

# 宿題 1

訓練標本の分布を  $p_{\text{train}}$ , テスト標本の分布を  $p_{\text{test}}$ , テスト標本における各クラスの訓練標本の分布の混合比を  $\pi$ , 混合分布を  $q_\pi$  とする。二値分類を考えると,

$$q_\pi = \pi p_{\text{train}}(\mathbf{x}|y=+1) + (1-\pi) p_{\text{train}}(\mathbf{x}|y=-1) \quad (1)$$

となる。いま, エネルギー距離の二乗は,

$$D_E^2(p_{\text{test}}, q_\pi) = 2\mathbb{E}_{\mathbf{x}' \sim p_{\text{test}}, \mathbf{x} \sim q_\pi} [||\mathbf{x}' - \mathbf{x}||] - \mathbb{E}_{\mathbf{x}', \tilde{\mathbf{x}}' \sim p_{\text{test}}} [||\mathbf{x}' - \tilde{\mathbf{x}}'||] - \mathbb{E}_{\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}} \sim q_\pi} [||\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}||] \quad (2)$$

である。ここで,

$$A_{y,\tilde{y}} = \mathbb{E}_{\mathbf{x} \sim p_{\text{train}}(\mathbf{x}|y), \tilde{\mathbf{x}} \sim p_{\text{train}}(\mathbf{x}|\tilde{y})} [||\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}||] \quad (3)$$

$$b_y = \mathbb{E}_{\mathbf{x}' \sim p_{\text{test}}, \mathbf{x} \sim p_{\text{train}}(\mathbf{x}|y)} [||\mathbf{x}' - \mathbf{x}||] \quad (4)$$

とおく。式 (2) の第一項は,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbf{x}' \sim p_{\text{test}}, \mathbf{x} \sim q_\pi} [||\mathbf{x}' - \mathbf{x}||] &= \mathbb{E}_{\mathbf{x}' \sim p_{\text{test}}} [\mathbb{E}_{\mathbf{x} \sim q_\pi} [||\mathbf{x}' - \mathbf{x}||]] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbf{x}' \sim p_{\text{test}}} [\pi \mathbb{E}_{\mathbf{x} \sim p_{\text{train}}(\mathbf{x}|+1)} [||\mathbf{x}' - \mathbf{x}||] + (1-\pi) \mathbb{E}_{\mathbf{x} \sim p_{\text{train}}(\mathbf{x}|-1)} [||\mathbf{x}' - \mathbf{x}||]] \\ &= \pi \mathbb{E}_{\mathbf{x}' \sim p_{\text{test}}, \mathbf{x} \sim p_{\text{train}}(\mathbf{x}|+1)} [||\mathbf{x}' - \mathbf{x}||] + (1-\pi) \mathbb{E}_{\mathbf{x}' \sim p_{\text{test}}, \mathbf{x} \sim p_{\text{train}}(\mathbf{x}|-1)} [||\mathbf{x}' - \mathbf{x}||] \\ &= \pi b_{+1} + (1-\pi) b_{-1} \end{aligned}$$

よって,

$$\mathbb{E}_{\mathbf{x}' \sim p_{\text{test}}, \mathbf{x} \sim q_\pi} [||\mathbf{x}' - \mathbf{x}||] = (b_{+1} - b_{-1})\pi + b_{-1} \quad (5)$$

第二項は,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}} \sim q_\pi} [||\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}||] &= \mathbb{E}_{\mathbf{x} \sim q_\pi} [\mathbb{E}_{\tilde{\mathbf{x}} \sim q_\pi} [||\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}||]] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbf{x} \sim q_\pi} [\pi \mathbb{E}_{\tilde{\mathbf{x}} \sim p_{\text{train}}(\tilde{\mathbf{x}}|+1)} [||\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}||] + (1-\pi) \mathbb{E}_{\tilde{\mathbf{x}} \sim p_{\text{train}}(\tilde{\mathbf{x}}|-1)} [||\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}||]] \\ &= \pi \{ \pi \mathbb{E}_{\mathbf{x} \sim p_{\text{train}}(\mathbf{x}|+1), \tilde{\mathbf{x}} \sim p_{\text{train}}(\tilde{\mathbf{x}}|+1)} [||\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}||] + (1-\pi) \mathbb{E}_{\mathbf{x} \sim p_{\text{train}}(\mathbf{x}|-1), \tilde{\mathbf{x}} \sim p_{\text{train}}(\tilde{\mathbf{x}}|+1)} [||\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}||] \} \\ &\quad + (1-\pi) \{ \pi \mathbb{E}_{\mathbf{x} \sim p_{\text{train}}(\mathbf{x}|+1), \tilde{\mathbf{x}} \sim p_{\text{train}}(\tilde{\mathbf{x}}|-1)} [||\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}||] + (1-\pi) \mathbb{E}_{\mathbf{x} \sim p_{\text{train}}(\mathbf{x}|-1), \tilde{\mathbf{x}} \sim p_{\text{train}}(\tilde{\mathbf{x}}|-1)} [||\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}||] \} \\ &= \pi^2 A_{+,+1} + \pi(1-\pi) A_{-,+1} + (1-\pi)\pi A_{+,-1} + (1-\pi)^2 A_{-,-1} \\ &= (A_{+,+1} - A_{-,+1} - A_{+,-1} + A_{-,-1})\pi^2 + (A_{-,+1} + A_{+,-1} - 2A_{-,-1})\pi + A_{-,-1} \end{aligned}$$

ここで,  $A_{+,-1} = A_{-,+1}$  から,

$$\mathbb{E}_{\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}} \sim q_\pi} [||\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}||] = (-2A_{+,-1} + A_{+,+1} + A_{-,-1})\pi^2 + 2(A_{+,-1} - A_{-,-1})\pi + A_{-,-1} \quad (6)$$

式 (2) に式 (5), (6) を代入して,

$$\begin{aligned} J(\pi) &= 2\{(b_{+1} - b_{-1})\pi + b_{-1}\} - \mathbb{E}_{\mathbf{x}', \tilde{\mathbf{x}}' \sim p_{\text{test}}} [||\mathbf{x}' - \tilde{\mathbf{x}}'||] \\ &\quad - \{(-2A_{+,-1} + A_{+,+1} + A_{-,-1})\pi^2 + 2(A_{+,-1} - A_{-,-1})\pi + A_{-,-1}\} \\ &= (2A_{+,-1} - A_{+,+1} - A_{-,-1})\pi^2 - 2(A_{+,-1} - A_{-,-1} - b_{+1} + b_{-1})\pi \\ &\quad + \{2b_{-1} - A_{-,-1} - \mathbb{E}_{\mathbf{x}', \tilde{\mathbf{x}}' \sim p_{\text{test}}} [||\mathbf{x}' - \tilde{\mathbf{x}}'||]\} \end{aligned}$$

となる。