練習問題 2-4

1.

X の平均を μ_X $(=E[X])$，$u = a \cdot X + b$ とおく。u の平均は，期待値の性質を用いて，

$$\begin{aligned}\mu_u &= E[u] = E[a \cdot X + b] \\ &= a \cdot E[X] + b \\ &= a\mu_X + b\end{aligned} \tag{1}$$

よって，$V(X) = E[(X-\mu_X)^2]$ であることに注意して，

$$\begin{aligned}V(a \cdot X + b) = V(u) &= E[(u-\mu_u)^2] \\ &= E[\{(aX+b)-(a\mu_X+b)\}^2] \\ &= E[(aX-a\mu_X)^2] \\ &= E[a^2(X-\mu_X)^2] \\ &= a^2E[(X-\mu_X)^2] \\ &= a^2V(X)\end{aligned} \tag{2}$$

2.

$Z = X + Y$ とおく。Z の平均は，

$$\mu_Z = E[Z] = E[X+Y] = E[X] + E[Y] = \mu_X + \mu_Y \tag{3}$$

よって，分散は，

$$\begin{aligned}V(X+Y) = V(Z) &= E[(Z-\mu_Z)^2] \\ &= E[\{(X+Y)-(\mu_X+\mu_Y)\}^2] \\ &= E[\{(X-\mu_X)-(Y-\mu_Y)\}^2] \\ &= E[(X-\mu_X)^2 + 2(X-\mu_X)(Y-\mu_Y) + (Y-\mu_Y)^2] \\ &= E[(X-\mu_X)] + E[(Y-\mu_Y)^2] + 2E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] \\ &= V(X) + V(Y) + 2Cov(X,Y)\end{aligned} \tag{4}$$

3.

2. より，X と Y が無相関（$Cov(X,Y) = 0$）のとき，

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) \tag{5}$$