20** 年度
最難関大学レベル
模擬試験（物理）

電磁気学分野

試験時間：30 分　配点：50 点

注意事項

- 解答はすべて所定の解答欄に記入すること。解答欄以外に記入したものは採点対象とならない。
- 図や表は、問題文中に示されたものを利用し、不足する場合は自分で補助図を描いてよい。
- 解答には与えられた文字のみを用い、必要に応じて計算過程も簡単に示せ。
- 試験時間は 30 分とし、設問全てに解答せよ。
- 答案には必ず氏名・受験番号を記入すること。

模擬試験

Physics Practice Test

物理　問題 I

1.

図 1に示すように、スイッチ S_1,S_2 と電源電圧 V の直流電源を含んだ RLC 直列回路について考えていく。抵抗の抵抗値は R、コイルの自己インダクタンスは L、コンデンサの静電容量は C とする。以下の設問では、まずスイッチ S_1 を閉じてコンデンサを充電し、スイッチ S_1 を開くと同時にスイッチ S_2 を閉じた時の挙動を調べていく。各空欄の最後に与えられた括弧内の物理量の中から、適当なものを用いて空欄 (ア)〜(エ) に入る適当な数式を示し、問 1, 問 2 に答えよ。

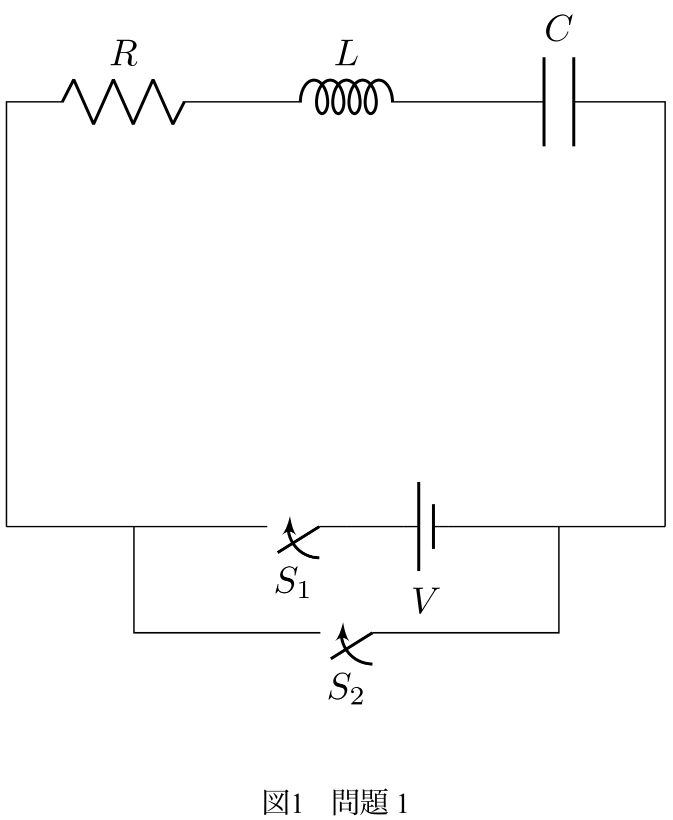


図1　問題 1

(a)　まず、スイッチ S_1 を閉じて十分時間が経過した時について考える。抵抗での電圧降下 $V_R = \boxed{(\text{ア})\quad (V,R,C,L)}$ であり、コイルに加わる電圧 V_L= $\boxed{(\text{イ})\quad (V,R,C,L)}$ である。また、コンデンサに蓄えられた電荷 Q_0 は、 $\boxed{(\text{ウ})\quad (V,R,C,L)}$ である。

(b)　十分時間が経過したあとスイッチ S_1 を開き、それと同時にスイッチ S_2 閉じた。この操作を行なった時刻を $t = 0$ とし、時刻 t におけるコンデンサに蓄えられた電荷を $q(t)$ として、キルヒホッフの第二法則から微分方程式は、

$$0 = \boxed{(\text{エ})\quad (V,R,C,L,t,q(t))}$$

と表される。
ここで、この微分方程式の解 $q(t)$ は、k を定数として $q(t) = e^{-kt}$ と仮定できる。

問 1：　文章中の解 $q(t)$ に含まれる定数 k を求めよ。ただし、k は複素数として場合分けは不要である。(計算過程も示すこと。)

問 2：　電荷の減少速度が最も遅いのはどういう時か。また、その根拠を数式を用いて記述せよ。ただし、減少速度は電荷の絶対値が $\frac{1}{e}$ 倍になる時間 $t_{\frac{1}{e}}$ を比較するものとし、この時刻は十分大きいと仮定する。必要であれば、

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

を用いて良い。

2.

図1の RLC 回路を以下に示すラプラス変換を用いて考えていく。各空欄の最後に与えられた括弧内の文字の中から、適当なものを用いて空欄 (1)〜(8) に入る適当な数式を示し、問に答えよ。なお、問は計算過程を示すこと。

ラプラス変換とは、

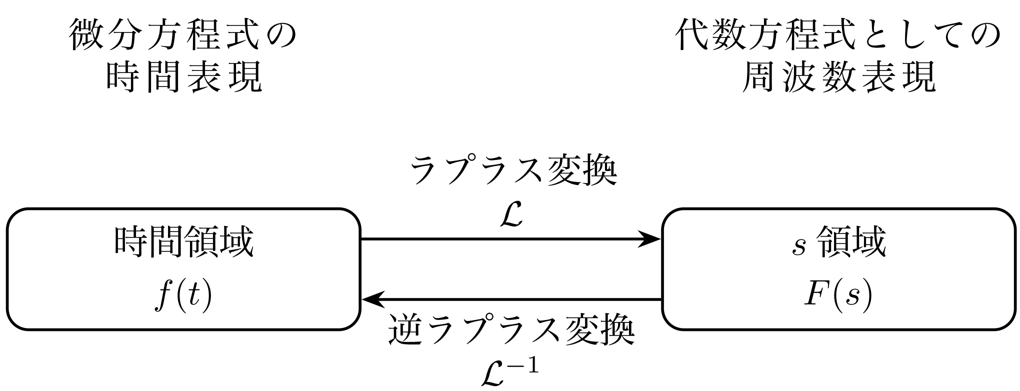
$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \lim_{T\to\infty} \int_0^T f(t)\, e^{-st}\, dt, \quad \mathrm{Re}(s) > 0$$

で定義される、時間領域の関数 $f(t)$ を複素数平面上の s (実部は正) を変数とする関数 $F(s)$ に写像する操作である。微分方程式を代数的に扱うことを可能にし、物理現象の解析や回路理論において強力な手法となる。

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s), \qquad F(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t)$$

$f(t)$ を「時間領域」の関数、$F(s)$ を「周波数領域」の関数と呼ぶ。

また、時間領域と周波数領域の概念図を以下に示す。



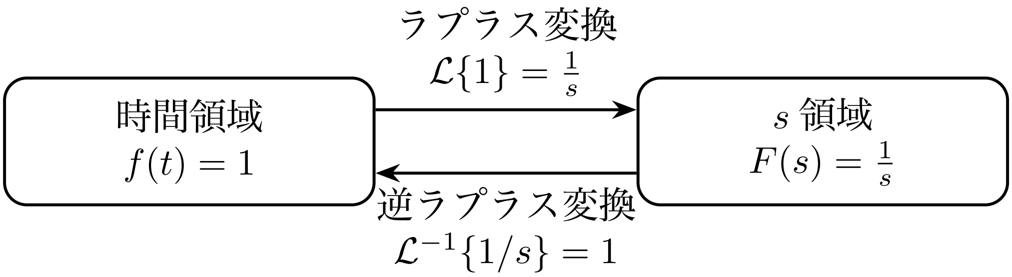
(a) 以下では、$f(t)$ のラプラス変換を、$\mathcal{L}\{f(t)\}$ と書くものとする。
まず、$f(t)=1$ の時のラプラス変換について定義から、s の実部が正の時、

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-st}\,dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}\,dt = \lim_{T\to\infty}\left[-\frac{1}{s}\left(e^{-st}\right)\right]_0^T = \frac{1}{s}$$

となる。
また、$f(t)=t(0\leq t)$ の時のラプラス変換 $\mathcal{L}\{t\}$ は、$\mathcal{L}\{t\} = \boxed{(1)\quad(s)}$ である。

次に逆ラプラス変換を導入する。逆ラプラス変換は周波数領域から時間領域への写像であり、$\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$ の時、$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=f(t)$ となるような操作である。例えば、$F(s)=\frac{1}{s}$ の時、逆ラプラス変換は、$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\}=1$ である。

時間領域の定数関数　　　　　　　　s 領域の代数関数



このように、時間領域の関数と周波数領域の関数には 1 対 1 の関係があり、以下の問では次のようなラプラス変換表を用いて良い。

s **領域** $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$

$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$

$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$

$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$

$\mathcal{L}\{\sin\omega t\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

$\mathcal{L}\{\cos\omega t\} = \frac{s}{s^2+\omega^2}$

線形性
$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = aF(s) + bG(s)$

微分公式
$\mathcal{L}\{\frac{df(t)}{dt}\} = sF(s) - f(0)$
$\mathcal{L}\{\frac{d^2f(t)}{dt^2}\} = s^2F(s) - sf(0) - \frac{df(0)}{dt}$

まず、次の図 2について、ラプラス変換を用いて解析していく。

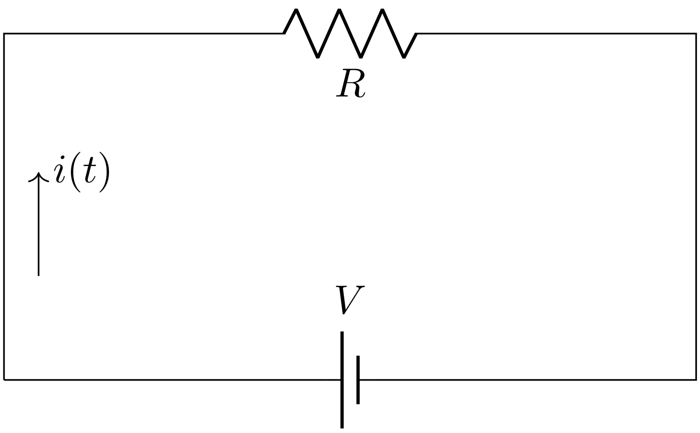


図2　問題 2(a)

電源電圧 V は、オームの法則から時刻 t 流れる電流を図の向きに $i(t)$ として $V = \boxed{(2)\quad (i(t), R)}$ と表せる。V のラプラス変換は、$\boxed{(3)\quad (V, s)}$ であり、$i(t)$ のラプラス変換を $\mathcal{L}\{i(t)\}$ と書くと、$\boxed{(2)}$ のラプラス変換は、$\boxed{(4)\quad (\mathcal{L}\{i(t)\}, R, s)}$ である。

これより、$\mathcal{L}\{i(t)\} = \boxed{(5)\quad (V, R, s)}$ となる。これを逆ラプラス変換することで、$i(t) = \boxed{(6)\quad (V, R, t)}$ を得る。

(b) 次に図のような初期電荷 Q_0 を持つコンデンサ (電荷の極性は図の通り) を含む以下の図 3の RLC 直列回路を考えていく。

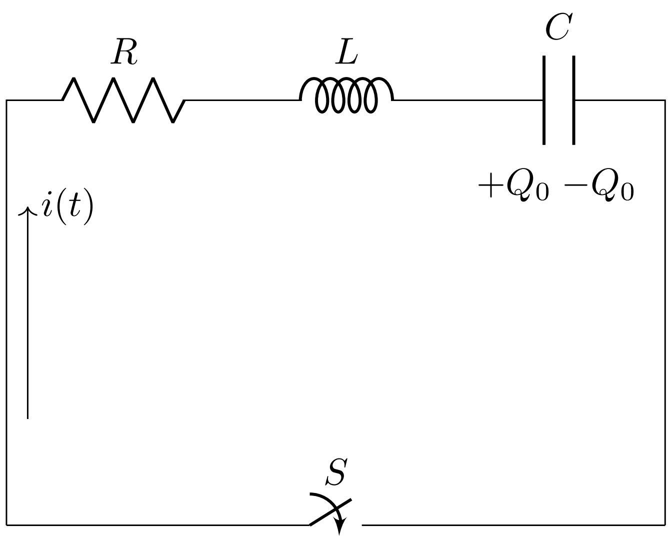


図3 問題 2(b)

時間領域での微分方程式はコンデンサの電荷を $q(t)$ として

$$0 = \boxed{(\text{エ})}$$

である。

V のラプラス変換は、$\boxed{(2)}$ であり、$\boxed{(\text{エ})}$ のラプラス変換は、$q(t)$ のラプラス変換を $\mathcal{L}\{q(t)\}$ として、時刻 $t = 0$ で流れる電流を 0 とすると、$\boxed{(7)\quad (\mathcal{L}\{q(t)\}, V, R, C, L, Q_0, s)}$ となる。

よって、$\mathcal{L}\{q(t)\}=\boxed{(8)\quad (V, R, C, L, Q_0, s)}$ となり、これを逆ラプラス変換することで、解 $q(t)$ を得る。

よって、ラプラス変換を用いても回路の解析が可能であることがわかる。

問： a を定数として $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ としたとき、周波数領域のシフト定理

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$$

が成立する。このシフト定理を用いて設問 (8) の式を逆ラプラス変換し、$q(t)$ を求めよ。ただし、$4\frac{L}{C} > R^2$ であるとする。

* 解答用紙

(ア)：	(イ)：
(ウ)：	(エ)：
(計算)	
	問 (1)：(答)　$q(t) =$
問 2：	
(1)：	(2)：
(3)：	(4)：
(5)：	(6)：
(7)：	
(8)：	
(計算)	
問：(答)　$q(t) =$	

* 解答 ([ ] 内の数字は配点)

(ア)： 0 [2]	(イ)： 0 [2]
(ウ)： CV [3]	(エ)： $\frac{dq(t)}{dt}+L\frac{d^2q(t)}{dt^2}+\frac{q(t)}{C}$ [3]

(計算)　$q(t)=e^{-kt}$ を微分方程式に代入して、

$Lk^2e^{-kt}-Rke^{-kt}+\frac{1}{C}e^{-kt}=0$

この式の両辺を $e^{-kt}(>0)$ で割ると、$Lk^2-Rk+\frac{1}{C}=0$

よって、$k=\frac{R\pm\sqrt{R^2-4\frac{L}{C}}}{2L}$

問 (1)：(答)　$\frac{R\pm\sqrt{R^2-4\frac{L}{C}}}{2L}$　[5]

問 2：解 k が (i) 異なる二つの正の実数、(ii) 正の重解、(ii) 異なる二つの虚数解を持つ場合について考える。また $q(t)=e^{-kt}$ の時 $t_{\frac{1}{e}}=\frac{1}{k}$ であるから $\frac{1}{k}$ の大小について考える。

(i) の時、二つの実数解を $k_1=\frac{R+\sqrt{R^2-4\frac{L}{C}}}{2L}$,$k_2=\frac{R-\sqrt{R^2-4\frac{L}{C}}}{2L}$ とすると、時刻 t が十分大きい時、指数項について $|e^{k_1t}|<<|e^{-k_2t}|$ であるので、$q(t)\approx e^{-k_2t}$ と近似でき、$t_{\frac{1}{e}}\approx\frac{2L}{R-\sqrt{R^2-4\frac{L}{C}}}$

(ii) の時、重解は、$k_1=k_2=\frac{R}{2L}$ であるので、$t_{\frac{1}{e}}\approx\frac{2L}{R}$

(iii) の時、二つの虚数解を $k_1=\frac{R+i\sqrt{4\frac{L}{C}-R^2}}{2L}$,$k_2=\frac{R-i\sqrt{4\frac{L}{C}-R^2}}{2L}$ とすると、

指数項について $e^{k_1t}=e^{-\frac{R}{2L}t}\cdot e^{i\frac{\sqrt{4\frac{L}{C}-R^2}}{2L}t}$,$e^{-k_2t}=e^{-\frac{R}{2L}t}\cdot e^{i\frac{\sqrt{4\frac{L}{C}-R^2}}{2L}t}$ であり、$|e^{ix}|=\sqrt{cos^2x+sin^2x}=1$ から、$|e^{k_1t}|=|e^{-k_2t}|=e^{-\frac{R}{2L}t}$ であり、$t_{\frac{1}{e}}\approx\frac{2L}{R}$

(i)〜(iii) から、最も遅いのは (i) の異なる二つの正の実数解を持つ時であり、これは二次方程式の判別式から、$R^2-4\frac{L}{C}>0$ の時である。　[5]

(1)： $\frac{1}{s^2}$ [3]	(2)： $Ri(t)$ [2]
(3)： $\frac{V}{s}$ [3]	(4)： $R\mathcal{L}\{i(t)\}$ [2]
(5)： $\frac{V}{Rs}$ [3]	(6)： $\frac{V}{R}$ [2]

(7)：　$\left(Ls^2+Rs+\frac{1}{C}\right)\mathcal{L}\{q(t)\}-Q_0(R-Ls)$　[5]

(8)：　$\frac{Q_0(R-Ls)}{Ls^2+Rs+\frac{1}{C}}$　[5]

(計算)　方程式 $Ls^2+Rs+\frac{1}{C}=0$ の解 s_1,s_2 は、

$s_1=\frac{-R+\sqrt{R^2-4\frac{L}{C}}}{2L}$,$s_2=\frac{-R-\sqrt{R^2-4\frac{L}{C}}}{2L}$ であり、部分分数分解をして、

$$\mathcal{L}\{q(t)\}=\frac{Q_0}{L}\left\{\frac{\frac{3}{2}R}{\left(s+\frac{R}{2L}\right)^2+\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}-\frac{L\left(s+\frac{R}{2L}\right)}{\left(s+\frac{R}{2L}\right)^2+\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}\right\}$$

シフト定理と、$\sin\omega t$,$\cos\omega t$ のラプラス変換から、

$$q(t)=\frac{Q_0}{L}\frac{\frac{3}{2}R}{\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}}e^{-\frac{R}{2L}t}\sin\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}t-Q_0e^{-\frac{R}{2L}t}\cos\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}t$$

(9)：(答) $q(t)=\left(\frac{3Q_0R}{2L\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}}\sin\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}t-Q_0\cos\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}t\right)e^{-\frac{R}{2L}t}$　[5]

* 解説

(ア)(イ)： スイッチ S_1 を入れて十分時間が経過した時、コンデンサには電流が流れず、コイルは導線と等価なので、

$$V_R = \mathbf{0}, \quad V_L = \mathbf{0}$$

(ウ)： スイッチ S_1 を入れて十分時間が経過した時、コンデンサは充電され、キルヒホッフ第 2 法則からコンデンサの電圧は V なので、

$$Q_0 = \boldsymbol{CV}$$

(エ)： 電流は $q(t)$ を用いて、$\frac{dq(t)}{dt}$ と表せる。よって、抵抗での電圧降下は $V_L = R\frac{dq(t)}{dt}$ である。同様に、コイルの電圧降下は $L\frac{dI}{dt}$ に $I = \frac{dq(t)}{dt}$ を代入すると、$V_L = L\frac{d^2q(t)}{dt^2}$ と表せる。コンデンサの電圧は、$q(t)$ を用いて、$V_C = \frac{q(t)}{C}$ と表されるので、電圧則の式は、

$$0 = \boldsymbol{R\frac{dq(t)}{dt} + L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{q(t)}{C}}$$

問 1, 問 2：* 解答参照

(1)： ラプラス変換の定義式から、$\mathrm{Re}(s) > 0$ として、

$$F(s) = \lim_{T\to\infty}\int_0^T t\,e^{-st}\,dt = \left[-\frac{t}{s}e^{-st}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{s}e^{-st}\,dt = \boldsymbol{\frac{1}{s^2}}, \quad \mathrm{Re}(s) > 0$$

(2)： オームの法則から、

$$V_R = \boldsymbol{Ri(t)}$$

(3)： ラプラス変換の線形性から、

$$\mathcal{L}\{V\} = V\mathcal{L}\{1\} = \boldsymbol{\frac{V}{s}}$$

(4)： ラプラス変換の線形性から、

$$\mathcal{L}\{Ri(t)\} = \boldsymbol{R\mathcal{L}\{i(t)\}}$$

(5)： オームの法則 $V = Ri(t)$ から、両辺をラプラス変換すると、(3)(4) の結果から、

$$\frac{V}{s =} R\mathcal{L}\{i(t)\} \qquad \therefore \mathcal{L}\{i(t)\} = \boldsymbol{\frac{V}{Rs}}$$

(6)： ラプラス変換の線形性と、$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\} = 1$ から、

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{V}{Rs}\} = \frac{V}{R}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\} = \boldsymbol{\frac{V}{R}}$$

(7)： 時刻 $t = 0$ で流れる電流は $\frac{dq(0)}{dt} = 0$ であり、初期電荷は Q_0 であるので、ラプラス変換表から、

$$\mathcal{L}\{\frac{dq(t)}{dt}\} = s\mathcal{L}\{q(t)\} - Q_0, \qquad \mathcal{L}\{\frac{d^2q(t)}{dt^2}\} = s^2\mathcal{L}\{q(t)\} - sQ_0$$

となる。よって、微分方程式の両辺ラプラス変換すると、

$$0 = R\left(s\mathcal{L}\{q(t)\} - Q_0\right) + L\left(s^2\mathcal{L}\{q(t)\} - sQ_0\right) + \frac{q(t)}{C}$$

これを整理して、

$$0 = \boldsymbol{\left(Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}\right)\mathcal{L}\{q(t)\} - Q_0(R - Ls)}$$

(8)： (7) の式を $\mathcal{L}\{q(t)\}$ について解くと、

$$\mathcal{L}\{q(t)\} = \boldsymbol{\frac{Q_0(R - Ls)}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}}}$$

(9)：* 解答参照