Image Deformation Using Moving Least Squares 阅读笔记

张建伟

2017 年 8 月 16 日

1 Moving Least Squares Deformation

- p: 一列控制顶点.
- q: 控制顶点变换后的坐标.

给定图上的一点 v, 求解一个最优的仿射变换来最小化

$$\sum_i w_i |l_v(p_i) - q_i|^2, \tag{1}$$

其中 p_i 和 q_i 都是行向量, 每行的分量为点的坐标, 权重 w_i 有如下的形式

$$w_i = \frac{1}{|p_i - v|^{2\alpha}}.$$

因为该最小二乘问题中的权重 w_i 独立于 v 变形后的点, 所以我们称之为移动最小二乘最小化. 对于不同的 v, 可以得到不同的变换 $l_v(x)$. 由于 $l_v(x)$ 是仿射变换, 所以可以写成

$$l_v(x) = xM + T. \tag{2}$$

令原始的优化函数对 T 求偏导数并令其为 0, 解出

$$T = q^* - p^* M,$$

其中 p^* 和 q^* 是原来一系列控制顶点的加权质心,

$$p^* = \frac{\sum_i w_i p_i}{\sum_i w_i}, \qquad q^* = \frac{\sum_i w_i q_i}{\sum_i w_i}.$$

所以有

$$l_v(x) = (x - p^*)M + q^*. \tag{3}$$

所以原优化函数可以修改为

$$\sum_i w_i |\hat{p}_i M - \hat{q}_i|^2, \tag{4}$$

其中 $\hat{p}_i = p_i - p^*$, $\hat{q}_i = q_i - q^*$, 考虑二维图像时, M 就是一个 2×2 的矩阵.

1.1 Affine Deformation

要找一个仿射变换来极小化方程 (4), 直接用古典方法求解优化问题得

$$M = \left(\sum_i \hat{p}_i^\top w_i \hat{p}_i \right)^{-1} \sum_j \hat{p}_j^\top w_j \hat{q}_j.$$

从而我们可以写出仿射变换的表达式

$$f_a(v) = (v - p^*) \left(\sum_i \hat{p}_i^\top w_i \hat{p}_i \right)^{-1} \sum_j \hat{p}_j^\top w_j \hat{q}_j + q^*. \tag{5}$$

又因为 p_i 是固定的, 所以上式可以变为

$$f_a(v) = \sum_j A_j \hat{q}_j + q^*,$$

其中 A_j 可以预计算

$$A_j = (v - p^*) \left(\sum_i \hat{p}_i^\top w_i \hat{p}_i \right)^{-1} w_j \hat{p}_j^\top.$$

直接做仿射变换会存在一些问题：原图中的网格点阵是整齐排列的,　变换到目标图像中后便不再整齐排列，由于是浮点数运算,　所以有一些点会变换到目标图的同一个点上,　而目标图的有一些点没有任何点从原图变换过来，这就会导致变换之后的图像产生

白色的镂空。解决该问题的一个比较简单的办法就是对原始图像做逆变换，这相当于在目标图像的网格点阵上计算原图中对应的点，即已知 $f_a(v)$ 求解对应的 v。计算公式如下：

$$v = (f_a(v) - q^*) \left(\sum_j \hat{p}_j^\top w_j \hat{q}_j \right)^{-1} \left(\sum_i \hat{p}_i^\top w_i \hat{p}_i \right) + p^* \tag{6}$$

1.2 Similarity Deformation

实际上仿射变换包含了非一致性的平移和放缩，实际中的许多物体并不会产生这么复杂的变化。相似变换是仿射变换的一个子类，仅包含平移、旋转和一致的放缩。为了满足相似变换的性质，我们限制矩阵 M 满足 $M^\top M = \lambda^2 I, \exists\lambda$。如果 M 是分块矩阵，有 $M = (M_1,\ M_2)$ 的形式，其中 M_1, M_2 都是长度为 2 的列向量，那么对于 M 的限制可以变为 $M_1^\top M_1 = M_2^\top M_2 = \lambda^2$，并且 $M_1^\top M_2 = 0$。这个限制意味着 $M_2 = M_2^\perp$，其中 $\perp$ 是一个作用于二维向量的算子使得 $(x, y)^\perp = (-y, x)$。这样原来的目标方程 (4) 可以修改为

$$\sum_i w_i \left| \begin{pmatrix} \hat{p}_i \\ -\hat{p}_i^\perp \end{pmatrix} M_1 - \hat{q}_i^\top \right|^2. \tag{7}$$

该二次方程有唯一的最优值，从而可以得到最优值点 M

$$M = \frac{1}{\mu_s} \sum_i w_i \begin{pmatrix} \hat{p}_i \\ \hat{p}_i^\perp \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{q}_i^\top & \hat{q}_i^{\perp\top} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

其中 $\mu_s = \sum_i w_i \hat{p}_i \hat{p}_i^\top$。从而得到最终的变换公式

$$f_s(v) = \sum_i \hat{q}_i \left(\frac{1}{\mu_s} A_i \right) + q^*,$$

其中 A_i 是

$$A_i = w_i \begin{pmatrix} \hat{p}_i \\ \hat{p}_i^\perp \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v - p^* \\ -(v - p^*)^\perp \end{pmatrix}^\top. \tag{9}$$

类似的我们可以得到逆相似变换的公式

$$v = \mu_s(f_s(v) - q^*) \begin{pmatrix} \Delta \\ \Delta^\perp \end{pmatrix}^\top + p^*, \tag{10}$$

其中

$$\Delta = \sum_i \hat{q}_i w_i \begin{pmatrix} \hat{p}_i \\ \hat{p}_i^\perp \end{pmatrix}.$$

1.3 Rigid Deformation

进一步地，我们要求变换中不包括一致放缩，即限制变为 $M^\top M = I$。先给出一个定理，这个定理说明了刚性变换和相似变换的关系。

定理 1. 令 C 是可以极小化如下相似问题的矩阵

$$\min_{M^\top M = \lambda^2 I} \sum_i w_i \left| \hat{p}_i M - \hat{q}_i \right|.$$

如果 C 写成 λR 的形式，R 是一个旋转矩阵，λ 是一个标量，那么旋转矩阵 R 极小化如下的刚性问题

$$\min_{M^\top M = I} \sum_i w_i \left| \hat{p}_i M - \hat{q}_i \right|.$$

定理证明略去，可以参考原文中的 $Appendix A$。

根据定理我们知道刚性变化恰好就是方程 (8)，除了把其中的 μ_s 替换为 μ_r

$$\mu_r = \sqrt{\left(\sum_i w_i \hat{q}_i \hat{p}_i^\top\right)^2 + \left(\sum_i w_i \hat{q}_i \hat{p}_i^{\perp\top}\right)^2}.$$

令

$$\overrightarrow{f}_r(v) = \sum_i \hat{q}_i A_i,$$

其中 A_i 由式 (9) 定义，最后的变换公式为

$$f_r(v) = |v - p^*| \frac{\overrightarrow{f}_r(v)}{\left|\overrightarrow{f}_r(v)\right|} + q^*. \tag{11}$$

上述变换公式不易求得其逆变换，所以近似地使用如下逆变换

$$v = |f(v) - q^*| \frac{\overrightarrow{g}_r(v)}{|\overrightarrow{g}_r(v)|} + p^*.$$

其中

$$\overrightarrow{g}_r(v) = (f(v) - q^*) \begin{pmatrix} \Delta \\ \Delta^\perp \end{pmatrix}^{-\top}$$