* 解答 ([　] 内の数字は配点)

(ア)：	y	[4]	(イ)：	$\frac{2kqy}{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$	[5]
(ウ)：	$-\frac{4kq^2y}{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$	[5]	(エ)：	**周期**	[5]

(計算)　F_y 中の y^2 の項を無視すると $a^2+y^2 \approx a^2$ となるので、F_y の近似式は $F_y \approx -\frac{4kq^2}{a^3}y$ となる。よって、電荷 P は F_y を復元力とした単振動をする。

よって、求める周期 T は $T = \frac{\pi a}{q}\sqrt{\frac{ma}{k}}$

設問 (1)：	(答)	$\frac{\pi a}{q}\sqrt{\frac{ma}{k}}$	[8]
設問 (2)：		$\frac{4qd}{5ma}\sqrt{\frac{6k}{a}}$	[5]

(オ)：	qv_0B	[4]	(カ)：	$\frac{mv_0}{qB_0}$	[5]
(キ)：	$ma=-kv$	[5]	(ク)：	(f)	[5]

設問 (3)：	$\frac{k}{m}$	[5]

(計算)　軌道の半径 r は $r = \frac{mv_0}{qB_0}$ であり、電荷に働くローレンツ力は $qvB(t) = qe^{-\frac{k}{m}t}B(t)$ である。よって円運動の運動方程式から $m\frac{v^2}{r} = qe^{-\frac{k}{m}t}B(t)$。

よって、求める磁束密度 $B(t)$ は $B(t) = \frac{B_0}{v_0}e^{-\frac{k}{m}t}$

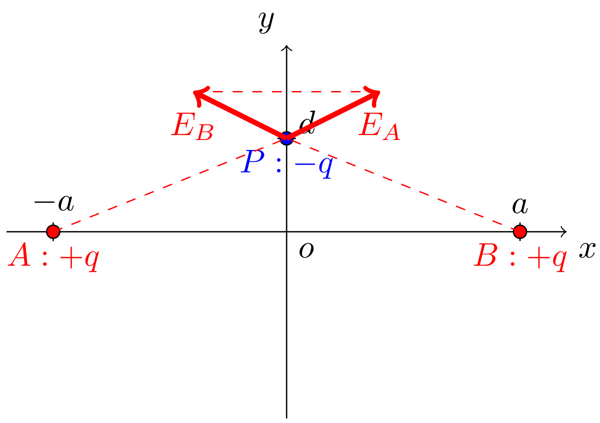
設問 (4)：	(答)	$\frac{B_0}{v_0}e^{-\frac{k}{m}t}$	[8]

設問 (5)：	Nk	[2]	設問 (6)：	$\frac{Nk}{R}$	[2]
設問 (7)：	$\frac{N^2R^2}{R}$	[3]	設問 (8)：	Nk	[3]
設問 (9)：	$-Nk$	[2]	設問 (10)：	$\frac{1}{2}C(Nk)^2$	[2]
設問 (11)：	$-\frac{k}{m}\left(x-\frac{VBl}{Rk}\right)$	[3]	設問 (12)：	$2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$	[3]
設問 (13)：	$a=\pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$	[3]	設問 (13)：	$B=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	[3]
設問 (14)：	$-\left(\frac{VBl}{Rk}+d\right)$	[3]	設問 (15)：	$\cos at$	[3]
(ケ)：	$r_n\omega B\Delta r$	[4]	(コ)：	$r_k\omega B\Delta r$	[5]
(サ)：	$\frac{1}{2}\left(b^2-a^2\right)\omega B$	[5]	(シ)：	$\frac{\left(b^2-a^2\right)\omega B}{2R}$	[5]
(ス)：	$\frac{\left(b^2-a^2\right)(b-a)\omega B}{2R}$	[4]	(セ)：	$\frac{\left(b^2-a^2\right)^2\omega B}{4R}$	[5]
設問 (16)：	$\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}$	[3]	設問 (17)：	$\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$	[3]

設問 (18)：	周波数	$\frac{1}{\pi}\cdot\frac{LC}{RC+\sqrt{(RC)^2+4LC}}$	[3]
設問 (18)：	振幅	$\frac{V_0}{\sqrt{2}R}$	[3]

* 解説

問題 I： 点電荷には以下のような E_A,E_B の電界ベクトルが存在する。



続き： ベクトルの x 成分は、打ち消し合うので、y成分のみ考える。
クーロンの法則から、電界 E_A,E_B は、$+y$ 正として

$$E_A = k\frac{q}{(a^2+y^2)} \times \frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}}, \qquad E_B = -k\frac{q}{(a^2+y^2)} \times \frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}}$$

よって、求める電界 $\boldsymbol{E_A} + \boldsymbol{E_B}$ は、

$$\boldsymbol{E_A} + \boldsymbol{E_B} = \boldsymbol{\frac{2kqy}{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

電荷 P が受ける力 F_y は、電界に電気量 $2q$ をかけて、

$$F_y = -\boldsymbol{\frac{4kq^2y}{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

電荷には $y=0$ を中心とした対称な力 (奇関数) が働くので、導体棒は**周期**運動をする。

設問 (1)： F_y 中の y^2 の項を無視すると、

$$a^2 + y^2 \approx a^2$$

となるので、F_y の近似式は、

$$F_y \approx -\frac{4kq^2}{a^3}y$$

よって、電荷 P は、F_y を復元力とした単振動をするので、求める周期 T は、

$$T = \boldsymbol{\frac{\pi a}{q}\sqrt{\frac{ma}{k}}}$$

設問 (2)： 単振動の力学的エネルギー保存則から、速さを v として、

$$\frac{1}{2}\left(\frac{4kq^2}{ma^3}\right)d^2\left(\frac{d}{5}\right)^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

これを整理して、

$$v = \boldsymbol{\frac{4qd}{5ma}\sqrt{\frac{6k}{a}}}$$

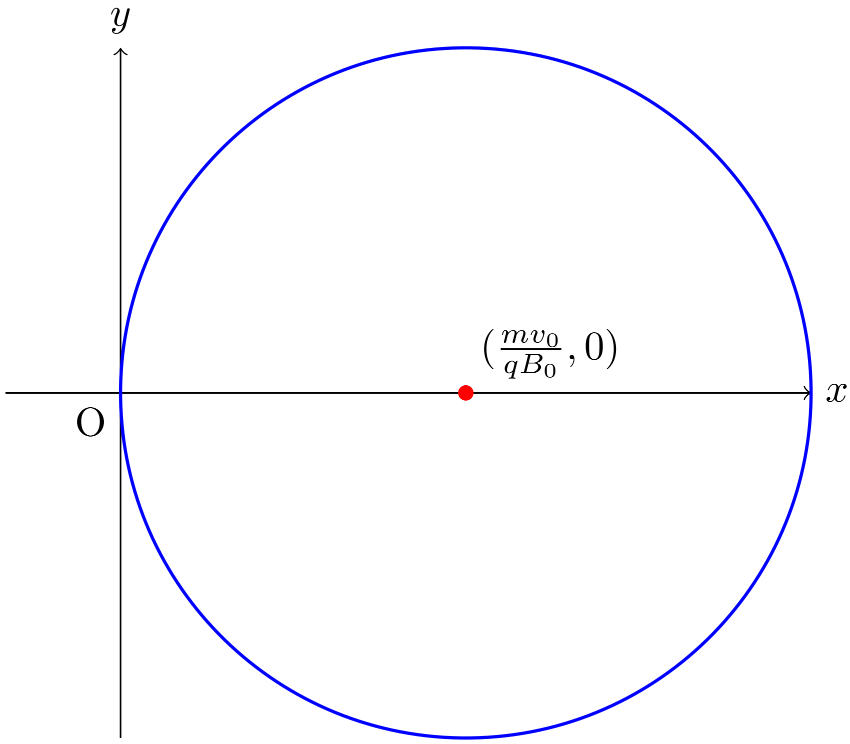
問題 II： 電荷には、ローレンツ力がはたらくので、

$$F = \boldsymbol{qv_0B_0}$$

であり、フレミングの法則から、電荷は力 F を向心力とする円軌道を描く。よって、円運動の運動方程式から、

$$m\frac{v_0^2}{r} = qv_0B_0 \qquad \therefore r = \boldsymbol{\frac{mv_0}{qB_0}}$$

また円軌道は次のようになる。



続き： 速度方向の運動方程式は抗力 f を考えて、

$$\boldsymbol{ma = -kv}$$

また、速度ベクトルとは逆向きの加速度ベクトルで、終端速度は 0 になるので速度は単調に減少して 0 に収束する、(f)である。

設問 (3)： 運動方程式から、$a = \frac{dv}{dt}$ として、

$$m\frac{dv}{dt} = -kv \qquad - \quad (1)$$

と表される。$v = Ce^{-\alpha t}$ について、$\frac{dv}{dt} = -\alpha e^{-\alpha t}$ であるから、(1) の運動方程式に代入すると、

$$m\alpha e^{-\alpha t} = -ke^{\alpha t} \qquad \therefore \alpha = \frac{k}{m}$$

よって、求める α の値は、

$$\alpha = \boldsymbol{\frac{k}{m}}$$

設問 (4)： 軌道の半径 r は

$$r = \frac{mv_0}{qB_0}$$

であり、電荷にはたらくローレンツ力は、

$$qvB(t) = qe^{-\frac{k}{m}t}B(t)$$

よって、円運動の運動方程式から、

$$m\frac{v^2}{r} = qe^{-\frac{k}{m}t}B(t)$$

よって、求める磁束密度 $B(t)$ は、

$$B(t) = \boldsymbol{\frac{B_0}{v_0}e^{-\frac{k}{m}t}}$$

問題 III：

設問 (5)：　ファラデーの電磁誘導の法則から、

$$E = N\frac{d\Phi}{dt} = \boldsymbol{Nk}$$

設問 (6)：　オームの法則から、から、流れる電流 i は、

$$Nk = Ri \qquad \therefore i = \boldsymbol{\frac{Nk}{R}}$$

設問 (7)：　抵抗での消費電力は、

$$Ei = \boldsymbol{\frac{N^2k^2}{R}}$$

設問 (8)(9)：　スイッチを開いた瞬間、コンデンサは充電されていたので、コンデンサの電圧は

$$V_C = \boldsymbol{Nk}$$

であり、この時回路には電流が流れず、抵抗での電圧降下は 0 である。よって、回路方程式より、

$$V_R + V_L + V_C = 0 \qquad \therefore V_L = \boldsymbol{-Nk}$$

設問 (10)：　コンデンサに蓄えられていた静電エネルギーが全てジュール熱に変換されるので、求めるジュール熱 W は、

$$W = \boldsymbol{\frac{1}{2}C(Nk)^2}$$

問題 IV：

設問 (11)： 導体棒に流れる電流 I はオームの法則から、

$$I = \frac{V}{R}$$

よって、導体棒が磁界から受ける力の F は、$+x$ 方向を正として、

$$F = BIl = \frac{VBl}{R}$$

導体棒の加速度は、$\frac{d^2x}{dt^2}$ であり、導体棒は、ばねからも $-kx$ の力を受けるので、運動方程式は、

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{VBl}{R} - kx = -k\left(x - \frac{VBl}{Rk}\right)$$

したがって、加速度は、

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{VBl}{mR} - \frac{kx}{m} = \boldsymbol{-\frac{k}{m}\left(x - \frac{VBl}{Rk}\right)}$$

設問 (12)： 設問 (11) の式から、導体棒は $\frac{VBl}{Rk}$ を中心とする単振動をする。復元力は、$-k\left(x - \frac{VBl}{Rk}\right)$ なので、求める周期 T は、

$$T = \boldsymbol{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

設問 (13)： $x = Ae^{at} + B$ であるから、加速度 $\frac{d^2x}{dt^2}$ は、

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a^2Ae^{at}$$

これを方程式に代入して、

$$ma^2Ae^{at} = -k\left(Ae^{at} + B - \frac{VBl}{Rk}\right)$$

この式を整理して、

$$(ma^2 + k)Ae^{at} + \frac{VBl}{R} - Bk = 0$$

この恒等式が成立するには、

$$ma^2 + k = 0,$$
$$\frac{VBl}{R} - Bk = 0$$

したがって、求める a,B は、

$$a = \boldsymbol{\pm i\sqrt{\frac{k}{m}}}$$
$$B = \boldsymbol{\frac{VBl}{Rk}}$$

設問 (14)　設問 (13) から、位置 x は、

$$x = Ae^{\pm i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + \frac{VBl}{Rk}$$

ここで、初期条件から、$t = 0$ で $x = -d$ であるから、これらを代入して、

$$-d = A + \frac{VBl}{Rk} \qquad \therefore A = \boldsymbol{-\left(\frac{VBl}{Rk} + d\right)}$$

設問 (15)： 解 x は、a,A,B を代入して

$$x = -\left(\frac{VBl}{Rk} + d\right) e^{\pm i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + \frac{VBl}{Rk}$$

導体棒は $\frac{VBl}{Rk}$ を中心とする単振動をし、初期位置は $x = -d$ であるため、$-cos$ 型の振動をする。(初期位相が $\frac{3}{2}\pi$)
したがって、

$$Re(e^{at}) = \boldsymbol{\cos at}$$

問題 V： 半径 r_n の円運動の速さは、Δr 中の電荷の速さはどれも等しいので、近似的に $r_n\omega$ であり、l は今回 Δr なので、誘導機電力の式 vBl から、

$$\Delta E = \boldsymbol{r_n \omega B \Delta r}$$

回路全体ではこれら起電力 (電位) の $k=1$ から $k=n$ までの和を取るので、近似的に、

$$\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{r_k \omega B \Delta r}$$

また、区分求積法から、$n \to \infty$ の時、$r_k \to r$、$\Delta r \to dr$ とすると、$(a \leq r \leq b)$ で、

$$E = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} r_k \omega B \Delta r = \int_a^b \omega B r dr = \boldsymbol{\frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right)\omega B}$$

回路を流れる電流 I は、$E = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right)\omega B$ と、オームの法則から、

$$I = \boldsymbol{\frac{\left(b^2 - a^2\right)\omega B}{2R}}$$

これより、微小距離 Δr で磁界から受ける力 ΔF は、BIl から、

$$\Delta F = BI\Delta r$$

であるので、区分求積法から、$\Delta r \to dr$ として $(a \leq r \leq b)$ において、

$$F = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} BI\Delta r = \int_a^b BIdr = \boldsymbol{\frac{\left(b^2 - a^2\right)(b-a)\omega B}{2R}}$$

力のモーメントについては、Δr 中の導体棒において、半径は一律 r_n であるから、中心まわりの微小の力のモーメント ΔM は、

$$\Delta M = \Delta F \cdot r_n = BIr_n\Delta r$$

ここでも区分求積法によって求めていくと、$r_k \to r$、$\Delta r \to dr$ として $(a \leq r \leq b)$ において、

$$M = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} BIr_n\Delta r = \int_a^b BIrdr = \boldsymbol{\frac{\left(b^2 - a^2\right)^2 \omega B}{4R}}$$

問題 VI：

設問 (16)： 合成インピーダンスの大きさ Z は、同一電流に対する sin 型、$cos(-cos)$ 型の係数に着目して、

$$Z = \sqrt{\boldsymbol{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

設問 (17)： 電流の振幅が最大になる時、合成インピーダンスの大きさ Z は最小となるので、条件は、

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \qquad \therefore \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

したがって、求める周波数は、

$$\frac{\omega}{2\pi} = \boldsymbol{\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$$

設問 (18)： 設問 (16) から、電流が最大振幅の時の合成インピーダンスの大きさは $\omega = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ を代入して、$Z = R$ なので、最大の電流振幅 i_{max} は、

$$i_{max} = \frac{V_0}{R}$$

よって、最大振幅の $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍は、

$$\frac{1}{\sqrt{2}} i_{max} = \boldsymbol{\frac{V_0}{\sqrt{2}R}}$$

また、この時インピーダンス大きさは、オームの法則から、電流が最大振幅の時の $\sqrt{2}$ 倍なので、$\sqrt{2}R$ 隣、この時の電源の周波数は、

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = R^2$$

ω についてとくと、$\omega > 0$ から、

$$\omega = \frac{RC + \sqrt{(RC)^2 + 4LC}}{2LC}$$

したがって、求める周波数は、

$$\frac{2\pi}{\omega} = \boldsymbol{\frac{1}{\pi} \cdot \frac{LC}{RC + \sqrt{(RC)^2 + 4LC}}}$$