

宿題 1

サポートベクトルマシンの双対最適化問題の相補性条件は次のようになる。

$$\alpha_i (y_i \mathbf{w}^T \mathbf{x}_i - 1 + \xi_i) = 0 \quad (1)$$

$$\beta_i \xi_i = 0 \quad (2)$$

ここで、ソフトマージンを採用すると次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} y_i \mathbf{w}^T \mathbf{x}_i &\geq 1 - \xi_i \\ \Leftrightarrow y_i \mathbf{w}^T \mathbf{x}_i - 1 + \xi_i &\geq 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\xi_i \geq 0 \quad (4)$$

また、サポートベクトルマシンのラグランジュ関数の ξ_i による微分が 0 となることから、

$$\alpha_i + \beta_i = C \quad (5)$$

である。

以下では、 α_i と $y_i \mathbf{w}^T \mathbf{x}_i$ の値それぞれについて場合分けをし、各場合でのもう一方の値（の範囲）を求める。

1. $\alpha_i = 0$ のとき

式 (5) より、

$$\beta_i = C$$

式 (2) より、

$$\xi_i = 0$$

式 (3) より、

$$y_i \mathbf{w}^T \mathbf{x}_i \geq 1 \quad (6)$$

2. $0 < \alpha_i < C$ のとき

式 (5) より、

$$\beta_i \neq 0$$

式 (2) より、

$$\xi_i = 0$$

式 (1) より、 $\alpha_i \neq 0$ に注意して、

$$y_i \mathbf{w}^T \mathbf{x}_i = 1 \quad (7)$$

3. $\alpha_i = C$ のとき

式 (5) より,

$$\beta_i = 0$$

これと式 (2) より, $\xi_i = 0$ である必要はないことが確認される。式 (1) 及び式 (4) より, $\alpha_i \neq 0$ に注意して,

$$y_i \mathbf{w}^T \mathbf{x}_i = 1 - \xi_i \leq 1 \quad (8)$$

4. $y_i \mathbf{w}^T \mathbf{x}_i > 1$ のとき

式 (4) より,

$$y_i \mathbf{w}^T \mathbf{x}_i > 1 \geq 1 - \xi_i$$

$$y_i \mathbf{w}^T \mathbf{x}_i - 1 + \xi_i > 0$$

式 (1) より,

$$\alpha_i = 0 \quad (9)$$

5. $y_i \mathbf{w}^T \mathbf{x}_i < 1$ のとき

式 (3) より,

$$\xi_i \geq 1 - y_i \mathbf{w}^T \mathbf{x}_i > 0$$

$$\xi_i > 0$$

式 (2) より,

$$\beta_i = 0$$

式 (5) より,

$$\alpha_i = C \quad (10)$$