宿題 1

線形モデル

$$f_{\boldsymbol{w},b}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + b \tag{1}$$

に対するサポートベクトルマシンの劣勾配アルゴリズムを実装する。

理論

ソフトマージンを用いることとすれば，損失関数は次のようになる。

$$L = ||\boldsymbol{w}||^2 + C\sum_{i=1}^{n} \max(0,\ 1 - y_i f_{\boldsymbol{w},b}(\boldsymbol{x}_i)) \tag{2}$$

この損失関数の，パラメータ $\boldsymbol{w}$, b による偏微分を考える。第一項については，

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{w}}\left(||\boldsymbol{w}||^2\right) = 2\boldsymbol{w} \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial b}\left(||\boldsymbol{w}||^2\right) = 0 \tag{4}$$

となることが容易に分かる。第二項について考える。いま，

$$z_i = y_i f_{\boldsymbol{w},b}(\boldsymbol{x}_i) = y_i\left(\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + b\right) \tag{5}$$

とおくと，

$$\frac{\partial z_i}{\partial \boldsymbol{w}} = y_i \boldsymbol{x}_i \tag{6}$$

$$\frac{\partial z_i}{\partial b} = y_i \tag{7}$$

である。いま，微分したい関数 $\max(0,\ 1 - z_i)$ は $z_i = 1$ で微分不可能なので，劣微分を考える。J の θ による劣微分を $\partial_\theta J$ と表すこととすると，

$$\partial_{w_j} \max(0,\ 1 - z_i) = \begin{cases} -\,\partial z_i \big/ \partial w_j = -y_i x_{i,j} & (z < 1) \\ \left[-\,\partial z_i \big/ \partial w_j\ ,\ 0\right] = [-y_i x_{i,j},\ 0] & (z = 1) \\ 0 & (z > 1) \end{cases} \tag{8}$$

$$\partial_b \max(0,\ 1 - z_i) = \begin{cases} -\,\partial z_i \big/ \partial b = -y_i & (z < 1) \\ \left[-\,\partial z_i \big/ \partial b\ ,\ 0\right] = [-y_i,\ 0] & (z = 1) \\ 0 & (z > 1) \end{cases} \tag{9}$$

となる。以上より，損失関数の偏微分は次のようになる。

$$\frac{\partial L}{\partial w_j} = 2w_j + C\partial_{w_j} \max(0,\ 1 - z_i) \tag{10}$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_j} = C\partial_b \max(0,\ 1 - z_i) \tag{11}$$

結果

サンプル数 200 の二次元点群について，式 (1) の線形モデルに対するサポートベクトルマシンを用いて境界を求めた。パラメータの更新には劣勾配アルゴリズムを用いた。ハイパーパラメータは，$C = 0.1$，学習率 0.05 とした。終了条件は，パラメータの前の更新との差分のノルムが 1×10^{-4} 以下，または 10,000 回更新を行ったときとした。なお，プログラムは**??**ページの Listing **??**に示した。

学習の結果，ハイパーパラメータは次のようになった。

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} -0.3960 \\ 0.5339 \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$b = 0.02218 \tag{13}$$

また，このとき求まった境界及び点群を図 1 に示した。図をみると，他のカテゴリの方に近くなってしまっている小数のサンプルについてもうまく分類できていることがわかる。

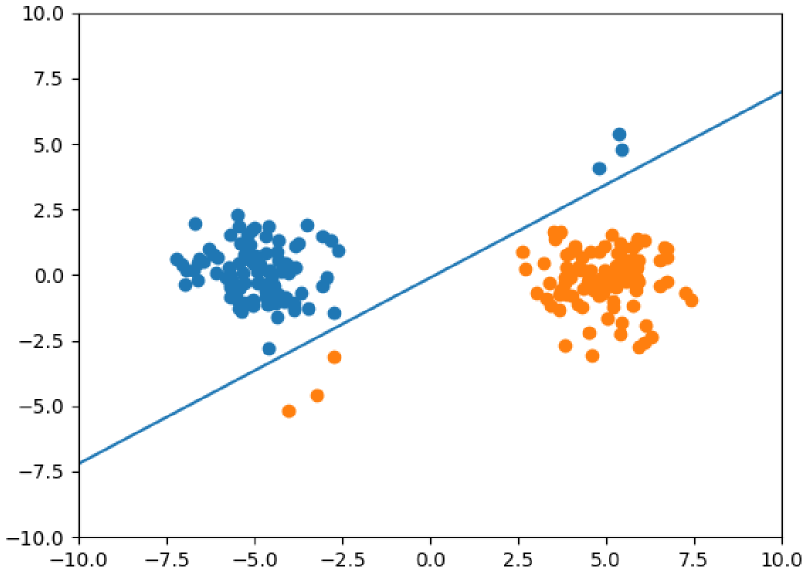

図 1: 境界及び点群