宿題 1

微分可能で対称な損失 $\rho(r)$ に対して $\tilde{r}$ で接する二次上界は，（存在するなら）次式で与えられることを示す。

$$\tilde{\rho}(r) = \frac{\tilde{w}}{2} r^2 + \mathrm{Const.} \qquad \left(\tilde{w} = \frac{\rho'(\tilde{r})}{\tilde{r}} \right) \tag{1}$$

微分可能で対称な損失 $\rho(r)$ に対して $\tilde{r}$ で接する二次上界を，

$$\tilde{\rho}(r) = ar^2 + br + c \tag{2}$$

とおく。$\rho(r)$ は対称より，$b = 0$ がわかる。このとき，$\tilde{\rho}(r)$ は $\rho(r)$ に $\tilde{r}$ で接するので，自身の値及び 1 階微分の値が $\tilde{r}$ で一致する。したがって，

$$\tilde{\rho}(\tilde{r}) = a\tilde{r}^2 + c = \rho(\tilde{r}) \tag{3}$$

$$\tilde{\rho}'(\tilde{r}) = 2a\tilde{r} = \rho'(\tilde{r}) \tag{4}$$

これを解くと，

$$a = \frac{\rho'(\tilde{r})}{2\tilde{r}} \tag{5}$$

$$c = \rho(\tilde{r}) - \frac{\rho'(\tilde{r})}{2}\tilde{r} \tag{6}$$

となるので，結局，

$$\tilde{\rho}(r) = \frac{\rho'(\tilde{r})}{2\tilde{r}} r + \left(\rho(\tilde{r}) - \frac{\rho'(\tilde{r})}{2}\tilde{r} \right) \tag{7}$$

$$= \frac{\tilde{w}}{2} r^2 + \mathrm{Const.} \qquad \left(\tilde{w} = \frac{\rho'(\tilde{r})}{\tilde{r}} \right) \tag{8}$$

と表せることがわかる。