練習問題 3-2

- 物理量：X
- 観測量 Y_1：$Y_1 = X + W_1$
- 誤差量 W_1：$E[W_1] = 0$，$V(W_1) = {\sigma_1}^2$
- 観測量 Y_2：$Y_2 = X + W_2$
- 誤差量 W_2：$E[W_2] = 0$，$V(W_2) = {\sigma_2}^2$
- $E[W_1 W_2] = 0$
- 推定量：$\hat{X} = aY_1 + bY_2$

(1)

$$\begin{aligned} E[\hat{X} - X] &= E[\hat{X}] - E[X] \\ &= E[aY_1 + bY_2] - E[X] \\ &= E[a(X + W_1) + b(X + W_2)] - E[X] \\ &= E[(a+b)X] + E[W_1] + E[W_2] - E[X] \\ &= E[(a+b-1)X] \\ &= (a+b-1)E[X] \end{aligned} \tag{1}$$

これが 0 になるとき，$E[X] = 0$ は一般に成立しないことから，

$$a + b = 1 \tag{2}$$

(2)

$a + b = 1$ のとき，

$$\begin{aligned} E[(\hat{X} - X)^2] &= E[(aW_1 + bW_2)^2] \\ &= E[(a^2 {W_1}^2 + 2abW_1W_2 + {W_2}^2)] \\ &= a^2 E[{W_1}^2] + b^2 E[{W_2}^2] + 2abE[W_1W_2] \end{aligned} \tag{3}$$

ここで，

$$\mu_1 = E[W_1] = 0 \tag{4}$$
$$\mu_2 = E[W_2] = 0 \tag{5}$$

とおくと，

$$V(W_1) = E[(W_1 - \mu_1)^2] = E[{W_1}^2] = {\sigma_1}^2 \tag{6}$$
$$V(W_2) = E[(W_2 - \mu_2)^2] = E[{W_2}^2] = {\sigma_2}^2 \tag{7}$$
$$E[W_1W_2] = 0 \tag{8}$$

であるから，

$$E[(\hat{X} - X)^2] = a^2 {\sigma_1}^2 + b^2 {\sigma_2}^2 \tag{9}$$

となる。ここで，$\partial b/\partial a = -1$ より，

$$\frac{\partial}{\partial a}E[(\hat{X}-X)^2] = 2a{\sigma_1}^2 + 2b\cdot(-1){\sigma_2}^2 = 2(a{\sigma_1}^2 - b{\sigma_2}^2) \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2}E[(\hat{X}-X)^2] = 2({\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2) > 0 \tag{11}$$

よって，$E[(\hat{X}-X)^2]$ は a について上に凸な関数であるから，これは $\partial(E[(\hat{X}-X)^2])/\partial a = 0$ となる a で最小となる。

$$\therefore \quad a{\sigma_1}^2 = b{\sigma_2}^2 \tag{12}$$

$$\Leftrightarrow \quad a = \frac{{\sigma_2}^2}{{\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2}, \qquad b = \frac{{\sigma_1}^2}{{\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2} \tag{13}$$

また，このとき，$E[(\hat{X}-X)^2]$ は以下のようになる。

$$E[(\hat{X}-X)^2] = a^2{\sigma_1}^2 + b^2{\sigma_2}^2 = \frac{{\sigma_1}^2{\sigma_2}^2}{{\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2} \tag{14}$$