練習問題 2-7

- 物理量 X：平均 μ_X，分散 ${\sigma_X}^2$
- 観測誤差 W：平均 $\mu_W = E[W] = 0$，分散 ${\sigma_W}^2 = V(W) = 1$
- 観測量 $Y = X + W$
- $E[XW] = 0$

このとき，X と W の共分散は，

$$\begin{aligned} Cov(X,W) &= E[(X-\mu_X)(W-\mu_W)] \\ &= E[XW] - \mu_X\mu_W \\ &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Y の平均・分散は，

$$\begin{aligned} \mu_Y &= E[Y] = E[X+W] \\ &= E[X] + E[W] \\ &= \mu_X + \mu_W \\ &= \mu_X \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} {\sigma_Y}^2 &= V(Y) = V(X+W) \\ &= V(X) + V(W) + Cov(X,W) \\ &= {\sigma_X}^2 + {\sigma_W}^2 + 0 \\ &= {\sigma_X}^2 + 1 \end{aligned} \tag{3}$$

となる。ここで，$V(X+Y)$ は，

$$V(X+Y) = V(2X+W) = V(2X) + V(W) + Cov(2X,W) \tag{4}$$

と表されるが，

$$\begin{aligned} V(2X) &= 2^2V(X) = 4{\sigma_X}^2 \\ V(W) &= 1 \end{aligned} \tag{5}$$

であり，また，$2X$ の平均は $E[2X] = 2E[X] = 2\mu_X$ であるから，

$$\begin{aligned} Cov(2X,W) &= E[(2X-2\mu_X)(W-\mu_W)] \\ &= 2E[(X-\mu_X)(W-\mu_W)] \\ &= 2Cov(X,W) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

となる。よって，

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= V(2X) + V(W) + Cov(2X,W) \\ &= 4{\sigma_X}^2 + 1 \end{aligned} \tag{7}$$

一方，$V(X+Y)$ は以下のようにも表される。

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + Cov(X,Y) \tag{8}$$

よって，

$$
\begin{aligned}
Cov(X,Y) &= V(X+Y) - (V(X)+V(Y)) \\
&= (4{\sigma_X}^2+1) - ({\sigma_X}^2+{\sigma_X}^2+1) \\
&= 2{\sigma_X}^2
\end{aligned}
\tag{9}
$$