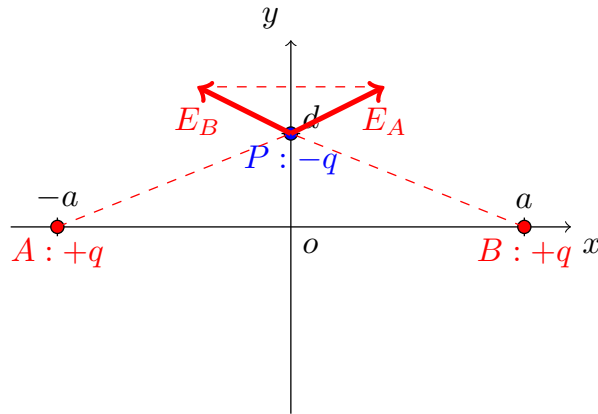


* 解答 ([] 内の数字は配点)

(ア)：	y	[2]	(イ)：	$\frac{2kqy}{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$	[3]	
(ウ)：	$-\frac{4kq^2y}{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$	[2]	(エ)：	周期	[2]	
(計算) F_y 中の y^2 の項を無視すると $a^2 + y^2 \approx a^2$ となるので、 F_y の近似式は $F_y \approx -\frac{4kq^2}{a^3}y$ となる。よって、電荷 P は F_y を復元力とした単振動をする。						
よって、求める周期 T は $T = \frac{\pi a}{q} \sqrt{\frac{ma}{k}}$						
			設問 (1)：	(答) $\frac{\pi a}{q} \sqrt{\frac{ma}{k}}$	[6]	
設問 (2)：			$\frac{4qd}{5ma} \sqrt{\frac{6k}{a}}$			[4]
(オ)：	qv_0B	[2]	(カ)：	$\frac{mv_0}{qB_0}$	[2]	
(キ)：	$ma = -kv$	[3]	(ク)：	(f)	[2]	
設問 (3)：			$\frac{k}{m}$			[4]
(計算) 軌道の半径 r は $r = \frac{mv_0}{qB_0}$ であり、電荷に働くローレンツ力は $qvB(t) = qe^{-\frac{k}{m}t}B(t)$ である。よって円運動の運動方程式から $m\frac{v^2}{r} = qe^{-\frac{k}{m}t}B(t)$ 。						
よって、求める磁束密度 $B(t)$ は $B(t) = \frac{B_0}{v_0}e^{-\frac{k}{m}t}$						
			設問 (4)：	(答) $\frac{B_0}{v_0}e^{-\frac{k}{m}t}$	[6]	
設問 (5)：			Nk			[2]
設問 (6)：			$\frac{Nk}{R}$			[2]
設問 (7)：			$\frac{N^2R^2}{R}$			[2]
設問 (8)：			Nk			[2]
設問 (9)：			$-Nk$			[2]
設問 (10)：			$\frac{1}{2}C(Nk)^2$			[2]
設問 (11)：			$-\frac{k}{m} \left(x - \frac{VB_l}{Rk}\right)$			[4]
設問 (12)：			$2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$			[2]
設問 (13)：			$a = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$			[4]
設問 (13)：			$C = \frac{VB_l}{Rk}$			[4]
設問 (14)：			$-\left(\frac{VB_l}{Rk} + d\right)$			[3]
設問 (15)：			$\cos at$			[3]
(ケ)：	$r_n\omega B\Delta r$	[3]	(コ)：	$r_k\omega B\Delta r$	[2]	
(サ)：	$\frac{1}{2}(b^2 - a^2)\omega B$	[4]	(シ)：	$\frac{(b^2 - a^2)\omega B}{2R}$	[2]	
(ス)：	$\frac{(b^2 - a^2)(b - a)\omega B}{2R}$	[4]	(セ)：	$\frac{(b^2 - a^2)^2\omega B}{4R}$	[4]	
設問 (16)：			$\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$			[3]
設問 (17)：			$\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$			[3]
設問 (18)：			周波数 $\frac{1}{\pi} \cdot \frac{LC}{RC + \sqrt{(RC)^2 + 4LC}}$			[3]
設問 (18)：			振幅 $\frac{V_0}{\sqrt{2R}}$			[2]

* 解説

問題Ⅰ： 点電荷には以下のような E_A, E_B の電界ベクトルが存在する。



続き： ベクトルの x 成分は、打ち消し合うので、 y 成分のみ考える。

クーロンの法則から、電界 E_A, E_B は、 $+y$ 正として

$$E_A = k \frac{q}{(a^2 + y^2)} \times \frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}}, \quad E_B = -k \frac{q}{(a^2 + y^2)} \times \frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}}$$

よって、求める電界 $E_A + E_B$ は、

$$E_A + E_B = \frac{2kqy}{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

電荷 P が受ける力 F_y は、電界に電気量 $2q$ をかけて、

$$F_y = -\frac{4kq^2y}{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

電荷には $y = 0$ を中心とした対称な力 (奇関数) が働くので、導体棒は周期運動をする。

設問 (1) : F_y 中の y^2 の項を無視すると、

$$a^2 + y^2 \approx a^2$$

となるので、 F_y の近似式は、

$$F_y \approx -\frac{4kq^2}{a^3}y$$

よって、電荷 P は、 F_y を復元力とした単振動をするので、求める周期 T は、

$$T = \frac{\pi a}{q} \sqrt{\frac{ma}{k}}$$

設問 (2) : 単振動の力学的エネルギー保存則から、速さを v として、

$$\frac{1}{2} \left(\frac{4kq^2}{ma^3} \right) d^2 \left(\frac{d}{5} \right)^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

これを整理して、

$$v = \frac{4qd}{5ma} \sqrt{\frac{6k}{a}}$$

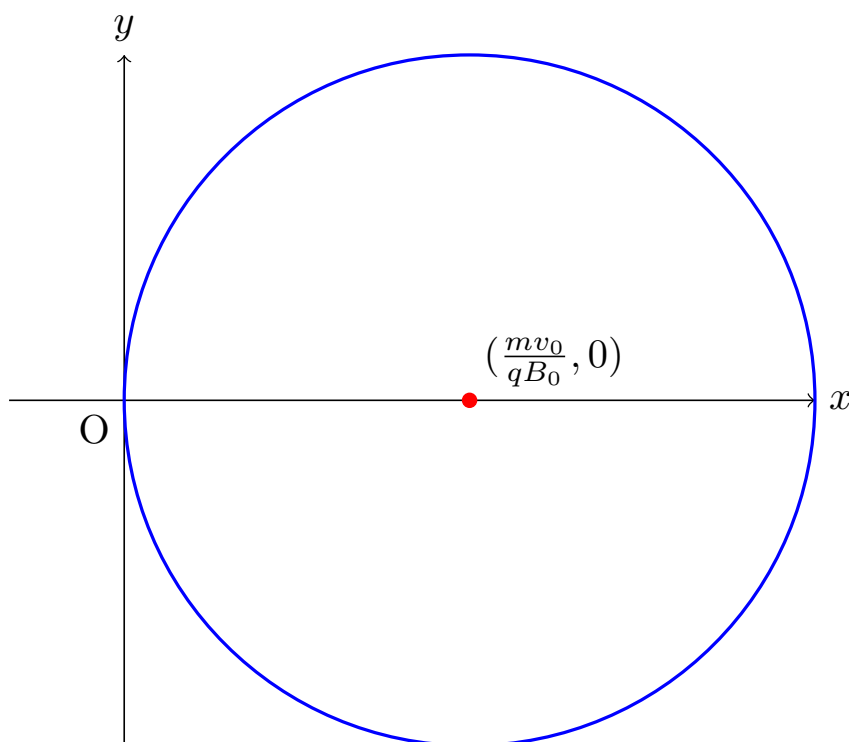
問題 II : 電荷には、ローレンツ力がはたらくので、

$$F = qv_0B_0$$

であり、フレミングの法則から、電荷は力 F を向心力とする円軌道を描く。よって、円運動の運動方程式から、

$$m \frac{v_0^2}{r} = qv_0B_0 \quad \therefore r = \frac{mv_0}{qB_0}$$

また円軌道は次のようになる。



続き： 速度方向の運動方程式は抗力 f を考えて、

$$ma = -kv$$

また、速度ベクトルとは逆向きの加速度ベクトルで、終端速度は 0 になるので速度は単調に減少して 0 に収束する、(f)である。

設問 (3)： 運動方程式から、 $a = \frac{dv}{dt}$ として、

$$m \frac{dv}{dt} = -kv \quad - \quad (1)$$

と表される。 $v = Ce^{-\alpha t}$ について、 $\frac{dv}{dt} = -\alpha e^{-\alpha t}$ であるから、(1) の運動方程式に代入すると、

$$m\alpha e^{-\alpha t} = -ke^{\alpha t} \quad \therefore \alpha = \frac{k}{m}$$

よって、求める α の値は、

$$\alpha = \frac{k}{m}$$

設問 (4) : 軌道の半径 r は

$$r = \frac{mv_0}{qB_0}$$

であり、電荷にはたらくローレンツ力は、

$$qvB(t) = qe^{-\frac{k}{m}t}B(t)$$

よって、円運動の運動方程式から、

$$m\frac{v^2}{r} = qe^{-\frac{k}{m}t}B(t)$$

よって、求める磁束密度 $B(t)$ は、

$$B(t) = \frac{B_0}{v_0}e^{-\frac{k}{m}t}$$

問題 III :

設問 (5) : ファラデーの電磁誘導の法則から、

$$E = N \frac{d\Phi}{dt} = \textcolor{red}{Nk}$$

設問 (6) : オームの法則から、から、流れる電流 i は、

$$Nk = Ri \quad \therefore i = \frac{\textcolor{red}{Nk}}{\textcolor{red}{R}}$$

設問 (7) : 抵抗での消費電力は、

$$Ei = \frac{\textcolor{red}{N^2 k^2}}{\textcolor{red}{R}}$$

設問 (8)(9) : スイッチを開いた瞬間、コンデンサは充電されていたので、コンデンサの電圧は

$$V_C = \textcolor{red}{Nk}$$

であり、この時回路には電流が流れず、抵抗での電圧降下は 0 である。
よって、回路方程式より、

$$V_R + V_L + V_C = 0 \quad \therefore V_L = \textcolor{red}{-Nk}$$

設問 (10) : コンデンサに蓄えられていた静電エネルギーが全てジュール熱に変換されるので、求めるジュール熱 W は、

$$W = \frac{1}{2} \textcolor{red}{C(Nk)^2}$$

問題 IV :

設問 (11) : 導体棒に流れる電流 I はオームの法則から、

$$I = \frac{V}{R}$$

よって、導体棒が磁界から受ける力の F は、 $+x$ 方向を正として、

$$F = BIl = \frac{VB l}{R}$$

導体棒の加速度は、 $\frac{d^2x}{dt^2}$ であり、導体棒は、ばねからも $-kx$ の力を受けるので、運動方程式は、

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{VB l}{R} - kx = -k \left(x - \frac{VB l}{Rk} \right)$$

したがって、加速度は、

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{VB l}{mR} - \frac{kx}{m} = -\frac{k}{m} \left(x - \frac{VB l}{Rk} \right)$$

設問 (12) : 設問 (11) の式から、導体棒は $\frac{VB l}{Rk}$ を中心とする単振動をする。復元力は、 $-k \left(x - \frac{VB l}{Rk} \right)$ なので、求める周期 T は、

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

設問 (13) : $x = Ae^{at} + C$ であるから、加速度 $\frac{d^2x}{dt^2}$ は、

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a^2 Ae^{at}$$

これを方程式に代入して、

$$ma^2 Ae^{at} = -k \left(Ae^{at} + C - \frac{VBl}{Rk} \right)$$

この式を整理して、

$$(ma^2 + k)Ae^{at} + \frac{VBl}{R} - Ck = 0$$

この恒等式が成立するには、

$$\begin{aligned} ma^2 + k &= 0, \\ \frac{VBl}{R} - Ck &= 0 \end{aligned}$$

したがって、求める a, C は、

$$\begin{aligned} a &= \pm i \sqrt{\frac{k}{m}} \\ C &= \frac{VBl}{Rk} \end{aligned}$$

設問 (14) 設問 (13) から、位置 x は、

$$x = Ae^{\pm i \sqrt{\frac{k}{m}}t} + \frac{VBl}{Rk}$$

ここで、初期条件から、 $t = 0$ で $x = -d$ であるから、これらを代入して、

$$-d = A + \frac{VBl}{Rk} \quad \therefore A = - \left(\frac{VBl}{Rk} + d \right)$$

設問 (15)： 解 x は、 a, A, B を代入して

$$x = - \left(\frac{VBl}{Rk} + d \right) e^{\pm i \sqrt{\frac{k}{m}} t} + \frac{VBl}{Rk}$$

導体棒は $\frac{VBl}{Rk}$ を中心とする単振動をし、初期位置は $x = -d$ であるため、 $-\cos$ 型の振動をする。(初期位相が $\frac{3}{2}\pi$)
したがって、

$$Re(e^{at}) = \textcolor{red}{\cos at}$$

問題 V： 半径 r_n の円運動の速さは、 Δr 中の電荷の速さはどれも等しいので、近似的に $r_n \omega$ であり、 l は今回 Δr なので、誘導機電力の式 vBl から、

$$\Delta E = r_n \omega B \Delta r$$

回路全体ではこれら起電力 (電位) の $k = 1$ から $k = n$ までの和を取る
ので、近似的に、

$$\sum_{k=1}^n r_k \omega B \Delta r$$

また、区分求積法から、 $n \rightarrow \infty$ の時、 $r_k \rightarrow r$ 、 $\Delta r \rightarrow dr$ とすると、
($a \leq r \leq b$) で、

$$E = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n r_k \omega B \Delta r = \int_a^b \omega B r dr = \frac{1}{2} (b^2 - a^2) \omega B$$

回路を流れる電流 I は、 $E = \frac{1}{2} (b^2 - a^2) \omega B$ と、オームの法則から、

$$I = \frac{(b^2 - a^2) \omega B}{2R}$$

これより、微小距離 Δr で磁界から受ける力 ΔF は、 BIl から、

$$\Delta F = BI \Delta r$$

であるので、区分求積法から、 $\Delta r \rightarrow dr$ として ($a \leq r \leq b$) において、

$$F = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n BI \Delta r = \int_a^b BI dr = \frac{(b^2 - a^2) (b - a) \omega B}{2R}$$

力のモーメントについては、 Δr 中の導体棒において、半径は一律 r_n
であるから、中心まわりの微小の力のモーメント ΔM は、

$$\Delta M = \Delta F \cdot r_n = BI r_n \Delta r$$

ここでも区分求積法によって求めていくと、 $r_k \rightarrow r$ 、 $\Delta r \rightarrow dr$ として
($a \leq r \leq b$) において、

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n BI r_n \Delta r = \int_a^b BI r dr = \frac{(b^2 - a^2)^2 \omega B}{4R}$$

問題 VI :

設問 (16) : 合成インピーダンスの大きさ Z は、同一電流に対する \sin 型、 $\cos(-\cos)$ 型の係数に着目して、

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

設問 (17) : 電流の振幅が最大になる時、合成インピーダンスの大きさ Z は最小となるので、条件は、

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \quad \therefore \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

したがって、求める周波数は、

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

設問 (18) : 設問 (16) から、電流が最大振幅の時の合成インピーダンスの大きさは $\omega = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ を代入して、 $Z = R$ なので、最大の電流振幅 i_{max} は、

$$i_{max} = \frac{V_0}{R}$$

よって、最大振幅の $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍は、

$$\frac{1}{\sqrt{2}} i_{max} = \frac{V_0}{\sqrt{2}R}$$

また、この時インピーダンス大きさは、オームの法則から、電流が最大振幅の時の $\sqrt{2}$ 倍なので、 $\sqrt{2}R$ 隣、この時の電源の周波数は、

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = R^2$$

ω についてとくと、 $\omega > 0$ から、

$$\omega = \frac{RC + \sqrt{(RC)^2 + 4LC}}{2LC}$$

したがって、求める周波数は、

$$\frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{LC}{RC + \sqrt{(RC)^2 + 4LC}}$$