スカラー・ベクトル・テンソルとEinsteinの記法

線型代数のおさらい

$k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ とする.

スカラー : k

ベクトル : k^n

$V = k\langle e_1, \cdots, e_n \rangle$ ($e_1, \cdots, e_n$ を basis とする k-vector space)

$V^* = k\langle f_1, \cdots, f_n \rangle$ ($f_i : V \to k$; $i=1,\cdots,n$ は互いに線型独立)

↳ dual vector space (双対線型空間)　　linearly independent

テンソル : $V \otimes V' = k\langle e_i \otimes e_j' \rangle$ $(i=1,\cdots,n)$

↳ $\boxed{\text{線型結合できる } V \text{の tuple}}$

$v_1, v_2 \in V$, $v_1', v_2' \in V'$　$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1', \alpha_2' \in k$

$$(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, \alpha_1' v_1' + \alpha_2' v_2')$$
$$= \alpha_1\alpha_1'(v_1, v_2) + \alpha_2\alpha_1'(v_2, v_1') + \alpha_1\alpha_2'(v_1, v_2) + \alpha_2\alpha_2'(v_2, v_2')$$

となるとき, (v, v') を $v \otimes v'$ と書く.

※ tupleなので $V \otimes V^*$ なども定義できる.

n次元実多様体 (微分可能な多様体)

M : n次元実多様体

スカラー : $U \subset M$ (open set) から $\mathbb{R}$ への関数　$f : U \to \mathbb{R}$

ベクトル : 接ベクトル空間 $T_p(M)$ の元 ‥ 反変ベクトル

$x = (x^1, \cdots, x^n)$ を $p \in M$ のまわりの座標とすると

$$T_p(M) = \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p \right\rangle$$ ← $\mathbb{R}$ を略して書くこともある.

意味は $\mathbb{R}\left\langle\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p\right\rangle$

1-form (余接ベクトル空間) $T_p^*(M)$ の元　共変ベクトル

$$T_p^*(M) = \langle (dx^1)_p, \cdots, (dx^n)_p \rangle$$

テンソル : $T_p(M)$, $T_p^*(M)$ たちのテンソル積.

$$\underbrace{T_p(M) \otimes \cdots \otimes T_p(M)}_{r} \otimes \underbrace{T_p^*(M) \otimes \cdots \otimes T_p^*(M)}_{s}$$

"Einsteinの記法"

① 反変ベクトル，共変ベクトル，双対積

$X \in T_p(M)$　　$A = A^0\partial_0 + \cdots + A^4\partial_4 \in T_p(M)$

$A^\mu \in T_p(M)$

$\omega \in T_p^*(M)$　　$\omega = B_0 dx_0 + \cdots + B_4 dx_4 \in T_p^*(M)$

$B_\mu \in T_p^*(M)$

双対積　　$\omega(A) = A^0 B_0 + \cdots + A^4 B_4$

$\left(= A^0 B_0\, dx_0\left(\frac{\partial}{\partial x_0}\right) + \cdots + A^4 B_4\, dx_4\left(\frac{\partial}{\partial x_4}\right)\right)$

$A^\mu B_\mu$

② 座標変換則

$T_p(M)$: $\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p \right\rangle$, $\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial y^1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial y^n}\right)_p \right\rangle$ "$T_p(M)$のFrame"

$\rotatebox{90}{$\in$}$

X_p が　$X_p = \sum_{i=1}^{4} X^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p = \sum_{j=1}^{4} Y^j \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_p$ と書けるとき，

$\forall j \quad Y^j = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial y^j}{\partial x^i} X^i \xrightarrow[\forall, \Sigma \text{をとる}]{} \boxed{Y^\mu = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} X^\nu}$

Einsteinの記法

$T_p^*(M)$: $\langle (dx^1)_p, \cdots, (dx^n)_p \rangle$, $\langle (dy^1)_p, \cdots, (dy^n)_p \rangle$ "$T_p^*(M)$のFrame"

$\rotatebox{90}{$\in$}$

ω_p が　$\omega_p = \sum_{i=1}^{4} X_i (dx^i)_p = \sum_{j=1}^{4} Y_j (dy^j)_p$ と書けるとき，

$\forall j \quad Y_j = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial x^i}{\partial y^j} X_i \xrightarrow[\forall, \Sigma \text{をとる}]{} \boxed{Y_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\mu} X_\nu}$

Einsteinの記法，

$\underbrace{T_p(M) \otimes \cdots \otimes T_p(M)}_{r} \otimes \underbrace{T_p^*(M) \otimes \cdots \otimes T_p^*(M)}_{s}$

$$Y^{\mu_1 \cdots \mu_r}{}_{\nu_1 \cdots \nu_r} = \sum_{\rho_1} \cdots \sum_{\rho_r} \sum_{\sigma_1} \cdots \sum_{\sigma_s} \frac{\partial y^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \cdots \frac{\partial y^{\mu_r}}{\partial x^{\rho_r}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial y^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\sigma_s}}{\partial y^{\nu_s}} X^{\mu_1 \cdots \mu_r}{}_{\sigma_1 \cdots \sigma_s}$$

$$\boxed{Y^{\mu_1 \cdots \mu_r}{}_{\nu_1 \cdots \nu_r} = \frac{\partial y^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \cdots \frac{\partial y^{\mu_r}}{\partial x^{\sigma_r}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial y^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\sigma_s}}{\partial y^{\nu_s}} X^{\mu_1 \cdots \mu_r}{}_{\sigma_1 \cdots \sigma_s}}$$

Einsteinの記法

計量，平行移動，共変微分

↳ 計量を不変にする移動

計量テンソル：反変ベクトル，共変ベクトルに対して定義される

$\sum g_{\mu\nu}\, e^*_\mu \otimes e^*_\nu : T_p(M) \otimes T_p(M) \to \mathbb{R}$. Einsteinの記法 $g_{\mu\nu}$

$\sum g^{\mu\nu}\, e_\mu \otimes e_\nu : T^*_p(M) \otimes T^*_p(M) \to \mathbb{R}$ Einsteinの記法 $g^{\mu\nu}$

テンソルの縮約

$\sum g_{\mu\nu}(e^*_\mu \otimes e^*_\nu)\left(\sum A^\rho e_\rho \otimes B^\sigma e_\sigma\right) = \sum g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu$ $\xrightarrow{\text{Einstein記法}}$ $g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu$

$\sum g^{\mu\nu}(e_\mu \otimes e_\nu)\left(\sum A_\rho e^*_\rho \otimes B_\sigma e^*_\sigma\right) = \sum g^{\mu\nu} A_\mu B_\nu$ $g^{\mu\nu} A_\mu B_\nu$

$\left(\sum g_{\mu\nu} e^*_\mu \otimes e^*_\nu\right)\left(\sum A^\rho e_\rho \otimes B^\sigma e_\sigma\right) = \sum g_{\mu\nu} B^\nu e^*_\mu \left(\sum A^\rho e_\rho\right)$

"部分適用" $B_\nu = g_{\mu\nu} B^\nu$

$\left(\sum g^{\mu\nu} e_\mu \otimes e_\nu\right)\left(\sum A_\rho e^*_\rho \otimes B_\sigma e^*_\sigma\right) = \sum g^{\mu\nu} B_\nu e_\mu \left(\sum A_\rho e^*_\rho\right)$

"部分適用 $B^\nu = g^{\mu\nu} B_\nu$

$\left(\sum g^{\mu\nu} e_\mu \otimes e_\nu\right)\left(\sum g_{\mu\nu} e^*_\mu \otimes e^*_\nu\right)$

部分適用

$= \sum g^{\mu\alpha} e_\mu \otimes \underbrace{e_\alpha\left(g_{\alpha\mu} e^*_\alpha\right)}_{g_{\mu\alpha}} \otimes e^*_\nu$

$e_\alpha = e_\alpha^{**}$ (double dual) と見て

$= \sum \underbrace{g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu}}_{g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu}} e_\mu \otimes e^*_\nu$ ↓ Einsteinの記法

（一般相対論では $g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^\mu{}_\nu$ として話をすすめる）

平行移動：計量を変化させない移動

例) ◦3次元Euclid空間では距離が不変

◦特殊相対論では光速不変の原理がこれに相当する

$x, y \in M \ (x \neq y)$ において 2つの共変ベクトル

$V_\mu(x) \in T_x^*(M)$, $\tilde{V}_\mu(y) \in T_y^*(M)$

が以下を満たすとき $\tilde{V}_\mu(y)$ を $V_\mu(x)$ の平行移動と考える

$$g^{\mu\nu}(y)\tilde{V}_\mu(y)\tilde{V}_\nu(y) = g^{\mu\nu}(x)V_\mu(x)V_\nu(x) \in \mathbb{R}$$

$g^{\mu\nu}(y) : T_p^*(M)\otimes T_p^*(M)\to\mathbb{R}$ $\qquad$ $g^{\mu\nu}(x) : T_p(M)\otimes T_p(M)\to\mathbb{R}$

共変微分

共変ベクトルの共変微分

$$\tilde{V}_\mu(y) = V_\mu(x) + \Gamma^\nu_{\mu\rho}(x)V_\nu(x)h^\rho + o(h)$$

書けるとき.

$$V_\mu(y) - \tilde{V}_\mu(y) = V_\mu(y) - V_\mu(x) - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}(x)V_\alpha(x)h^\nu + o(h)$$

$$= (\partial_\nu V_\mu(x) - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}(x)V_\alpha(x))h^\nu + o(h)$$

$h\to 0$ とするとき

$$\nabla_\nu V_\mu := \partial_\nu V_\mu - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}V_\alpha$$

を V_μ の共変微分であるという.

反変ベクトルの共変微分

$\tilde{V}_\mu(y)\tilde{V}^\mu(x) = V_\mu(x)V^\mu(x)$ $\qquad$ $\tilde{V}^\mu(y) = V^\mu(x) + \delta V^\mu(x)$

とする.

$$(V_\mu(x) + \Gamma^\alpha_{\mu\beta}(x)V_\alpha(x)h^\beta + o(h))(V^\mu(x) + \delta V^\mu(x)) = V_\mu(x)V^\mu(x)$$

これらが一致

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu}(x)V_\alpha(x)V^\mu(x)h^\nu + V_\mu(x)\delta V^\mu(x) + o(h) = 0$$

$$\delta V^\mu(x) = -\Gamma^\mu_{\sigma\nu}(x)V^\sigma(x)h^\nu + o(h)$$

これより.

$$\tilde{V}^{\mu}(y) = V^{\mu}(x) - \Gamma^{\mu}_{\sigma\nu}(x) V^{\sigma}(x) h^{\nu} + o(h)$$

$$V^{\mu}(y) - \tilde{V}^{\mu}(y) = V^{\mu}(y) - V^{\mu}(x) + \Gamma^{\mu}_{\sigma\nu}(x) V^{\sigma}(x) h^{\nu} + o(h)$$

$$= \left(\partial_{\nu} V^{\mu}(x) + \Gamma^{\mu}_{\sigma\nu}(x) V^{\sigma}(x) \right) h^{\nu} + o(h)$$

$h \to 0$ とするとき

$$\nabla_{\nu} V^{\mu} = \partial_{\nu} V^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\nu} V^{\sigma}$$

を V^{μ} の共変微分であるという.