Laplace変換 と 逆Laplace変換

Laplace変換とは 関数 $x : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ に対して

$$X(s) := \int_0^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

が存在するとき、$X(s)$ を x の Laplace変換と言う

簡単な例

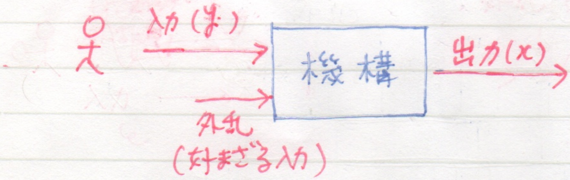
$x(t) = e^{\alpha t}$ $(\mathrm{Re}\,\alpha < 0)$

のとき

$$\int_0^{+\infty} e^{\alpha t} e^{-st} dt = \frac{1}{s-\alpha}$$

制御モデルにおけるLaplace変換の重要性

機械工学的観点：機械の定常的な運動の実現



$$\overset{\text{入力}}{m x'' + c x' + k x} = \overset{\text{出力}}{y}$$

適切な入力(y)を与えることで定常的な x を得る。
外乱の影響は少なくしたい

装置の性能を数式を用いて評価する必要があるため、
入力(y)から出力(x)を得るアルゴリズムが重要である
一般には微分方程式を解かなければいけないが以下の事実から
簡単な例であれば積分計算せずにLaplace変換表だけ見ていればよい
ことが分かる。

線型同型写像(isomorphism of vector space)としてのLaplace変換

$\alpha_1, \dots, \alpha_n$ を $\mathrm{Re}\,\alpha_i < 0$ となる複素数とする
このとき、

$\mathbb{C}\langle e^{\alpha_1 t}, \dots, e^{\alpha_n t} \rangle$ ($e^{\alpha_1 t}, \dots, e^{\alpha_n t}$ を basis とする $\mathbb{C}$-vector sp)

$\mathbb{C}\left\langle \frac{1}{s-\alpha_1}, \dots, \frac{1}{s-\alpha_n} \right\rangle$ ($\frac{1}{s-\alpha_1}, \dots, \frac{1}{s-\alpha_n}$ を basis とする $\mathbb{C}$-vector sp)

とおくと 以下の ℓ は vector sp としての同型写像である。

$$\ell : \mathbb{C}\langle e^{\alpha_1 t}, \dots, e^{\alpha_n t} \rangle \to \mathbb{C}\left\langle \frac{1}{s-\alpha_1}, \dots, \frac{1}{s-\alpha_n} \right\rangle$$

$$e^{\alpha_j t} \mapsto \frac{1}{s-\alpha_j}$$

($e^{\alpha_j t}$ のLaplace変換は $\mathbb{C}\langle e^{\alpha_1 t}, \dots, e^{\alpha_n t} \rangle$ から $\mathbb{C}\left\langle \frac{1}{s-\alpha_1}, \dots, \frac{1}{s-\alpha_n} \right\rangle$ への基底変換である)

$\mathbb{C}\langle \frac{1}{s+\alpha_1}, \cdots, \frac{1}{s+\alpha_n} \rangle$ における逆Laplace変換

$X = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{c_\nu}{s-\alpha_\nu}$ から $\mathcal{L}(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{c_\nu}{s-\alpha_\nu}$ となる x を知りたければ

$$x = \mathcal{L}^{-1}\left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{c_\nu}{s-\alpha_\nu}\right) = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-\alpha_\nu}\right) = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu e^{\alpha_\nu t}$$

Laplace変換表でO.K.

とすれば良い

Laplace変換と微分：部分積分で証明される以下の事実は有名.

$f : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ が無限回微分可能で $f(t)e^{-st} \to 0, \frac{df}{dt}(t)e^{-st} \to 0, \cdots, \frac{d^n f}{dt^n}(t)e^{-st} \to 0,$ $(t \to +\infty)$

であるとき $F(s) := \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$ として

$$\int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} f(t) e^{-st} dt = \left[f(t)e^{-st} \right]_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} x(t)e^{-st}dt = -f(0) + sF(s)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{d^2}{dt^2} f(t) e^{-st} dt = \left[\frac{df}{dt}(t)e^{-st} \right]_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} \frac{df}{dt}(t)e^{-st}dt$$

$$= -\frac{df}{dt}(0) - sf(0) + s^2 F(s)$$

$$\vdots$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{d^n}{dt^n} f(t) e^{-st} dt = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{d^k x}{dt^k}(0) s^{n-1-k} + s^n F(s)$$

レポート：帰納法で証明せよ.

複素関数論（Cauchyの積分公式, 留数定理）を使った逆Laplace変換

$\dfrac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$ の逆Laplace変換

部分分数展開

線型同型写像の考えでは $\dfrac{A}{s+1}+\dfrac{B}{s+2}+\dfrac{C}{s+3}$ に展開する.

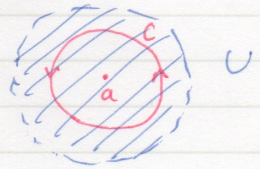
$$\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(s+1)(s+2)}-\frac{1}{(s+2)(s+3)}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+1}-\frac{2}{s+2}+\frac{1}{s+3}\right)$$

$$\mapsto \frac{1}{2}\left(e^{-t}-2e^{-2t}+e^{-3t}\right)$$

Cauchyの積分公式, 留数定理の利用

Cauchyの積分公式　$U(\subset\mathbb{C})$ 上正則な関数 f に対して次式が成り立つ：

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{\xi-a}\,d\xi$$



これを認めると $e^{t\xi}$ は $\xi\neq\infty$ で正則なので

$$e^{\alpha t}=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{t\xi}}{\xi-\alpha}\,d\xi$$

と書ける.

従って

$$Ae^{-t}=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{Ae^{t\xi}}{\xi+1}\,d\xi,\quad Be^{-2t}=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{Be^{t\xi}}{\xi+2}\,d\xi,\quad Ce^{-3t}=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{Ce^{t\xi}}{\xi+3}\,d\xi$$

$$Ae^{-t}+Be^{-2t}+Ce^{-3t}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\left(\frac{A}{\xi+1}+\frac{B}{\xi+2}+\frac{C}{\xi+3}\right)e^{t\xi}\,d\xi$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int \frac{e^{t\xi}}{(\xi+1)(\xi+2)(\xi+3)}\,d\xi$$

留数定理 $\left(\mathrm{Res}(f,\alpha):=\lim_{\xi\to\alpha}(\xi-\alpha)f(\xi)\right)$

$$=\mathrm{Res}\left(\frac{e^{t\xi}}{(\xi+1)(\xi+2)(\xi+3)},-1\right)+\mathrm{Res}\left(\frac{e^{t\xi}}{(\xi+1)(\xi+2)(\xi+3)},-2\right)+\mathrm{Res}\left(\frac{e^{t\xi}}{(\xi+1)(\xi+2)(\xi+3)},-3\right)$$

$$=\frac{1}{2}e^{-t}-e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-3t}$$

形式的べき級数 $\mathbb{C}[[T]]$ と z 変換

↳ 複素数に値をとる無限数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ を係数とする
収束を考えないべき級数

$$\sum_{n\geq 0} a_n T^n$$

形式的べき級数の和，積，微分

和 $\displaystyle \sum_{n\geq 0} a_n T^n + \sum_{n\geq 0} b_n T^n = (a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + \cdots) + (b_0 + b_1 T + b_2 T^2 + \cdots)$

$$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) T + (a_2 + b_2) T^2 + \cdots = \sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) T^n$$

積 $\displaystyle \left(\sum_{n\geq 0} a_n T^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} b_n T^n\right) = (a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + \cdots)(b_0 + b_1 T + b_2 T^2 + \cdots)$

$$= (a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + \cdots)(b_0 + b_1 T + b_2 T^2 + \cdots)$$

$$= a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) T + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) T^2 + \cdots$$

$$= \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k\right) T^n$$

微分 $F, G \in \mathbb{C}[[T]]$ に対して 以下の2条件を満たす $\delta : \mathbb{C}[[T]] \to \mathbb{C}[[T]]$

$\delta(\alpha F + \beta G) = \alpha(\delta F) + \beta(\delta G)$ 線型 $(\alpha, \beta \in \mathbb{C})$

$\delta(FG) = (\delta F) G + F(\delta G)$ Leibnitz - rule

例1 $\delta(T) = 1$ のとき：よく用いられる微分 $\delta(T^n) = n T^{n-1}$
($\frac{d}{dT}$ と書く)

例2 $\delta(T) = T$ の場合も微分になる ($T\frac{d}{dT}$: Euler operator)

$$(1-T)\left(\sum_{n=0}^{\infty} T^n\right) = 1$$

形式的べき級数の"距離"

$1+T,\ 1+T^2,\ 1+T^{10},\ 1+T^{100} \cdots$ 1に最も近いのはどれ?

0次	1次	2次	…	10次	…	100次
1						
1	T					
1		T^2				
1				T^{10}		
1						T^{100}

1, T → 1次の項を比較すると異なることが分かる.

1, T^2 → 2次の項を比較するまで1と異なることが分からないので $1+T$ より近いと考える.

1, T^{10} → 10次の項を比較するまで1と異なることが分からないので $1+T^2$ より近いと考える

1, T^{100} → 100次の項を比較するまで1と異なると分からないので $1+T^{10}$ より近いと考える

この考えに従うと..

$$(1-T)\left(\sum_{n=0}^{\infty} T^n\right) = \left(1+T+T^2+T^3+\cdots\right) + \left(T+T^2+T^3+\cdots\right) = 1$$

を次のように考える.

	0次	1次	2次	3次	…	n次	
	1	T	T^2	T^3	…	T^n	…
−)		T	T^2	T^3	…	T^n	…
	1	0	0	0	…	0	…

→ nを大きくしても0なので区別できない

$= 1$

※ p進数体の距離もこの考え方に従って導入される

母関数を用いた差分方程式の解法

数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ を係数とするべき級数 $\sum_{n\geq 0} a_n T^n$ を
数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の母関数という

例 $a_n = p a_{n-1}$ の場合

$F := \sum_{n\geq 0} a_n T^n$ とおくと

$$F = a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + a_3 T^3 + \cdots + a_n T^n + \cdots$$

$$= a_0 + p a_0 T + p a_1 T^2 + p a_2 + \cdots + p a_{n-1} T^n + \cdots$$

$$= a_0 + p\left(\sum_{n\geq 0} a_n T^{n+1}\right)$$

$$= a_0 + pTF$$

従って

$(1-pT)F = a_0$ より $F = \dfrac{a_0}{1-pT} = a_0\left(\sum_{n\geq 0} p^n T^n\right) = \sum_{n\geq 0}(a_0 p^n) T^n$

F の n 次の項の係数が数列 a_n だから、

$$a_n = a_0 p^n$$

となる。

母関数の一般的な性質

数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$, $\{b_n\}_{n\geq 0}$ の母関数をそれぞれ F, G として

$a_n = b_{n-1}\ (n\geq 1) \Rightarrow F = a_0 + TG$

$\because$ $\sum_{n\geq 0} a_n T^n = a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + \cdots = a_0 + (b_0 T + b_1 T^2 + \cdots) = a_0 + \sum_{n\geq 0} b_n T^{n+1}$

"形式的な" z 変換

形式的べき級数 $\mathbb{C}[[T]]$ の不定元をTの代わりに z^{-1} にしたものを
"形式的な" z 変換という

$$\sum_{n\geq0} a_n T^n \to \sum_{n\geq0} a_n z^{-n}$$

このとき $b_n = a_{n+1}$ $(n\geq0)$ ならば $\displaystyle\sum_{n\geq0} a_n z^{-n} = a_0 + z^{-1}\left(\sum_{n\geq0} b_n z^{-n}\right)$ より

↳項を+1ずらす = z^{-1} かける ←

工学系で用いられる z 変換

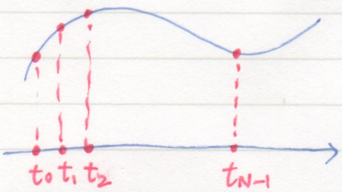
以下の収束べき級数が存在するとき

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$$

数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ の z 変換といい $Z[a]$ で表す.
(形式的な z 変換が収束する場合と考えればよい)

Laplace 変換と z 変換の関係.

区間 $I=[\alpha,\beta]$ のサンプリング



↓以下の増加列をとること.

$$t_0=\alpha < t_1 < \cdots < t_{N-1} = \beta$$

$x: I \to \mathbb{R}$ におけるサンプル値

$\{x_n\}_{n=0}^{N-1}$ $\quad x_k := x(t_k)$

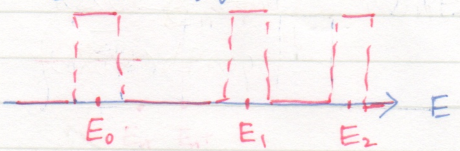
ラプラス変換の離散化としての z 変換

$$\int_0^{+\infty} x(t)e^{-st}\,dt \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n e^{-nh} h \xrightarrow{z:=e^{-h}\text{ とおくと}} \sum_{n=0}^{\infty} (x_n h) z^{-n}$$

サンプリング $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ⇒ 全サンプルの和

カノニカル分布(参考)

$$\Omega(\varepsilon) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \in (E_n - h, E_n + h) \\ 0 & \end{cases}$$



$$\int \Omega(\varepsilon) e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon \simeq \sum e^{-\beta E_n}$$

$E_0, E_1, \cdots, E_{N-1}$ でサンプリング

分配関数

$$Z(\beta) := \sum_n e^{-\beta E_n}$$

カノニカル分布.

$$P(E = E_n) = \frac{e^{-\beta E_n}}{Z(\beta)}$$