Les **fonctions logiques (**ou **booléennes)**

Une fonction booléenne est une fonction $f: (b_1, b_2, \dots, b_n) \mapsto ?$

• prenant, en entrée, une liste de variables « binaires » (donc des bits)

• et retournant, en sortie, un unique bit « résultat ».

Ainsi une fonction logique peut être vue comme *ce qui retourne un résultat à partir de combinaisons de variables booléenne reliées par des opérateurs booléens*. Par exemple : $f(x, y, z) = y\overline{(x + yz)} + \overline{z}x$

Il s'agit donc d'un cas particulier des *fonctions mathématiques à plusieurs variables*, la particularité étant qu'ici chaque variable est ***booléenne***, en ce sens qu'elle ne peut prendre que 2 valeurs possibles : 0 ou 1. [c'est de l'algèbre de Boole]

Exemples de fonctions booléennes :

- la fonction *parité* p, dont la sortie dépend de la parité du nombre de 1 dans l'entrée.

$$p(b_1, b_2, \dots, b_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } 2 \mid \sum b_i \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

- On pourrait aussi penser aux fonctions $\min(b_1, \dots, b_n)$ et $\max(b_1, \dots, b_n)$

  Et on remarque $\min(b_1, \dots, b_n) = b_1 \wedge \dots \wedge b_n$ tandis que $\max(b_1, \dots, b_n) = b_1 \vee \dots \vee b_n$.

  Remarque : avec une approche arithmétique, on aurait les correspondances suivantes :

Opération booléenne	**Opération équivalente en arithmétique des nombres**	
$\overline{x}$	$(1 - x)$	
$x \cdot y$	xy	(ou $\min\{x, y\}$)
$x + y$	$x + y - xy$	(ou $\max\{x, y\}$)

Remarque : une fonction booléenne peut toujours être associée à un ***circuit logique***: le circuit est le modèle concret montrant l'action sur des « signaux d'entrées », tandis que la fonction booléenne est l'objet théorique en mathématiques.

On a souvent affaire à une situation où certains résultats « oui » / « non » sont souhaités ***en fonction*** de conditions d'entrée de type « oui » ou « non » :

- si on construit la liste des scénarios possibles en entrée,
- puis on juxtapose les sorties correspondantes voulues,
- on obtient la liste des comportements d'une fonction booléenne.

La description d'une fonction booléenne se fait ainsi souvent à l'aide d'une table de vérité : ça permet d'énumérer les « entrées » possibles et de leur associer la *sortie* correspondante (le « *résultat* » de la fonction lorsqu'exécutée sur la liste en entrée).

Pour déduire une expression mathématique d'une telle fonction (et, si requis, déduire circuit logique correspondant) – qu'il faudra simplifier au besoin par la suite – on utilise ensuite la stratégie des « min-termes ».

Les min-termes sont des « produits de variables booléennes, chacun pouvant être, ou non, complémentée».

Ex. : xyz, $xy\overline{z}$, $\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$ sont des min-termes (à 3 variables).

Note : on inclut aussi les « min-termes partiels », puisqu'ils peuvent être facilement complétés en « vrais min-termes » :

Par exemple : $xy = xy1 = xy(z + \overline{z}) = xyz + xy\overline{z}$

Le nom « min-terme » vient de ce qu'en algèbre booléenne, calculer un produit (conjonction) revient à calculer un minimum.
(Il existe un concept de « max-termes », qui sont pour leur part des sommes de variables booléenne, complémentées ou non).

Chaque scénario d'entrée (=débuts des ligne de la table de vérité) d'une fonction booléenne correspond à un min-terme : pour définir l'effet de la fonction, il suffit alors d'assembler les min-termes dont le résultat vaut « 1 » en une somme : on aura alors construit un *forme normale disjonctive* pour la fonction (une somme (disjonction) de min-termes). Cela construit donc la fonction qui retourne 1 lorsqu'elle détecte qu'un des scénarios « positifs » est validé, et 0 sinon.

Par exemple : $f(x, y, z) = xyz + xy\overline{z} + x\overline{y}z + \overline{x}yz$

décrit la fonction booléenne qui retourne «1» précisément lorsqu'au moins 2 des variables d'entrée valent «1».

(Remarque : il existe un concept de « forme normale conjonctive » : il s'agit d'un produit (conjonction) de max-termes).

Construction de fonction booléenne – Exemple résolu

On a trois variables, notées x, y, z. On veut construire une ***fonction booléenne*** qui utilise les valeurs de ces 3 variables pour retourner « 1 » précisément lorsque la majorité des variables est à « 1 »: la *majorité de 3* signifie *2 variables ou plus* à « 1 ».

On peut lister les scénarios avec une table de vérité, et « forcer » le résultat final en ciblant les scénarios qui répondent à la condition:

Boutons			*Nb variables à « 1 »* $(x+y+z)$	$\boldsymbol{f(x,y,z)}$
$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{z}$		
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	2	1
1	0	0	1	0
1	0	1	2	1
1	1	0	2	1
1	1	1	3	1

Enfin, on décrit par des min-termes les scénarios où la fonction $f(x,y,z)$ doit donner 1 :

Si la variable est à « 1 », on récrit la variable telle quelle, mais si elle est à « 0 », on prend son complément:

Scénario en entrée		Min-terme
$(\mathbf{0},1,1)$	$\to$	$\bar{x}yz$
$(1,\mathbf{0},1)$	$\to$	$x\bar{y}z$
$(1,1,\mathbf{0})$	$\to$	$xy\bar{z}$
$(1,1,1)$	$\to$	xyz

Ce sont les « combinaisons favorables »: chacune d'elles est acceptable pour que le résultat soit « 1 », on va donc toutes les additionner (disjonction)

$$\bar{x}yz + x\bar{y}z + xy\bar{z} + xyz = F(x,y,z)$$

Reste à voir si on peut simplifier cette expression…

$$\begin{aligned}
\bar{x}y\mathbf{z} + x\bar{y}\mathbf{z} + xy\bar{z} + xyz &= (\bar{x}y + x\bar{y}) \cdot \mathbf{z} + x \cdot y \cdot (\bar{z} + z) && \text{Distributivité} \\
&= (x \oplus y) \cdot z + x \cdot y \cdot (\bar{z} + z) && \text{Définition } \oplus \\
&= (x \oplus y) \cdot z + x \cdot y \cdot 1 && \text{Complémentarité} \\
&= (x \oplus y) \cdot z + x \cdot y && \text{Identité}
\end{aligned}$$

Autres exercices :

Pour chacun des numéros, vous devez faire une table de vérité et des simplifications algébriques en nommant la propriété utilisée (sauf l'associativité et la commutativité). Vous devez obtenir des expressions avec au plus 5 opérateurs

1. La fonction comporte 4 variables A,B,D,E et retourne 1 s'il y a exactement une voyelle et une consonne qui sont à 1.

2. La fonction comporte 4 variables B_0, B_1, B_3, B_6 et retourne 1 seulement si la somme des indices de variables à 1 donne un carré parfait (par ex. : $B_0 = B_1 = 1$ et $B_3 = B_6 = 0$ mène à la somme $0 + 1 = 1 = 1^2$).