Algebraic Structure of Vector Fields in Financial Diffusion Models and its Applications

森本 裕介

三菱東京 UFJ 銀行

2016 年度中之島ワークショップ

[1]本発表に示されている意見は、著者個人に属し、三菱東京 UFJ 銀行の公式見解を示すものではない。

今回の話

Morimoto, Y., Sasada, M., Algebraic Structure of Vector Fields in Financial Diffusion Models and its Applications, Quantitative Finance. (To be appeared).

Outline

1. SDE のベクトル場の代数的性質
2. 高次離散スキーム (KLNV 法) への応用
3. 数値計算

Outline

設定

$X(t,x)$: N 次元の Stratonovich 型 SDE の解とする.

$$dX(t,x) = \sum_{i=0}^{d} V_i(X(t,x)) \circ dB_t^i \tag{1}$$

$B^0(t) = t,\ (B^1(t), \ldots, B^d(t))$: d-次元標準 Brown 運動.
$V_0, V_1, \ldots, V_d \in C_b^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$.
$V_i \in C_b^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ を $\mathbb{R}^N$ 上のベクトル場と以下のように同一視する.

$$V_i(x) = \sum_{j=1}^{N} V_i^j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

ベクトル場の Lie 括弧積を次のように定義する.

$$[V_i, V_j] = V_i V_j - V_j V_i$$

Lie 括弧積も再びベクトル場になる.

$\exp(tV)$：ベクトル場の Flow

$\mathbb{R}^N$ 上のベクトル場 $V = \sum_{i=1}^N V^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ に付随する Flow,
$\exp(tV)(x) := \phi(t)$ を次の常微分方程式の解とする（ここでは
$V \in C^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ とみている）.

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = V(\phi(t)), \quad \phi(0) = x.$$

- ベクトル場の Flow と微分作用としての exp は近い

$$f(\exp(tV)(x)) \approx (\exp(tV)f)(x), \quad f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^N).$$

$$\begin{aligned} f(\exp(tV)(x)) &= f(x) + \int_0^t \frac{df(\phi(s))}{ds} ds \\ =& f(x) + \int_0^t (Vf)(\phi(s))ds = \ldots = \sum_{k=0}^n \frac{(tV)^k}{k!} f(x) + O(t^{n+1}) \end{aligned}$$

SABR model

最も代表的な確率ボラティリティモデルある SABR モデルは次で与えられる． $\frac{1}{2} < \beta \leqq 1$, Fix とする．

$$
\begin{aligned}
dX_1(t,x) &= X_2(t,x)X_1(t,x)_+^{\beta}dB^1(t) \\
dX_2(t,x) &= \nu X_2(t,x)(\rho dB^1(t) + \sqrt{1-\rho^2}dB^2(t)).
\end{aligned}
$$

Stratonovich 型 (1) のように表すと係数は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
V_0^S(x) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\beta x_2^2(x_{1+})^{2\beta-1} + \rho x_2(x_{1+})^{\beta} \\ -\frac{1}{2}x_2 \end{pmatrix} \\
V_1^S(x) &= \begin{pmatrix} x_2(x_{1+})^{\beta} \\ \nu\rho x_2 \end{pmatrix} \\
V_2^S(x) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \nu\sqrt{1-\rho^2}x_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Proposition (M, Sasada)

$\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $W_n^S, n \in \mathbb{N}_0$ を次のように定義する.

$$W_n^S = \frac{1}{1-\beta}(x_{1+})^{1-n(1-\beta)} x_2^n \frac{\partial}{\partial x_1}, \ n \geqq 1,$$
$$W_0^S = -x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

この時，次が成り立つ *(Witt 代数)*.

$$[W_n^S, W_m^S] = (n-m)W_{n+m}^S. \tag{2}$$

また，*SABR* モデルのベクトル場は次のように表される.

$$\begin{aligned} V_0^S &= \frac{1}{2}\nu^2 W_0^S + \frac{1}{2}(\beta-1)\nu\rho W_1^S + \frac{1}{2}\beta(\beta-1)W_2^S \\ V_1^S &= -\nu\rho W_0^S + (1-\beta)W_1^S \\ V_2^S &= -\nu\sqrt{1-\rho^2}W_0^S \end{aligned} \tag{3}$$

Proposition (M, Sasada)

さらに，W_n^S に付随する *Flow* $\exp(tW_n^S)$ は解析的に表すことができる．

$$\exp(tW_n^S)(x) = (\phi_n^{(1)}(t,x)), \phi_n^{(2)}(t,x))).$$

$$\phi_n^{(1)}(t,x) = \begin{cases} \left(nx_2^n t + x_1^{n(1-\beta)}\right)_+^{\frac{1}{n(1-\beta)}}, 1/2 < \beta < 1, \\ x_1 \exp(x_2^n t), \qquad \beta = 1. \end{cases}$$

$$\phi_n^{(2)}(t,x) = x_2.$$

Heston model

SABR モデルと並んで代表的な確率ボラティリティモデルである Heston モデルは次で与えられる.

$$dX_1(t,x) = \mu X_1(t,x)dt + \sqrt{X_2(t,x)_+}X_1(t,x)dB^1(t),$$
$$dX_2(t,x) = \kappa(\theta - X_2(t,x)_+)dt + \xi\sqrt{X_2(t,x)_+}(\rho dB^1(t) + \sqrt{1-\rho^2}dB^2(t))$$

対応するベクトル場は次のようになる.

$$V_0^H(x) = ((\mu - \frac{1}{4}\xi\rho)x_1 - 1/2x_{2+}x_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + (\kappa(\theta - x_{2+}) - 1/4\xi^2)\frac{\partial}{\partial x_2}$$
$$V_1^H(x) = \sqrt{x_{2+}}x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \xi\rho\sqrt{x_{2+}}\frac{\partial}{\partial x_2}$$
$$V_2^H(x) = \xi\sqrt{1-\rho^2}\sqrt{x_{2+}}\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Proposition (M, Sasada)

$M_n, L_n, n \geqq 0$ を次のように定義する.

$$M_n = 2x_1 {x_2}_+^{-\frac{n}{2}+1} \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad L_n = 2{x_2}_+^{-\frac{n}{2}+1} \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Heston モデルのベクトル場は次のように表される.

$$V_0^H = \frac{1}{2}(\mu - \frac{\xi\rho}{4}) M_2 - \frac{1}{4} M_0 + \frac{1}{2}(\kappa\theta - \frac{\xi^2}{4}) L_2 - \frac{\kappa}{2} L_0$$

$$V_1^H = \frac{1}{2} M_1 + \frac{\xi\rho}{2} L_1, \quad V_2^H = \frac{\xi\sqrt{1-\rho^2}}{2} L_1$$

$\{M_n, L_n, n \geqq 0\}$ は次を満たす.

$$[M_n, M_m] = 0$$
$$[M_n, L_m] = (n-2) M_{n+m}$$
$$[L_n, L_m] = (n-m) L_{n+m}.$$

Proposition (M, Sasada)

$n \geqq 0$ に対し，$W^H_{2n} = L_n, W^H_{2n+1} = M_n$ $n \geqq 0$ とする．このとき次の性質 *(Witt Property)* が従う．

$$[W^H_n, W^H_m] = c_{nm} W^H_{n+m}$$

ここで,

$$c_{nm} = \begin{cases} 0 & n, m \quad \textit{odd} \\ \frac{n-5}{2} & n \quad \textit{odd}, \quad m \quad \textit{even} \\ \frac{n-m}{2} & n, m \quad \textit{even}. \end{cases}$$

さらに，M_n, L_n に付随する *Flow* は解析的に表すことができる．

$$\exp(tM_n)(x) = \left(x_1 \exp(2x_{2+}^{-\frac{n}{2}} t), x_2\right),$$

$$\exp(tL_n)(x) = \left(x_1, \left(nt + x_{2+}^{\frac{n}{2}}\right)_+^{\frac{2}{n}}\right).$$

Outline

1. SDE のベクトル場の代数的性質
2. 高次離散スキーム (KLNV 法) への応用
3. 数値計算

問題設定

- $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^N)$ に対し，$(P_T f)(x) = E[f(X(T,x))]$ をモンテカルロ法で高速，高精度に計算したい.
- 確率微分方程式 (1) の解が解析的に求まる場合は $X(T,x)$ のサンプル $\bar{X}_m(T,x)$ を発生させて $\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} f(\bar{X}_m(T,x))$ を計算すればよい
- 擬似乱数を使った場合 $O(M^{-1/2})$, 準乱数を使った場合 $O(M^{-1})$ の誤差が生じる
- 確率微分方程式 (1) の解が解析的に求まらない場合，区間 $[0,T]$ を n 分割 $0 < \frac{1}{n}T < \ldots < \frac{n-1}{n}T < T$ として，(1) を離散時点で近似する．$(\bar{X}^n(\frac{k}{n}T,x))_{k=1}^n$．この時生じる離散誤差が n の何乗のオーダーになるかを議論したい. (弱近似)

$$|E[f(X(T,x)] - E[f(\bar{X}^n(T,x))]| = O(n^{-\alpha})$$

Euler-Maruyama 法

最も単純でよく使われる方法：Euler-Maruyama 法
(Z_k^i) 標準正規乱数の列

$$\bar{X}^{EM}(\frac{k+1}{n}T,x)) = \bar{X}^{EM}(\frac{k}{n}T,x)) + \tilde{V}_0(\bar{X}^{EM}(\frac{k}{n}T,x))\frac{T}{n}$$

$$+\sum_{i=1}^{d} V_i(\bar{X}^{EM}(\frac{k}{n}T,x)))\sqrt{\frac{T}{n}}Z_{k+1}^i$$

Euler-Maruyama スキームは 1 次の弱近似であることが知られている．

$$|E[f(X(T,x)] - E[f(\bar{X}^{EM}(T,x))]| = O(n^{-1})$$

KLNV(Kusuoka, Lyons, Ninomiya, Victoir) 法

$\mathcal{L}^V$: $(\{V_0, \ldots, V_d\}, [\cdot, \cdot])$ で生成される Lie algebra
$\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots, \xi_k(t))$: ランダムな係数を持つ $\mathcal{L}^V$ の元の列
このとき，次のようにランダムな係数を持つベクトル場に対する Flow を用いて近似を構成する．

$$(Q_t^{(K)} f)(x) = E[f(\exp(\xi_1(t)) \circ \cdots \circ \exp(\xi_k(t))(x))]$$

このとき，$\xi(t)$ が自然数 m に対応するある条件を満たすとき，1 step による誤差は次のように評価される．

$$\|(P_t f)(x) - (Q_t f)(x)\|_\infty \leqq C t^{\frac{m+1}{2}}.$$

n step による離散誤差は次のようになる．

$$\|(P_T f)(x) - ((Q_{T/n})^n f)(x)\|_\infty \leqq C n^{-\frac{m-1}{2}}.$$

KLNV 法具体的アルゴリズム

- Ninomiya-Victoir (NV) Scheme ($(Z_i) \sim N(0,1)$, i.i.d)

$$
\begin{aligned}
&(Q_t^{(NV)} f)(x) \\
=&\frac{1}{2} E[f(\exp(\frac{t}{2}V_0) \circ \exp(\sqrt{t} Z_1 V_1) \circ \cdots \circ \exp(\sqrt{t} Z_d V_d) \circ \exp(\frac{t}{2} V_0)(x))] \\
+&\frac{1}{2} E[f(\exp(\frac{t}{2}V_0) \circ \exp(\sqrt{t} Z_d V_d) \circ \cdots \circ \exp(\sqrt{t} Z_1 V_1) \circ \exp(\frac{t}{2} V_0)(x))]
\end{aligned}
$$

- Ninomiya-Ninomiya (NN) Scheme ($(Z_i^j) \sim N(0,1)$ i.i.d, $r \in [0,1]$)

$$
\begin{aligned}
&(Q_t^{(NN)} f)(x) \\
&=E[f(\exp(rtV_0 + \sum_{i=1}^{d} S_i^1 \sqrt{t} V_i) \circ \exp((1-r)tV_0 + \sum_{i=1}^{d} S_i^2 \sqrt{t} V_i)(x))]
\end{aligned}
$$

$S_i^1 = rZ_i^1 + \frac{1}{\sqrt{2}} Z_i^2$, $S_i^2 = (1-r)Z_i^1 - \frac{1}{\sqrt{2}} Z_i^2$

- NV, NN Scheme は共に $m = 5$, すなわち 2 次の弱近似になる.

- Shinozaki Scheme $m=7$, すなわち 3 次の弱近似になる.

$m=7, d=2$ の楠岡近似の作用素

2014/6/8 篠崎

$\eta_\alpha (\alpha \in A^*)$ を全て独立な標準正規乱数として、

$$
\begin{aligned}
Q^{(7,2)}_{(s)} = \exp\Bigg(& (\eta_1 V_1 + \eta_2 V_2)\sqrt{s} + \Big(V_0 + \frac{1}{2\sqrt{3}}(\eta_{02}\eta_1 + \eta_{01}\eta_2 + \eta_{12})[V_1, V_2]\Big)s \\
& + \Big(\frac{-\eta_{01}}{2\sqrt{3}}[V_0, V_1] + \frac{\eta_{02}}{2\sqrt{3}}[V_0, V_2] + \frac{\eta_2 + 2\eta_{112}}{12}[V_1, [V_1, V_2]] \\
& \qquad + \frac{\eta_1 + 2\eta_{122}}{12}[[V_1, V_2], V_2]\Big)s^{\frac{3}{2}} \\
& + \Big(\frac{1}{12}[[V_0, V_1], V_1] + \frac{1}{12}[[V_0, V_2], V_2] \\
& \qquad + \frac{(\eta_{02}\eta_1 + \eta_{01}\eta_2 + \eta_{12})}{36\sqrt{3}}([V_1, [V_1, [V_1, V_2]]] + [[[V_1, V_2], V_2], V_2])\Big)s^2 \\
& + \Big(\frac{\eta_2}{360}[V_1, [V_1, [V_1, [V_1, V_2]]]] + \frac{\eta_1}{360}[V_1, [V_1, [[V_1, V_2], V_2]]] + \frac{\eta_1}{120}[[V_1, [V_1, V_2]], [V_1, V_2]] \\
& \qquad + \frac{\eta_2}{360}[V_1, [[[V_1, V_2], V_2], V_2]] + \frac{\eta_2}{90}[[V_1, V_2], [[V_1, V_2], V_2]] + \frac{\eta_1}{360}[[[[V_1, V_2], V_2], V_2], V_2]\Big)s^{\frac{5}{2}} \\
& + \Big(\frac{1}{360}[[[[V_0, V_1], V_1], V_1], V_1] + \frac{1}{360}[[[[V_0, V_2], V_2], V_2], V_2] + \frac{1}{180}[V_0, [V_1, [[V_1, V_2], V_2]]] \\
& \qquad + \frac{1}{60}[[V_0, [V_1, V_2]], [V_1, V_2]] + \frac{1}{120}[[V_0, [[V_1, V_2], V_2]], V_1] + \frac{1}{120}[[V_0, V_2], [V_1, [V_1, V_2]]] \\
& \qquad + \frac{1}{90}[[[V_0, V_2], [V_1, V_2]], V_1] + \frac{1}{180}[[[[V_0, V_2], V_2], V_1], V_1]\Big)s^3\Bigg).
\end{aligned}
$$

＊一部は Takanobu 公式、一部は群での連立方程式を解く事で作用素を作った。Takanobu 公式を部分的にコンピュータ上で計算する事で作ったが、手計算の部分も含まれている。そのため、手で検算をした。煩雑な計算ではあるものの、おそらく合っていると思われる。

KLNV 法の特徴

- ランダムな係数を持つベクトル場に対する Flow で表される
- Flow は通常 Runge-Kutta 法などの数値計算で求められる．
- Flow が解析的に計算できる場合には，高速計算が可能
- Heston モデルで NV Scheme を用いる場合，Flow が解析的に計算できる．
- SABR モデルで NV Scheme を用いる場合，drift 付き Brown 運動を導入すると，解析的に計算できる (Bayer-Friz-Loeffen, 2013)
- 今回の提案する手法：ベクトル場が Witt Property を持つ基底で表されるモデル（Heston，SABR etc) の場合，任意の Scheme で解析的に計算可能

主定理

代数的性質と Flow の解析的な表現を利用

- KLNV 法の Flow を W で書き直す $\exp(\xi_i(t)) = \exp(\sum_i a_i(t)W_i)$.
- $\exp(\sum_i a_i(t)W_i)$ を $\exp(P_k(t)W_k) \circ \cdots \circ \exp(P_0(t)W_0)$ と解析的な計算が実行できる形に分解する．
- 以下の定理により，精度を落とさずに，分解ができることがわかる

Theorem (M, Sasada)

任意の $m \geq 1$ とランダムな $\sqrt{t}$ の関数を係数に持つ $\mathcal{L}^V$ の元の列 $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\ell)$ に対し，ある $m_\ell \in \mathbb{N}$ とランダムな係数を持つ $\sqrt{t}$ の関数 $(P_0, P_1, \ldots, P_{m_\ell})$ が存在し，任意の $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^N), t \in (0,1]$ に対し，ある $C_{f,m,W} > 0$ が存在し次が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
&|E[f(\exp(\xi_1(t))) \circ \exp(\xi_2(t))) \circ \cdots \circ \exp(\xi_\ell(t)))(x))] \\
-&E[f(\exp(P_{m_\ell}(t)W_{m_\ell}) \circ \cdots \circ \exp(P_1(t)W_1) \circ \exp(P_0(t)W_0)(x))]| \\
\leq& C_{f,m,W} t^{\frac{m+1}{2}}
\end{aligned}
$$

証明の概略

- 以下の微分作用素としての式を示す.

$$\exp(\sum_i a_i(t)W_i) = \exp(P_1(t)W_1)\dots\exp(P_{m_\ell}(t)W_{m_\ell}) + O(t^{(m+1)/2})$$

- Free Lie algebra に関する Zassenhause の公式

$$\exp(\lambda(z_1+\cdots+z_n)) = \exp(\lambda z_1)\dots\exp(\lambda z_n)\times$$
$$\times\exp(\lambda^2 C_2(z_1,\dots,z_n))\dots\exp(\lambda^k C_k(z_1,\dots,z_n))\dots$$

  $C_k(z_1,\dots,z_n)$ は k 次の斉次 Lie 多項式
- $z_i = a_i(t)W_i$ として使う.
- Witt Property から, k 次の Lie 多項式に含まれる Lie 括弧積は $W_i, i \geq k$ の形で表される.
- exp 中身は，Lie 多項式の次数の増加と共に，t に関するオーダーも増加していく．$\exp(C_k(a_1W_1,\dots,a_nW_n)) = \exp(O(t^{k'}))$
- k 次近似を考える際，$\exp(o(t^k))$ は無視する ($\exp(o(t^k)) = 1+o(t^k)$)

具体的な P の計算

Zassenhause の公式の具体的な Lie 多項式の計算には効率的なアルゴリズムが知られている

Cases, F., Murua,A., Nadinic,M. Efficient Computation of the Zassenhaus formula, Computer Physics Communications (2012)

- この手法を今回の場合に応用して，具体的な P の表示を得た.

$$P_0(\mathbf{a}) = a_0, \quad P_1(\mathbf{a}) = \frac{a_1}{a_0}(\exp(a_0)-1), \quad P_2(\mathbf{a}) = \frac{a_2}{2a_0}(\exp(2a_0)-1),$$

$$\begin{aligned} P_3(\mathbf{a}) =& \frac{\exp(a_0)-1}{6a_0^2}(-a_1a_2 - \exp(a_0)a_1a_2 + 2\exp(2a_0)a_1a_2 \\ & + 2a_0a_3 + 2\exp(a_0)a_0a_3 + 2\exp(2a_0)a_0a_3), \\ P_4 =& \ldots . \end{aligned}$$

Outline

1. SDE のベクトル場の代数的性質
2. 高次離散スキーム (KLNV 法) への応用
3. 数値計算

数値計算

SABR モデル (2) で

$$E[(X(T) - K)_+]$$

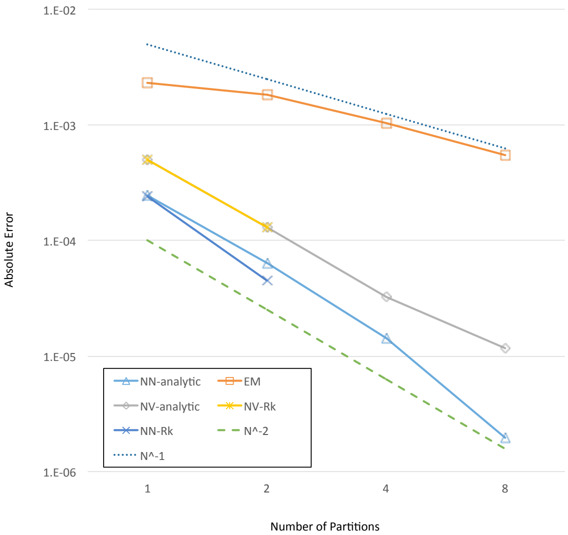
を計算する．パラメータは
$T = 1.0, K = 1.05, \beta = 0.9, \nu = 0.4, \rho = -0.7, x = (1.0, 0.3)$ とする．この時，真値は 0.09400046 とする (Bayer-Friz-Loeffen の論文による).
モンテカルロ法のシミュレーション回数を 10^7 回として, 離散グリッドの分割数を $2^n, n = 0, 1, 2, \ldots$ とした時の真値との絶対誤差と，計算時間の観測を行った.

数値計算

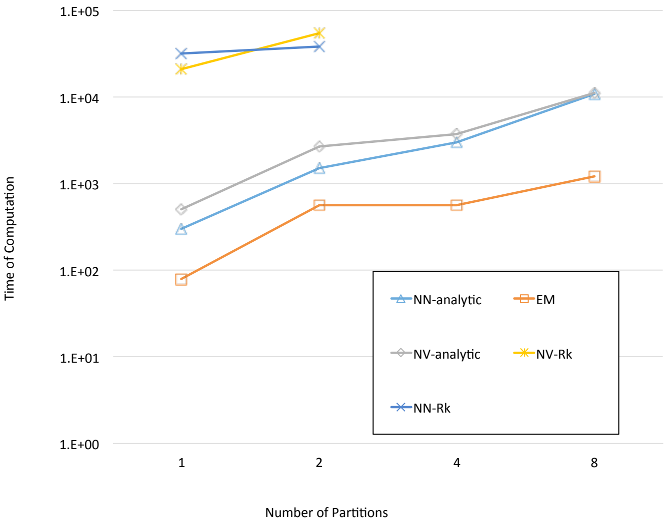
- NN-Analytic: Ninomiya-Ninomiya Scheme を代数構造を使って解析的にシミュレーションしたもの
- NN-Rk: Ninomiya-Ninomiya Scheme を Runge-Kutta 法でシミュレーションしたもの
- NV-Analytic: Ninomiya-Victoir Scheme を代数構造を使って解析的にシミュレーションしたもの
- NV-Rk: Ninomiya-Victoir Scheme を Runge-Kutta 法でシミュレーションしたもの
- EM: Euler-Maruyama 法

Runge-Kutta 法には 17 段 10 次 (8 次が埋め込まれてる) 陽的 Runge-Kutta 法を用いた．http://sce.uhcl.edu/rungekutta/

離散誤差


1.E-02
1.E-03
1.E-04
1.E-05
1.E-06
Absolute Error
1
2
4
8
Number of Partitions
NN-analytic
EM
NV-analytic
NV-Rk
NN-Rk
N^-2
N^-1

計算時間


1.E+05
1.E+04
1.E+03
1.E+02
1.E+01
1.E+00
Time of Computation
1
2
4
8
Number of Partitions
NN-analytic
EM
NV-analytic
NV-Rk
NN-Rk

まとめ

- SABR モデルや Heston モデルはベクトル場の基底をうまくとることにより，Lie 括弧積の計算が非常に簡単になる．
- 新しくとった基底のベクトル場の Flow は解析的に求めることができる．
- 今回の結果を用いることで，KLNV 法を用いたどのようなスキームに対しても，精度を変えずに，解析的に計算できる．
- 数値的にも精度を保つことと計算速度の向上を確認