20** 年度
最難関大学レベル
模擬試験（物理）

電磁気学分野

試験時間：30 分　配点：50 点

注意事項

- 解答はすべて所定の解答欄に記入すること。解答欄以外に記入したものは採点対象とならない。
- 図や表は、問題文中に示されたものを利用し、不足する場合は自分で補助図を描いてよい。
- 解答には与えられた文字のみを用い、必要に応じて計算過程も簡単に示せ。
- 試験時間は 30 分とし、設問全てに解答せよ。
- 答案には必ず氏名・受験番号を記入すること。

模擬試験

Physics Practice Test

物理　問題 I

1.

図 1に示すように、スイッチ S_1,S_2 と電源電圧 V の直流電源を含んだ RLC 直列回路について考えていく。抵抗の抵抗値は R、コイルの自己インダクタンスは L、コンデンサの静電容量は C とする。以下の設問では、まずスイッチ S_1 を閉じてコンデンサを充電し、スイッチ S_1 を開くと同時にスイッチ S_2 を閉じた時の挙動を調べていく。各空欄の最後に与えられた括弧内の物理量の中から、適当なものを用いて空欄 (ア)〜(エ) に入る適当な数式を示し、問 1, 問 2 に答えよ。

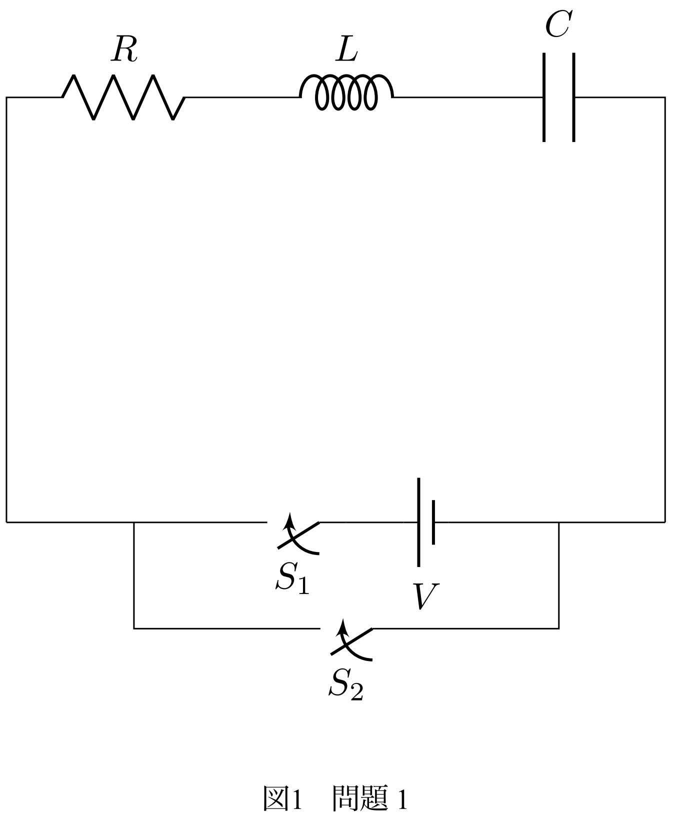


図1　問題 1

(a) まず、スイッチ S_1 を閉じて十分時間が経過した時について考える。抵抗での電圧降下 $V_R = \boxed{\text{(ア)}\quad (V, R, C, L)}$ であり、コイルに加わる電圧 V_L= $\boxed{\text{(イ)}\quad (V, R, C, L)}$ である。また、コンデンサに蓄えられた電荷 Q_0 は、 $\boxed{\text{(ウ)}\quad (V, R, C, L)}$ である。

(b) 十分時間が経過したあとスイッチ S_1 を開き、それと同時にスイッチ S_2 閉じた。この操作を行なった時刻を $t = 0$ とし、時刻 t におけるコンデンサに蓄えられた電荷を $q(t)$ として、キルヒホッフの第二法則から微分方程式は、

$$0 = \boxed{\text{(エ)}\quad (V, R, C, L, t, q(t))}$$

と表される。
ここで、この微分方程式の解 $q(t)$ は、k を定数として $q(t) = e^{-kt}$ と仮定できる。

問 1： 文章中の解 $q(t)$ に含まれる定数 k を求めよ。ただし、k は複素数として場合分けは不要である。(計算過程も示すこと。)

問 2： 電荷の減少速度が最も遅いのはどういう時か。また、その根拠を数式を用いて記述せよ。ただし、減少速度は電荷の絶対値が $\frac{1}{e}$ 倍になる時間 $t_{\frac{1}{e}}$ を比較するものとし、この時刻は十分大きいと仮定する。必要であれば、

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

を用いて良い。

2.

図 1の RLC 回路を以下に示すラプラス変換を用いて考えていく。各空欄の最後に与えられた括弧内の文字の中から、適当なものを用いて空欄 (1)〜(8) に入る適当な数式を示し、問に答えよ。なお、問は計算過程を示すこと。

ラプラス変換とは、

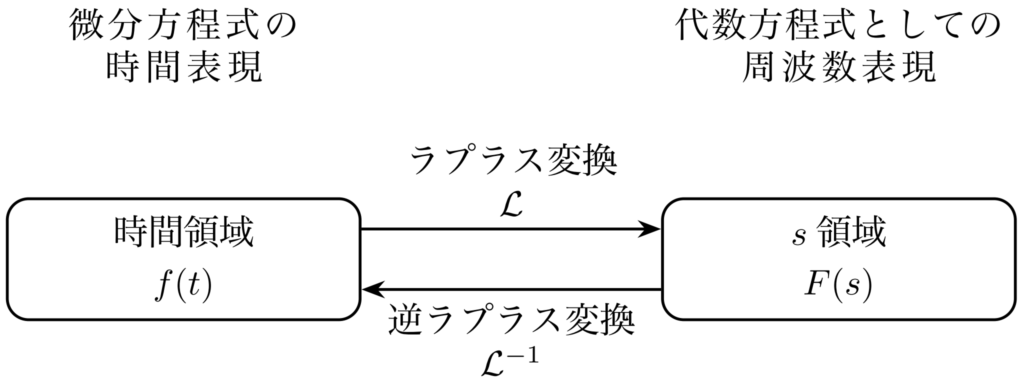
$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \lim_{T\to\infty} \int_0^T f(t)\, e^{-st}\, dt, \quad \mathrm{Re}(s) > 0$$

で定義される、時間領域の関数 $f(t)$ を複素数平面上の s (実部は正) を変数とする関数 $F(s)$ に写像する操作である。微分方程式を代数的に扱うことを可能にし、物理現象の解析や回路理論において強力な手法となる。

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s), \qquad F(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t)$$

$f(t)$ を「時間領域」の関数、$F(s)$ を「周波数領域」の関数と呼ぶ。

また、時間領域と周波数領域の概念図を以下に示す。



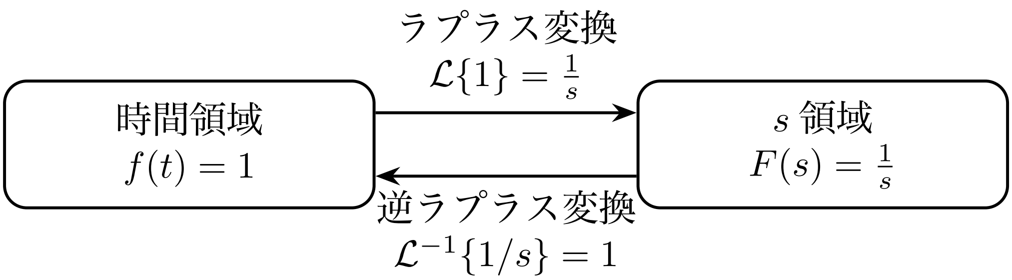
(a)　以下では、$f(t)$ のラプラス変換を、$\mathcal{L}\{f(t)\}$ と書くものとする。
まず、$f(t)=1$ の時のラプラス変換について定義から、s の実部が正の時、

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st}\, dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^{T} e^{-st}\, dt = \lim_{T\to\infty} \left[-\frac{1}{s}\left(e^{-st}\right) \right]_0^T = \frac{1}{s}$$

となる。
また、$f(t)=t(0 \le t)$ の時のラプラス変換 $\mathcal{L}\{t\}$ は、$\mathcal{L}\{t\} = \boxed{(1)\quad(s)}$ である。

次に逆ラプラス変換を導入する。逆ラプラス変換は周波数領域から時間領域への写像であり、$\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$ の時、$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=f(t)$ となるような操作である。例えば、$F(s)=\frac{1}{s}$ の時、逆ラプラス変換は、$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\}=1$ である。

時間領域の定数関数　　　　　　　　s 領域の代数関数



このように、時間領域の関数と周波数領域の関数には 1 対 1 の関係があり、以下の問では次のようなラプラス変換表を用いて良い。

s **領域** $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$

$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$

$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$

$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$

$\mathcal{L}\{\sin\omega t\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

$\mathcal{L}\{\cos\omega t\} = \frac{s}{s^2+\omega^2}$

線形性
$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = aF(s) + bG(s)$

微分公式
$\mathcal{L}\{\frac{df(t)}{dt}\} = sF(s) - f(0)$
$\mathcal{L}\{\frac{d^2f(t)}{dt^2}\} = s^2F(s) - sf(0) - \frac{df(0)}{dt}$

まず、次の図 2について、ラプラス変換を用いて解析していく。

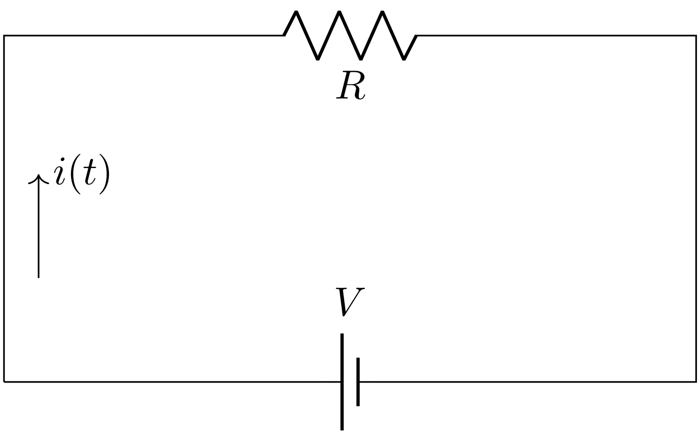


図2　問題 2(a)

電源電圧 V は、オームの法則から時刻 t 流れる電流を図の向きに $i(t)$ として $V = \boxed{(2)\quad (i(t), R)}$ と表せる。V のラプラス変換は、$\boxed{(3)\quad (V, s)}$ であり、$i(t)$ のラプラス変換を $\mathcal{L}\{i(t)\}$ と書くと、$\boxed{(2)}$ のラプラス変換は、$\boxed{(4)\quad (\mathcal{L}\{i(t)\}, R, s)}$ である。

これより、$\mathcal{L}\{i(t)\} = \boxed{(5)\quad (V, R, s)}$ となる。これを逆ラプラス変換することで、$i(t) = \boxed{(6)\quad (V, R, t)}$ を得る。

(b)　次に図のような初期電荷 Q_0 を持つコンデンサ (電荷の極性は図の通り) を含む以下の図 3の RLC 直列回路を考えていく。

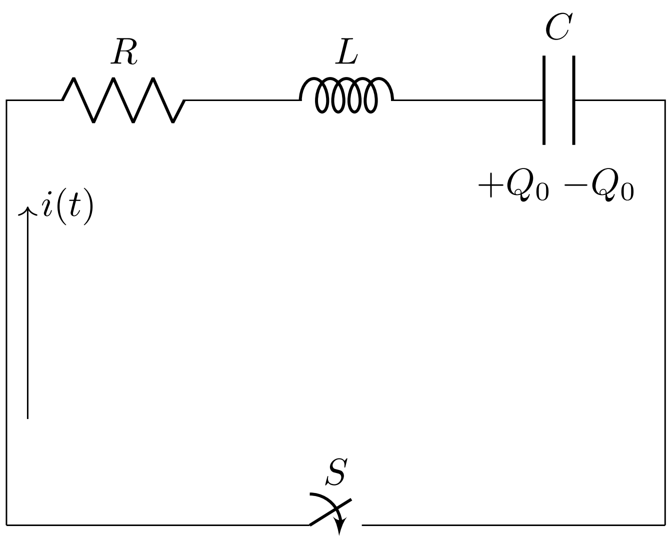


図3　問題 2(b)

時間領域での微分方程式はコンデンサの電荷を $q(t)$ として

$$0 = \boxed{(エ)}$$

である。

V のラプラス変換は、$\boxed{(2)}$ であり、$\boxed{(エ)}$ のラプラス変換は、$q(t)$ のラプラス変換を $\mathcal{L}\{q(t)\}$ として、時刻 $t = 0$ で流れる電流を 0 とすると、$\boxed{(7)\quad (\mathcal{L}\{q(t)\}, V, R, C, L, Q_0, s)}$ となる。

よって、$\mathcal{L}\{q(t)\}$=$\boxed{(8)\quad (V, R, C, L, Q_0, s)}$ となり、これを逆ラプラス変換することで、解 $q(t)$ を得る。

よって、ラプラス変換を用いても回路の解析が可能であることがわかる。

問： a を定数として $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ としたとき、周波数領域のシフト定理

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$$

が成立する。このシフト定理を用いて設問 (8) の式を逆ラプラス変換し、$q(t)$ を求めよ。ただし、$4\frac{L}{C} > R^2$ であるとする。