{2}$-te primitve Einheitswurzel,

da $(\omega_m^2)^{m/2} = \omega_m^m = 1$

und $(\omega_m^2)^i = \omega_m^{2i} \neq 1$ für $i = 1,2,\ldots,\frac{m}{2}-1$

(und somit $2i = 2,4,\ldots,m-2$)

FFT – Algorithmen (I)

Wrapper, der für rekursive Aufrufe die aktuelle primitive Einheitswurzel hinzufügt:

```
FFTWrap(p,n) // n=2^k =#entries in p, k>=0
1  return FFT(p,n,w); //w 2n-th primitive root of unity
```

Zur Vereinfachung bestimmen wir *2n* (statt *2n-1*) Punkt-Werte, so dass jeweils n Einträge im Array **`p[]`** und jeweils doppelt so viele Punkt-Werte berechnet werden

Wir benötigen, dass n Zweierpotenz ist; erreichen wir notfalls, indem wir n maximal verdoppeln und die zusätzlichen Einträge im Array **`p[]`** auf 0 setzen

(Übergang $n \to 2n$ wird später in der asymptotischen Laufzeit nicht ins Gewicht fallen)

FFT – Algorithmen (II)

```
FFT(p,n,w) // n=2^k =#entries in p, k>=0
  pEven=ALLOC(n/2); pOdd=ALLOC(n/2);
  pVal=ALLOC(2n); pEvenVal=ALLOC(n); pOddVal=ALLOC(n);
  x=ALLOC(2n); x[0]=1; //input values x_j
  FOR i=1 TO 2n-1 DO x[i]=w*x[i-1]; //x[i]= w^i

  IF n==1 THEN //constant polynom
     pVal[0].x=x[0]; pVal[0].y=p[0].y;
     pVal[1].x=x[1]; pVal[1].y=p[0].y;
  ELSE
     FOR i=0 TO (n-2)/2 DO //create p_even,p_odd
       pEven[i]=p[2i]; pOdd[i]=p[2i+1];
     pEvenVal=FFT(pEven,n/2,w*w); //evaluate at x_j^2
     pOddVal =FFT(pOdd,n/2,w*w);
     FOR i=0 TO 2n-1 DO  //p(x_j) = p_even(x_j^2) + x_j · p_odd(x_j^2)
       pVal[i].x = x[i];
       pVal[i].y=pEvenVal[i mod n].y + x[i]*pOddVal[i mod n].y;
return pVal;
```

FFT – Beispiel (I)

$p(x) = 5 + x - x^2 + 2x^3$

p=[5,1,-1,2], n=4, w=ω_8

FFT([5,1,-1,2],4,ω_8)

x[]=[$1, \omega_8, \omega_8^2, \omega_8^3, \omega_8^4, \omega_8^5\ \omega_8^6, \omega_8^7$]

pEvenVal[]

→ **FFT([5,-1],2,ω_8^2)**

x[]=[$1, \omega_8^2, \omega_8^4$, ω_8^6]

pEvenVal[]

→ **FFT([5],1,ω_8^4)**

return [(1,5),(ω_8^4,5)]

Basisfall für $n = 1$ (konstantes Polynom)

```
pEvenVal=FFT(pEven,n/2,w*w); //evaluate at x_j^2
pOddVal =FFT(pOdd,n/2,w*w);
FOR i=0 TO 2n-1 DO  //p(x_j) = p_even(x_j^2) + x_j · p_odd(x_j^2)
  pVal[i].x = x[i];
  pVal[i].y=pEvenVal[i mod n].y + x[i]*pOddVal[i mod n].y;
```

FFT – Beispiel (II)

$p(x) = 5 + x - x^2 + 2x^3$

p=[5,1,-1,2], n=4, w=ω_8

FFT([5,1,-1,2],4,ω_8**)**

  x[]=[$1, \omega_8, \omega_8^2, \omega_8^3, \omega_8^4, \omega_8^5\ \omega_8^6, \omega_8^7$**]**

  pEvenVal[]

  → **FFT([5,-1],2,**ω_8^2**)**

    x[]=[$1, \omega_8^2, \omega_8^4, \omega_8^6$**]**

    pEvenVal[]=[(1,5),(ω_8^4**,5)]**

    pOddVal[]

    → **FFT([-1],1,**ω_8^4**)**

      return [(1,-1),(ω_8^4**,-1)]**

pEvenVal=FFT(pEven,n/2,w*w); //evaluate at x_j^2

pOddVal =FFT(pOdd,n/2,w*w);

FOR i=0 TO 2n-1 DO $//p(x_j) = p_{even}(x_j^2) + x_j \cdot p_{odd}(x_j^2)$

  pVal[i].x = x[i];

  pVal[i].y=pEvenVal[i mod n].y + x[i]*pOddVal[i mod n].y;

FFT – Beispiel (III)

$p(x) = 5 + x - x^2 + 2x^3$

p=[5,1,-1,2], n=4, w=ω_8

FFT([5,1,-1,2],4,ω_8)

x[]=[$1, \omega_8, \omega_8^2, \omega_8^3, \omega_8^4, \omega_8^5\ \omega_8^6, \omega_8^7$]

pEvenVal[]

→ **FFT([5,-1],2,ω_8^2)**

x[]=[$1, \omega_8^2, \omega_8^4, \omega_8^6$]

pEvenVal[]=[(1,5),(ω_8^4,5)]

pOddVal[]=[(1,-1),(ω_8^4,-1)]

pVal[]=[(1,4),(ω_8^2,5-ω_8^2),(ω_8^4,5-ω_8^4),(ω_8^6,5-ω_8^6)]

$5 + 1 \cdot (-1)$

$5 + \omega_8^2 \cdot (-1)$

$5 + \omega_8^4 \cdot (-1)$

$5 + \omega_8^6 \cdot (-1)$

```
pEvenVal=FFT(pEven,n/2,w*w); //evaluate at x_j^2
pOddVal =FFT(pOdd,n/2,w*w);
FOR i=0 TO 2n-1 DO  //p(x_j) = p_even(x_j^2) + x_j · p_odd(x_j^2)
  pVal[i].x = x[i];
  pVal[i].y=pEvenVal[i mod n].y + x[i]*pOddVal[i mod n].y;
```

FFT – Beispiel (IV)

$p(x) = 5 + x - x^2 + 2x^3$

p=[5,1,-1,2], n=4, w=ω_8

FFT([5,1,-1,2],4,ω_8)

x[]=[$1, \omega_8, \omega_8^2, \omega_8^3, \omega_8^4, \omega_8^5\ \omega_8^6, \omega_8^7$]

pEvenVal[]=[(1,4),(ω_8^2,5-ω_8^2),(ω_8^4 ,5-ω_8^4),(ω_8^6,5-ω_8^6)]

pOddVal[]=[(1,3),(ω_8^2,1+2ω_8^2),(ω_8^4 ,1+2ω_8^4),(ω_8^6,1+2ω_8^6)]

pVal=[(1,4+1·3),(ω_8^1,(5-ω_8^2)+ω_8^1·(1+2ω_8^2)),
(ω_8^2 ,(5-ω_8^4)+ω_8^2·(1+2ω_8^4),…]

$7 = p(1)$

$5 + \omega_8^1 - \omega_8^2 + 2\omega_8^3 = p(\omega_8^1)$

$5 + \omega_8^2 - \omega_8^4 + 2\omega_8^6 = p(\omega_8^2)$

return pVal[]

```
    pEvenVal=FFT(pEven,n/2,w*w); //evaluate at x_j^2
    pOddVal =FFT(pOdd,n/2,w*w);
    FOR i=0 TO 2n-1 DO  //p(x_j) = p_even(x_j^2) + x_j · p_odd(x_j^2)
      pVal[i].x = x[i];
      pVal[i].y=pEvenVal[i mod n].y + x[i]*pOddVal[i mod n].y;
```

FFT – Laufzeit

Laufzeit $\Theta(n \log n)$

```
FFT(p,n,w) // n=2^k =#entries in p, k>=0
  pEven=ALLOC(n/2); pOdd=ALLOC(n/2);
  pVal=ALLOC(2n); pEvenVal=ALLOC(n); pOddVal=ALLOC(n);
  x=ALLOC(2n); x[0]=1; //input values x_j
  FOR i=1 TO 2n-1 DO x[i]=w*x[i-1]; //x[i]= w^i

  IF n==1 THEN //constant polynom
     pVal[0].x=x[0]; pVal[0].y=p[0].y;
     pVal[1].x=x[1]; pVal[1].y=p[0].y;
  ELSE
     FOR i=0 TO (n-2)/2 DO //create p_even, p_odd
       pEven[i]=p[2i]; pOdd[i]=p[2i+1];
     pEvenVal=FFT(pEven,n/2,w*w); //evaluate at x_j^2
     pOddVal =FFT(pOdd,n/2,w*w);
     FOR i=0 TO 2n-1 DO  //p(x_j) = p_even(x_j^2) + x_j · p_odd(x_j^2)
       pVal[i].x = x[i];
       pVal[i].y=pEvenVal[i mod n].y + x[i]*pOddVal[i mod n].y;
return pVal;
```

$\Theta(n)$ (line 4: FOR i=1 TO 2n-1 …)

also $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$

$\Theta(n)$ (line 9: FOR i=0 TO (n-2)/2 …)

$\Theta(n)$ (line 13: FOR i=0 TO 2n-1 …)

Die Diskrete Fourier-Transformation wird abstrakt definiert durch:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{DFT}} \begin{pmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_{n-1} \end{pmatrix} \text{ mit } \hat{a}_i = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \cdot \omega_n^{ij}$$

Interpretieren Sie diese Formel bezüglich unserer Anwendung zur Polynommultiplikation.

Inverse DFT berechnen (I)

Zur Erinnerung:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{m-1} \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^{m-1} \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & x_{m-1} & \cdots & x_{m-1}^{m-1} \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{m-1} \end{pmatrix}$$

$r = pq$ Polynom vom Grad $m \leq 2n - 1$

$x_j = \omega_m^j$ j-te Potenz der m-ten primitiven Einheitswurzel ω_m

Vandermond-Matrix $V = V(x_0, \ldots, x_{m-1})$

$$(V)_{ij} = \omega_m^{ij}$$

Bestimme Koeffizienten von r durch inverse Matrix V:

$$\begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_{m-1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{m-1} \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^{m-1} \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & x_{m-1} & \cdots & x_{m-1}^{m-1} \end{pmatrix}^{-1}}_{=V^{-1}} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{m-1} \end{pmatrix}$$

Inverse DFT berechnen (II)

Es gilt: $V^{-1} = \left(\frac{\omega^{-ij}}{m}\right)_{ij}$, denn:

$$V^{-1} \cdot V = \frac{1}{m} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \omega_m^{-i} & \omega_m^{-2i} & \cdots & \omega_m^{-(m-1)i} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_m^{j} \\ \omega_m^{2j} \\ \vdots \\ \omega_m^{j(m-1)} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \omega_m^{(-i+j)k} = \begin{cases} \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \omega_m^{0} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} 1 = 1 & \text{für } i = j \\ \frac{1}{m} \cdot \frac{\omega_m^{(-i+j)m} - 1}{\omega_m^{(-i+j)} - 1} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1-1}{\omega_m^{(-i+j)} - 1} = 0 & \text{für } i \neq j,\ 0 \leq i,j < m \end{cases}$$

verwendet $\sum_{k=0}^{m-1} q^k = \frac{q^m - 1}{q-1}$ für $q \neq 1$, hier $q = \omega_m^{-i+j} \neq 1$ für $i \neq j$

Inverse DFT berechnen (III)

```
IFFTWrap(rVal,n) // n=2^k =#entries in rVal, k>=0
  //w n-th primitive root of unity
 r[]=IFFT(rVal,n,w);
 FOR i=0 TO n-1 DO r[i]=r[i]/n;
 return r;
```

rechne Faktor 1/n heraus

Laufzeit $\Theta(n \log n)$

```
IFFT(rVal,n,w) // n=2^k =#entries in rVal, k>=0
 r=ALLOC(n); rEvenVal=ALLOC(n); rOddVal=ALLOC(n);
 x=ALLOC(n); x[0]=1;
 FOR i=1 TO n-1 DO x[i]=w*x[i-1]; //x[i]= w^i
 IF n==1 THEN
    r[0]=rVal[0].y;
 ELSE
    rEven=ALLOC(n/2); rOdd=ALLOC(n/2);
    FOR i=0 TO (n-2)/2 DO
      rEvenVal[i]=rVal[2i]; rOddVal[i]=rVal[2i+1];
    rEven=IFFT(rEvenVal,n/2,w*w);
    rOdd =IFFT(rOddVal,n/2,w*w);
    FOR i=0 TO n-1 DO
      r[i] =( rEven[i mod n/2] + rOdd[i mod n/2]/x[i] );
 return r;
```

Division, da wir Inverses ω_n^{-ij} benötigen

Inverse FFT: Beispiel (I)

$r(x) = 5 + x - x^2 + 2x^3$

$\omega_4 = i$

IFFT([(1,7),(ω_4,6-i),(ω_4^2,1),(ω_4^3,6+i)],4,ω_4)

x[]=[$1, \omega_4, \omega_4^2, \omega_4^3$]

rEven[]

↳ IFFT([(1,7),(ω_4^2,1)],2,ω_4^2)

x[]=[$1, \omega_4^2$]

rEven[]

↳ IFFT([(1,7)],1,1)

return [7]

x	$r(x)$
1	7
$\omega_4 = i$	$6 - i$
$\omega_4^2 = -1$	1
$\omega_4^3 = -i$	$6 + i$

```
    rEven=IFFT(rEvenVal,n/2,w*w);
    rOdd =IFFT(rOddVal,n/2,w*w);
    FOR i=0 TO n-1 DO
      r[i] =( rEven[i mod n/2] + rOdd[i mod n/2]/x[i] );
```

Inverse FFT: Beispiel (II)

$r(x) = 5 + x - x^2 + 2x^3$

$\omega_4 = i$

$\texttt{IFFT([(1,7),(}\omega_4\texttt{,6-i),(}\omega_4^2\texttt{,1),(}\omega_4^3\texttt{,6+i)],4,}\omega_4\texttt{)}$

$\texttt{x[]=[}1, \omega_4, \omega_4^2, \omega_4^3\texttt{]}$

`rEven[]`

$\texttt{IFFT([(1,7),(}\omega_4^2\texttt{,1)],2,}\omega_4^2\texttt{)}$

$\texttt{x[]=[}1, \omega_4^2\texttt{]}$

`rEven[]=[7]`

`rOdd[]`

$\texttt{IFFT([}\omega_4^2\texttt{,1)],1,1)}$

`return [1]`

x	$r(x)$
1	7
$\omega_4 = i$	$6 - i$
$\omega_4^2 = -1$	1
$\omega_4^3 = -i$	$6 + i$

```
rEven=IFFT(rEvenVal,n/2,w*w);
rOdd =IFFT(rOddVal,n/2,w*w);
FOR i=0 TO n-1 DO
  r[i] =( rEven[i mod n/2] + rOdd[i mod n/2]/x[i] );
```

Inverse FFT: Beispiel (III)

$r(x) = 5 + x - x^2 + 2x^3$

$\omega_4 = i$

IFFT([(1,7),(ω_4,6-i),(ω_4^2,1),(ω_4^3,6+i)],4,ω_4)

x[]=[$1, \omega_4, \omega_4^2, \omega_4^3$]

rEven[]

→ **IFFT([(1,7),(ω_4^2,1)],2,ω_4^2)**

x[]=[$1, \omega_4^2$]

rEven[]=[7]

rOdd[]=[1]

r[]=[7+1/1,7+1/-1]=[8,6]

return r[]

x	$r(x)$
1	7
$\omega_4 = i$	$6 - i$
$\omega_4^2 = -1$	1
$\omega_4^3 = -i$	$6 + i$

```
rEven=IFFT(rEvenVal,n/2,w*w);
rOdd =IFFT(rOddVal,n/2,w*w);
FOR i=0 TO n-1 DO
  r[i] =( rEven[i mod n/2] + rOdd[i mod n/2]/x[i] );
```

Inverse FFT: Beispiel (IV)

$r(x) = 5 + x - x^2 + 2x^3$

$\omega_4 = i$

IFFT([(1,7),(ω_4,6-i),(ω_4^2,1),(ω_4^3,6+i)],4,ω_4)

x[]=[$1, \omega_4, \omega_4^2, \omega_4^3$]

rEven[]=[8,6]

rOdd[]

IFFT([(ω_4,6-i),(ω_4^3,6+i)],2,ω_4^2)

x[]=[$1, \omega_4^2$]

rEven[]

IFFT([(ω_4,6-i)],1,1)

return [6-i]

x	$r(x)$
1	7
$\omega_4 = i$	$6 - i$
$\omega_4^2 = -1$	1
$\omega_4^3 = -i$	$6 + i$

```
rEven=IFFT(rEvenVal,n/2,w*w);
rOdd =IFFT(rOddVal,n/2,w*w);
FOR i=0 TO n-1 DO
  r[i] =( rEven[i mod n/2] + rOdd[i mod n/2]/x[i] );
```

Inverse FFT: Beispiel (V)

$r(x) = 5 + x - x^2 + 2x^3$

$\omega_4 = i$

IFFT([(1,7),(ω_4,6-i),(ω_4^2,1),(ω_4^3,6+i)],4,ω_4)

x[]=[1, ω_4, ω_4^2, ω_4^3]

rEven[]=[8,6]

rOdd[]

$\hookrightarrow$ **IFFT([(ω_4,6-i),(ω_4^3,6+i)],2,ω_4^2)**

x[]=[1, ω_4^2]

rEven[]=[6-i]

rOdd[]

$\hookrightarrow$ **IFFT([(ω_4^3,6+i)],1,1)**

return [6+i]

x	$r(x)$
1	7
$\omega_4 = i$	$6 - i$
$\omega_4^2 = -1$	1
$\omega_4^3 = -i$	$6 + i$

```
rEven=IFFT(rEvenVal,n/2,w*w);
rOdd =IFFT(rOddVal,n/2,w*w);
FOR i=0 TO n-1 DO
  r[i] =( rEven[i mod n/2] + rOdd[i mod n/2]/x[i] );
```

Inverse FFT: Beispiel (VI)

$r(x) = 5 + x - x^2 + 2x^3$

$\omega_4 = i$

IFFT([(1,7),(ω_4,6-i),(ω_4^2,1),(ω_4^3,6+i)],4,ω_4)

x[]=[$1, \omega_4, \omega_4^2, \omega_4^3$]

rEven[]=[8,6]

rOdd[]

IFFT([(ω_4,6-i),(ω_4^3,6+i)],2,ω_4^2)

x[]=[$1, \omega_4^2$]

rEven[]=[6-i]

rOdd[]=[6+i]

r[]=[12,-2i]

return r[]

x	$r(x)$
1	7
$\omega_4 = i$	$6 - i$
$\omega_4^2 = -1$	1
$\omega_4^3 = -i$	$6 + i$

```
rEven=IFFT(rEvenVal,n/2,w*w);
rOdd =IFFT(rOddVal,n/2,w*w);
FOR i=0 TO n-1 DO
  r[i] =( rEven[i mod n/2] + rOdd[i mod n/2]/x[i] );
```

Inverse FFT: Beispiel (VII)

$r(x) = 5 + x - x^2 + 2x^3$

$\omega_4 = i$

IFFT([(1,7),(ω_4,6-i),(ω_4^2,1),(ω_4^3,6+i)],4,ω_4)

x[]=[1, ω_4, ω_4^2, ω_4^3]

rEven[]=[8,6]

rOdd[]=[12,-2i]

r[0]=8+12/1=20

r[1]=6-2i/i=4

r[2]=8+12/-1=-4

r[3]=6-2i/-i=8

return r[]=[20,4,-4,8]

Alle Werte werden in **IFFTWrap** noch durch $n = 4$ dividiert und ergeben daher Koeffizienten von $r(x)$

x	$r(x)$
1	7
$\omega_4 = i$	$6 - i$
$\omega_4^2 = -1$	1
$\omega_4^3 = -i$	$6 + i$

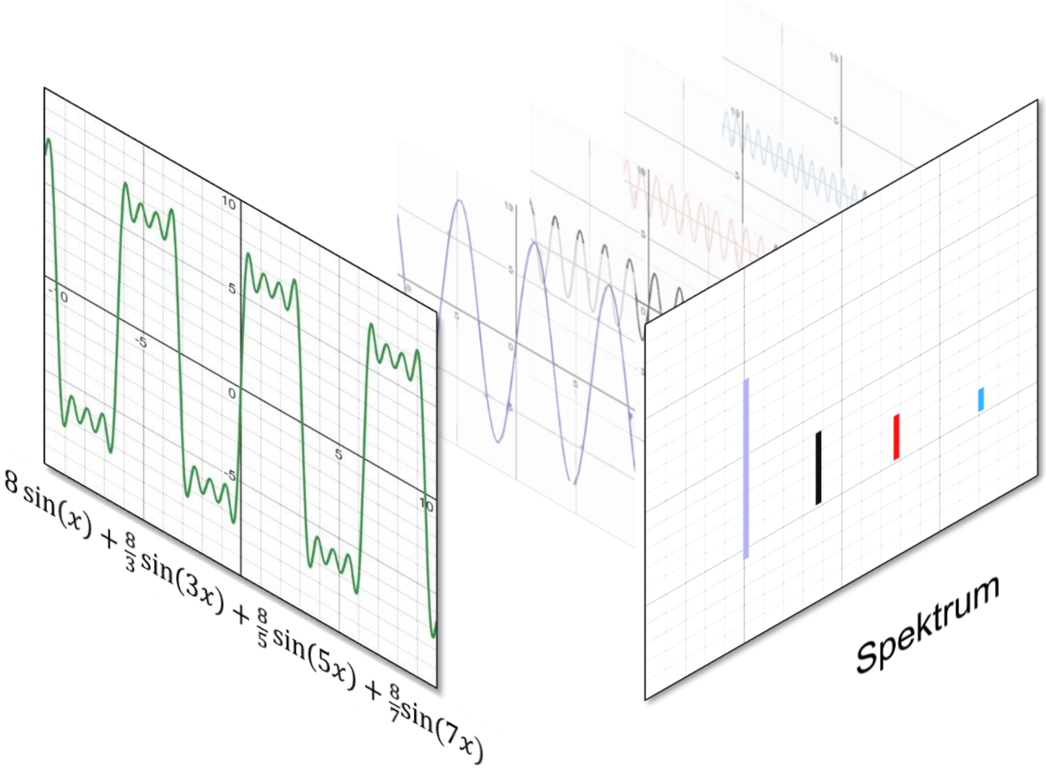
```
    rEven=IFFT(rEvenVal,n/2,w*w);
    rOdd =IFFT(rOddVal,n/2,w*w);
    FOR i=0 TO n-1 DO
      r[i] =( rEven[i mod n/2] + rOdd[i mod n/2]/x[i] );
```

Fourier-Transformation, woanders

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Periode T

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)\right)$$

Darstellung durch Koeffizienten $a_0, a_1, b_1, \ldots$



Beispielanwendung: Frequenz-Filter

Backtracking

Backtracking

Prinzip Backtracking:

Finde Lösungen $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ per „Trial-and-Error“,

indem Teillösung $(x_1, x_2, \dots, x_{i-1})$ durch Kandidaten x_i ergänzt wird, bis Gesamtlösung erhalten,

oder bis festgestellt, dass keine Gesamtlösung erreichbar, und Kandidat x_{i-1} revidiert wird

Beispiel: 4x4-Sudoku (I)

4			
			2
	4	3	1
	3		

in jeder Zeile die Ziffern 1,2,3,4

in jeder Spalte die Ziffern 1,2,3,4

in jedem Quadranten die Ziffern 1,2,3,4

prüft, ob Board komplett ausgefüllt

nächste freie Position (zeilenweise)

prüft Kriterien oben

löscht Feld vor Rückkehr

```
SUDOKU-BACKTRACKING(B) // B[0…3][0…3] board
IF isFull(B) THEN
   print „solution: “+B;
ELSE
   (i,j)=nextFreePos(B);
   FOR v=1 TO 4 DO
      IF isAdmissible(B,i,j,v) THEN
         B[i,j]=v;
         SUDOKU-BACKTRACKING(B);
   B[i,j]=empty;
```

Beispiel: 4x4-Sudoku (II)

4	1		
			2
	4	3	1
	3		

zwei Möglichkeiten: 1 und 2

```
SUDOKU-BACKTRACKING(B) // B[0…3][0…3] board
IF isFull(B) THEN
   print „solution: “+B;
ELSE
   (i,j)=nextFreePos(B);
   FOR v=1 TO 4 DO
      IF isAdmissible(B,i,j,v) THEN
         B[i,j]=v;
         SUDOKU-BACKTRACKING(B);
   B[i,j]=empty;
```

Beispiel: 4x4-Sudoku (III)

4	1		
			2
	4	3	1
	3		

keine zulässige Option → **Backtracking**

```
SUDOKU-BACKTRACKING(B) // B[0…3][0…3] board
IF isFull(B) THEN
    print „solution: ‟+B;
ELSE
    (i,j)=nextFreePos(B);
    FOR v=1 TO 4 DO
        IF isAdmissible(B,i,j,v) THEN
            B[i,j]=v;
            SUDOKU-BACKTRACKING(B);
    B[i,j]=empty;
```

Beispiel: 4x4-Sudoku (III)

4	2	1	3
			2
	4	3	1
	3		

einzig zulässige Option

```
SUDOKU-BACKTRACKING(B) // B[0…3][0…3] board
  IF isFull(B) THEN
     print „solution: “+B;
  ELSE
     (i,j)=nextFreePos(B);
     FOR v=1 TO 4 DO
        IF isAdmissible(B,i,j,v) THEN
           B[i,j]=v;
           SUDOKU-BACKTRACKING(B);
     B[i,j]=empty;
```

Beispiel: 4x4-Sudoku (VI)

4	2	1	3
1			2
	4	3	1
	3		

zwei Möglichkeiten: 1 und 3

keine zulässige Option → **Backtracking**

```
SUDOKU-BACKTRACKING(B) // B[0…3][0…3] board
IF isFull(B) THEN
   print „solution: “+B;
ELSE
   (i,j)=nextFreePos(B);
   FOR v=1 TO 4 DO
      IF isAdmissible(B,i,j,v) THEN
         B[i,j]=v;
         SUDOKU-BACKTRACKING(B);
   B[i,j]=empty;
```

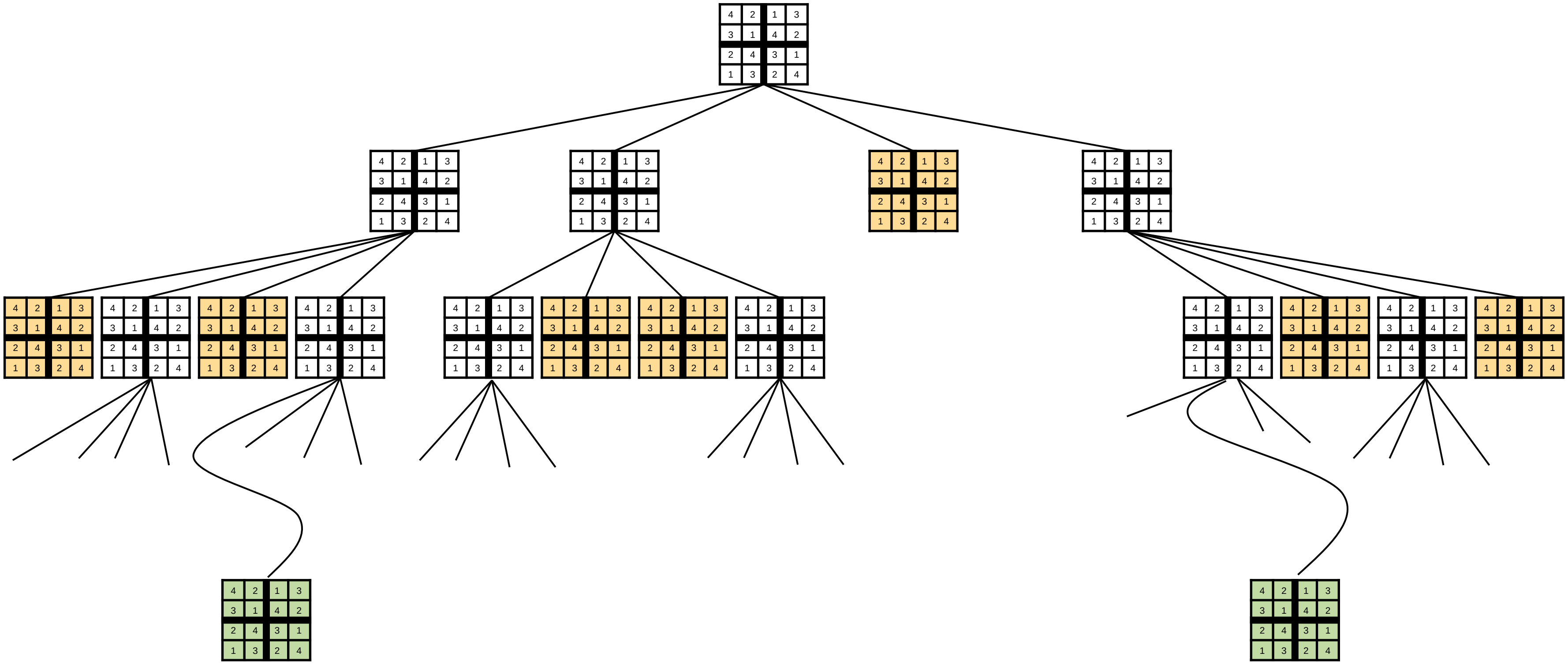
Beispiel: 4x4-Sudoku (VII)

4	2	1	3
3	1	4	2
2	4	3	1
1	3	2	4

einzig zulässige Option

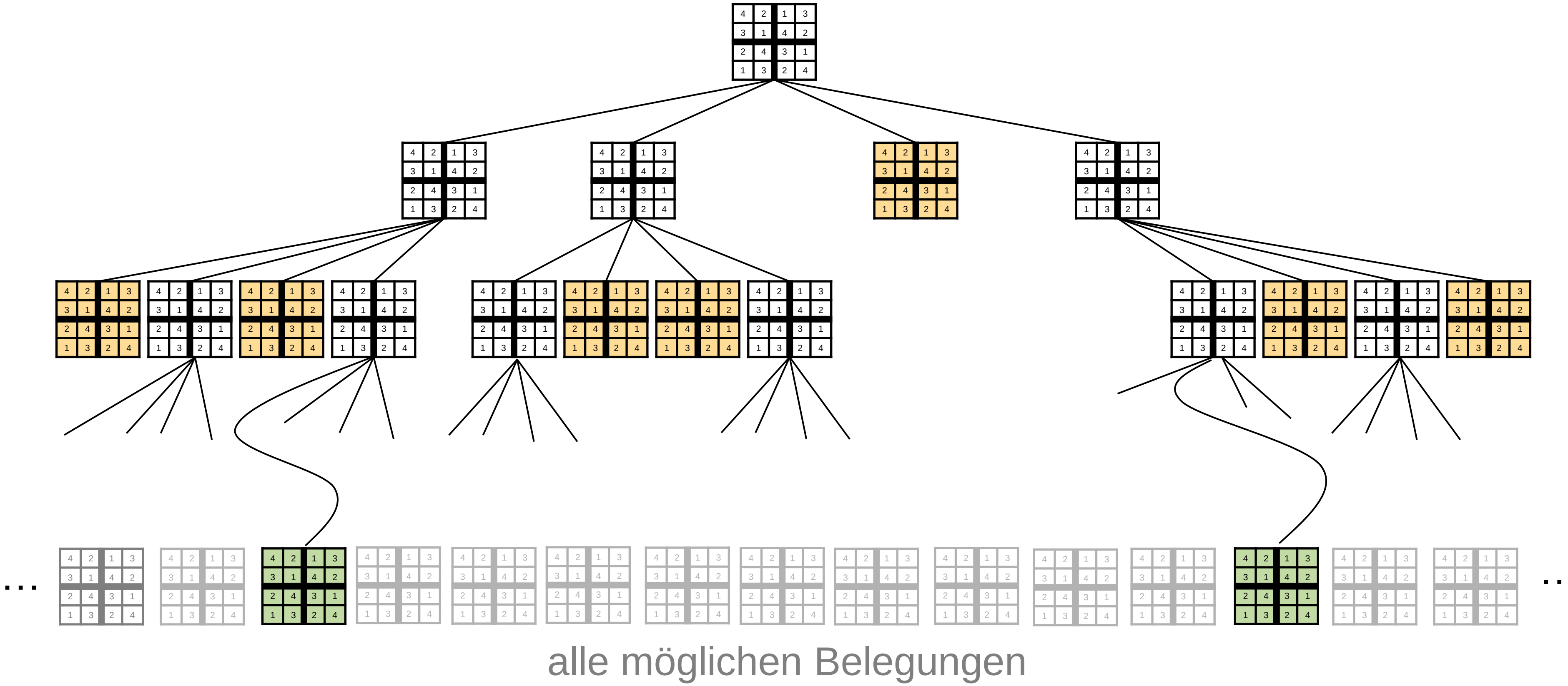
```
SUDOKU-BACKTRACKING(B) // B[0…3][0…3] board
IF isFull(B) THEN
    print „solution: “+B;
ELSE
    (i,j)=nextFreePos(B);
    FOR v=1 TO 4 DO
        IF isAdmissible(B,i,j,v) THEN
            B[i,j]=v;
            SUDOKU-BACKTRACKING(B);
    B[i,j]=empty;
```

Backtracking vs. DFS



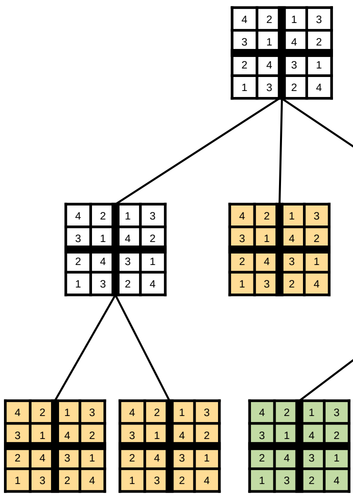
Backtracking kann man als Tiefensuche auf Rekursionsbaum betrachten, wobei aussichtslose Lösungen evtl. frühzeitig abgeschnitten werden

Backtracking vs. Brute-Force Search

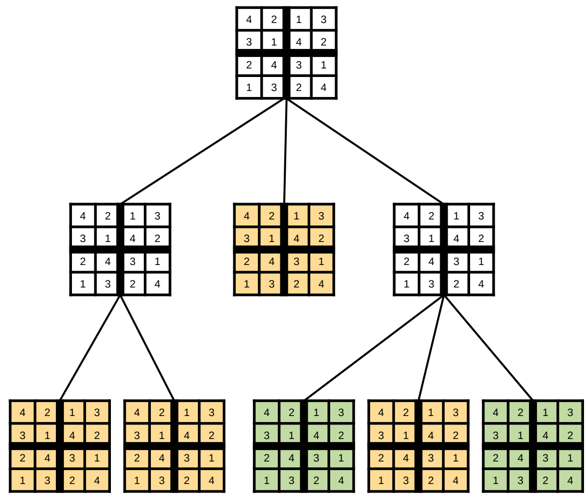


Backtracking kann man ist „intelligentere" erschöpfende Suche ansehen, die aussichtslose Lösungen vorher aussortiert

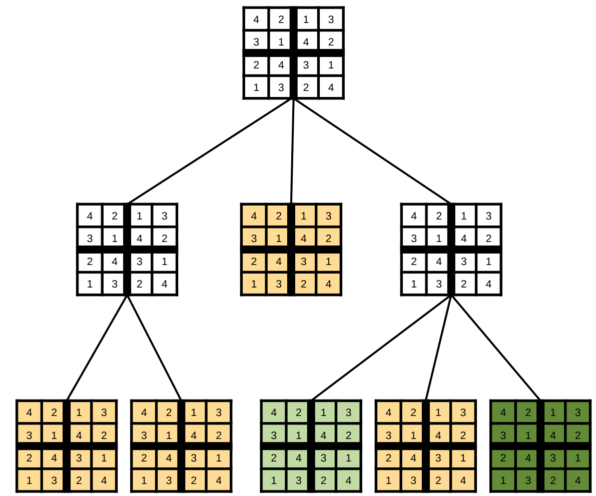
Backtracking: Lösungssuche



finde eine Lösung



finde alle Lösungen



finde beste Lösung

Beispiel: Regulärer Ausdruck (I)

regulärer Ausdruck: `a(b|c)+d`

…mit **`a`** beginnt

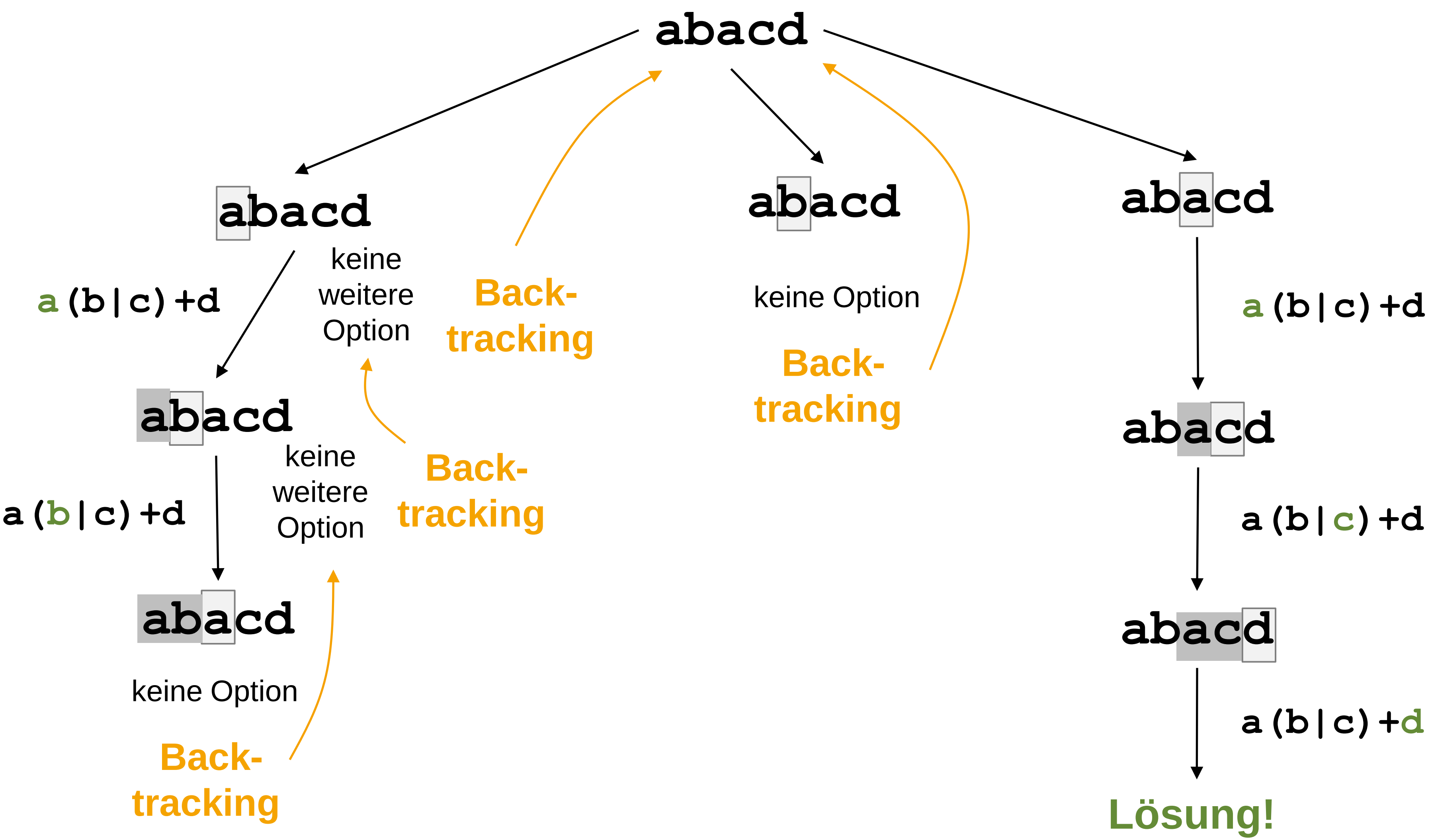
…dann ein oder mehrere Zeichen aus der Menge **`{b, c}`** enthält

…und noch auf **`d`** endet

durchsuche String **`abacd`** per Backtracking „gegen“ regulären Ausdruck

Beispiel: Regulärer Ausdruck (II)

`a(b|c)+d`



Evtl. exponentieller Aufwand

Aufwand Backtracking kann exponentiell werden

regulärer Ausdruck: `^(a+)+$`

Schlechte, verschachtelte Formulierung für: „Zeile enthält nur `a`'s"

Zeilenbeginn

mindestens einmal `a` und mindestens einer dieser `a`-Folgen

Zeilenende

`aaaa…aaaab`

expontielle Anzahl von Möglichkeiten

`(aaa…a)` `(aa…a)(a)` `(a…a)(aa)` `(a…a)(a)(a)` …

Back-tracking Back-tracking Back-tracking Back-tracking

Dynamische Programmierung

Dynamisches Programmieren

Prinzip Dynamisches Programmieren:

Teile Problem in (überlappende) Teilprobleme

Löse rekursiv Teilprobleme,
verwende dabei Zwischenergebnisse wieder
(„Memoization“)

Rekonstruiere Gesamtlösung

Achtung: es geht primär um das Auffinden geeigneter Rekursionen!

Beispiel: Fibonacci-Zahlen

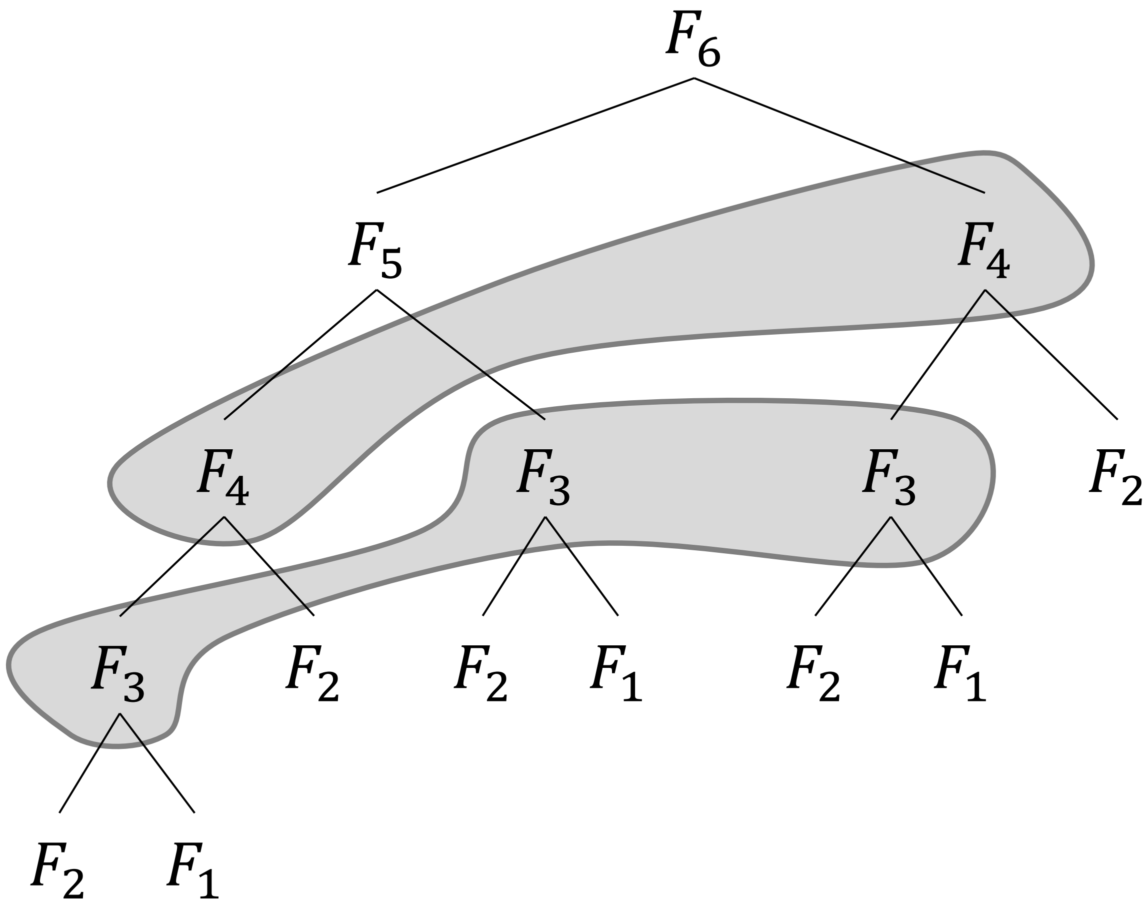
$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ für } n \geq 3$$

```
Fib-Rek(n) // n>=1
IF n=<2 THEN
    return 1;
ELSE
    return Fib-Rek(n-1)+Fib-Rek(n-2);
```

(vereinfachte) Laufzeitabschätzung mittels $T(n-1) \approx T(n-2)$:

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + T(n-2) + c \\ &\approx 2 \cdot T(n-1) + c \\ &= 4 \cdot T(n-2) + 2 \cdot c + c \\ &= \ \dots \\ &= \Theta(2^n) \end{aligned}$$

Fibonacci-Berechnungsbaum

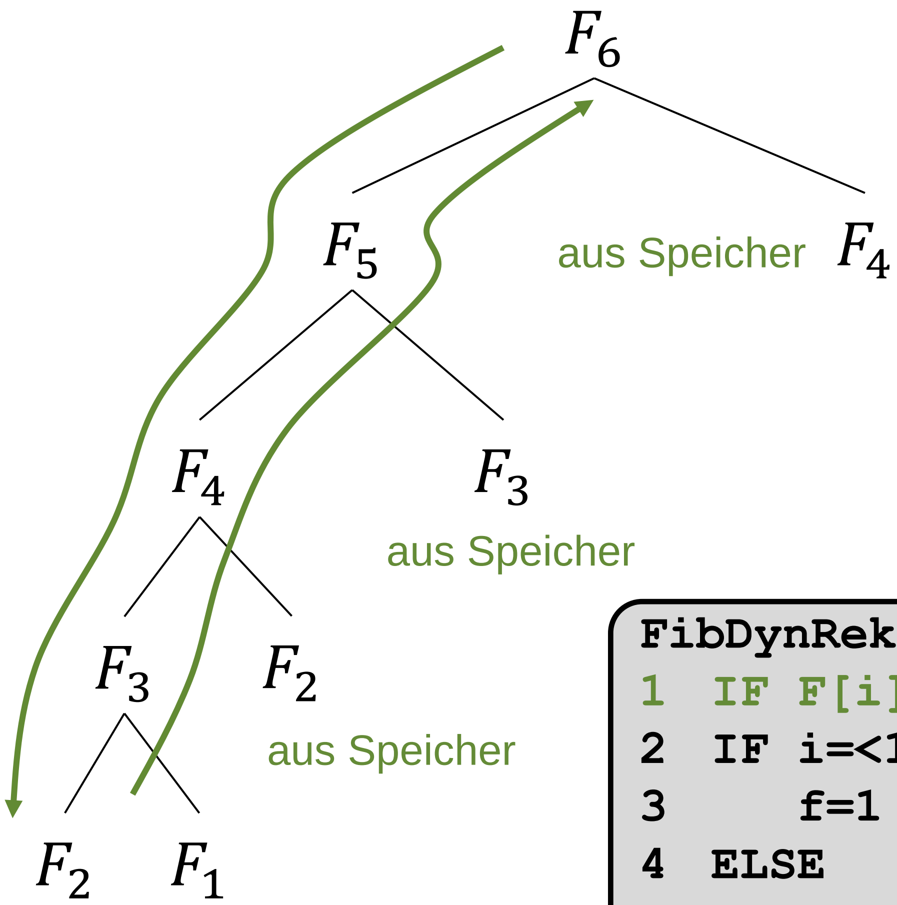


viele Werte werden mehrfach berechnet

Ansatz:
speichere stattdessen Werte zwischen („Memoization“)

Fibonacci mit Memoization

Laufzeit $\Theta(n)$



Wenn Basisfall erreicht,
nur noch Addieren und Auslesen

```
FibDyn(n) // n>=1
   F[]=ALLOC(n); //F_i at F[i-1]
   FOR i=0 TO n-1 DO F[i]=0;
   return FibDynRek(n-1,F);
```

```
FibDynRek(i,F) // i>=0
   IF F[i]!=0 THEN return F[i];
   IF i=<1 THEN
       f=1
   ELSE
       f=FibDynRek(i-1,F)+FibDynRek(i-2,F);
   F[i]=f;
   return f;
```

schon berechnet,
dann zurückgeben

Minimum Edit Distance (I) (Levenshtein-Distanz)

Misst Ähnlichkeit von Texten: Wie viele (Buchstaben-)Operationen

`ins(S,i,b)` – fügt an **`i`**-ter Position Buchstabe **`b`** in String **`S`** ein
`del(S,i)` – löscht an **`i`**-ter Position Buchstabe in String **`S`**
`sub(S,i,b)` – ersetzt an **`i`**-ter Position in String **`S`** den Buchstaben durch **`b`**

sind nötig, um Texte ineinander zu überführen?

		e	i	n		T	e	s	t	
z	w	e	i			F	e	s	t	e
i	i	c	c	d	c	s	c	c	c	i

Levenshtein-Distanz=5

(manchmal Kosten 2 für Substitution, dann Distanz hier 6)

`c` für **`copy(S,i)`** –ohne Kosten

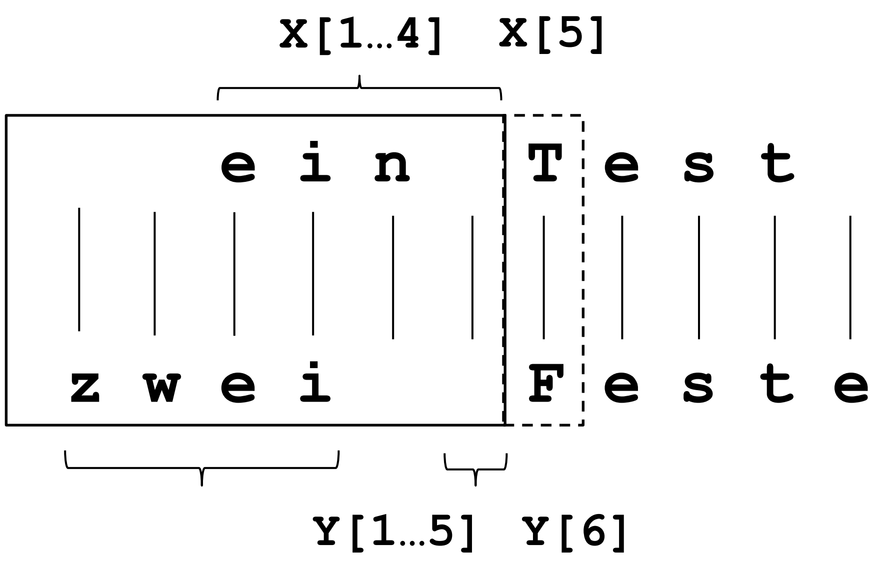
Minimum Edit Distance (II)

beginnen hier jeweils bei 1

Algorithmische Sichtweise:

Überführe schrittweise String **X[1…m]** von links nach rechts in String **Y[1…n]**

Jeweils Teil **X[1…i]** bereits in Teil **Y[1…j]** transformiert



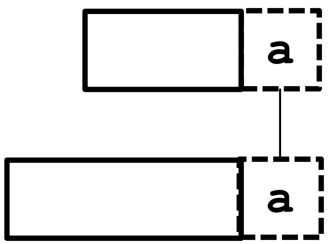
Achtung:
Optimalität dieser Herangehensweise wäre zu zeigen

Minimum Edit Distance (III)

`D[i][j]` sei Distanz, um `X[1…i]` in `Y[1…j]` zu überführen (`i,j>=1`)

Betrachte nächstens Schritt, um `X` in `Y` zu überführen:

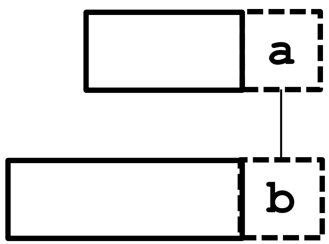
copy



„vorher `X[1…i-1]` in `Y[1…j-1]` überführt, und jetzt (kostenfrei) kopieren“

`D[i][j]` = `D[i-1][j-1]`

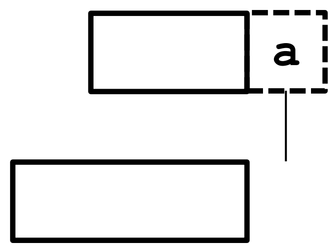
sub



„vorher `X[1…i-1]` in `Y[1…j-1]` überführt, und jetzt ersetzen“

`D[i][j]` = `D[i-1][j-1]+1`

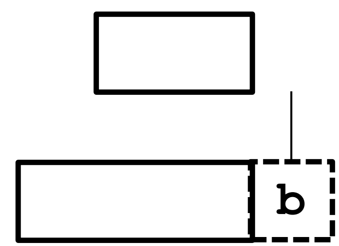
del



„vorher `X[1…i-1]` in `Y[1…j]` überführt, und jetzt `X[i]` löschen“

`D[i][j]` = `D[i-1][j]+1`

ins



„vorher `X[1…i]` in `Y[1…j-1]` überführt, und jetzt `Y[j]` einfügen“

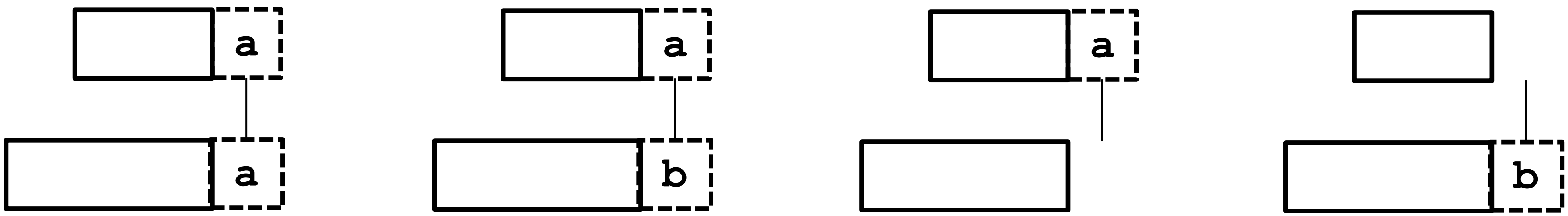
`D[i][j]` = `D[i][j-1]+1`

Minimum Edit Distance (IV)

`D[i][j]` sei Distanz, um `X[1…i]` in `Y[1…j]` zu überführen (`i,j>=1`)

Betrachte nächstens Schritt, um `X` in `Y` zu überführen:

`copy` `sub` `del` `ins`



copy: „vorher `X[1…i-1]` in `Y[1…j-1]` überführt, und jetzt (kostenfrei) kopieren“

sub: „vorher `X[1…i-1]` in `Y[1…j-1]` überführt, und jetzt ersetzen“

del: „vorher `X[1…i-1]` in `Y[1…j]` überführt, und jetzt `X[i]` löschen“

ins: „vorher `X[1…i]` in `Y[1…j-1]` überführt, und jetzt `Y[j]` einfügen“

copy/sub: `D[i][j]` = `D[i-1][j-1]+(X[i]!=Y[j])`

1, wenn wahr, 0 sonst

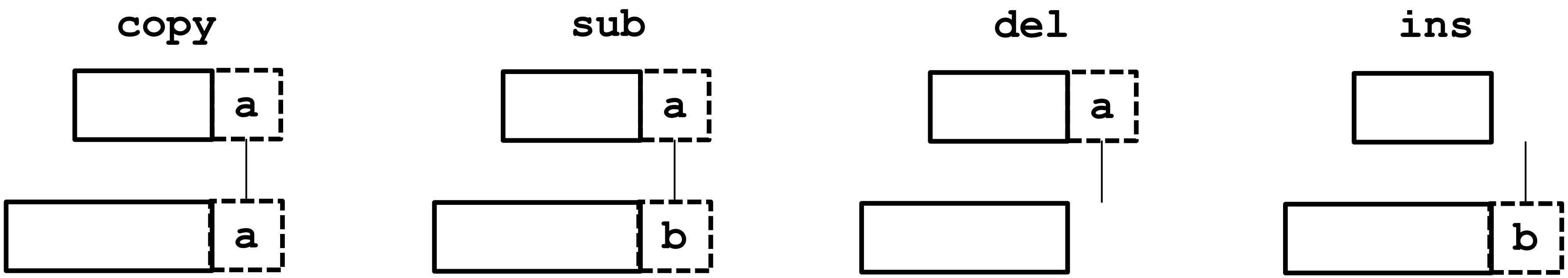
del: `D[i][j]` = `D[i-1][j]+1`

ins: `D[i][j]` = `D[i][j-1]+1`

Minimum Edit Distance (IV)

`D[i][j]` sei Distanz, um `X[1…i]` in `Y[1…j]` zu überführen (`i,j>=1`)

Betrachte nächstens Schritt, um `X` in `Y` zu überführen:



Da wir beste Ersetzungsstrategie suchen:

```
D[i][j]
=
min
{ D[i-1][j-1]+(X[i]!=Y[j]),   D[i-1][j]+1,   D[i][j-1]+1 }
```

Minimum Edit Distance (V)

`D[i][j]` sei Distanz, um `X[1…i]` in `Y[1…j]` zu überführen (`i,j>=1`)

„Randbedingungen“:

`D[0][j]=j` – füge `j` Buchstaben `Y[1…j]` zu leerem String `X[1…0]` hinzu

`D[i][0]=i` – lösche `i` Buchstaben `X[1…i]`, um leeren String `Y[1…0]` zu erhalten

Da wir beste Ersetzungsstrategie suchen:

```
D[i][j]
=
min
{ D[i-1][j-1]+(X[i]!=Y[j]),    D[i-1][j]+1,    D[i][j-1]+1 }
```

Minimum Edit Distance: Algorithmus

mittels dynamischer Programmierung und Memoization

```
MinEditDist(X,Y,m,n) // X=X[1…m], Y=Y[1…n]
D[][]=ALLOC(m,n);
FOR i=0 TO m DO D[i][0]=i;
FOR j=0 TO n DO D[0][j]=j;
FOR i=1 TO m DO
   FOR j=1 TO n DO
      IF X[i]=Y[j] THEN s=0 ELSE s=1;
      D[i][j]=min{D[i-1][j-1]+s,D[i-1][j]+1,D[i][j-1]+1};
return D[m][n];
```

Laufzeit und Speicher $\Theta(mn)$

Minimum Edit Distance: Beispiel (I)

X[1… 8] = ein Test

Y[1…10] = zwei Feste

Initialisierung (2 und 3)

X[1…i]

D	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1								
2	2								
3	3								
4	4								
5	5								
6	6								
7	7								
8	8								
9	9								
10	10								

Y[1…j]

```
MinEditDist(X,Y,m,n) // X=X[1…
1  D[][]=ALLOC(m,n);
2  FOR i=0 TO m DO D[i][0]=i;
3  FOR j=0 TO n DO D[0][j]=j;
4  FOR i=1 TO m DO
5      FOR j=1 TO n DO
6          IF X[i]=Y[j] THEN s=0 ELSE s=1;
7          D[i][j]=min{D[i-1][j-1]+s,D[i-1][j]+1,D[i][j-1]+1};
8  return D[m][n];
```

Minimum Edit Distance: Beispiel (II)

`X[1… 8] = ein Test`

`Y[1…10] = zwei Feste`

i=1: FOR-Schleife für j (5-7)

j=1: X[1]=e ≠ z=Y[1] ⟹ s=1

D[1][1]=min{0+1,1+1,1+1}=1

```
MinEditDist(X,Y,m,n) // X=X[1…
1  D[][]=ALLOC(m,n);
2  FOR i=0 TO m DO D[i][0]=i;
3  FOR j=0 TO n DO D[0][j]=j;
4  FOR i=1 TO m DO
5     FOR j=1 TO n DO
6        IF X[i]=Y[j] THEN s=0 ELSE s=1;
7        D[i][j]=min{D[i-1][j-1]+s,D[i-1][j]+1,D[i][j-1]+1};
8  return D[m][n];
```

X[1…i] (columns), Y[1…j] (rows)

D	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1							
2	2								
3	3								
4	4								
5	5								
6	6								
7	7								
8	8								
9	9								
10	10								

Minimum Edit Distance: Beispiel (III)

`X[1… 8] = ein Test`

`Y[1…10] = zwei Feste`

i=1: FOR-Schleife für j (5-7)

j=2: $X[1]=e \neq w=Y[2] \Longrightarrow s=1$

$D[1][2]=\min\{1+1,2+1,1+1\}=2$

```
MinEditDist(X,Y,m,n) // X=X[1…
1  D[][]=ALLOC(m,n);
2  FOR i=0 TO m DO D[i][0]=i;
3  FOR j=0 TO n DO D[0][j]=j;
4  FOR i=1 TO m DO
5      FOR j=1 TO n DO
6          IF X[i]=Y[j] THEN s=0 ELSE s=1;
7          D[i][j]=min{D[i-1][j-1]+s,D[i-1][j]+1,D[i][j-1]+1};
8  return D[m][n];
```

X[1…i]

D	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1							
2	2	2							
3	3								
4	4								
5	5								
6	6								
7	7								
8	8								
9	9								
10	10								

Y[1…j]

Minimum Edit Distance: Beispiel (IV)

`X[1… 8] = ein Test`

`Y[1…10] = zwei Feste`

i=1: FOR-Schleife für j (5-7)

j=3: X[1]=e = e=Y[3] ⟹ s=0

D[1][3]=min{2+0,3+1,2+1}=2

```
MinEditDist(X,Y,m,n) // X=X[1…
1  D[][]=ALLOC(m,n);
2  FOR i=0 TO m DO D[i][0]=i;
3  FOR j=0 TO n DO D[0][j]=j;
4  FOR i=1 TO m DO
5      FOR j=1 TO n DO
6          IF X[i]=Y[j] THEN s=0 ELSE s=1;
7          D[i][j]=min{D[i-1][j-1]+s,D[i-1][j]+1,D[i][j-1]+1};
8  return D[m][n];
```

X[1…i]

D	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1							
2	2	2							
3	3	2							
4	4								
5	5								
6	6								
7	7								
8	8								
9	9								
10	10								

Y[1…j]

Minimum Edit Distance: Beispiel (V)

`X[1… 8] = ein Test`

`Y[1…10] = zwei Feste`

`i=2`: `FOR`-Schleife für `j (5-7)`

`j=4: X[2]=i = i=Y[4]` ⟹ `s=0`

`D[2][4]=min{2+0,3+1,3+1}=2`

```
MinEditDist(X,Y,m,n) // X=X[1…
1  D[][]=ALLOC(m,n);
2  FOR i=0 TO m DO D[i][0]=i;
3  FOR j=0 TO n DO D[0][j]=j;
4  FOR i=1 TO m DO
5      FOR j=1 TO n DO
6          IF X[i]=Y[j] THEN s=0 ELSE s=1;
7          D[i][j]=min{D[i-1][j-1]+s,D[i-1][j]+1,D[i][j-1]+1};
8  return D[m][n];
```

X[1…i]

D	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	2						
2	2	2	2						
3	3	2	3						
4	4	3	2						
5	5	4							
6	6	5							
7	7	6							
8	8	7							
9	9	8							
10	10	9							

Y[1…j]

Minimum Edit Distance: Beispiel (VI)

`X[1… 8] = ein Test`

`Y[1…10] = zwei Feste`

X[1…i]

D	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	2	2	3	4	5	6	7	8
3	3	2	3	3	4	5	5	6	7
4	4	3	2	3	4	5	6	6	7
5	5	4	3	3	3	4	5	6	7
6	6	5	4	4	4	4	5	6	7
7	7	6	5	5	5	5	4	5	6
8	8	7	6	6	6	6	5	4	5
9	9	8	7	7	7	7	6	5	4
10	10	9	8	8	8	8	7	6	5

Y[1…j]

```
MinEditDist(X,Y,m,n) // X=X[1…
D[][]=ALLOC(m,n);
FOR i=0 TO m DO D[i][0]=i;
FOR j=0 TO n DO D[0][j]=j;
FOR i=1 TO m DO
    FOR j=1 TO n DO
        IF X[i]=Y[j] THEN s=0 ELSE s=1;
        D[i][j]=min{D[i-1][j-1]+s,D[i-1][j]+1,D[i][j-1]+1};
return D[m][n];
```

Minimum Edit Distance: Beispiel (VII)

Rückwärtsschrittfolge `D[m][n]` zu `D[0][0]` entlang der ausgewählten Minima (bzw. bis Rand erreicht) gibt Operationen an:

$(\searrow)$: `copy` (± 0)
$\searrow$: `sub` $(+1)$
$\longrightarrow$: `del`
$\downarrow$: `ins`

(Im Allgemeinen gibt es mehrere mögliche Sequenzen!)

`X[1…i]`

D	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	2	2	3	4	5	6	7	8
3	3	2	3	3	4	5	5	6	7
4	4	3	2	3	4	5	6	6	7
5	5	4	3	3	3	4	5	6	7
6	6	5	4	4	4	4	5	6	7
7	7	6	5	5	5	5	4	5	6
8	8	7	6	6	6	6	5	4	5
9	9	8	7	7	7	7	6	5	4
10	10	9	8	8	8	8	7	6	5

`Y[1…j]`

Minimum Edit Distance: Beispiel (VIII)

(↘) c, ↘ s, ⟶ d, ↓i

	ein□Test
↓	zein□Test
↓	zwein□Test
(↘)	zwein□Test
(↘)	zwein□Test
⟶	zwei□Test
(↘)	zwei□Test
↘	zwei□Fest
(↘)	zwei□Fest
(↘)	zwei□Fest
(↘)	zwei□Fest
↓	zwei□Feste

X[1…i]

Y[1…j]

D	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	2	2	3	4	5	6	7	8
3	3	2	3	3	4	5	5	6	7
4	4	3	2	3	4	5	6	6	7
5	5	4	3	3	3	4	5	6	7
6	6	5	4	4	4	4	5	6	7
7	7	6	5	5	5	5	4	5	6
8	8	7	6	6	6	6	5	4	5
9	9	8	7	7	7	7	6	5	4
10	10	9	8	8	8	8	7	6	5

nach Operation

verbleibendes X[i+1…n]

⟶ zwei□Test

erstelltes Y[1…j]

Geben Sie zwei Strings an, die durch verschiedene Sequenzen von Operationen mit gleicher Levenshtein-Distanz ineinander übergeführt werden können

Greedy-Algorithmen

Greedy-Algorithmen

Prinzip Greedy:

Finde Lösung $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

indem Teillösung $(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})$ durch Kandidaten x_i ergänzt wird,

der lokal am günstigsten erscheint.

„Unsere“ Greedy-Algorithmen…

(auch Prim)

```
Dijkstra-SSSP(G,s,w)

initSSSP(G,s,w);
Q=V; //let S=V-Q
WHILE !isEmpty(Q) DO
    u=EXTRACT-MIN(Q); //wrt. dist
    FOREACH v in adj(u) DO
        relax(G,u,v,w);
```

wähle jeweils Knoten, der kürzeste Distanz hat

```
MST-Kruskal(G,w) // G=(V,E) undirected, connected graph
                    w weight function
A=∅
FOREACH v in V DO set(v)={v};
Sort edges according to weight in nondecreasing order
FOREACH {u,v} in E according to order DO
   IF set(u)!=set(v) THEN
      A = A∪{{u,v}}
      UNION(G,u,v);
return A
```

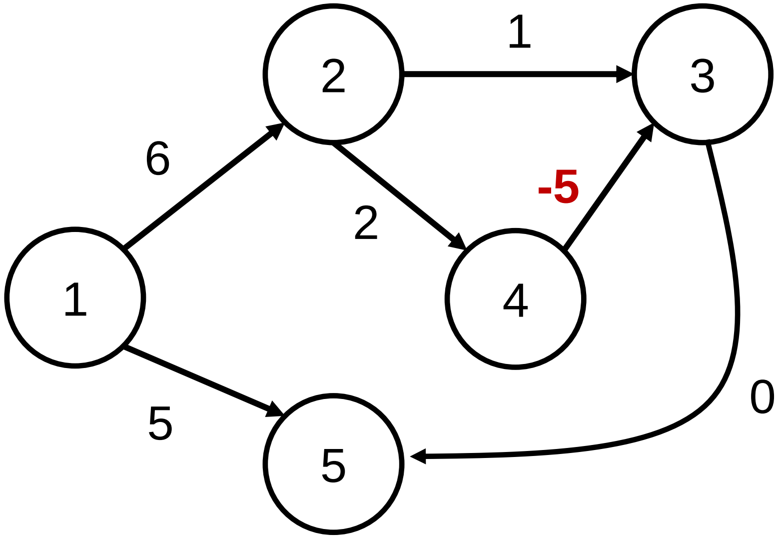
Wähle jeweils leichteste Kante

…funktionieren oft, aber nicht immer

```
Dijkstra-SSSP(G,s,w)

initSSSP(G,s,w);
Q=V; //let S=V-Q
WHILE !isEmpty(Q) DO
    u=EXTRACT-MIN(Q); //wrt. dist
    FOREACH v in adj(u) DO
        relax(G,u,v,w);
```

kürzeste Weg 1→5 via
1→ 2 → 4 → 3 → 5
mit Gewicht 6+2-5+0=3



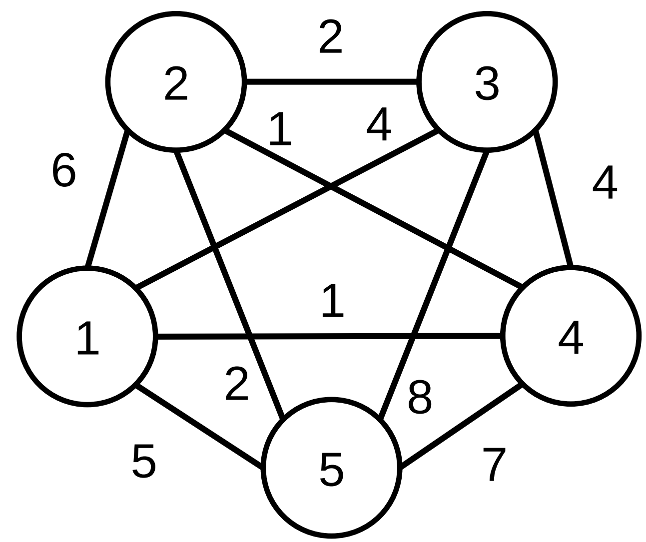
Dijkstra-Algorithmus:
1→5 mit Gewicht 5

Traveling Salesperson Problem (TSP)

Traveling Salesperson Problem:
Gegeben vollständiger (un-)gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $w: E \to \mathbb{R}$, finde Tour p mit minimalem Kantengewicht $w(p)$.
Eine Tour ist ein Weg $p = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$ entlang der Kanten $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für $i = 0,1,2, \dots n-1$, der bis auf Start- und Endknoten $v_0 = v_n$ jeden Knoten genau einmal besucht ($V = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$).

Graph $G = (V, E)$ ist vollständig, wenn es für alle Knoten $u, v \in V$ mit $u \neq v$ eine Kante $(u, v) \in E$ gibt

Wenn Graph nicht vollständig, aber Tour hat, kann man „verboten teure“ Kanten (u, v) mit $w((u, v)) = |V| \cdot \max_{e \in E}\{|w(e)|\} + 1$ hinzufügen



Tour 1→5→2→3→4→1 mit Gewicht 14

TSP vs. Dijkstra

löst anderes Problem

Allgemeiner TSP-Algorithmus:

finde optimale Route, die durch jeden Knoten geht und zum Ausgangspunkt zurückkehrt

Dijsktra-Algorithmus:

finde optimalen Pfad vom Ausgangspunkt aus

(besucht evtl. nicht alle Knoten und betrachtet auch nicht Rückkehr)

Ansatz Greedy-Algorithmus für TSP:
Starte mit beliebigem oder gegebenem Knoten.
Nimm vom gegenwärtigen Knoten aus die Kante zu noch nicht besuchtem Knoten, die kleinstes Gewicht hat.
Wenn kein Knoten mehr übrig, gehe zu Startpunkt zurück.

Greedy-TSP

```
Greedy-TSP(G,s,w) // |V|=n, s starting node

FOREACH v in V DO v.color=white;
tour[]=ALLOC(n); tour[0]=s; tour[0].color=gray;
FOR i=1 TO n-1 DO
   tour[i]=EXTRACT-MIN(adj(tour[i-1]));
      //get (white) neighbor with minimum edge weight
   tour[i].color=gray;
return tour;
```

Ansatz Greedy-Algorithmus für TSP:
Starte mit beliebigem oder gegebenem Knoten.
Nimm vom gegenwärtigen Knoten aus die Kante
zu noch nicht besuchtem Knoten, die kleinstes Gewicht hat.
Wenn kein Knoten mehr übrig, gehe zu Startpunkt zurück.

Greedy-TSP ist zu gierig (I)

Betrachte vollständigen Graphen mit Knoten $V = \{1,2,3,\dots,n\}$, $n \geq 3$,
und folgenden Kantengewichten für beliebig große Konstante N:

$$w(\{i,j\}) = \begin{cases} 1 & 1 \leq i,j \leq n, j = i+1 \\ N & i = 1, j = n \\ 2 & sonst \end{cases}$$

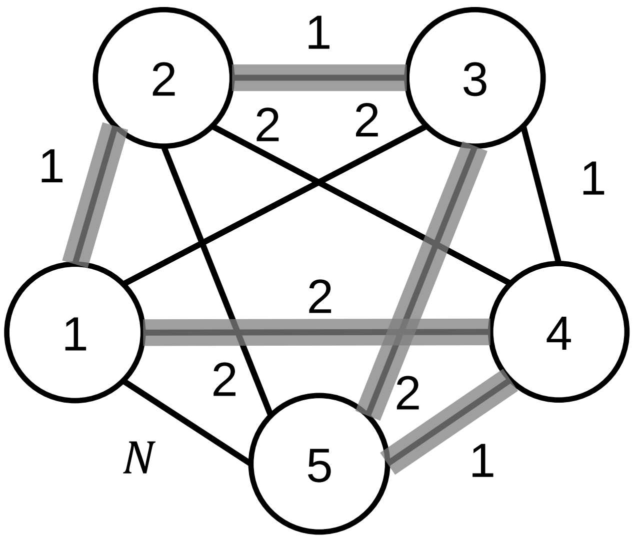
Startknoten $s = 1$

Optimale Tour mit Startknoten $s = 1$

$1 \rightarrow 2 \rightarrow \ldots \rightarrow n-2 \rightarrow n \rightarrow n-1 \rightarrow 1$

hat Gewicht

$$1 + 1 + \cdots + 1 + 2 + 1 + 2 = n + 2$$



Beispiel: $n = 5$

Greedy-TSP ist zu gierig (II)

Betrachte vollständigen Graphen mit Knoten $V = \{1,2,3,\dots,n\}$, $n \geq 3$, und folgenden Kantengewichten für beliebig große Konstante N:

$$w(\{i,j\}) = \begin{cases} 1 & 1 \leq i,j \leq n, j = i+1 \\ N & i = 1, j = n \\ 2 & sonst \end{cases}$$

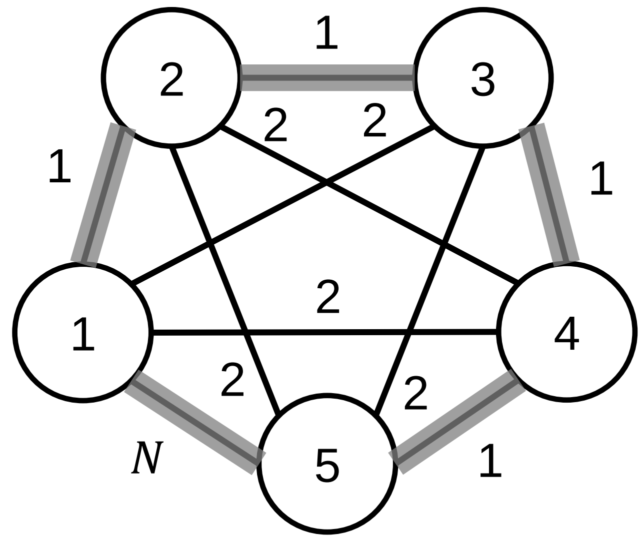
Startknoten $s = 1$

Greedy-Algorithmus läuft zunächst

$1 \to 2 \to \dots \to n-1 \to n$,

muss dann die „teure" Kante $n \to 1$ nehmen, erreicht also nur Gewicht

$$1 + 1 + \cdots + 1 + N = N + n - 1$$



Beispiel: $n = 5$

Effizienter Algorithmus für TSP?

```
TSP(G,w,s)

                         ???
```

Vermutlich schwierig, effizienten Algorithmus zu finden

$\rightarrow$ siehe Kapitel 8 über NP

Metaheuristiken

Heuristiken und Metaheuristiken

Heuristik:

dedizierter Suchalgorithmus
für Optimierungsproblem,

der gute (aber evtl. nicht optimale)
Lösung für **spezielles** Problem findet

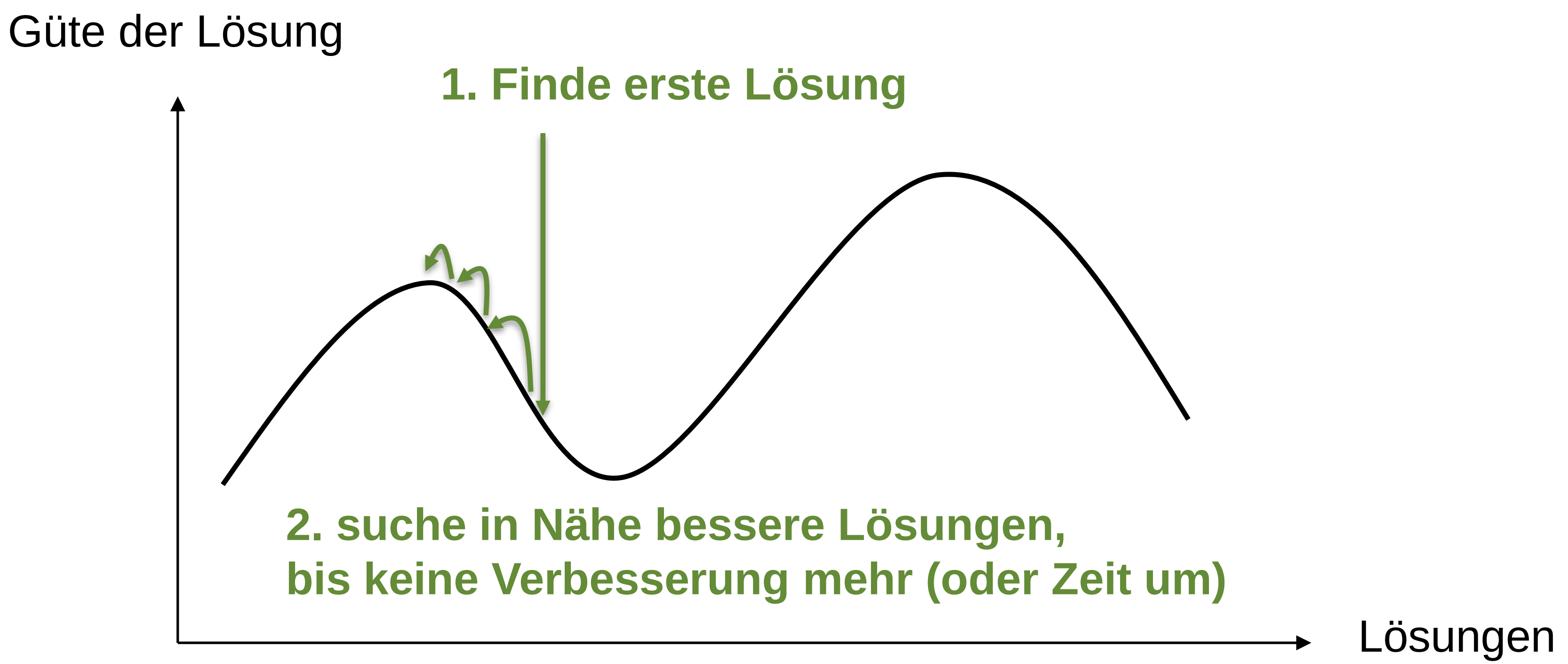
Metaheuristik:

allgemeine Vorgehensweise,
um Suche für beliebige
Optimierungsprobleme
zu leiten

problem-abhängig,
arbeitet direkt „am“ Problem

problem-unabhängig,
arbeitet mit abstrakten Problemen

Lokale Suche



„Hill-Climbing-Strategie"

Hill-Climbing-Algorithmus

```
HillClimbing(P) // maxTime constant

sol=initialSol(P);
time=0;
WHILE time<maxTime DO
   new=perturb(P,sol);
   IF quality(P,new)>quality(P,sol) THEN
      sol=new;
   time=time+1;
return sol;
```

wähle initiale Lösung

ändere Lösung **leicht** ab

ersetze aktuelle Lösung durch neu, falls diese besser ist

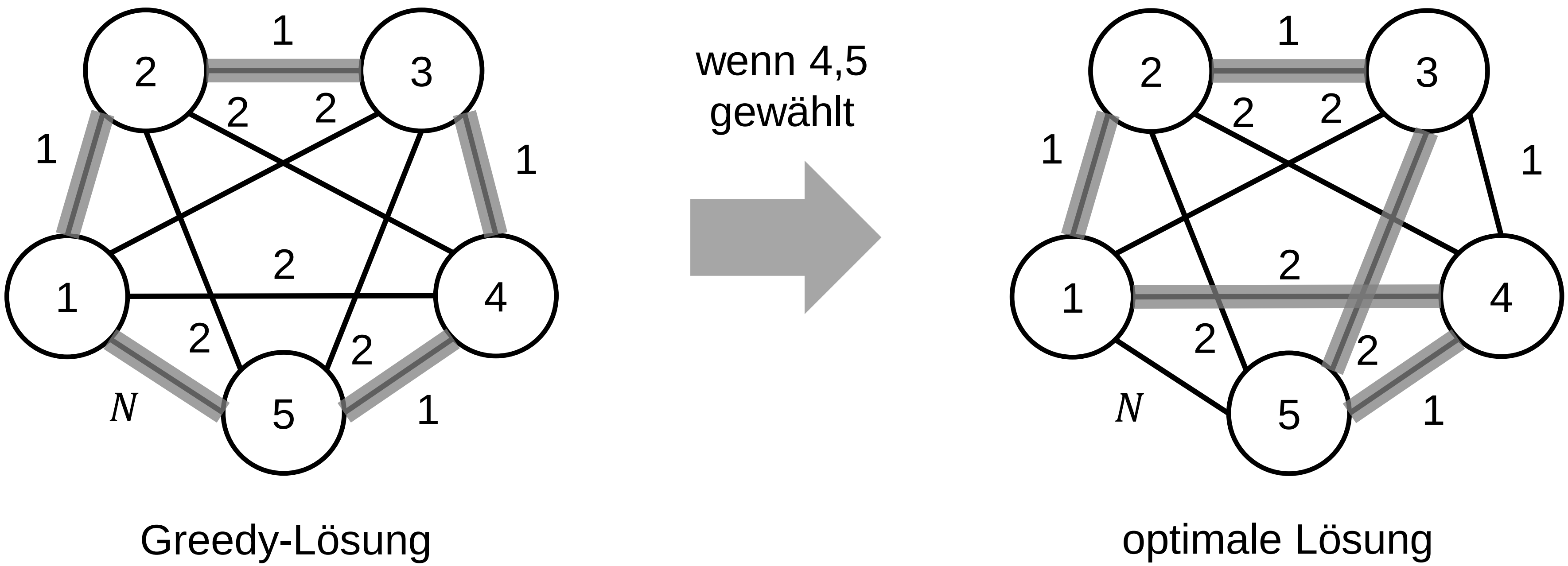
Beispiel TSP:

`initSol`: wähle beliebige Tour, z.B. per Greedy-Algorithmus

`perturb`: wähle zwei Knoten **`u,v`** zufällig und tausche sie in Tour

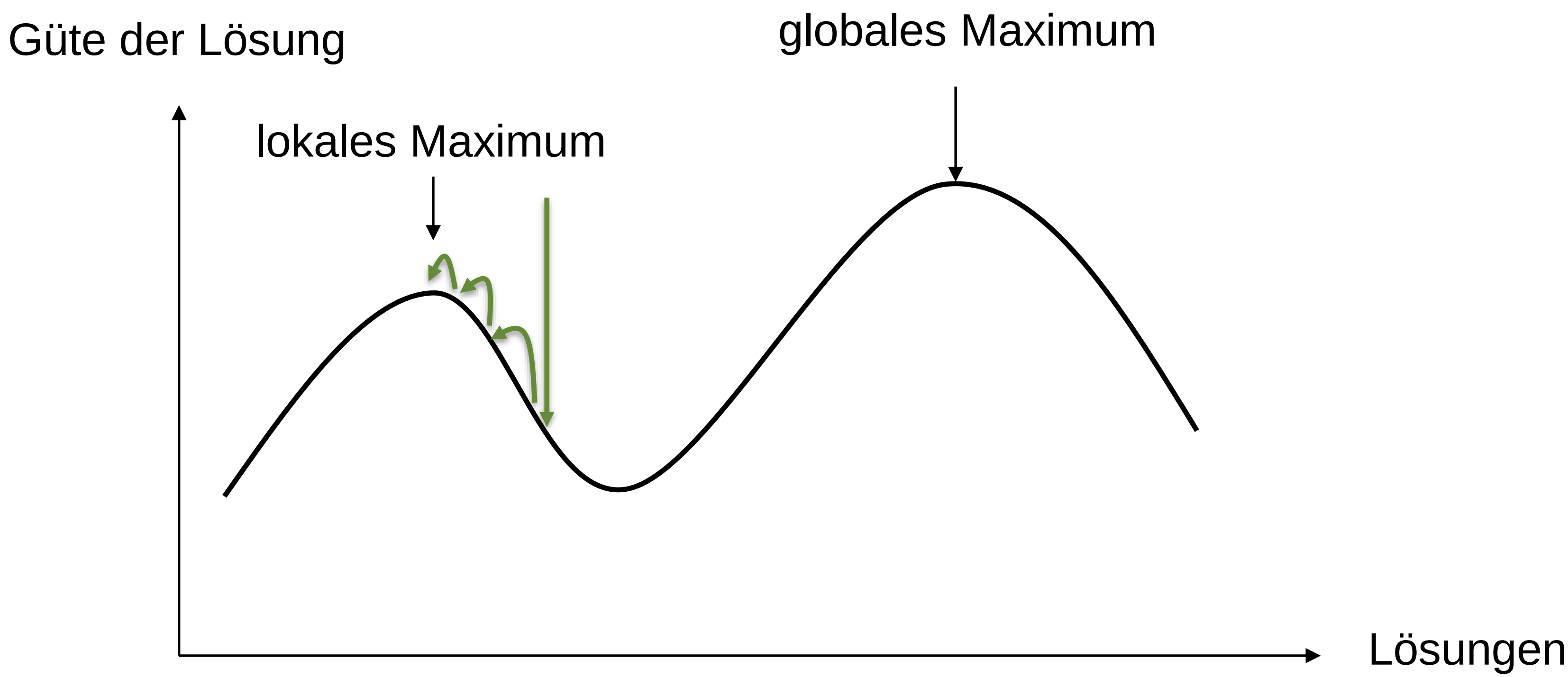
`quality`: (negatives) Gewicht der aktuellen Tour

Hill-Climbing-Algorithmus für TSP



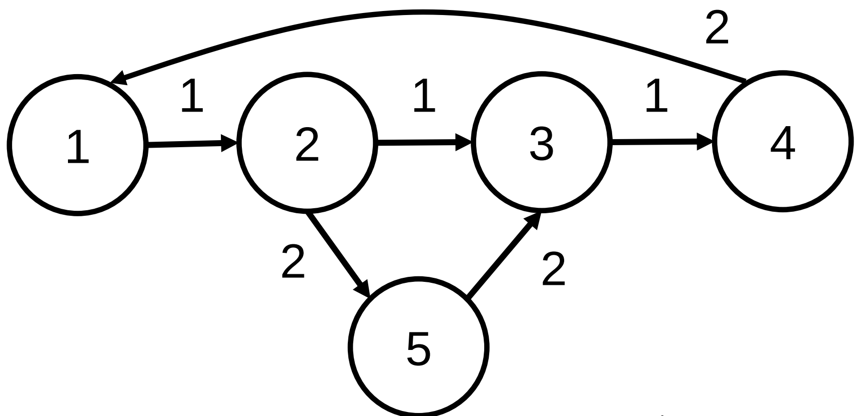
Beispiel TSP:
`initSol`: wähle beliebige Tour, z.B. per Greedy-Algorithmus
`perturb`: wähle zwei Knoten **`u,v`** zufällig und tausche sie in Tour
`quality`: (negatives) Gewicht der aktuellen Tour

Lokale vs. globale Maxima



Eventuell bleibt Hill-Climbing-Algorithmus in lokalem Maximum hängen, da stets nur leichte Lösungsänderungen in aufsteigender Richtung!

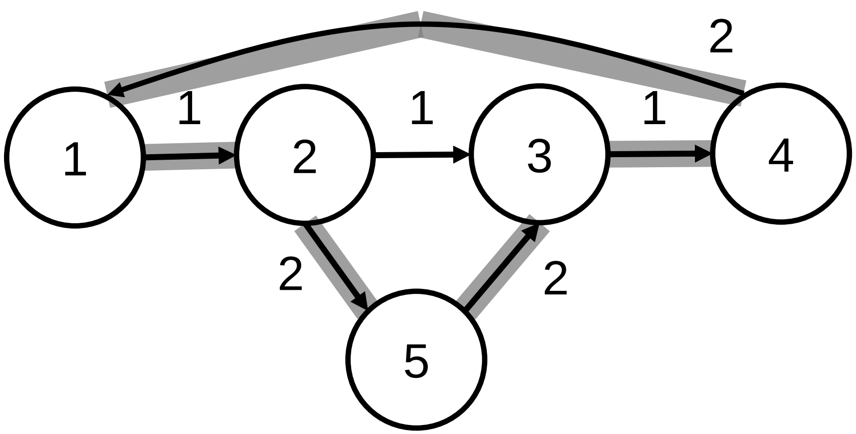
Lokale vs. globale Maxima beim TSP (I)



TSP auf gerichtetem Graphen
Alle anderen Kanten Gewicht N
Startknoten 1

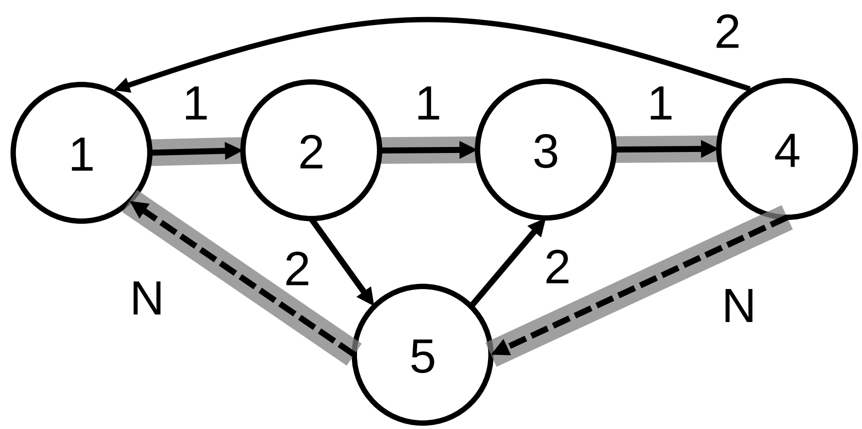
optimale Lösung

1→2→5→3→4→1 mit Gewicht 8



Greedy-Lösung

1→2→3→4→5→1 mit Gewicht 2N+3



Lokale vs. globale Maxima beim TSP (II)

Umgebung der Greedy-Lösung durch Vertauschen zweier Knoten gegeben (Startknoten bleibt fix):

1→**3**→**2**→4→5→1 mit Gewicht 5N

1→**4**→3→**2**→5→1 mit Gewicht 4N+2

1→**5**→3→4→**2**→1 mit Gewicht 3N+3

1→2→**4**→**3**→5→1 mit Gewicht 4N+1

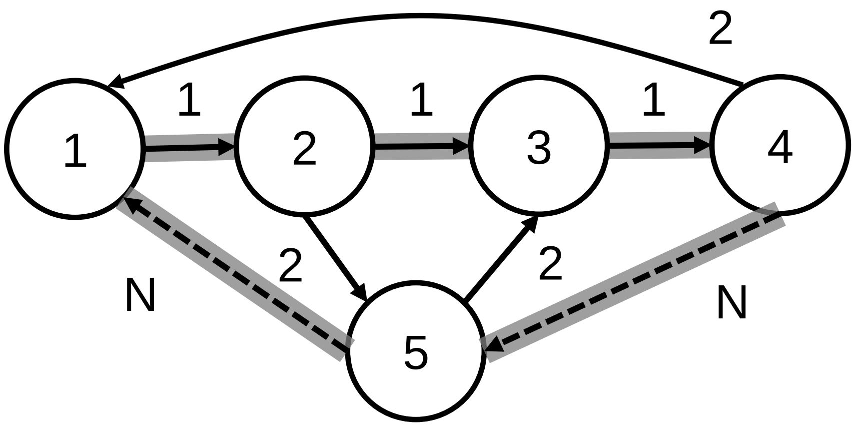
1→2→**5**→4→**3**→1 mit Gewicht 3N+3

1→2→3→**5**→**4**→1 mit Gewicht 2N+4

Hill-Climbing findet
keine bessere Lösung in der Nähe
→ Greedy-Lösung lokales Max (bzw. Min)

Greedy-Lösung

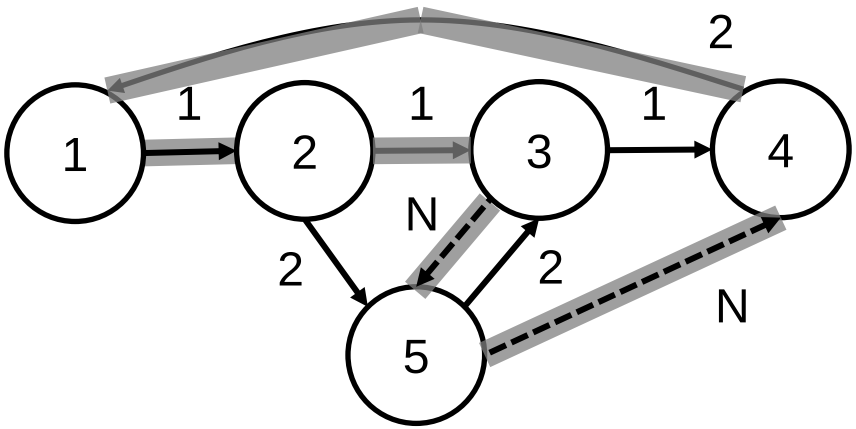
1→2→3→4→5→1 mit Gewicht 2N+3



Lokale vs. globale Maxima beim TSP (III)

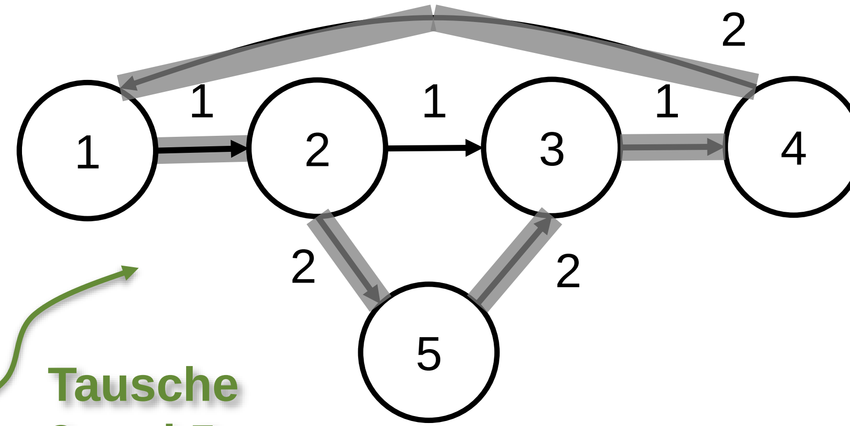
optimale Lösung

1→2→**5**→**3**→4→1 mit Gewicht 8



1→2→3→**5**→**4**→1 mit Gewicht 2N+4

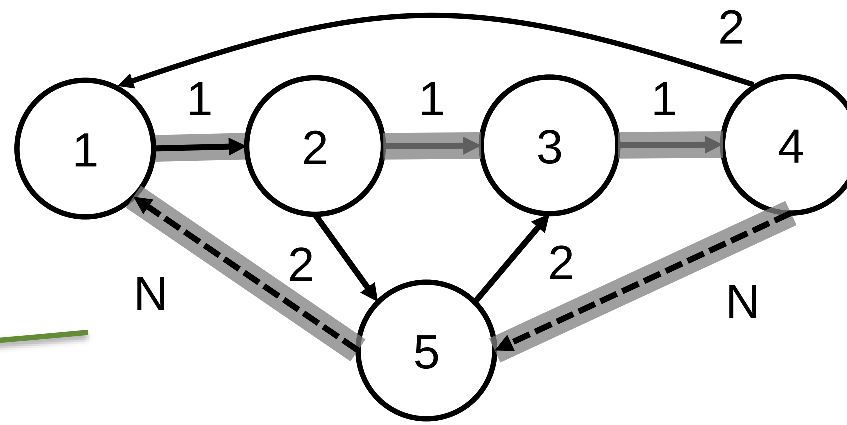
Tausche 4 und 5



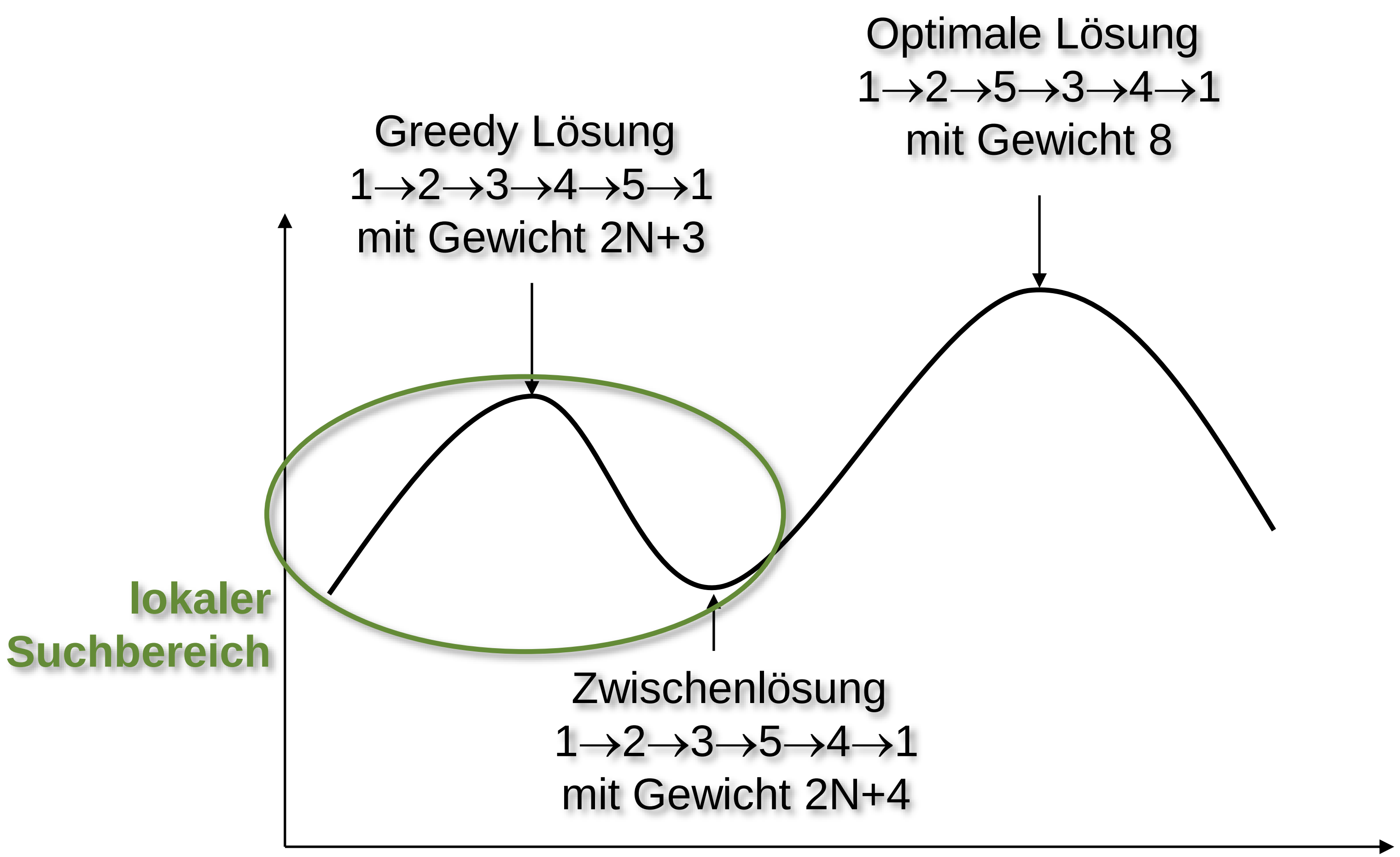
Tausche 3 und 5

Greedy-Lösung

1→2→3→4→5→1 mit Gewicht 2N+3

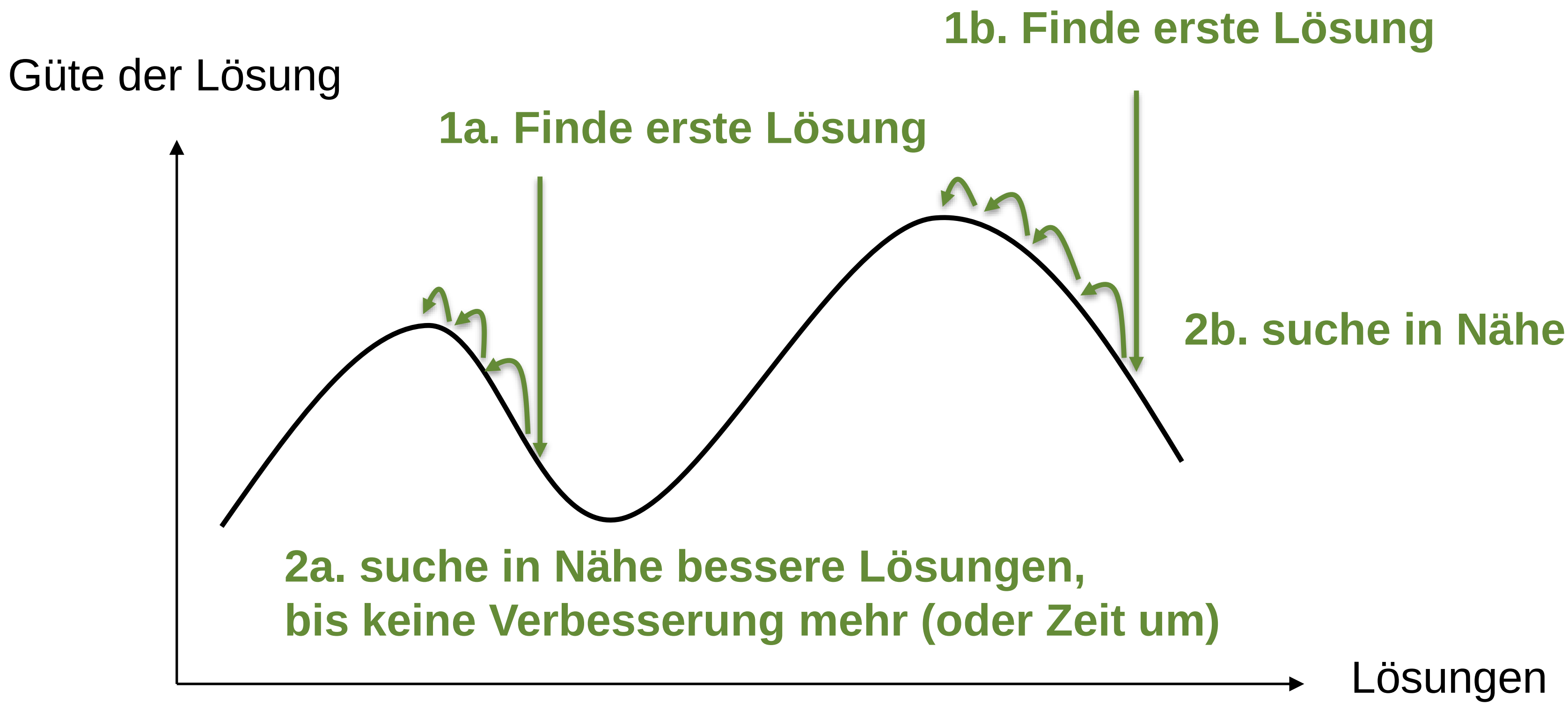


Lokale vs. globale Maxima beim TSP (IV)



Iterative Lokale Suche

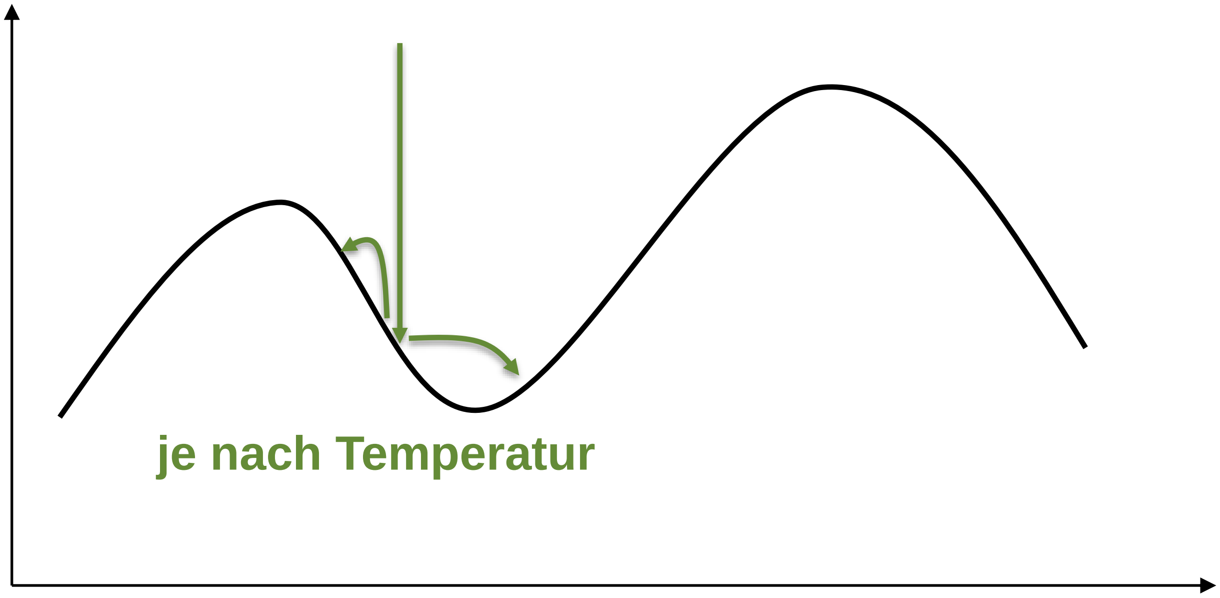
Problem: „zufällige“ (?) Lösungen
könnten auch schlecht sein



Beginne Suche nochmal von vorne, z.B. mit neuer zufälliger Lösung,
akzeptiere beste gefundene Lösung

Simulated Annealing

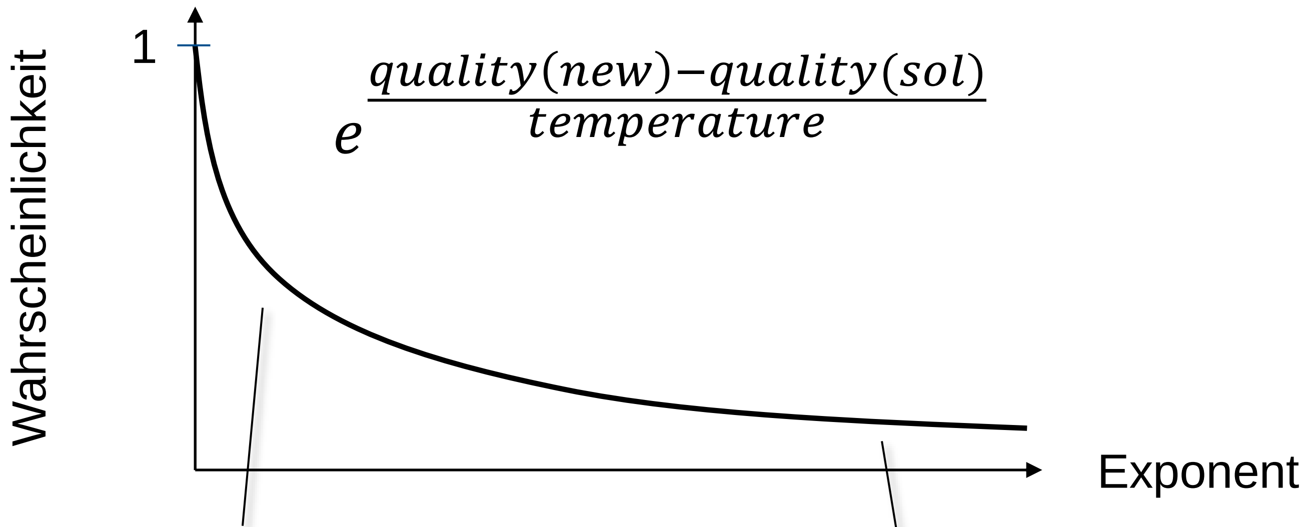
„Annealing" in Metallverarbeitung:
Härten von Metallen durch Erhitzen auf hohe Temperatur
und langsames Abkühlen



1. Temperatur zu Beginn hoch, kühlt langsam ab
2. Je höher Temperatur, desto wahrscheinlicher „Sprung in schlechte Richtung"

„In schlechte Richtung“ mit Wahrscheinlichkeit

Ansatz: akzeptiere auch schlechtere Lösung **`new`** mit **`quality(new)<quality(sol)`** mit Wahrscheinlichkeit:



heiße Temperatur (zu Beginn):
akzeptiere oft viel schlechtere Lösungen

kühlere Temperatur (am Ende):
akzeptiere selbst unwesentlich schlechtere Lösungen fast nie
(am Ende also quasi Hill-Climbing)

Simulated Annealing

```
SimulatedAnnealing(P) // maxTime constant
                      // TempSched[] temparature annealing

sol=initialSol(P);
time=0;
WHILE time<maxTime DO
   new=perturb(P,sol);
   temperature=TempSched[time];
   d=quality(P,new)-quality(P,sol); r=random(0,1);
   IF d>0 OR r=<exp(d/temperature) THEN
      sol=new;
   time=time+1;
return sol;
```

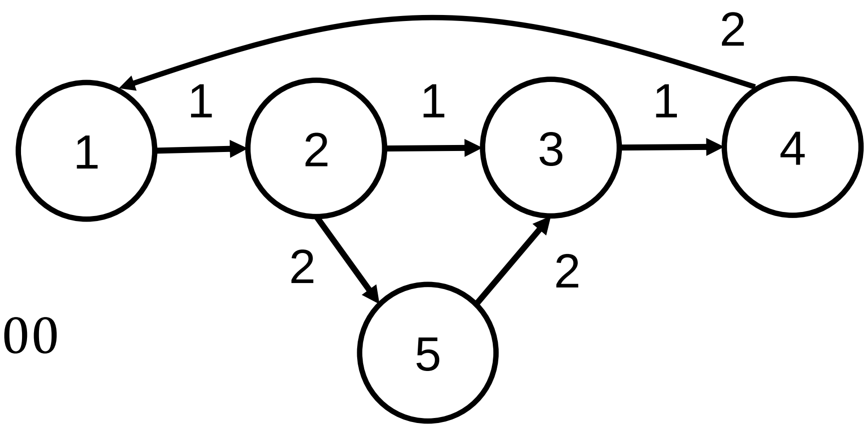
uniformer Wert zwischen 0 und 1

Bestimmung eines guten „Annealing schedule“ (Starttemperatur und Abnahme) betrachten wir hier in der Vorlesung nicht weiter

Simulated Annealing beim TSP

Starttemperatur
$= \max_{e \in E}\{w(e)\} = N = 1000$

lineare Temperaturabnahme $= N/2n = 100$



	Aktuelle Lösung	Gewicht	Zuf. Tausch	Gew. nach Tausch	Temp	Zuf. Wert r	Exp (-d/temp)	Neue Löung akzeptiert?
1	1→2→3→4→5→1	2N+3	2 und 3	5N	1000	0.37	0.0498	nein
2	1→2→3→4→5→1	2N+3	2 und 4	4N+2	900	0.60	0.1084	nein
3	1→2→3→4→5→1	2N+3	4 und 5	2N+4	800	0.17	0.9986	ja (Zufall)
4	1→2→3→5→4→1	2N+4	2 und 4	5N	700	0.34	0.0138	nein
5	1→2→3→5→4→1	2N+4	3 und 4	3N+3	600	0.45	0.1889	nein
6	1→2→3→5→4→1	2N+4	3 und 5	8	500	0.78	-	ja (besser)
7	1→2→5→3→4→1	8	2 und 5	2N+4	400	0.51	0.0067	nein

Weitere Metaheuristiken

Tabu Search

Ausgehend von aktueller Lösung, suche bessere Lösung in der Nähe

Speichere eine Zeit lang schon besuchte Lösungen, und vermeide diese Lösungen

Wenn keine bessere Lösung in der Nähe, akzeptiere auch schlechtere Lösung

Evolutionäre Algorithmen

Beginne mit Lösungspopulation

Wähle beste Lösungen zur Reproduktion aus

Bilde durch Überkreuzungen und Mutationen der besten Lösungen neue Lösungen

Ersetze schlechteste Lösungen durch diese neue Lösungen

+Schwarmoptimierung, Ameisenkolonialisierung,…