Les **fonctions logiques (**ou **booléennes)**

Une **fonction booléenne** est une fonction $f:(b_1,b_2,\dots,b_n)\mapsto ?$

- prenant, en entrée, une liste de variables « binaires » (donc des **bits**)
- et retournant, en sortie, un unique bit « résultat ».

Ainsi une fonction logique peut être vue comme *ce qui retourne un résultat à partir de combinaisons de variables booléenne reliées par des opérateurs booléens*. Par exemple : $f(x,y,z)=y\overline{(x+yz)}+\overline{z}x$

Il s'agit donc d'un cas particulier des *fonctions mathématiques à plusieurs variables*, la particularité étant qu'ici chaque variable est ***booléenne***, en ce sens qu'elle ne peut prendre que 2 valeurs possibles : 0 ou 1. [c'est de l'algèbre de Boole]

Exemples de fonctions booléennes :

- la **fonction** *parité* p, dont la sortie dépend de la parité du nombre de 1 dans l'entrée.

$$p(b_1,b_2,\dots,b_n)=\begin{cases}0 & \text{si } 2 \mid \sum b_i\\ 1 & \text{sinon}\end{cases}$$

- On pourrait aussi penser aux fonctions $\min(b_1,\dots,b_n)$ et $\max(b_1,\dots,b_n)$

  Et on remarque $\min(b_1,\dots,b_n)=b_1\wedge\dots\wedge b_n$ tandis que $\max(b_1,\dots,b_n)=b_1\vee\dots\vee b_n$.

  Remarque : avec une approche arithmétique, on aurait les correspondances suivantes :

Opération booléenne	**Opération équivalente en arithmétique des nombres**
$\overline{x}$	$(1-x)$
$x\cdot y$	xy (ou $\min\{x,y\}$)
$x+y$	$x+y-xy$ (ou $\max\{x,y\}$)

Remarque : une fonction booléenne peut toujours être associée à un ***circuit logique***: le circuit est le **modèle concret** montrant l'action sur des « signaux d'entrées », tandis que la fonction booléenne est **l'objet théorique** en mathématiques.

On a souvent affaire à une situation où certains résultats « oui » / « non » sont souhaités ***en fonction*** de conditions d'entrée de type « oui » ou « non » :

- si on construit la liste des scénarios possibles en entrée,
- puis on juxtapose les sorties correspondantes voulues,
- on obtient la liste des comportements d'une fonction booléenne.

La description d'une fonction booléenne se fait ainsi souvent à l'aide d'une table de vérité : ça permet d'énumérer les « entrées » possibles et de leur associer la *sortie* correspondante (le « *résultat* » de la fonction lorsqu'exécutée sur la liste en entrée).

Pour déduire une **expression mathématique** d'une telle fonction (et, si requis, déduire circuit logique correspondant) – qu'il faudra simplifier au besoin par la suite – on utilise ensuite la stratégie des « **min-termes** ».

Les **min-termes** sont des « produits de variables booléennes, chacun pouvant être, ou non, complémentée».
Ex. : xyz, $xy\overline{z}$, $\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$ sont des min-termes (à 3 variables).

Note : on inclut aussi les « min-termes partiels », puisqu'ils peuvent être facilement complétés en « vrais min-termes » :
Par exemple : $xy=xy1=xy(z+\overline{z})=xyz+xy\overline{z}$

Le nom « min-terme » vient de ce qu'en algèbre booléenne, calculer un produit (conjonction) revient à calculer un minimum.
(Il existe un concept de « max-termes », qui sont pour leur part des sommes de variables booléenne, complémentées ou non).

Chaque scénario d'entrée (=débuts des ligne de la table de vérité) d'une fonction booléenne correspond à un min-terme : pour définir l'effet de la fonction, il suffit alors **d'assembler les min-termes dont le résultat vaut « 1 » en une somme** : on aura alors construit un ***forme normale disjonctive*** pour la fonction (une somme (disjonction) de min-termes). Cela construit donc la fonction qui retourne 1 lorsqu'elle détecte qu'un des scénarios « positifs » est validé, et 0 sinon.

Par exemple : $f(x,y,z)=xyz+xy\overline{z}+x\overline{y}z+\overline{x}yz$
décrit la fonction booléenne qui retourne «1» précisément lorsqu'au moins 2 des variables d'entrée valent «1».

(Remarque : il existe un concept de « forme normale conjonctive » : il s'agit d'un produit (conjonction) de max-termes).