応用数理 I / 社会数理概論 I [盛田担当分] レポート課題
各問 1 個につき 5 点です (これ以外の課題も同様です).
いくつ答えてもよいですが提出枚数は 5 枚以内, 最高得点は 15 点です.
`https://github.com/morita-hm/lecture_2019` からダウンロードも可能です.
(講義中に案内した課題 27 の誤記修正をしています)
提出先/提出期限：多元数理教育支援室 7/26(金) 17:00

(課題 1：1 階微分方程式の解) $\mathbb{C}$ に値をとる関数 y とその微分 $'$ に対して

$$y(x) = \exp\left(\int_0^x a(u)du\right) \to \frac{y'(x)}{y(x)} = a(x)$$

(課題 2) $\mathbb{C}$ に値をとる関数 $y_1, y_2 (\neq 0)$ とその微分 $'$ に対して

$$y_1'(x) = a(x)y_1(x), y_2'(x) = a(x)y_2(x) \to (y_2^{-1}(x)y_1(x))' = 0$$

(課題 3：Airy の微分方程式 - 梅村先生の著書から)
y_1, y_2 を Airy の微分方程式の互いに線型独立な解

$$y_1''(x) + xy_1(x) = 0, y_2''(x) + xy_2(x) = 0$$

とするとき,

$$\left(\det\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{pmatrix}\right)' = (y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x))' = 0$$

(課題 4：Riccati の微分方程式) q を以下の微分方程式の解であるとする

$$q' + q^2 + \frac{t}{2} = 0$$

$q := \frac{u'}{u}$ とおくと

$$u'' + \frac{t}{2}u = 0$$

(課題 5：Painlevé 第 2 方程式) $y = y(t)$ を未知関数として以下の微分方程式,

$$y'' = 2y^3 + ty + b - \frac{1}{2}$$

を考える ($'$：t についての微分; $b \in \mathbb{C}$：パラメータ) このとき,

$$q := y, p := q' + q^2 + \frac{t}{2} \to q' = -p - q^2 - \frac{t}{2}, p' = 2qp + b$$

(課題 6：Painlevé 第 2 方程式, 対称形式) $q = q(t), p = p(t)$ を未知関数とする以下の微分方程式,

$$q' = -p + q^2 + \frac{t}{2}, p' = 2qp + b$$

に対して,

$$f_1 := p, f_0 := -p + 2q^2 + t, f_0 + f_1 := t, \alpha_0 := 1 - b, \alpha_1 := b$$

$$\to f_0' = -2qf_0 + \alpha_0, f_1' = 2qf_1 + \alpha_1, q' = \frac{f_0 - f_1}{2}$$

(課題 7) $\theta := x(d/dx)$ に対して $\theta x^n = nx^n$
(課題 8) $\theta = x(d/dx)$ とするとき

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!} x^n$$

は以下の微分方程式を満たす

$$x^{-1}\theta(\theta+\gamma-1)F - (\theta+\alpha)(\theta+\beta)F = 0$$

(課題 9) 以下の微分方程式を満たす関数 $\Phi\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \end{pmatrix}$ を考える

$$x_{13}\frac{\partial \Phi}{\partial x_{13}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_{13} & x_{14} \\ 0 & 1 & x_{23} & x_{24} \end{pmatrix} + x_{23}\frac{\partial \Phi}{\partial x_{23}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_{13} & x_{14} \\ 0 & 1 & x_{23} & x_{24} \end{pmatrix} = \lambda_3 \Phi\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_{13} & x_{14} \\ 0 & 1 & x_{23} & x_{24} \end{pmatrix}$$

$$f(t) := \Phi\begin{pmatrix} 1 & 0 & ty_{13} & y_{14} \\ 0 & 1 & ty_{23} & y_{24} \end{pmatrix}$$

とおいて $\frac{df}{dt}(t)$ を計算し $x_{13} = ty_{13}, x_{23} = ty_{23}, x_{14} = y_{14}, x_{24} = y_{24}$ と改めて置き換えることにより,

$$t\frac{d}{dt}f(t) = \lambda_3 f(t)$$

(課題 10 : Laplace 変換) $\mathbb{C}$ に値をとる関数 y が $y(t) \to 0$, $\frac{d^n y}{dx^n}(x) \to 0$ $(n = 1, 2, ...; t \to \infty)$ であり

$$\mathcal{L}[y](s) := \int_0^{+\infty} y(t)e^{-st}dt$$

であるとき

$$\mathcal{L}[\frac{d^{n+1}y}{dt^{n+1}}](s) = -\sum_{k=0}^{n} s^k \frac{d^{n-k}y}{dt^{n-k}}(0) + s^{n+1}\mathcal{L}[y](s) \quad (n \geq 0)$$

(課題 11 : Laplace 変換)

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos t dt = \frac{s+1}{s^2+2s+2}$$

ヒント :

$$\cos t = \frac{1}{2}(e^{(-1+i)t} + e^{(-1-i)t})$$

(課題 12 : 逆 Laplace 変換) f を複素関数として,

$$\mathrm{Res}(f(s), a) := \lim_{s\to\alpha}(s-\alpha)f(s)$$

としたとき,

$$\mathrm{Res}\left(\frac{s+1}{s^2+2s+2}e^{st}, -1+i\right) + \mathrm{Res}\left(\frac{s+1}{s^2+2s+2}e^{st}, -1-i\right) = e^{-t}\cos t$$

(課題 13： 状態方程式の解) $x : I \to \mathbb{R}$, $u : I \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ として

$$x(t) = \left(x(0) + \int_0^t e^{-a\tau} bu(\tau) d\tau \right) e^{at} \to x'(t) = ax(t) + bu(t)$$

(課題 14： 状態方程式の解) $x : I \to \mathbb{R}^n$, $u : I \to \mathbb{R}$, A : n 次正方行列, $B \in \mathbb{R}^n$ として

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \to x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

(課題 15 - 16) X, Y, F を 2 次行列に値をとる t の関数 ($\det X, \det Y \neq 0$), $'$ を微分として

$$(Y^{-1})' = -Y^{-1} Y' Y^{-1}$$
$$X' = FX, Y' = FY \to (Y^{-1} X)' = 0$$

(課題 17) 以下の微分方程式を満たす関数 $\Phi \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \end{pmatrix}$ を考える

$$x_{13} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{13}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_{13} & x_{14} \\ 0 & 1 & x_{23} & x_{24} \end{pmatrix} + x_{23} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_{13} & x_{14} \\ 0 & 1 & x_{23} & x_{24} \end{pmatrix} = \lambda_3 \Phi \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_{13} & x_{14} \\ 0 & 1 & x_{23} & x_{24} \end{pmatrix}$$

4 次行列 $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,3,4}$ の $\Phi \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_{13} & x_{14} \\ 0 & 1 & x_{23} & x_{24} \end{pmatrix}$ への作用を

$$(A\Phi) \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_{13} & x_{14} \\ 0 & 1 & x_{23} & x_{24} \end{pmatrix} := \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\Phi \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_{13} & x_{14} \\ 0 & 1 & x_{23} & x_{24} \end{pmatrix} (1 + \epsilon A) \right) - \Phi \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_{13} & x_{14} \\ 0 & 1 & x_{23} & x_{24} \end{pmatrix} \right)$$

としたとき, E_{ij} を (i,j) 成分が 1 で他は 0 の行列とすると,

$$(E_{33}\Phi) \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_{13} & x_{14} \\ 0 & 1 & x_{23} & x_{24} \end{pmatrix} = \lambda_3 \Phi \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_{13} & x_{14} \\ 0 & 1 & x_{23} & x_{24} \end{pmatrix}$$

(課題 18 - 22) 4 次行列 A, B に対して $[A, B] := AB - BA$
E_{ij} を (i,j) 成分が 1 で他は 0 の 4 次行列とするとき, ($i = 1$ の事例だけ示せば OK です, 1 項目につき 5 点です).

$$[E_{ii}, E_{i,i+1}] = E_{i,i+1} \quad (i = 1, 2, 3)$$
$$[E_{i+1,i+1}, E_{i,i+1}] = -E_{i,i+1} \quad (i = 1, 2, 3)$$
$$[E_{ii}, E_{i+1,i}] = -E_{i+1,i} \quad (i = 1, 2, 3)$$
$$[E_{i+1,i+1}, E_{i+1,i}] = E_{i+1,i} \quad (i = 1, 2, 3)$$
$$[E_{i,i+1}, E_{j+1,j}] = \delta_{ij}(E_{ii} - E_{i+1,i+1}) \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

(δ_{ij} はクロネッカーのデルタ). (課題 23)

$$\lim_{q \to 1} \frac{x^n - (qx)^n}{(1-q)x} = nx^{n-1}$$

(課題 24 : q 超幾何関数) $q^{\theta+c}x^n = q^{n+c}x^n$, $(x;q)_n := \prod_{k=0}^{n-1}(1-xq^k)$ $(n \geq 1)$; $(x;q)_0 = 1$ とする．このとき

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q^\alpha;q)_n (q^\beta;q)_n}{(q^\gamma;q)_n (q;q)_n} x^n$$

は以下の q 差分方程式を満たす.

$$x^{-1}(1-q^\theta)(1-q^{\theta+\gamma-1})\varphi = (1-q^{\theta+\alpha})(1-q^{\theta+\beta})\varphi$$

(課題 25 - 26 : 2017 年度 前期 数学演習 IX/X 6 月 23 日分レポート問題
`http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/17S/20170623.pdf`
より)
$\vartheta_4(z,q) = G(qe^{2iz};q^2)_\infty (qe^{-2iz};q^2)_\infty$
$\vartheta_3(z,q) := \vartheta_4(z+\pi/2, q)$
ただし $G \in \mathbb{C}, (x;q)_\infty := \prod_{n=1}^{\infty}(1-xq^{n-1})$ としたとき,

$$\vartheta_4(z,q) = G\prod_{n=1}^{\infty}(1-2q^{2n-1}\cos 2z + q^{4n-2})$$

$$\vartheta_3(z,q) = G\prod_{n=1}^{\infty}(1+2q^{2n-1}\cos 2z + q^{4n-2})$$

(課題 27 - 32 : Painlevé 第 4 方程式) f_0, f_1, f_2 についての常微分方程式系

$$f_0 = f_0(f_1 - f_2) + \alpha_0, f_1 = f_1(f_2 - f_0) + \alpha_1, f_2 = f_2(f_0 - f_1) + \alpha_2$$

が $f_0 + f_1 + f_2 = t$ であるとき,

$$f_1' = f_1(f_1 + 2f_2 - t) + \alpha_1$$

$$f_2' = f_2(t - 2f_1 - f_2) + \alpha_2$$

$$f_2 = \frac{(f_1' - \alpha_1)}{2f_1} + \frac{(t - f_1)}{2}$$

$$f_2' = \frac{t^2 - 4tf_1 - 2(f_1' - \alpha_1) + 3f_1^2}{4} - \frac{(f_1 - \alpha_1)^2}{4f_1^2} + \alpha_2$$

$$f_1'' = f_1'(f_1 - 2f_2 - t) + f_1(f_1' - 2f_2' - 1)$$

$$f_1'' = \frac{f_1^2}{2f_1} + \frac{3f_1^3}{2} - 2tf_1^2 + \left(\frac{t^2}{2} + \alpha_1 + 2\alpha_2 - 1\right) f_1 - \frac{\alpha_1^2}{2f_1}$$

(課題 33-42) 以下の各講義で扱った話題, 配布した Sketch についての感想をまとめてください (複数提出可)

- 6/19 3 限
- 6/19 4 限
- 6/21 3 限
- 6/21 4 限
- 6/28 3 限
- 6/28 4 限
- 7/5 3 限
- 7/5 4 限
- 7/12 3 限
- 7/12 4 限

参考：以下のように講義で紹介した話題についてまとめても可能です (レポート 1 枚の内容につき 5 点とします)。

- ビアンキの恒等式について
- 統計力学でのエントロピーについて
- 移動平均フィルタについて
- LQR 制御について

(課題 43) 現在参加している自主セミナーあれば, どのような問題を考えているセミナーかまとめてください.
(課題 44) 現在, プログラミング/計算機に関する自主セミナーが各地で実施されていますが、そこで何について勉強したいか理由もつけてまとめてください。
(課題 45) 今後、どのような (数学の) 問題を考える自主セミナーに参加したいか, 理由もつけてまとめてください.
(課題 46) 今後、「不確実なグローバル時代を乗り切るため」に自主セミナーでどのような話題を扱えばよいと思うか, 理由もつけてまとめてください.
(課題 47) 「数学研究における古典数学の価値」についてみなさんの考えをまとめてください。