先端データ解析論
第 1 回　レポート

37-196360　森田涼介

2019 年 4 月 15 日

宿題 1

X を確率と統計の授業が好きであるという事象とし，$X=1$ が好き，$X=0$ が嫌いとする。また，Y を授業中に眠たいという事象とし，$Y=1$ が眠たい，$Y=0$ が眠たくないとする。このとき，与えられた条件より，

$$
\begin{aligned}
&p(X=1)=0.8 \quad p(X=0)=0.2 \\
&p(Y=1 \mid X=1)=0.25 \quad p(Y=1 \mid X=0)=0.25
\end{aligned}
$$

となる。

A)

$$
\begin{aligned}
p(X=\text{好}, Y=\text{眠}) &= p(X=1, Y=1) \\
&= p(Y=1 \mid X=1) \cdot p(X=1) \\
&= 0.25 \times 0.8 \\
&= 0.2
\end{aligned}
$$

B)

$$
\begin{aligned}
p(Y=\text{眠}) &= p(Y=1) \\
&= p(Y=1 \mid X=1) \cdot p(X=1) + p(Y=1 \mid X=0) \cdot p(X=0) \\
&= 0.25 \times 0.8 + 0.25 \times 0.2 \\
&= 0.25
\end{aligned}
$$

C)

$$
\begin{aligned}
p(X = 好 \mid Y = 眠) &= p(X = 1 \mid Y = 1) \\
&= \frac{p(X = 1,\, Y = 1)}{p(Y = 1)} \\
&= \frac{0.2}{0.25} \\
&= 0.8
\end{aligned}
$$

D)

$$
\begin{aligned}
&p(X = 1,\, Y = 1) = 0.2 \\
&p(X = 1) \cdot p(Y = 1) = 0.8 \times 0.25 = 0.2
\end{aligned}
$$

から，

$$
p(X = 1,\, Y = 1) = p(X = 1) \cdot p(Y = 1)
$$

よって，X と Y は独立である。

宿題 2

A)

離散型について，$\sum_x p(x) = 1$ から，

$$E(c) = \sum_x cp(x) = c \cdot \sum_x p(x) = c$$

連続型について，$\int p(x)\mathrm{d}x = 1$ から，

$$E(c) = \int cp(x)\mathrm{d}x = c \cdot \int p(x)\mathrm{d}x = c$$

B)

離散型について，

$$\begin{aligned} E(X+c) &= \sum_x (x+c)p(x) \\ &= \sum_x xp(x) + \sum_x cp(x) \\ &= E(X) + E(c) \\ &= E(X) + E(c) \end{aligned}$$

連続型について，

$$\begin{aligned} E(X+c) &= \int (x+c)p(x)\mathrm{d}x \\ &= \int xp(x)\mathrm{d}x + \int cp(x)\mathrm{d}x \\ &= E(X) + E(c) \\ &= E(X) + c \end{aligned}$$

C)

離散型について，

$$E(cX) = \sum_x cxp(x) = c \cdot \sum_x xp(x) = cE(X)$$

連続型について，

$$E(cX) = \int cxp(x)\mathrm{d}x = c \cdot \int xp(x)\mathrm{d}x = cE(X)$$

宿題 3

A)

$E(c) = c$ から，

$$V(c) = E\left((c - E(c))^2\right) = E(0) = 0$$

B)

$$\begin{aligned} V(X+c) &= E\Big(((X+c) - E(X+c))^2\Big) \\ &= E\Big(((X+c) - (E(X)+c))^2\Big) \\ &= E\left((X - E(X))^2\right) \\ &= V(X) \end{aligned}$$

C)

$E(cX) = cE(X)$ から，

$$\begin{aligned} V(cX) &= E\Big((cX - E(cX))^2\Big) \\ &= E\Big((cX - cE(X))^2\Big) \\ &= E\Big(c^2(X - E(X))^2\Big) \\ &= c^2E\Big((X - E(X))^2\Big) \\ &= c^2V(X) \end{aligned}$$

宿題 4

A)

離散型について，

$$
\begin{aligned}
E(X+X') &= \sum_{x}\sum_{x'}(x+x')p(x,\ x') \\
&= \sum_{x}\sum_{x'}xp(x,\ x') + \sum_{x}\sum_{x'}x'p(x,\ x') \\
&= \sum_{x}xp(x) + \sum_{x'}x'p(x') \\
&= E(X)+E(X')
\end{aligned}
$$

連続型について，

$$
\begin{aligned}
E(X+X') &= \iint (x+x')p(x,\ x')\mathrm{d}x\mathrm{d}x' \\
&= \iint xp(x,\ x')\mathrm{d}x\mathrm{d}x' + \iint x'p(x,\ x')\mathrm{d}x\mathrm{d}x' \\
&= \int xp(x)\mathrm{d}x + \int x'p(x')\mathrm{d}x' \\
&= E(X)+E(X')
\end{aligned}
$$

B)

$$
\begin{aligned}
V(X+X') &= E\Big(\big((X+X')-E(X+X')\big)^2\Big) \\
&= E\Big(\big((X+X')-(E(X)+E(X'))\big)^2\Big) \\
&= E\Big(\big((X-E(X))+(X'-E(X'))\big)^2\Big) \\
&= E\big((X-E(X))^2+2(X-E(X))(X'-E(X'))+(X'-E(X'))^2\big) \\
&= E\big((X-E(X))^2\big)+2E\big((X-E(X))(X'-E(X'))\big)+E\big((X'-E(X'))^2\big) \\
&= V(X)+V(X')+2\mathrm{Cov}(X,\ X')
\end{aligned}
$$