20** 年度
旧帝 (名古屋・大阪・北海道・東北・九州)
模擬試験（物理）

電磁気学分野

試験時間：30 分　配点：50 点

注意事項

- 解答はすべて所定の解答欄に記入すること。解答欄以外に記入したものは採点対象とならない。
- 図や表は、問題文中に示されたものを利用し、不足する場合は自分で補助図を描いてよい。
- 解答には与えられた文字のみを用い、必要に応じて計算過程も簡単に示せ。
- 試験時間は 30 分とし、設問全てに解答せよ。
- 答案には必ず氏名・受験番号を記入すること。
- 合格点は 30 点とする。

模擬試験

Physics Practice Test

物理　問題 I

1.

図 6.3に示すように、紙面に垂直で裏から表に向かう磁束密度 B の一様な磁場が存在する水平面内に、2 本の十分に長い導線レールが、それぞれ平行に置かれている。導体レール間隔は l であり、スイッチ S_1,S_2、抵抗値 R_1 の抵抗、a×a の正方形極板で上極板が傾いた形をしたコンデンサ、変圧器としてドーナツ状の鉄心に巻きつけられた 2 つのコイルが図のように取り付けられている。鉄心に巻き付くコイルは、巻き数 N_1 のコイル 1、巻き数 N_2 のコイル 2 の 2 つであり、コイル 2 には、電流 I_2 を流し続ける「電流源」と呼ばれる装置が接続されている。また、2 本の導体レールの上のこれらと垂直な向きに、全体で抵抗値 R_l を持つ金属棒を配置した。抵抗と導体棒以外の抵抗および、金属棒と導線レール間の摩擦は無視できるとする。

初め、コンデンサには電荷は蓄えられておらず、スイッチ S_1,S_2 は開いている。以下の設問では、括弧内に与えられた物理量のうちから必要なものを用いて回答せよ。

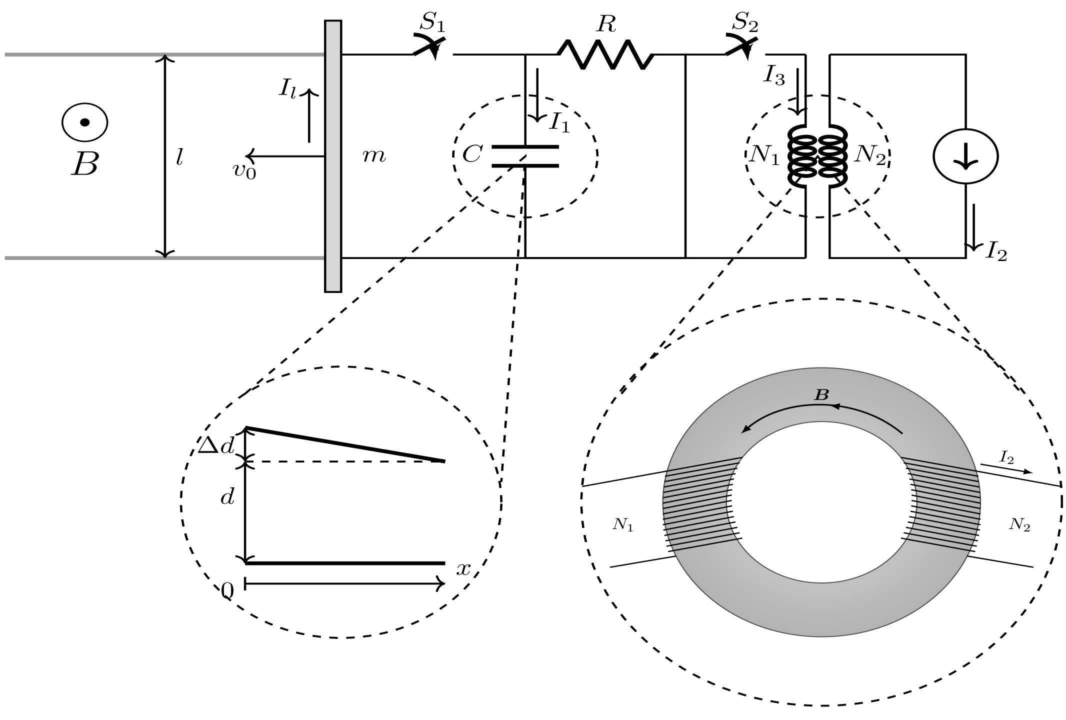


図6.3　問題 1

2 本の導線レールとの接触を保ったまま、導体棒を図の向きに一定値 v_0 で動かした。この時、金属棒は常に導体レールに垂直であり、導体棒はスイッチの開閉に関わらず図の向きに一定値 v_0 で動き続けるものとする。

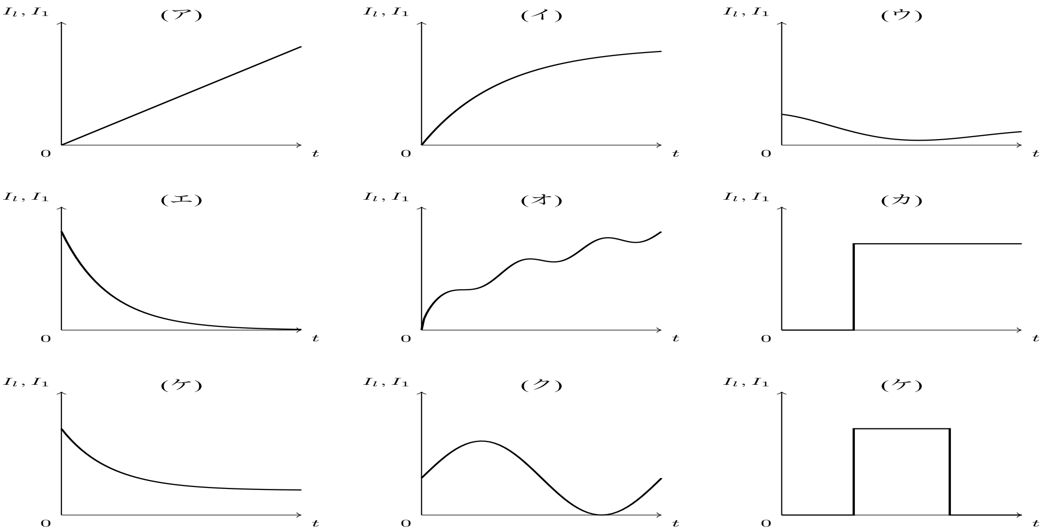
設問 (1)：　スイッチ S_1,S_2 が開いた状態において、一定の速さ v_0 で動いている金属棒には誘導機電力が生じる。この誘導起電力の大きさ V_P を答えよ。(v_0,B,l,R,C)

時刻 $t = 0$ でスイッチ S_1 のみを閉じると金属棒に電流 I_l、コンデンサには電流 I_1 が流れ、十分時間が経過した時、コンデンサの電荷 Q は一定となった。なお、電流源は電源オフの状態である。

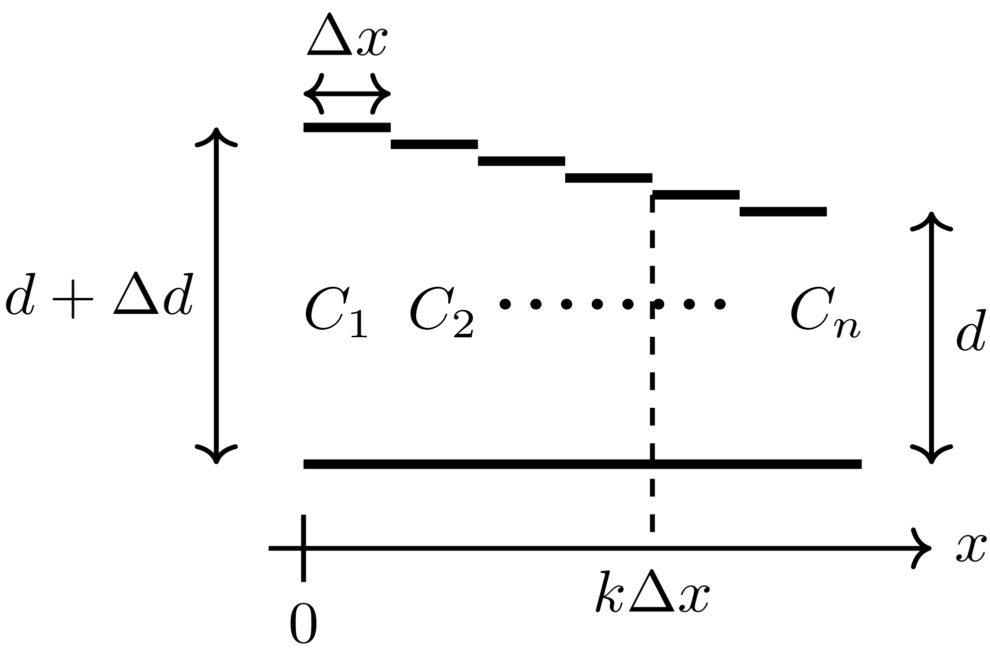
設問 (2)：　スイッチ S_1 のみを閉じた直後における金属棒を流れる電流 I_l を図 6.3の矢印の方向を正として符号も含めて答えよ。(v_0,B,l,R,C)

設問 (3)：　$t = 0$ から Q が一定となる時刻までの電流 I_l,I_1 の時刻 t に対する変化の概形として、最も適当なものを以下の選択肢 (ア) (ケ) から 1 つずつ選べ。

選択肢：



次に、コンデンサの静電容量 C について考えていく。極板を微小距離 Δx で分割した様子を以下に示す。



設問 (4)：　静電容量 C を求める以下の文章の空欄 $(a),(b),(c)$ を埋めよ。ただし、媒質は真空であり真空の誘電率は ε_0 である。必要なら、以下の式を用いて良い。

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + i\Delta x$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

k,n は自然数とする。静電容量 C のコンデンサは、極板を微小距離 Δx で n 分割することで、微小平行板コンデンサの並列接続とみなすことができる。極板間の距離は図の位置 $k\Delta x (1 \le k \le n)$ において、括弧内から必要なものを用いて $\boxed{(a) \quad (d,\Delta d,n,k)}$ と表せる。

また、微小平行版コンデンサの合成容量は、括弧内から必要なものを用いて、$\sum_{k=1}^{n} \boxed{(b) \quad (d,\Delta d,a,\varepsilon_0)}$ である。分割数 n が十分大きいとすると、微小平行版コンデンサの合成容量は、与えられた式を用いると、括弧内から必要なものを用いて $\boxed{(c) \quad (d,\Delta d,a,\varepsilon_0)}$ と表される。

最後に、電流源を電源オンの状態にし、それと同時にスイッチ S_1 を開き、S_2 を閉じた場合を考える。ここでは、簡単のため新たな時間軸 t' を導入し、$t' = 0$ でこれらの操作を行なったとする。

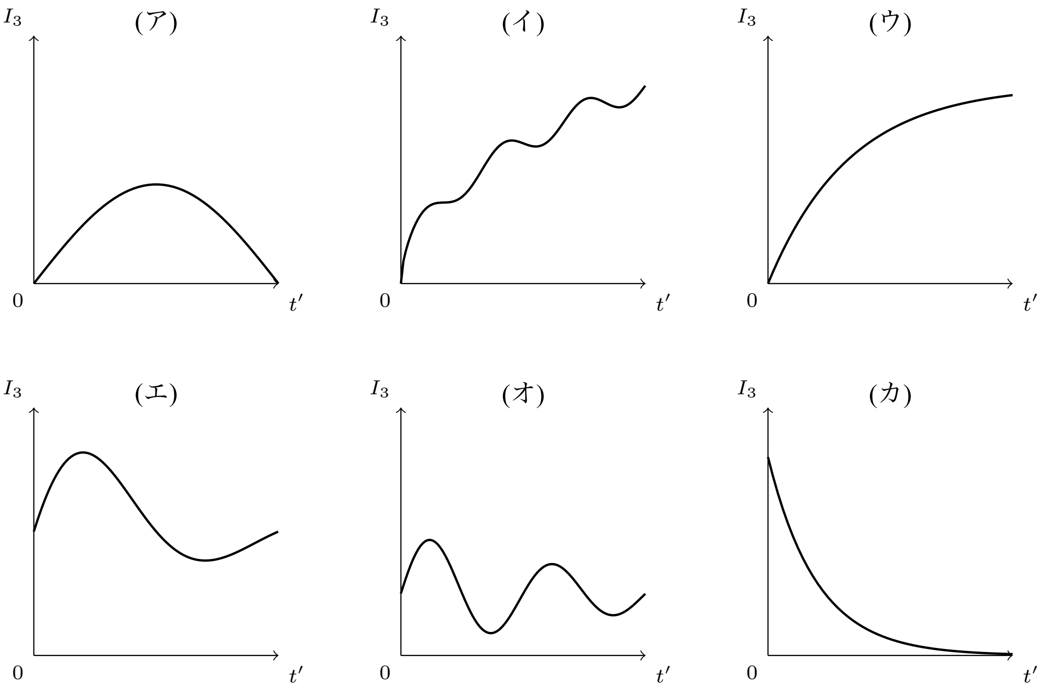
設問 (5)：　コイル 1 とコイル 2 の相互インダクタンスを求める次の文章の空欄 $(d), (e), (f), (g)$ を括弧内の文字から適当なものを用いて埋めよ。ただし、鉄心からの磁束漏れは無視できるものとする。

平均半径 r の円形 1 巻コイルに電流 I_2 が流れると、コイル内には電流に比例した磁界 $\boxed{(d)\quad (r, I_2)}$ が発生する。これより、N_2 巻のコイル内の磁界は、N_2 倍である $N_2 \times \boxed{(d)}$ となる。これに断面の面積 A と透磁率 μ をかけて、コイル 2 内の磁束は、$\boxed{(e)\quad (r, I_2, A, \mu)}$ となる。この磁束が全てコイル 1 を貫くため、微小時間 Δt での電流 I_2 の変化 ΔI_2 に対して、コイル 1 内の磁束の変化 $\Delta\Phi$ は、$\boxed{(f)\quad (r, \Delta I_2, A, \mu)}$ である。したがって、両辺を時間 Δt で割って巻き数を考慮すると、相互インダクタンスは $\boxed{(g)\quad (r, A, \mu, N_1, N_2)}$ となる。

設問 (6)：　スイッチを切り替えてから十分に時間が経過した後のコンデンサの電荷を求めよ。

設問 (7)：　$t' = 0$ から (6) の電荷になる時刻までのコイル 1 に流れる電流 I_3 の時刻 t' に対する変化の概形として、最も適当なものを以下の選択肢 (ア) (カ) から 1 つ選べ。

選択肢：



2.

図 6.4に示すような、スイッチと交流電源を含む RLC 直列回路を考える。振幅を V_0 として交流電源の電圧を $V_0 \sin \omega t$、抵抗の抵抗値を R、コンデンサの静電容量を C とする。時刻 $t = 0$ でスイッチ S を閉じた場合について以下の問いに答えよ。ただし、コンデンサの初期電荷は 0 であるとする。

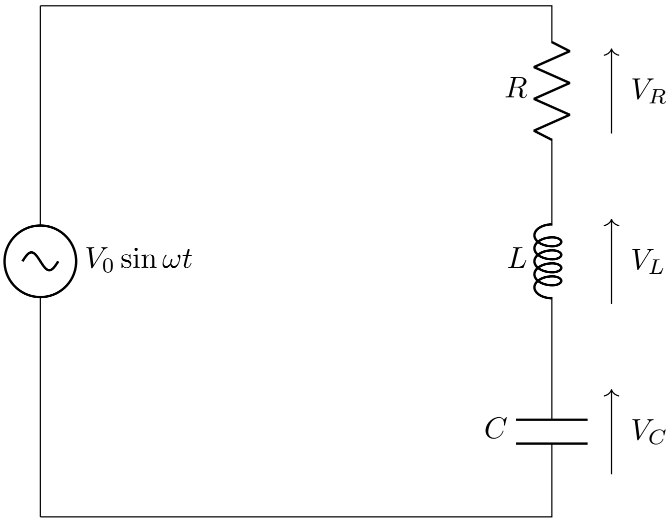


図6.4　問題 2

設問 (8)：　合成インピーダンスを求める以下の文章の空欄 $(h), (i), (j), (k)(l)(m)$ を括弧内の文字から適当なものを用いて埋めよ。

回路を流れる電流 I と、電源電圧の位相差を ϕ(定数) とすると、振幅 I_0(定数) として、$I = I_0 \sin(\omega t + \phi)$ と表される。

コイル L には、時刻 t に $V_L = \boxed{(h) \quad (C, L, I_0, \omega, t, \phi)}$ の起電力が生じる。ただし、V_L は図の矢印の始点に対する終点の電位である。

また、コンデンサ C には、時刻 t に $\boxed{(i) \quad (C, L, I_0, \omega, t, \phi)}$ の電荷が蓄えられている。

これより、キルヒホッフ第 2 法則から、交流電源の電圧 $V_0 \sin\omega t$ は、

$$V_0 \sin\omega t = \boxed{\text{(j)} \quad (C, L, I_0, \omega, t, \phi)}$$

この電流と電圧の関係から、振幅 V_0 は、I_0 を用いて、$V_0 = I_0 \times \boxed{(k) \quad (R, C, L, \omega)}$ と表され、合成インピーダンスの大きさは $\boxed{(k)}$ となる。
また、位相差 ϕ については、$\tan\phi = \boxed{(l) \quad (R, C, L, \omega, t)}$ である。

設問 (9)：　合成インピーダンスに着目して、流れる電流の振幅 I_0 が最大になるような周波数 f を計算過程を含めて示せ。(R, C, L, t)

* 解答用紙

設問 (1)：	設問 (2)：
設問 (3)：I_l	設問 (3)：I_1
設問 (4)：(a)	設問 (4)：(b)
設問 (4)：(c)	設問 (5)：(d)
設問 (5)：(e)	設問 (5)：(f)
設問 (5)：(g)	設問 (6)：
設問 (7)：	
設問 (8)：(h)	設問 (8)：(i)
設問 (8)：(j)	
設問 (8)：(k)	設問 (8)：(l)
(計算)	設問 (9)：(答)

* 解答 ([　] 内の数字は配点)

設問 (1)：	V_0Bl	[2]	設問 (2)：	$\frac{v_0Bl}{R}$	[2]
設問 (3)：I_l	(キ)	[3]	設問 (3)：I_1	**(エ)**	[3]
設問 (4)：(a)	$d+\Delta d\left(1-\frac{k}{n}\right)$	[3]	設問 (4)：(b)	$\varepsilon_0\frac{a\Delta x}{d+\Delta d\left(1-\frac{k}{n}\right)}$	[3]
設問 (4)：(c)	$\frac{\varepsilon_0 a}{\Delta d}\log\left(1-\frac{\Delta d}{d}\right)$	[4]	設問 (5)：(d)	$\frac{I_2}{2\pi r}$	[2]
設問 (5)：(e)	$\frac{\mu A}{2\pi r}I_2$	[3]	設問 (5)：(f)	$\frac{\mu A}{2\pi r}\Delta I_2$	[2]
設問 (5)：(g)	$\frac{\mu AN_1}{2\pi r}$	[3]	設問 (6)：	0	[2]
設問 (7)：	(ア)	[3]			
設問 (8)：(h)	$I_0\omega L\cos(\omega t+\phi)$	[2]	設問 (8)：(i)	$-\frac{I_0}{\omega}\cos(\omega t+\phi)$	[2]
設問 (8)：(j)	$I_0\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}\sin(\omega t+\phi)$	[2]			
設問 (8)：(k)	$\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}$	[2]	設問 (8)：(l)	$\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}$	[3]

(計算)　$I_0=\frac{V_0}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$ であり V_0 は一定なので、

I_0 が最大の時は $\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}$ は最小になる。よって、$\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ から、求める周波数は、

$f=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

設問 (9)：(答)	$\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$	[4]

* 解説

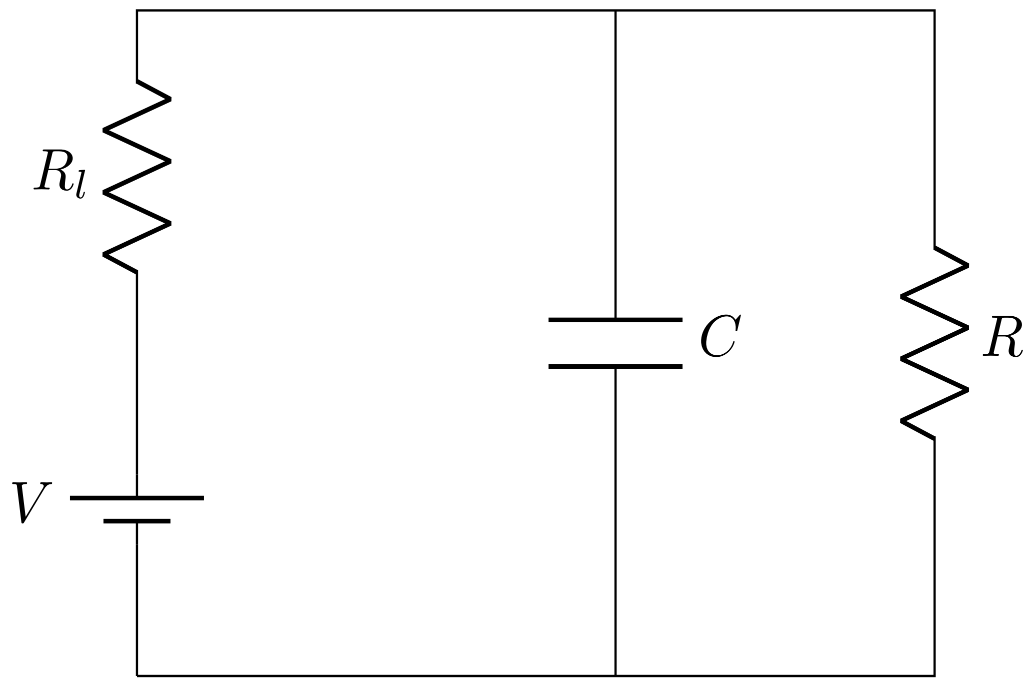
設問 (1)：　導体棒は速さ v_0 で運動し、空間に存在する磁束密度が B、導線レールの間隔が l より、求める電位 V_P は、

$$V_P = \boldsymbol{v_0 B l}$$

設問 (2)：　スイッチを入れた直後において、コンデンサは同線と同等である。また、フレミングの左手の法則から、導体棒を流れる電流 I_l は正であり、導体棒の抵抗値が R_l なので、

$$I_l = \frac{\boldsymbol{v_0 B l}}{\boldsymbol{R}}$$

設問 (3)：　誘導起電力は時間によらず一定であるので、直流電流源に置き換えられ、スイッチ S_1 のみを閉じた時の等価回路は以下のようになる。



続き：　$t=0$ の時、設問 (2) から、抵抗 R には電流が流れないので、

$$I_l = I_1 = \frac{V_p}{R} = \frac{v_0 B l}{R}$$

また、$t \to \infty$ の時、コンデンサは開放扱いになるので、$I_1 = 0$ であり、

$$I_l = \frac{V_p}{R + R_l} = \frac{v_0 B l}{R + R_l}$$

電流は滑らかに変動するので、これらの条件を満たすグラフはそれぞれ、I_l：**(キ)**　　I_1：**(エ)**

設問 (4)：　(a)　x 座標が Δx 進むごとに $\frac{\Delta d}{n}$ 極板間距離が短くなる。よって $k\Delta x$ では、

$$d + \Delta d - \frac{\Delta d}{n} k = \boldsymbol{d + \Delta d \left(1 - \frac{k}{n}\right)}$$

(b)　$C = \varepsilon \frac{S}{d}$ から、面積 S は $S = a\Delta x$、距離 d は、(a) の式、誘電率 ε は、$\varepsilon = \varepsilon_0$ より、並列合成を行うと、

$$\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\varepsilon_0 \frac{a\Delta x}{d + \Delta d \left(1 - \frac{k}{n}\right)}}$$

(c)　区分求積の式から、$n \to \infty$ として $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\varepsilon_0 \frac{a\Delta x}{d + \Delta d \left(1 - \frac{k}{n}\right)}}$ を積分に変形して合成容量を求めると、

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_0 \frac{a}{d + \Delta d \left(1 - \frac{k}{n}\right)} \Delta x &= \int_0^1 \varepsilon_0 \frac{a}{d + \Delta d (1 - x)}\, dx \\
&= \varepsilon_0 a \left(-\frac{1}{\Delta d}\right) \Big[\log\{d + \Delta d (1 - x)\}\Big]_0^1 \\
&= \boldsymbol{\frac{\varepsilon_0 a}{\Delta d} \log\left(1 + \frac{\Delta d}{d}\right)}.
\end{aligned}$$

設問 (5)：　(d)　円形 1 巻きコイル内の磁界 H の公式から、

$$H = \frac{I_2}{2\pi r}$$

(e)　磁束 Φ は、磁界 H に透磁率 μ と、面積 A をかけたものであるので、

$$\Phi = \mu HA = \mu A 2\pi r I_2$$

(f)　(e) の式から、$\frac{\mu A}{2\pi r}$ は定数であるので、I_2 が ΔI_2 変化すると、磁束 Φ は $\Delta\Phi$ 変化し、この関係は次の式で表される。

$$\Delta\Phi = \frac{\mu A}{2\pi r}\Delta I_2$$

(g)　(f) を両辺 Δt で割ると、

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{\mu A}{2\pi r}\frac{\Delta I_2}{\Delta t}$$

相互インダクタンスは、コイル 2 に電流を流した時のコイル 1 の磁束変化について考えるので、両辺にコイル 1 の巻き数 N_1 をかけて、

$$N_1\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{\mu A N_1}{2\pi r}\frac{\Delta I_2}{\Delta t}$$

これは、ファラデーの電磁誘導の法則の式を表している。したがって、$\frac{\Delta I_2}{\Delta t}$ の係数が相互インダクタンス M であり、

$$M = \frac{\mu A N_1}{2\pi r}$$

設問 (6)：　スイッチを切って十分時間が経過したとき、コンデンサに蓄えられた電荷は全て抵抗でのジュール熱に変換される。したがって、

$$Q = 0$$

設問 (7)：　$t=0$ では、コイルには電流は流れないので $I_2=0$ であり、$t\to\infty$ では、コイルは導線として振る舞うものの、コイルやコンデンサに蓄えられていたエネルギーは全てジュール熱に変換される。よって、コイルにはエネルギーが蓄えられておらず、$I_2=0$ である。また、ジュール熱が発生するには、ある時刻において電流が流れる必要があるので、これらの条件を満たす選択肢は、**(ア)**のみである。

設問 (8)：　(h)　コイルの電圧 V_l(図の矢印の始点に対する終点の電位が正) は、

$$V_L = L\frac{dI}{dt} = \boldsymbol{I_0\omega L\cos(\omega t+\phi)}$$

(i)　コンデンサには $Q=\int_0^t I(t')dt'$ の電荷が蓄えられているので、

$$Q=\int_0^t I_0\sin(\omega t'+\phi)dt' = \boldsymbol{-\frac{I_0}{\omega}\cos(\omega t+\phi)}$$

(j)　(i) から、コンデンサの電圧 V_C は、

$$V_C=\frac{Q}{C}=-\frac{I_0}{\omega C}\cos(\omega t+\phi)$$

これらとオームの法則を用いて、求める交流電源の電圧 $V_0\sin\omega t$ は、

$$\begin{aligned}V_0\sin\omega t &= V_R+V_L+V_C\\ &= I_0R\sin(\omega t+\phi)+I_0\omega L\cos(\omega t+\phi)-\frac{I_0}{\omega C}\cos(\omega t+\phi)\\ &= I_0\Big\{R\sin(\omega t+\phi)+\big(\omega L-\frac{1}{\omega C}\big)\cos(\omega t+\phi)\Big\}\end{aligned}$$

続き：　ここで、電流と電圧の位相差は Φ と定義したので、整合を取るために、偏角を Φ と置き換えて上式を合成すると、

$$V_0 \sin\omega t = \boldsymbol{I_0\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \sin\left(\omega t + \phi\right)}$$

(k)　(j) から、電流の振幅と電圧の振幅の関係は、sin の振動項を無視して、

$$V_0 = I_0\sqrt{\boldsymbol{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

なお、この式から合成インピーダンスの大きさは、$\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ である。

また位相差 ϕ は、位置ベクトル $(R, \omega L - \frac{1}{\omega C})$ と x 軸との成す角であるので、

$$\tan\phi = \boldsymbol{\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}}$$

設問 (9)：* 解答参照