* 解答 ([　] 内の数字は配点)

(ア)：	0	[2]	(イ)：	0	[2]
(ウ)：	CV	[3]	(エ)：	$\frac{dq(t)}{dt}+L\frac{d^2q(t)}{dt^2}+\frac{q(t)}{C}$	[3]

(計算)　$q(t)=e^{-kt}$ を微分方程式に代入して、
$Lk^2e^{-kt}-Rke^{-kt}+\frac{1}{C}e^{-kt}=0$
この式の両辺を $e^{-kt}(>0)$ で割ると、$Lk^2-Rk+\frac{1}{C}=0$
よって、$k=\frac{R\pm\sqrt{R^2-4\frac{L}{C}}}{2L}$

問 (1)：(答)　$\frac{R\pm\sqrt{R^2-4\frac{L}{C}}}{2L}$　[5]

問 2：解 k が (i) 異なる二つの正の実数、(ii) 正の重解、(ii) 異なる二つの虚数解を持つ場合について考える。また $q(t)=e^{-kt}$ の時 $t_{\frac{1}{e}}=\frac{1}{k}$ であるから $\frac{1}{k}$ の大小について考える。

(i) の時、二つの実数解を $k_1=\frac{R+\sqrt{R^2-4\frac{L}{C}}}{2L}$,$k_2=\frac{R-\sqrt{R^2-4\frac{L}{C}}}{2L}$ とすると、時刻 t が十分大きい時、指数項について $|e^{k_1t}|<<|e^{-k_2t}|$ であるので、$q(t)\approx e^{-k_2t}$ と近似でき、$t_{\frac{1}{e}}\approx\frac{2L}{R-\sqrt{R^2-4\frac{L}{C}}}$

(ii) の時、重解は、$k_1=k_2=\frac{R}{2L}$ であるので、$t_{\frac{1}{e}}\approx\frac{2L}{R}$

(iii) の時、二つの虚数解を $k_1=\frac{R+i\sqrt{4\frac{L}{C}-R^2}}{2L}$,$k_2=\frac{R-i\sqrt{4\frac{L}{C}-R^2}}{2L}$ とすると、
指数項について $e^{k_1t}=e^{-\frac{R}{2L}t}\cdot e^{i\frac{\sqrt{4\frac{L}{C}-R^2}}{2L}t}$,$e^{-k_2t}=e^{-\frac{R}{2L}t}\cdot e^{i\frac{\sqrt{4\frac{L}{C}-R^2}}{2L}t}$ であり、$|e^{ix}|=\sqrt{cos^2x+sin^2x}=1$ から、$|e^{k_1t}|=|e^{-k_2t}|=e^{-\frac{R}{2L}t}$ であり、$t_{\frac{1}{e}}\approx\frac{2L}{R}$
(i)〜(iii) から、最も遅いのは (i) の異なる二つの正の実数解を持つ時であり、これは二次方程式の判別式から、$R^2-4\frac{L}{C}>0$ の時である。　[5]

(1)：	$\frac{1}{s^2}$	[3]	(2)：	$Ri(t)$	[2]
(3)：	$\frac{V}{s}$	[3]	(4)：	$R\mathcal{L}\{i(t)\}$	[2]
(5)：	$\frac{V}{Rs}$	[3]	(6)：	$\frac{V}{R}$	[2]

(7)：　$\left(Ls^2+Rs+\frac{1}{C}\right)\mathcal{L}\{q(t)\}-Q_0(R-Ls)$　[5]

(8)：　$\frac{Q_0(R-Ls)}{Ls^2+Rs+\frac{1}{C}}$　[5]

(計算)　方程式 $Ls^2+Rs+\frac{1}{C}=0$ の解 s_1,s_2 は、
$s_1=\frac{-R+\sqrt{R^2-4\frac{L}{C}}}{2L}$,$s_2=\frac{-R-\sqrt{R^2-4\frac{L}{C}}}{2L}$ であり、部分分数分解をして、
$$\mathcal{L}\{q(t)\}=\frac{Q_0}{L}\left\{\frac{\frac{3}{2}R}{\left(s+\frac{R}{2L}\right)^2+\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}-\frac{L\left(s+\frac{R}{2L}\right)}{\left(s+\frac{R}{2L}\right)^2+\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}\right\}$$
シフト定理と、$\sin\omega t$,$\cos\omega t$ のラプラス変換から、
$$q(t)=\frac{Q_0}{L}\frac{\frac{3}{2}R}{\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}}e^{-\frac{R}{2L}t}\sin\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}t-Q_0e^{-\frac{R}{2L}t}\cos\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}t$$

(9)：(答) $q(t)=\left(\frac{3Q_0R}{2L\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}}\sin\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}t-Q_0\cos\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}t\right)e^{-\frac{R}{2L}t}$　[5]

* 解説

(ア)(イ)： スイッチ S_1 を入れて十分時間が経過した時、コンデンサには電流が流れず、コイルは導線と等価なので、

$$V_R = \mathbf{0}, \quad V_L = \mathbf{0}$$

(ウ)： スイッチ S_1 を入れて十分時間が経過した時、コンデンサは充電され、キルヒホッフ第 2 法則からコンデンサの電圧は V なので、

$$Q_0 = \boldsymbol{CV}$$

(エ)： 電流は $q(t)$ を用いて、$\frac{dq(t)}{dt}$ と表せる。よって、抵抗での電圧降下は $V_L = R\frac{dq(t)}{dt}$ である。同様に、コイルの電圧降下は $L\frac{dI}{dt}$ に $I = \frac{dq(t)}{dt}$ を代入すると、$V_L = L\frac{d^2q(t)}{dt^2}$ と表せる。コンデンサの電圧は、$q(t)$ を用いて、$V_C = \frac{q(t)}{C}$ と表されるので、電圧則の式は、

$$0 = \boldsymbol{R\frac{dq(t)}{dt} + L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{q(t)}{C}}$$

問 1, 問 2：* 解答参照

(1)： ラプラス変換の定義式から、$\mathrm{Re}(s) > 0$ として、

$$F(s) = \lim_{T\to\infty}\int_0^T t\,e^{-st}\,dt = \left[-\frac{t}{s}e^{-st}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{s}e^{-st}\,dt = \boldsymbol{\frac{1}{s^2}}, \quad \mathrm{Re}(s) > 0$$

(2)： オームの法則から、

$$V_R = \boldsymbol{Ri(t)}$$

(3)： ラプラス変換の線形性から、

$$\mathcal{L}\{V\} = V\mathcal{L}\{1\} = \boldsymbol{\frac{V}{s}}$$

(4)： ラプラス変換の線形性から、

$$\mathcal{L}\{Ri(t)\} = \boldsymbol{R\mathcal{L}\{i(t)\}}$$

(5)： オームの法則 $V = Ri(t)$ から、両辺をラプラス変換すると、(3)(4) の結果から、

$$\frac{V}{s =} R\mathcal{L}\{i(t)\} \qquad \therefore \mathcal{L}\{i(t)\} = \boldsymbol{\frac{V}{Rs}}$$

(6)： ラプラス変換の線形性と、$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\} = 1$ から、

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{V}{Rs}\} = \frac{V}{R}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\} = \boldsymbol{\frac{V}{R}}$$

(7)： 時刻 $t = 0$ で流れる電流は $\frac{dq(0)}{dt} = 0$ であり、初期電荷は Q_0 であるので、ラプラス変換表から、

$$\mathcal{L}\{\frac{dq(t)}{dt}\} = s\mathcal{L}\{q(t)\} - Q_0, \qquad \mathcal{L}\{\frac{d^2q(t)}{dt^2}\} = s^2\mathcal{L}\{q(t)\} - sQ_0$$

となる。よって、微分方程式の両辺ラプラス変換すると、

$$0 = R\left(s\mathcal{L}\{q(t)\} - Q_0\right) + L\left(s^2\mathcal{L}\{q(t)\} - sQ_0\right) + \frac{q(t)}{C}$$

これを整理して、

$$0 = \boldsymbol{\left(Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}\right)\mathcal{L}\{q(t)\} - Q_0(R - Ls)}$$

(8)： (7) の式を $\mathcal{L}\{q(t)\}$ について解くと、

$$\mathcal{L}\{q(t)\} = \boldsymbol{\frac{Q_0(R - Ls)}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}}}$$

(9)：* 解答参照