AuD - Zusammenfassung

Moritz Gerhardt

1 Inhaltsverzeichnis

2 Was ist ein Algorithmus?

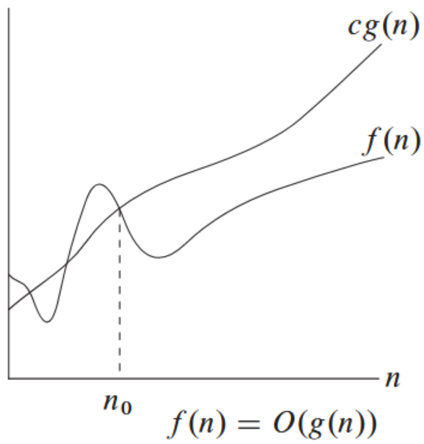
Ein Algorithmus beschreibt eine Handlungsvorschrift zur Umwandlung von Eingaben in eine Ausgabe.
Dabei sollte ein Algorithmus im allgemeinen folgende Vorraussetzungen erfüllen:

1. Bestimmt:
   - Determiniert: Bei gleicher Eingabe liefert der Algortihmus gleiche Ausgabe.
     $\Longrightarrow$ Ausgabe nur von Eingabe abhängig, keine äußeren Faktoren.
   - Determinismus: Bei gleicher Eingabe läuft der Algorithmus immer gleich durch die Eingabe.
     $\Longrightarrow$ Gleiche Schritte, Gleiche Zwischenstände.
2. Berechenbar:
   - Finit: Der Algorithmus ist als endlich definiert. (Theoretisch)
   - Terminierbar: Der Algorithmus stoppt in endlicher Zeit. (Praktisch)
   - Effektiv: Der Algorithmus ist auf Maschine ausführbar.
3. Andwendbar:
   - Allgemein: Der Algorithmus ist für alle Eingaben einer Klasse anwendbar, nicht nur für speziellen Fall.
   - Korrekt: Wenn der Algorithmus ohne Fehler terminiert, ist die Ausgabe korrekt.

3 Laufzeitanalyse

3.1 O Notation

Die O-Notation wird grundsätzlich für *Worst-Case* Laufzeiten verwerdendet. Sie gibt also eine obere Schranke an, die der Algorithmus im schlechtesten Fall erreicht. Dabei wird oft zwischen Big O-Notation und Little o-Notation unterschieden. Ein Graph zur Repräsentation der O-Notation ist hier zu sehen:



3.1 (a) Big-O Notation

Mathematische Definition:

$$O(g(n)) = \{f : \exists c \in \mathbb{R}_{>0}, n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)$$

Es existieren die positiven Konstanten c und n_0 , sodass für alle $n \geq n_0$ gilt, dass $f(n) \geq 0$ und $f(n) \leq c \cdot g(n)$. Das bedeutet, dass die Funktion $f(n)$ für $n \to \infty$ den gleichen Wachstumsfaktor hat wie die Funktion $g(n)$. Einfache Berechnung findet wie folgt statt (anhand vom Beispiel $f(n) = 5n^2 + 2n$):

1. Finde den Term mit dem höchsten Wachstumsfaktor ($5n^2$)
2. Konstanten werden weggelassen (n^2)
3. Demnach ist $f(n) = O(n^2)$

Dies kann man dann im Rückschluss so anwenden: Um die Konstanten c und n_0 zu finden, wird die obige gleichung benutzt:

1. Simplifiziere die Ungleichung $5n^2 + 2n \leq c \cdot n^2$ zu $5 + \frac{2}{n} \leq c$
2. Da $n \geq n_0$ kann man die Gleichung für $n \geq 1$ auflösen um die Konstanten c und n_0 zu finden.
   $\implies 5 + \frac{2}{1} = 7 \leq c \implies c \geq 7$
3. Dementsprechend kann man dann die Konstanten $c = 7$ und $n_0 = 1$ auswählen.

3.1 (b) Little-o Notation

Mathematische Notation:

$$O(g(n)) = \{f : \exists c \in \mathbb{R}_{>0}, n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) < c \cdot g(n)$$

Es existieren die positive Konstanten c und n_0, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt, dass $f(n) \geq 0$ und $f(n) < c \cdot g(n)$. Little-o Notation unterscheidet sich also von Big-O Notation nur oberen Schranke. Während bei Big-O der Wachstumsfaktor beider Funktion gleich sein kann ($f(n) = c \cdot g(n)$), gilt bei Little-o, dass der Wachstumsfaktor der Funktion $f(n)$ kleiner ist als der Wachstumsfaktor der Funktion $g(n)$.
Einfache Berechnung findet analog zu Big-O wie folgt statt (anhand vom Beispiel $f(n) = 5n^2 + 2n$):

1. Finde den Term mit dem höchsten Wachstumsfaktor ($5n^2$)
2. Konstanten werden weggelassen (n^2)
3. Demnach ist $f(n) = o(n^2)$

Hier muss allerdings noch geprüft werden, ob der Wachstumsfaktor der Funktion $f(n)$ kleiner ist als der Wachstumsfaktor der Funktion $g(n)$. Wenn ja, ist die Little-o Notation korrekt für $g(n)$.
Um zu zeigen, dass $f(n) = o(g(n))$:

1. Finde den Limes des simplifizierten Ausdrucks $\frac{f(n)}{g(n)}$, der die Wachstumsrate der Funktion $f(n)$ zur Wachstumsrate der Funktion $g(n)$ vergleicht.
   - $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+2n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} 5 + \frac{2}{n} = 5$
     $\Longleftarrow \frac{2}{n}$ für $n \to \infty = 0$
2. Da der Limes $\neq 0$ ist, bedeutet das, dass der Wachstum von $f(n)$ nicht geringer ist als der von $g(n)$. Deshalb müssen wir ein Polynomgrad hochgehen, weswegen $f(n) = o(n^3)$ sein muss.
3. Um nun die Konstanten c und n_0 zu finden müssen wir einfach $\frac{f(n)}{g(n)}$ auflösen
   - $\frac{5n^2+2n}{n^3} < c$
   - $\frac{5}{n} + \frac{2}{n^2} < c$
   - $\frac{5}{n} < c$, da $\frac{2}{n^2}$ für $n \to \infty$ schneller abfällt als $\frac{5}{n}$
   - Für $c = 1$ muss dann $n_0 > 5$ sein und kann somit als $n_0 = 6$ gewählt werden.

3.1 (c) Rechenregeln

Sind sowohl für $Big - O$ als auch $Little - o$ gültig

- **Konstanten:**

  $$f(n) = a \text{ mit } a \in \mathbb{R}_{>0} \implies f(n) = O(1)$$

  Ist die Funktion konstant, so ist die Komplexität $O(1)$.

- **Skalare Multiplikation:**

  $$f(n) = O(g(n)) \implies a \cdot f(n) = O(g(n))$$

  Multiplikation der Funktion ändert die Komplexität nicht.

- **Addition:**

  $$f_1(n) = O(g_1(n)),\ f_2(n) = O(g_2(n)) \implies f_1(n) + f_2(n) = O(\max\{g_1(n), g_2(n)\})$$

  Die Komplexität der Summe zweier Funktionen ist der Maximalwert der Komplexität der beiden Funktionen.

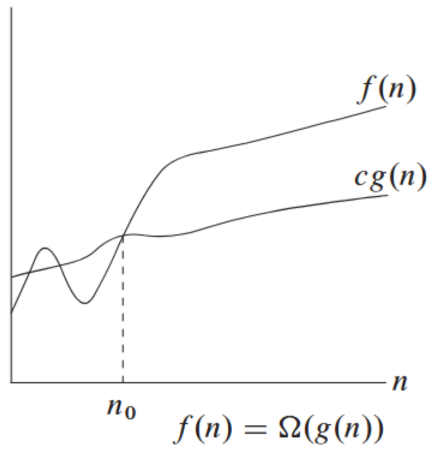
- **Multiplikation:**

  $$f_1(n) = O(g_1(n)),\ f_2(n) = O(g_2(n)) \implies f_1(n) \cdot f_2(n) = O(g_1(n) \cdot g_2(n))$$

  Die Komplexität des Produkts zweier Funktionen ist das Produkt der Komplexität der beiden Funktionen.

3.2 Ω Notation

Ähnlich zur O Notation, allerdings geht es hier um den *Best-Case* also minimale Anzahl der Schritten, die ein Algorithmus ausführt.



Wird auch wieder in Ω und ω aufgeteilt, die sich nur darin unterscheiden, wie strikt die Grenze ist.

3.2 (a) Ω Notation

Mathematische Definition:

$$\Omega(g(n)) = \{f : \exists c \in \mathbb{R}_{>0}, n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : 0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n)$$

Es existieren die positiven Konstanten c und n_0 , sodass für alle $n \geq n_0$ gilt, dass $0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n)$. Das bedeutet, dass der Wachstumsfaktor von $f(n) \geq c \cdot g(n)$ ist.

Die Berechnung von Ω ist leider nicht immer so simpel wie die Berechnung von O Notation. Nehme zum Beispiel einen Linearen Suchalgorithmus, der eine Liste so lange durchläuft, bis er die gesuchte Zahl gefunden hat. Die Komplexität ist $O(n)$, da, wenn das Element an letzter Stelle steht alle Eingaben durchlaufen werden müssen. Gleichermaßen kann es aber sein, dass das Element an erster Stelle steht, was dann die Komplexität $\Omega(1)$ besitzt. Dies muss allerdings durch Analyse des Algorithmus selbst erkannt werden und kann nicht aus der Funktionsrepräsentation ermittelt werden.
Gilt allerdings nicht sowas, wie vorzeitiger Abbruch bei Suche, so kann Ω ähnlich zu O verwendet werden (Anhand vom Beispiel $f(n) = 5n^2 + 2n$):

1. Finde den Term mit dem höchsten Wachstumsfaktor $(5n^2)$
2. Konstanten werden weggelassen (n^2)
3. Demnach ist $f(n) = \Omega(n^2)$
   Da $5n^2 + 2n$ für $n \to \infty$ mindestens so schnell wächst wie n^2.

Um Werte für c und n_0 zu finden, kann das Prinzip wie in O Notation verwendet werden, jedoch auf der Definition von Ω angepasst (Umgekehrtes Gleichheitsszeichen).

3.2 (b) ω Notation

Mathematische Definition:

$$\omega(g(n)) = \{f : \exists c \in \mathbb{R}_{>0}, n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : 0 \leq c \cdot g(n) < f(n)$$

Es existieren die positiven Konstanten c und n_0 , sodass für alle $n \geq n_0$ gilt, dass $0 \leq c \cdot g(n) < f(n)$.
Das bedeutet, dass der Wachstumsfaktor von $f(n) > c \cdot g(n)$ ist.

Für die Bestimmung von ω gilt das selbe wie für Ω, nur das zusätzlich noch folgendes beachtet werden muss:

- Hat der Algorithmus einen konstanten Best-Case, so ist ω nicht anwendbar, da $\omega < 1$ sinnlos ist, da per Definition die Komplexität nicht kleiner als 1 sein kann und so der Best-Case schon durch Ω definiert ist.
- Falls nicht konstant, dann muss bei ω ähnlich zu Little-o herausgefunden werden, ob der Wachstumsfaktor von $f(n)$ strikt größer ist als der Wachstumsfaktor der Funktion $g(n)$.
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$
  - Wenn $lim = \infty$, so gilt $\omega(g(n))$
  - Andernfalls muss der Polynomgrad von $g(n)$ verringert werden:
    $\longrightarrow n^x = n^{x-1} \implies n = 1$

3.2 (c) Rechenregeln

Sind sowohl für $Big - \Omega$ als auch $Little - \omega$ gültig

- **Konstanten:**

  $$f(n) = a \text{ mit } a \in \mathbb{R}_{>0} \implies f(n) = \Omega(1)$$

  Ist die Funktion konstant und positiv, so ist die Komplexität $\Omega(1)$.
- **Skalare Multiplikation:**

  $$f(n) = \Omega(g(n)) \implies a \cdot f(n) = \Omega(g(n)) \text{ für } a > 0$$

  Eine positive skalare Multiplikation der Funktion ändert die Komplexität nicht.
- **Addition:**

  $$f_1(n) = \Omega(g_1(n)),\ f_2(n) = \Omega(g_2(n)) \implies f_1(n) + f_2(n) = \Omega(\min\{g_1(n), g_2(n)\})$$

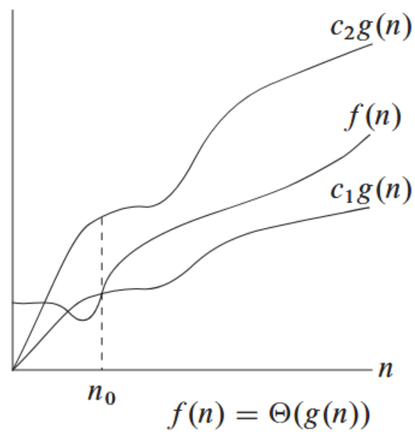
  Die Komplexität der Summe zweier Funktionen ist der Minimalwert der Komplexität der beiden Funktionen.
- **Multiplikation:**

  $$f_1(n) = \Omega(g_1(n)),\ f_2(n) = \Omega(g_2(n)) \implies f_1(n) \cdot f_2(n) = \Omega(g_1(n) \cdot g_2(n))$$

  Die Komplexität des Produkts zweier Funktionen ist das Produkt der Komplexität der beiden Funktionen.

3.3 Θ Notation

Θ Notation kombiniert O und Ω Notation. Das heißt sie stellt Durchschnittswachstum (Average-Case) einer Funktion dar und liegt somit zwischen O und Ω.



Mathematische Notation:

$$\Theta(g(n)) = \{f : \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}, n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : 0 \leq c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$$

Es existieren die positiven Konstanten c_1, c_2 und n_0 , sodass für alle $n \geq n_0$ gilt, dass $0 \leq c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$.
$f(n) = \Theta(g(n)) \iff f(n) = O(g(n)) \wedge f(n) = \Omega(g(n))$.

Die Berechnung von Θ läuft dementsprechend auch ähnlich zu O und Ω ab (Anhand vom Beispiel $f(n) = 5n^2 + 2n$).

1. Finde den Term mit dem höchsten Wachstumsfaktor ($5n^2$)
2. Konstanten werden weggelassen (n^2)
3. Demnach ist $f(n) = \Theta(n^2)$
   Da $5n^2 + 2n$ für $n \to \infty$ mindestens so schnell wächst wie n^2.

Die Berechnung der Konstanten ist allerding ein klein wenig komplizierter, da es eine mehr gibt. Prinzipiell bleibt es aber gleich:

- Simplifiziere die Gleichung: $c_1 \cdot n^2 \leq 5n^2 + 2n \leq c_2 \cdot n^2 = c_1 \leq 5 + \frac{2}{n} \leq c_2$
- Da hier für alle $n > 0$ der mittlere Term positiv ist, kann man $n_0 = 1$ wählen.
- Dadurch erhalten wir $c_1 \leq 5 + \frac{2}{1} = 7 \leq c_2$, wodurch man hier die Konstanten dann z.B. $c_1 = 7$ und $c_2 = 7$ für $n_0 = 1$ auswählen kann.

4 Sortieren

4.1 Sortierproblem

Sortieralgorithmen sind die wohl am häufigsten verwendeten Algorithmen. Hierbei wird als Eingabe eine Folge von Objekten gegeben, die nach einer bestimmten Eigenschaft sortiert werden. Der Algorithmus soll die Eingabe in der richtigen Reihenfolge (nach einer bestimmten Eigenschaft) zur Ausgabe umwandeln. Es wird hierbei meist von einer total geordneten Menge ausgegangen. (Alle Elemente sind miteinander vergleichbar).
Eine Totale Ordnung wird wie folgt definiert:

Eine Relation $\leq$ auf M ist eine totale Ordnung, wenn:

- Reflexiv: $\forall x \in M : x \leq x$
  (x steht in Relation zu x)
- Transitiv: $\forall x, y, z \in M : x \leq y \land y \leq z \implies x \leq z$
  (Wenn x in Relation zu y steht und y in Relation zu z steht, so folgt, dass x in Relation zu z steht)
- Antisymmetrisch: $\forall x, y \in M : x \leq y \land y \leq x \implies x = y$
  (Wenn x in Relation zu y steht und y in Relation zu x steht, so folgt, dass x = y)
- Totalität: $\forall x, y \in M : x \leq y \lor y \leq x$
  (Alle Elemente müssen in einer Relation zueinander stehen)

4.2 Insertion Sort

```java
class InsertionSort {
    void insertionSort(int[] arr) {
        for (int i = 1; i < arr.length; i++) {
            // 1 to n - 1
            int key = arr[i];
            int j = i - 1;
            while (j >= 0 && arr[j] > key) {
                // Loops backwards through the array starting at i - 1
                // until it finds an element that is greater than the key or the beginning of the array
                arr[j + 1] = arr[j];
                // Shifts the element to the right
                j--;
            }
            arr[j + 1] = key;
            // Assigns the key to the correct position
        }
    }
}
```

Prinzip: Die Eingabe wird von links nach rechts durchlaufen. Dafür wird für jedes Element startend bei $i = 1$ der Array von i bis 0 nach links durchlaufen, bis 0 erreicht ist oder key-Wert größer gleich dem i-ten Element ist. Während des durchlaufens nach links werden die Elemente so nach Rechts geschoben, so dass eine Einfügespalte ensteht. Nach dem Ende dieses Durchgangs ist der Spalt bei der position, bei der der Wert eingefügt werden soll. Dies wird dann wiederholt, bis für alle i der Array durchlaufen ist.

4.3 Merge Sort

```java
class MergeSort {
    void mergeSort(int[] arr, int left, int right) {
        if (left < right) {
            // left < right, otherwise the region has no elements
            int mid = (left + right) / 2;
            // Split the region into two halves and do the recursive calls
            mergeSort(arr, left, mid);
            mergeSort(arr, mid + 1, right);
            // Merge the two (now sorted) halves
            merge(arr, left, mid, right);
        }
    }

    private void merge(int[] arr, int left, int mid, int right) {
        int[] temp = new int[right - left + 1];
        // Create a temporary array to store the merged elements

        int p = left;
        int q = mid + 1;
        for (int i = 0; i < right - left + 1; i++) {
            // Loops for each element in the region
            if (q > right || (p <= mid && arr[p] <= arr[q])) {
                // If p > mid the left half is finished, therefore the element needs to be in right half
                // Otherwise p needs to be <= mid and the element at p needs to be <= the element at q
                temp[i] = arr[p];
                p++;
                // Adds the element at p to the temporary array and increases p
            }
            else {
                temp[i] = arr[q];
                q++;
                // Adds the element at q to the temporary array and increases q
            }
        }
        // Copy the merged elements from the temporary array back to the original array
        for (int i = 0; i < right - left + 1; i++) {
            arr[left + i] = temp[i];
            // left + 0 is the start of the region
        }
    }
}
```

4.4 Quicksort

```java
class Quicksort {
    void quickSort(int[] arr, int left, int right) {
        if (left < right) {
            // Region contains more than one element
            int part = partition(arr, left, right);
            quickSort(arr, left, part);
            quickSort(arr, part + 1, right);
        }
    }

    private int partition(int[] arr, int left, int right) {
        int pivot = arr[left];

        int p = left - 1;
        int q = right + 1;
        while (p < q) {
            while (arr[p] < pivot) {
                p++;
            }
            while (arr[q] > pivot) {
                q--;
            }
            // Increase / decrease p and q until they are equal to pivot
            if (p < q) {
                int temp = arr[p];
                arr[p] = arr[q];
                arr[q] = temp;
                // Swap arr[p] and arr[q]
            }
        }
        return q;
    }
}
```

4.5 Radix Sort

```java
import java.util.ArrayList;

class RadixSort {
    int D = 10; // possible unique digits
    int d; // Max amount of digits
    ArrayList<Integer>[] buckets = new ArrayList[D];

    void radixSort(int[] arr) {
        d = amountDigits(arr);
        for (int i = 0; i < d; i++) {
            // for each digit in the array, 0 least significant
            for (int j = 0; j < arr.length; j++) {
                putBucket(arr, i, j);
            }
            // Sorts the numbers into their buckets
            int a = 0;
            for (int k = 0; k < D; k++) {
                for (int b = 0; b < buckets[k].size(); b++) {
                    arr[a] = buckets[k].get(b);
                    a++;
                }
                buckets[k].clear();
            }
            // Reads out the buckets in order
        }
    }

    private void putBucket(int[] arr, int i, int j) {
        int z = arr[j] / (int) Math.pow(D, i) % D;
        // Gets the ith digit of the number
        int b = buckets[z].size();
        // size is next free index
        buckets[z].add(b, arr[j]);
        // puts the number in the bucket z at position b
        // Depending on implementation might need to increase size manually
    }

    private int amountDigits(int[] arr) {
        int max = arr[0];
        for (int i = 1; i < arr.length; i++) {
            if (arr[i] > max) {
                max = arr[i];
            }
        }
        // Get the biggest number
        return (int) Math.log10(max) + 1;
        // Get the amount of digits of the number
    }
}
```

5 Grundlegende Datenstrukturen

5.1 Stacks

Stacks operieren unter dem "First in - Last out" (FILO) Prinzip. Ähnlich zu einem Kartendeck, wo die unterste (Erste Karte) die ist, die als letztes gezogen wird.
Stacks werden normalerweise mit den folgenden Funktionen erstellt:

- `newn`: Erstellt einen neuen Stack.
- `isEmpty`: gibt an ob der Stack leer ist.
- `pop`: gibt das oberste Element des Stacks zurück und enfernt es vom Stack.
- `push(k)`: Fügt `k` auf den Stack hinzu

Eine mögliche Implementation auf Grundlage eines Arrays wäre:

```java
class Stack {
    private int[] arr;
    private int top;

    Stack(int size) {
        arr = new int[size];
        top = -1;
        // Creates a new array with size
    }

    boolean isEmpty() {
        return top < 0;
        // Returns true if empty
    }

    int pop() {
        return arr[top--];
        // Removes and returns the top element
    }

    void push(int k) {
        arr[++top] = k;
        // Adds an element
    }
}
```

Push und Pop schmeißen Fehlermeldung wenn Stack leer bzw. voll ist. Oft als Stack underflow und Stack overflow benannt. Hier wär es automatisch IndexOutOfBounds.
Oft werden Stacks auch mit variabler Größer implementiert. Dies kann über verschiedene Wege passieren, zum Beispiel Kopieren des arrays in einen größeren Array oder implementation über mehrere Arrays (z.B. über Linked List). Häufig wird das erstere so implementiert, dass der Array in einen Array mit doppelter Größe kopiert wird.

5.2 Queues

Queues werden normalerweise mit den folgenden Funktionen erstellt:

- `newn`: Erstellt einen neuen Queue.
- `isEmpty`: gibt an ob der Queue leer ist.
- `enqueue(k)`: Fügt `k` auf den Queue hinzu
- `dequeue`: gibt das erste Element des Queues zurück und entfernt es vom Queue.

Hier ist die Implementation für Queues wie folgt:

```java
class Queue {

    private int[] arr;
    private int front;
    private int back;

    Queue(int size) {
        arr = new int[size];
        front = -1;
        back = -1;
    }

    boolean isEmpty() {
        return back == -1;
    }

    boolean isFull() {
        return (front + 1) % arr.length == back;
        // If front + 1 is equal to back, the queue is full
        // Modulo makes this usable for cyclic arrays
    }

    void enqueue(int k) {
        if (isFull()) {
            throw new UException("Queue is full");
        }
        else{
            if (isEmpty()) {
                front = 0;
            }
            back = (back + 1) % arr.length;
            // Modulo so that cyclic arrays work
            arr[back] = k;
        }
    }

    int dequeue() {
        if (isEmpty()) {
            throw new UException("Queue is empty");
        }
        else {
            int temp = arr[front];
            front = (front + 1) % arr.length;
            // Modulo so that cyclic arrays work
            if (front == back) {
                front = -1;
                back = -1;
            }
            // If front and back are equal, the queue is empty -> reset
            return temp;
        }
    }
}
```

5.3 Linked List

Eine einfache Linked List besteht aus mehreren Elementen, die jeweils immer einen Wert und eine Referenz auf das nächste Element in der Liste haben. Eine einfache Linked List kann wie folgt implementiert werden:

```java
class LinkedElement {
    Integer key = null;
    LinkedElement next = null;

    public LinkedElement(Integer key) {
        this.key = key;
    }
}
```

```java
class LinkedList {
    LinkedElement head = null;

    void insert(int k) {
        LinkedElement elem = new LinkedElement(k);
        if (head == null) {
            head = elem;
        }
        else {
            head.next = elem;
            head = elem;
        }
    }

    void delete(int k) {
        LinkedElement prev = null;
        LinkedElement curr = head;
        while (curr != null && curr.key != k) {
            prev = curr;
            curr = curr.next;
        }
        if (curr == null) {
            throw new UException("Element not found");
        }
        if (prev != null) {
            prev.next = curr.next;
        }
        else {
            head = curr.next;
        }
    }

    LinkedElement search(int k) {
        LinkedElement curr = head;
        while (curr != null && curr.key != k) {
            curr = curr.next;
        }
        if (curr == null) {
            throw new UException("Element not found");
        }
        return curr;
    }
}
```

5.4 Binary Search Tree

```java
class BSTNode {
    Integer key;
    BSTNode left;
    BSTNode right;
    BSTNode parent;

    BSTNode(Integer k) {
        key = k;
    }
}
```

```java
class BSTree {

    BSTNode root = null;

    void insert(BSTNode z) {
        BSTNode x = root; // Traversal starting from the root
        BSTNode px = null; // Parent of x, initially null

        while(x != null) {
            px = x;
            if (z.key < x.key) {
                x = x.left;
            } else {
                x = x.right;
            }
        }// Traversing the tree until finding the insertion point

        z.parent = px; // Sets the parent of the node to be inserted
        if (px == null) { // px only null if the tree is empty-> loop never runs -> z is root
            root = z;
        } else if (z.key < px.key) { // Key smaller -> left child
            px.left = z;
        } else { // Key bigger -> right child
            px.right = z;
        }
        // May add the same node twice as it doesn't check for duplicates
    }
```

```
void delete(BSTNode z) {
    if (z.left == null) { // If z has no left child, transplants the right child to z's position
        transplant(z, z.right);
    } else if (z.right == null) { // If z has no right child, transplants the left child to z's position
        transplant(z, z.left);
    } else { // If z has both left and right children
        BSTNode y = z.right;
        while (y.left != null) {
            y = y.left;
        } // Finds the next biggest element of z = smallest in right subtree of z
        if (y.parent != z) { // If the next biggest element y is not child of z
            transplant(y, y.right); // Transplants the right child of y to y's position
            y.right = z.right; // The right child of y becomes the right child of z
            y.right.parent = y; // The parent of the right child of y becomes y
        }
        transplant(z, y); // Transplants y to z's position
        y.left = z.left; // The left child of y becomes the left child of z
        y.left.parent = y; // The parent of the left child of y becomes y
    }
}
```

```java
    void transplant(BSTNode u, BSTNode v) {
        // Transplants v to the parent of u
        if (u.parent == null) { // If u is the root, v becomes the new root
            root = v;
        } else if (u == u.parent.left) { // If u is a left child, v becomes a left child
            u.parent.left = v;
        } else { // If u is a right child, v becomes a right child
            u.parent.right = v;
        }
        if (v != null) { // If v is not null, v becomes a child of u's parent
            v.parent = u.parent;
        }
    }
```

```java
    BSTNode iterativeSearch(int k) {
        BSTNode curr = root;
        while (curr != null && curr.key != k) {
            if (k < curr.key) {
                curr = curr.left;
            } else {
                curr = curr.right;
            }
        }
        return curr;
        // Returns null if element not found
    }

    BSTNode recursiveSearch(int k, BSTNode curr) {
        if (curr == null) {
            return null;
        }
        if (k < curr.key) {
            return recursiveSearch(k, curr.left);
        } else if (k > curr.key) {
            return recursiveSearch(k, curr.right);
        }

        return curr;
        // Returns null if element not found
    }
```

```java
    void traversal(BSTNode curr) {
        if (curr != null) {
            return;
        }
        // Any actions that should be done in a specific order can be done
        // Here for preorder traversal
        traversal(curr.left);
        // Here for inorder traversal
        traversal(curr.right);
        // Here for postorder traversal
        // Left and right can also be exchanged to traverse in reverse order
    }
}
```

5.5 Red-Black Tree

```java
class RBNode {
    Integer key;
    RBNode left;
    RBNode right;
    RBNode parent;
    Color color;

    RBNode(Integer k) {
        key = k;
    }
}
```

```java
class RBTree {
    RBNode sent;
    RBNode root = null;

    RBTree() {
        sent = new RBNode(null);
        sent.color = Color.BLACK;
        sent.left = sent;
        sent.right = sent;
        // Sentinel always points to itself ->
        // node.parent.parent and its children will never result in null references
    }

    // Traversal and search are the same as BSTree

    void insert(RBNode z) {
        // Very similar to BSTree, with addition of color and parent of sentinel instead of null
        RBNode x = root; // Traversal starting from the root
        RBNode px = sent; // Parent of x, initially sentinel unlike BST

        while (x != null) {
            px = x;
            if (z.key < x.key) {
                x = x.left;
            } else {
                x = x.right;
            }
        }// Traversing the tree until finding the insertion point

        z.parent = px; // Sets the parent of the node to be inserted
        if (px == sent) { // px only sentinel if the tree is empty -> loop never runs -> z is root
            root = z;
        } else if (z.key < px.key) { // Key smaller -> left child
            px.left = z;
        } else { // Key bigger -> right child
            px.right = z;
        }

        z.color = Color.RED; // Sets color of new Node to red, will not necessarily stay red
        fixColorsAfterInsertion(z); // Fixes colors in tree after insertion to maintain RB properties
        // May add the same node twice as it doesn't check for duplicates
    }
```

```java
    void fixColorsAfterInsertion(RBNode z) {
        while (z.parent.color == Color.RED) { // While z's parent is red
            if (z.parent == z.parent.parent.left) { // If z's parent is a left child
                RBNode y = z.parent.parent.right; // Gets sibling of z's parent
                if (y != null && y.color == Color.RED) { // If sibling exists and is red
                    z.parent.color = Color.BLACK; // Set z's parent to black
                    y.color = Color.BLACK; // Set z's sibling to black
                    z.parent.parent.color = Color.RED; // Set z's grandparent to red
                    z = z.parent.parent; // Set z to z's grandparent
                } else { // If z doesn't have a sibling or sibling is black
                    if (z == z.parent.right) { // If z is a right child
                        z = z.parent; // Set z to z's parent
                        rotateLeft(z); // Rotate new z to left
                    }
```

```
                    z.parent.color = Color.BLACK; // Set z's parent to black
                    z.parent.parent.color = Color.RED; // Set z's grandparent to red
                    rotateRight(z.parent.parent); // Rotate z's grandparent to right
                }
            } else {
                // Same as above but with right and left exchanged
                RBNode y = z.parent.parent.left;
                if (y != null && y.color == Color.RED) {
                    z.parent.color = Color.BLACK;
                    y.color = Color.BLACK;
                    z.parent.parent.color = Color.RED;
                    z = z.parent.parent;
                } else {
                    if (z == z.parent.left) {
                        z = z.parent;
                        rotateRight(z);
                    }
                    z.parent.color = Color.BLACK;
                    z.parent.parent.color = Color.RED;
                    rotateLeft(z.parent.parent);
                }
            }
        }
        root.color = Color.BLACK; // Set root to black, as it always should be
        // Never needs to check nodes below z as their properties will not change after insertion
    }
```

```
    void rotateLeft(RBNode x) {
        RBNode y = x.right;

        x.right = y.left; // Set x's right child to y's left child
        if (y.left != null) { // If y has a left child
            y.left.parent = x; // Set y's left child's parent to x
        }
        y.parent = x.parent; // Set y's parent to x's parent
        if (x.parent == sent) { // If x is the root, set y to be the root
            root = y;
        } else if (x == x.parent.left) { // If x is a left child, set x's parent's left child to y
            x.parent.left = y;
        } else { // If x is a right child, set x's parent's right child to y
            x.parent.right = y;
        }
        y.left = x; // Set y's left child to x
        x.parent = y; // Set x's parent to y
    }
    void rotateRight(RBNode x) {
        // Same as rotateLeft but with right and left exchanged
        RBNode y = x.left;

        x.left = y.right;
        if (y.right != null) {
            y.right.parent = x;
        }
        y.parent = x.parent;
        if (x.parent == sent) {
            root = y;
        } else if (x == x.parent.right) {
            x.parent.right = y;
        } else {
            x.parent.left = y;
        }
        y.right = x;
        x.parent = y;
    }
```

```
    void delete(RBNode z) {
        RBNode a = z.parent; // a represent node with black depth imbalance
        int dbh = 0; // delta black height, -1 for right, 1 for left leaning

        if (z.left == null && z.right == null) { // If z is a leaf
            if (z.color == Color.BLACK && z != root) { // If z is black
```

```java
                if (z == z.parent.left) { // If z is a left child
                    dbh = -1; // Set delta black height to -1
                } else { // If z is a right child
                    dbh = 1; // Set delta black height to 1
                }
            }
            transplant(z, null); // Transplant z to null
        } else if (z.left == null) { // If z only has a right child
            RBNode y = z.right;
            transplant(z, z.right);
            y.color = z.color;
        } else if (z.right == null) { // If z only has a left child
            RBNode y = z.left;
            transplant(z, z.left);
            y.color = z.color;
        } else { // If z has two children
            RBNode y = z.right;
            a = y;
            boolean wentLeft = false;
            while (y.left != null) { //
                a = y;
                y = y.left;
                wentLeft = true;
            }
            if (y.parent != z) { // Loop didn't run
                transplant(y, y.right);
                y.right = z.right;
                y.right.parent = y;
            }
            transplant(z, y);
            y.left = z.left;
            y.left.parent = y;
            if (y.color == Color.BLACK) {
                if (wentLeft) { // Tree imbalanced depending on y location
                    dbh = -1;
                } else {
                    dbh = 1;
                }
            }
            y.color = z.color;
        }
        if (dbh != 0) { // If black height imbalance
            fixColorsAfterDeletion(a, dbh);
        }
    }
```

```java
    void fixColorsAfterDeletion(RBNode a, int dbh) {
        if (dbh == -1) { // Extra black node on the right
            RBNode x = a.left;
            RBNode b = a.right;
            RBNode c = b.left;
            RBNode d = b.right;
            if (x != null && x.color == Color.RED) {
                // Easy case: x is red
                x.color = Color.BLACK;
            } else if (a.color == Color.BLACK
                    && b.color == Color.RED) {
                // Case 1: a black, b red
                rotateLeft(a);
                a.color = Color.RED;
                b.color = Color.BLACK;
                fixColorsAfterDeletion(a, dbh);
            } else if (a.color == Color.RED
                    && b.color == Color.BLACK
                    && (c == null || c.color == Color.BLACK)
                    && (d == null || d.color == Color.BLACK)) {
                // Case 2a: a red, b black, c and d black
                a.color = Color.BLACK;
                b.color = Color.RED;
            } else if (a.color == Color.BLACK
                    && b.color == Color.BLACK
```

```java
                    && (c == null || c.color == Color.BLACK)
                    && (d == null || d.color == Color.BLACK)) {
                // Case 2b: a black, b black, c and d black
                b.color = Color.RED;
                if (a == a.parent.left) {
                    dbh = 1;
                } else if (a == a.parent.right) {
                    dbh = -1;
                } else {
                    dbh = 0;
                }
                fixColorsAfterDeletion(a.parent, dbh);
            } else if (b.color == Color.BLACK
                    && c != null && c.color == Color.RED
                    && (d == null || d.color == Color.BLACK)) {
                // Case 3: a either, b black, c red, d black
                rotateRight(b);
                c.color = Color.BLACK;
                fixColorsAfterDeletion(a, dbh);
            } else if (b.color == Color.BLACK
                    && d!= null && d.color == Color.RED) {
                // Case 4: a either, b black, c either, d red
                rotateLeft(a);
                b.color = a.color;
                a.color = Color.BLACK;
                d.color = Color.BLACK;
                }
        } else { // Extra black node on the left
            // Same as above but with right and left exchanged
            RBNode x = a.right;
            RBNode b = a.left;
            RBNode c = b.right;
            RBNode d = b.left;
            if (x != null && x.color == Color.RED) {
                // Easy case: x is red
                x.color = Color.BLACK;
            } else if (a.color == Color.BLACK
                    && b.color == Color.RED) {
                // Case 1: a black, b red
                rotateRight(a);
                a.color = Color.RED;
                b.color = Color.BLACK;
                fixColorsAfterDeletion(a, dbh);
            } else if (a.color == Color.RED
                    && b.color == Color.BLACK
                    && (c == null || c.color == Color.BLACK)
                    && (d == null || d.color == Color.BLACK)) {
                // Case 2a: a red, b black, c and d black
                a.color = Color.BLACK;
                b.color = Color.RED;
            } else if (a.color == Color.BLACK
                    && b.color == Color.BLACK
                    && (c == null || c.color == Color.BLACK)
                    && (d == null || d.color == Color.BLACK)) {
                // Case 2b: a black, b black, c and d black
                b.color = Color.RED;
                if (a == a.parent.right) {
                    dbh = 1;
                } else if (a == a.parent.left) {
                    dbh = -1;
                } else {
                    dbh = 0;
                }
                fixColorsAfterDeletion(a.parent, dbh);
            } else if (b.color == Color.BLACK
                    && c != null && c.color == Color.RED
                    && (d == null || d.color == Color.BLACK)) {
                // Case 3: a either, b black, c red, d black
                rotateLeft(b);
                c.color = Color.BLACK;
                fixColorsAfterDeletion(a, dbh);
```

```java
            } else if (b.color == Color.BLACK
                    && d!= null && d.color == Color.RED) {
                // Case 4: a either, b black, c either, d red
                rotateRight(a);
                b.color = a.color;
                a.color = Color.BLACK;
                d.color = Color.BLACK;
            }
        }
    }
```

```java
    void transplant(RBNode u, RBNode v) {
        // Transplants v to the parent of u
        if (u.parent == sent) { // If u is the root, v becomes the new root
            root = v;
        } else if (u == u.parent.left) { // If u is a left child, v becomes a left child
            u.parent.left = v;
        } else { // If u is a right child, v becomes a right child
            u.parent.right = v;
        }
        if (v != null) { // If v is not null, v becomes a child of u's parent
            v.parent = u.parent;
        }
    }
}
```