

# XVA and its Greeks Calculation

森本 裕介

三菱 UFJ 銀行

2018/11/23 - 11/25

第 6 回 数理ファイナンス合宿型セミナー

本講演の内容は発表者個人に属し所属する組織の公式見解を示すものではない。

# Contents

- Definition of XVA
  - Introduction
  - Semi-Replication
- Calculation of XVA
  - XVA の計算法
  - Implicit 法
- Greeks calculation of XVA
  - XVA Greeks の計算法
  - Freezing 法
  - Automatic Differentiation (AD)

## Definition of XVA

- $V$  : 従来のデリバティブの価値
  - Counter party default risk を考慮しない
  - 自社の default risk を考慮しない
  - 自社の Funding コストを考慮しない
  - 担保の cash flow を考慮しない (考慮したとしても完全担保)
- $\hat{V}$  : 上記に付随する金利のスプレッドや Cash flow を考慮したデリバティブの価値

$$\hat{V} = V + U,$$

$$U = \sum_{X=C,D,F,M,\dots} \textcolor{red}{X}VA$$

- CVA: counterparty credit risk adjustment
- DVA: Own credit risk adjustment
- FVA: Funding cost
- MVA: Initial Margin cost

- $\hat{V}, U$  の導出
  - Piterburg(2010): Replication theory を使った FVA の導出
  - Burgard and Kjaer(2011, 2013), Kjaer(2017): Semi-Replication による XVA の定式化 (Quant of the year 2015)
  - Green, Knyon(2014, 2015): Semi-Replication に基づく KVA, MVA 等の導入
  - その他の定式化 : Fuji and Takahashi(2011), Kusuoka(2012), Takada(2014)
- XVA(FVA) の定義をめぐる議論
  - Hull-White(2012, 2013)
    - Pricing は Funding と切り離して行われるべき
    - Modigliani-Millar の定理: 企業価値は Funding strategy に依存しない
  - Albanese and Andersen(2015)  
バランスシートを使った議論、株主価値と企業価値の導入
  - Kjaer(2017)  
Semi Replication を使った株主価値と企業価値の解釈

## Semi Replication

Semi-Replication の概要 (Burgard-Kjaer 2013, Kjaer 2017)

- Setting

- $X$  : spot asset price  $dX = \mu^X X dt + \sigma^X X dW_X$ ,
- $P^B, P^C$ : bank and counterparty **defaultable** bond

$$dP^* = r^* P^*(t-)dt - (1 - R^*)P^*(t-)dJ^*, * = B, C$$

- $\beta^*$  : asset and counterparty bond repo account

$$d\beta^* = \gamma^* \beta^* dt, * = X, C$$

- スプレッドの関係,  $r$  : risk free rate

$$r^* = r + s^*, s^* = (1 - R^*)\lambda^*, * = B, C$$

- $C = C^V + C^I$  : collateral (Variation margin, initial margin)
- $r_{C^V}, r_{C^I}$  : collateral rates

Bank から見た Derivative の価値  $\hat{V}$

$$\hat{V} = \hat{V}(t, X, J^B, J^C),$$

$$\hat{V}(T, X, 0, 0) = H(X),$$

$$\hat{V}(t, X, 1, 0) = g^B, \hat{V}(t, X, 0, 1) = g^C.$$

Hedging portfolio value  $\Pi$

$$\Pi = \theta^X X + \theta^B P^B + \theta^C P^C + \phi^X \beta^X + \phi^C \beta^C - C^V + C^I,$$

Hedge asset は Repo 調達を仮定

$$\theta^X X + \phi^X \beta^X = 0, \theta^C P^C + \phi^C \beta^C = 0,$$

Replication(Funding condition)

$$\hat{V} = \Pi$$

$$\Leftrightarrow \hat{V} + \theta^B P^B - C^V + C^I = 0.$$

Self-financing condition

$$d\Pi = \theta^X dX + \theta^B dP^B + \theta^C dP^C + \phi^X d\beta^X + \phi^C d\beta^C - dC^V + dC^I,$$

The dynamics of Hedge portfolio  $\hat{V} + \Pi$

$$\begin{aligned} d(\hat{V} + \Pi) &= (\theta^X + \frac{\partial \hat{V}}{\partial X})dX \\ &+ \{(\partial_t + \frac{1}{2}\sigma_X^2 X^2 \partial_X^2)\hat{V} + \theta^B r^B P^B + \theta^C r^C P^C \\ &\quad - \theta^C \gamma^C P^C - \theta^X \gamma^X X - r^V C^V - r^I C^I\}dt \\ &+ (g^B - \hat{V} - \theta^B P^B)dJ^B + (g^C - \hat{V} - \theta^C P^C)dJ^C \end{aligned}$$



Market risk と Counterparty credit risk は**完全** hedge

- $\theta^X = -\frac{\partial \hat{V}}{\partial X}$
- $\theta^C P^C = g^C - \hat{V}$

Own default risk は**消せない** (Funding condition)

- $g^B - \hat{V} - \theta^B P^B = g^B - C^V + C^I := \epsilon^h$
- **自社が** default **した場合**、cash flow **が生じる**

The dynamics of Hedge portfolio  $\hat{V} + \Pi$

$$d(\hat{V} + \Pi)$$

$$= \left\{ \left( \partial_t + \frac{1}{2} \sigma_X^2 X^2 \partial_X^2 + \gamma^X X \partial_X \right) \hat{V} + \theta^B r^B P^B + \lambda^C (g^C - \hat{V}) \right\} dt \\ + \epsilon^h dJ^B$$

$$= \left\{ \left( \partial_t + \frac{1}{2} \sigma_X^2 X^2 \partial_X^2 + \gamma^X X \partial_X \right) \hat{V} + \theta^B r^B P^B + \lambda^C (g^C - \hat{V}) + \epsilon^h \lambda^B \right\} dt \\ + \epsilon^h (dJ^B - \lambda^B dt)$$

## Derivative の価値とは

- 将来の CF の現在価値
- Corporate Finance の考え方
  - 株主価値: 負債は考慮しない
  - 企業価値: 負債まで込める
- Derivative の価値
  - 株主価値: 自社の default 以前まで完全にヘッジ出来るようなもの
  - 企業価値: 自社の default による CF の回収による収益の期待値まで込めてヘッジ出来るようなもの

$V_{CV}$  : Collateral(VM) rate discount **の従来の** derivative 価値

$$\hat{V} = V_{CV} + U,$$

Semi-Replication 1 (株主価値): **自社の** default risk **意外を全て** hedge

$$U = CVA + FVA + MVA$$

$$CVA = -E\left[\int_0^T \lambda_C(t) D^{r^B + \lambda_C} (V_{CV} - g^C) dt\right]$$

$$FVA = -E\left[\int_0^T (r^B - r_{CV}) D^{r^B + \lambda_C} (V_{CV} - C^V) dt\right]$$

$$MVA = -E\left[\int_0^T (r^B - r_{CI}) D^{r^B + \lambda_C} C^I dt\right]$$

- FVA が陽に表れる
- Discount は Funding rate

Semi-Replication 2(企業価値) : Martingale Part 以外をすべて hedge

$$U = CVA + DVA + VMVA + VMVA + IMVA$$

$$CVA = -E\left[\int_0^T \lambda_C(t) D^{r+\lambda_B+\lambda_C} (V_{CV} - g^C) dt\right]$$

$$DVA = -E\left[\int_0^T \lambda_B(t) D^{r+\lambda_B+\lambda_C} (V_{CV} - g^B) dt\right]$$

$$VMVA = -E\left[\int_0^T (r - r_{CV}) D^{r+\lambda_B+\lambda_C} (V_{CV} - C^V) dt\right]$$

$$IMVA = -E\left[\int_0^T (r - r_{CI}) D^{r+\lambda_B+\lambda_C} C^I dt\right]$$

- FVA は陽に現れない
- MM 定理にも矛盾しない
- Discount は Collateral Rate + hazard rate による調整

## Summary of Definition of XVA

- Semi Replication の紹介と、定義をめぐる議論の解釈
- 株主価値と企業価値それぞれの立場による XVA の表現
- Discount の仕方も異なる

## Calculation of XVA

- Counterparty c に対する XVA は概ね以下のような計算になる.

$$\text{XVA} = E \left[ \int_0^T s(t) D(t) \left( \sum_k V_k(t) - C(t) \right)^{(+)} dt \right]$$

- $V_k(t)$  : 取引 k の Exposure( $t$  時点の時価)

$$V_k(t) = E \left[ \sum_{t_i > t} D(t, t_i) F_k(t_i, X(t_i)) | \mathcal{F}_t \right]$$

- $D(s, t)$  :  $[s, t]$  間の discount
- $s$  : spread
- $C$  : collateral, VM + IM

## 実際の計算は大きく 3 つに大別できる

- Approximate Exposure function

$V_k$  を原資産の関数として、その関数系を計算する。

$$\tilde{V}_k : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R},$$

$$V_k(t) \approx \tilde{V}_k(X(t))$$

- Netting

$\tilde{V}_k$  を counterparty(netting set) 毎に分ける。

Net **された** Exposure  $\tilde{V} = \sum_k \tilde{V}_k$  を計算する。

- Aggregation

- $\tilde{V}(X(t))$  から、Collateral  $\tilde{C}$  を計算。

- collateral 勘案後の Exposure に spread をかけて積分を実施。

$$E \left[ \int_0^T D(t)s(t) \left( \tilde{V}(X(t)) - \tilde{C}(t) \right) dt \right].$$



## Collateral 計算法

- VM(Variation Margin)

- $H$ : Threshold. Exposure **がこの額を超えていないと担保なし。**
- $M$ : MTA(minimum transfer amount). **追加差入担保の最低額。**
- $\delta$ : MPOR(mergin period of risk). Default **時点の宣言までの猶予期間**. e.g. 14day.

$$C(t) = (V(t - \delta) - H)^+ 1_{\{V(t-\delta)-H>M\}}$$

- IM(Initial Margin)

- MPOR **期間の Gap Risk をカバーする。** e.g. 10day 99% Var.
- CCP(central counter party) や、SIMM(standard initial margin model) **ごとに Greeks を使った Var の近似公式が決められている。**

$$IM(t) = \sum \phi_{i,j} \frac{\partial V(t)}{\partial X^i(t)} \frac{\partial V(t)}{\partial X^j(t)}$$

# XVA の数値計算手法

- 大量の risk factor, product の計算を同時に行う必要があるため (Netting), Monte-Carlo 法が通常使われる。
- Exposure 計算には American Monte Carlo 法が使われる。多くの場合、LSM(Least square monte carlo) が用いられる。

$$\tilde{V}(x) = \sum_{i=1}^n a_i \phi_i(x), \quad \phi_i : \text{polynomial}.$$

- LSM のメリット
  - 計算が高速かつ汎用的: model や商品性によらず、一律に適応できる
  - Data がシンプルになる: 複雑な取引情報を多項式の係数で表現できる
  - Netting が容易: path を発生させなくても、多項式の係数の和で netting できる。
- LSM のデメリット
  - 近似精度の問題

# Implicit method

無担保の場合は、Exposure の近似精度を向上させる

$$\begin{aligned} XVA &= E \left[ \int_0^T D(t)s(t) \left( \sum_{k \in N_j(c)} V_k(t) \right)^+ dt \right] \\ &= E \left[ \int_0^T D(t)s(t) \left( \sum_{k \in N_j(c)} F_k(t_k, X(t_k)) \right) 1_{\{\sum_{k \in N_j(c)} V_k(t) \geq 0\}} \right] \\ &\approx E \left[ \int_0^T D(t)s(t) \left( \sum_{k \in N_j(c)} F_k(t_k, X(t_k)) \right) 1_{\{\sum_{k \in N_j(c)} \tilde{V}_k(t) \geq 0\}} \right] \end{aligned}$$

- Exposure の近似は正負の符号判定のみに用いられる。
- 値がどんなに離れていても符号さえ正しければ、誤差は発生しない。

## Implicit 法の誤差評価 (Morimoto.2015)

- $\tilde{V}$  として、Stochastic mesh を用いる

$$\tilde{V} = (Q_{t_i, T_k, \varepsilon}^{(k, L, \omega)} F_k)$$

- Explicit 法

$$\hat{c}_1(\omega) = E^\mu \left[ \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \left\{ \left( \sum_{k: T_k \geq t_{i+1}} (Q_{t_i, T_k, \varepsilon}^{(k, L, \omega)} F_k) (\pi_k X(t)) \vee 0 \right) \right\} \right]$$

- Implicit 法

$$\hat{c}_2(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) E^\mu \left[ \left( \sum_{k: T_k \geq t_{i+1}} F_k (\pi_k X(T_k)) \right) 1_{\left\{ \sum_{k: T_k \geq t_{i+1}} (Q_{t_i, T_k, \varepsilon}^{(k, L, \omega)} F_k) (\pi_k X(t_i)) \geq 0 \right\}} \right].$$

$$|\hat{c}_1(\omega) - c_0| \leq C_{p,\delta} L^{-\frac{3/2(1-\delta)^2}{2+(1+\delta)(\tilde{N}+1)\ell_0/2}},$$

for any  $\omega \in \Omega_L$  and  $L \geq 1$ . If there exists  $\gamma \in (0, 1]$  such that

$$\int_0^T E^\mu[1_{|\sum_{k:T_k \geq t_{i+1}} (P_{T_k-t}^{(k)} F_k)(\pi_k(X(t)))| \leq \theta}] dt = O(\theta^\gamma), \text{ as } \theta \downarrow 0,$$

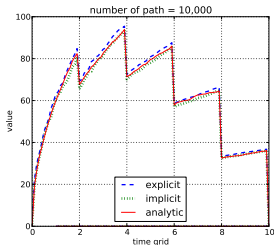
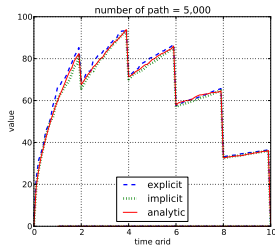
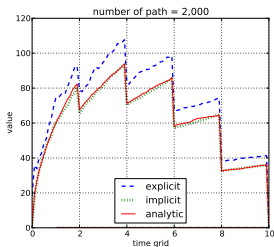
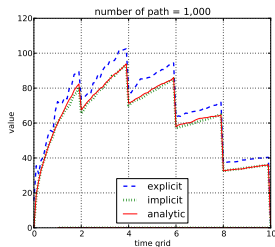
$$|\hat{c}_2(\omega) - c_0| \leq C_{p,\delta} L^{-\frac{3(\gamma+1)(1-\delta)^2}{(\gamma+2)(2+(1+\delta)(\tilde{N}+1)\ell_0/2)}},$$

**特に  $\gamma = 1$  の場合、**

$$|\hat{c}_1 - c_0| \leq C_{p,\delta} L^{-\frac{3(1-\delta)^2}{2(2+(1+\delta)(N+1)\ell_0/2)}}$$

$$|\hat{c}_2 - c_0| \leq C_{p,\delta} L^{-\frac{3(1-\delta)^2}{2+(1+\delta)(N+1)\ell_0/2}}$$

Numerical example.  $X(t) = x_0 \exp(\sigma B_t + -1/2\sigma^2 t)$ ,  $F_k(x) = x - x_0$ ,  $T_k = 2, 4, 6, 8, 10$ ,  $\sigma = 0.3$



# Summary of Calculation of XVA

- **XVA の計算は通常 American Monte Carlo 法が使われる**
- **担保がない場合 Implicit 法を用いる事で精度が改善する**
- **担保計算は Threshold, MTA などの影響により path dependent な複雑な計算になる**

## Calcualtion of XVA Greeks



XVA は多くの Market Sensitivity(Greeks) を持っている。

- IR
  - 金利スワップ (JPY 6m roll IRS, 1Y, 2Y, ...)
  - Tenor basis swap (JPY 3m roll IRS, JPY 3m roll IRS, ...)
  - 通貨スワップ (USD LIBOR vs JPY LIBOR +  $\alpha$ )
- IR Vol
  - Option 満期  $\times$  Swap Tenor
- FX
- FX Vol
- Inflation Swap, CDS, etc.

基本的には Greeks 計算は有限差分法を使って求める。

$$Greeks(\theta) = \frac{XVA(\theta + \epsilon) - XVA(\theta - \epsilon)}{2\epsilon}$$

# XVA Greeks 計算 Technique

愚直に差分を一つ一つ計算する以外に、以下のような Technique が提案されている。

- Freezing method
  - $XVA(\theta + (-)\epsilon)$  を計算する際に、Regression の結果は  $XVA(\theta)$  のものを使い回す方法
- Automatic Differentiation
  - 関数を関数を計算する際に、微分も同時に求められるような実装テクニック
  - Neural Network のパラメータにも広く利用されている (Back Propagation)

# Freezing 法の検証

## Setting

- Greeks parameter:  $\theta = x_0$  or  $\sigma$
- model : BS model :  
$$dX(t, \theta) = X(t, \theta)(\mu dt + \sigma dW(t)), \quad X(0, \theta) = x_0.$$
- Pay off function :  $F(x) = (x - K_1)^+ - K_2$ .
- Exposure:

$$V(x, \theta) = E[F(X(T, \theta)) | X(t, \theta) = x]$$

- Approximated Exposure:  $\tilde{V}(x, \theta) \approx V(x, \theta)$
- $EPE(t) = E[V(X(t))^+]$

## Parameters

- $x_0 = 100, K_1 = 100, K_2 = 30, T = 10, t = 5, \mu = 0, \sigma = 0.3$

## 近似手法

- Explicit 法、Non Freezing

$$D_{NF}^{exp} = \frac{E[\tilde{V}(X(t, \theta + \epsilon), \theta + \epsilon)^+] - E[\tilde{V}(X(t, \theta - \epsilon), \theta - \epsilon)^+]}{2\epsilon}$$

- Explicit 法、Freezing

$$D_F^{exp} = \frac{E[\tilde{V}(X(t, \theta + \epsilon), \theta)^+] - E[\tilde{V}(X(t, \theta - \epsilon), \theta)^+]}{2\epsilon}$$

- Implicit 法、Non Freezing

$$D_{NF}^{exp} = (E[F(X(T, \theta + \epsilon))1_{\{\tilde{V}(X(t, \theta + \epsilon), \theta + \epsilon) > 0\}}] - E[F(X(T, \theta - \epsilon))1_{\{\tilde{V}(X(t, \theta - \epsilon), \theta - \epsilon) > 0\}}]) / (2\epsilon)$$

- Implicit 法、Freezing

$$D_{NF}^{exp} = (E[F(X(T, \theta + \epsilon))1_{\{\tilde{V}(X(t, \theta + \epsilon), \theta) > 0\}}] - E[F(X(T, \theta - \epsilon))1_{\{\tilde{V}(X(t, \theta - \epsilon), \theta) > 0\}}]) / (2\epsilon)$$

## Explicit 法を用いた Freezing method

Table: Test result of Delta

method	mean	stdev
analytic	5.83	0.13
Non Freezing	5.39	0.37
Freezing	5.02	0.63

Table: Test result of Vega

method	mean	stdev
analytic	1100.26	183.85
Non Freezing	1208.47	206.66
Freezing	822.14	172.29

Delta は Freezing しても大差ないが、Vega は Freezing すると誤差が大きい

## Test 結果の分析 (Explicit 法)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} E[V(X(t, \theta), \theta)^+] &= E[1_{\{V(X(t, \theta), \theta) \geq 0\}} \frac{\partial}{\partial \theta} V(X(t, \theta), \theta)] \\ &= E[1_{\{V(X(t, \theta), \theta) \geq 0\}} \left( \frac{\partial V}{\partial x_1}(X(t, \theta), \theta) \frac{\partial X(t, \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial x_2}(X(t, \theta), \theta) \right)] \end{aligned}$$

- $\theta = x_0$  の場合、 $\frac{\partial V}{\partial x_2}(X(t, \theta), \theta) = 0$  なので、 $\theta$  変化後に Regression を再度やる必要はなかった。
- $\theta = \sigma$  の場合、 $\frac{\partial V}{\partial x_2}(X(t, \theta), \theta) \neq 0$  なので、 $\theta$  変化後に Regression をやり直さないと大きな誤差が生じる
- 一般に Markov 過程でモデル化された原資産の初期値パラメータに関する Greeks であれば、Freezing の誤差はないが、そうでない場合は Freezing により誤差が生じうる。

$$E[f(X(T, x_0)) | \mathcal{F}_t] = (P_{t,T} f)(x)|_{x=X(t, x_0)}$$

## Implicit 法を用いた Freezing method

Table: Test result of Delta

method	mean	stdev
analytic	5.83	0.13
Non Freezing	5.51	0.37
Freezing	5.51	0.37

Table: Test result of Vega

method	mean	stdev
analytic	1100.26	183.35
Non Freezing	1075.87	182.32
Freezing	1075.87	182.32

Implicit method を使った場合、Delta も Vega もうまくいっている

## Test 結果の分析 (Explicit 法)

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial \theta} E[F(X(T, \theta)) 1_{\{V(X(t, \theta), \theta) \geq 0\}}] \\
 &= E\left[\frac{\partial F}{\partial x}(X(T, \theta)) \frac{\partial X(t, \theta)}{\partial \theta} 1_{\{V(X(t, \theta), \theta) \geq 0\}}\right] \\
 &+ E[F(X(T, \theta)) \delta_0(V(X(t, \theta), \theta)) \frac{\partial V}{\partial x_2}(X(t, \theta), \theta)]
 \end{aligned}$$

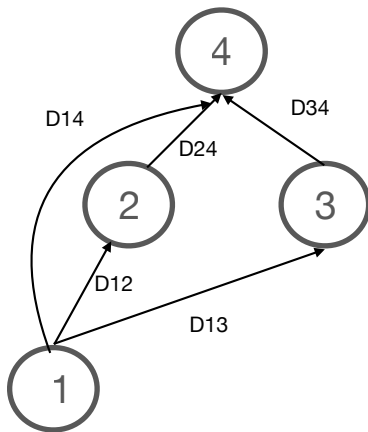
第二項目が Exposure 関数自体の  $\theta$  に関する変動を含んだ式になっている。ただし、次のように変形すると 0 になることがわかる。

$$\begin{aligned}
 (\text{第二項}) &= E[E[F(X(T, \theta)) | \mathcal{F}_t] \delta_0(V(X(t, \theta), \theta)) \frac{\partial V}{\partial x_2}(X(t, \theta), \theta)] \\
 &= E[V(X(t, \theta), \theta) \delta_0(V(X(t, \theta), \theta)) \frac{\partial V}{\partial x_2}(X(t, \theta), \theta)] = 0.
 \end{aligned}$$



## Automatic Differentiation の仕組み

- 基本的な関数の合成を計算グラフで表現し、プログラム内にその構造を保持
- 基本的な関数の微分は既知なので、その関数もプログラムしておく
- 最終的に得られる関数は基本関数の合成なので、Tree をたどって、各ノードの微分を掛け合わせて行くことが、Chain rule に対応しており、最終的な Greeks が求められる



$$\frac{dx_4}{dx_1} = D14 + D12 * D24 + D13 * D34$$

## XVA 計算における AD のメリット、デメリット

- メリット

- 通常の値の計算の数倍 (10 未満?) で大量の Greeks 計算が可能
- 解析的な微分をしているので、差分法のようなバイアスがない

- デメリット

- 大量のメモリが必要
- On memory で一気通貫で計算しないと厳しい。途中で中間データを出力しながらだと、巨大なヤコビ行列を計算する必要がある。
- 途中で滑らかでない関数が入ると一気に依存するポイントの Greeks がおかしくなる
- path ごとの微分を行なっていくので、熱核で積分して滑らかになる要素が含まれていない

$$E[F(X(t, x))] = (P_t F)(x)$$

## AAD の最近の進展

- Tree の縮約技術の進展
- Stochastic AAD (Flies)  
確率変数のツリーを作る (path のベクトル)
- MVA への応用

$$MVA = E\left[\sum \phi_{i,j} \frac{\partial V(t)}{\partial X^i(t)} \frac{\partial V(t)}{\partial X^j(t)}\right]$$

$$E\left[\sum \phi_{i,j} E\left[\frac{\partial F(X(T))}{\partial X^i(t)} \middle| \mathcal{F}_t\right] E\left[\frac{\partial F(X(T))}{\partial X^j(t)} \middle| \mathcal{F}_t\right]\right]$$

- 条件付期待値の中身

## Summary of Greeks calculation of XVA

- XVA の Greeks の効率的な計算法として、Freezing 法と AD の紹介
- Freezing は以下の場合うまくいく
  - Markov 過程でモデル化された原資産の初期値パラメータに関する Greeks
  - Implicit 法を用いた場合