# 宿題 1

$$T(z) = \lambda|z| + u(\theta - z) + \frac{1}{2}(\theta - z)^2 \qquad (\lambda \geq 0) \tag{1}$$

について，

$$\arg\min_z T(z) = \max(0,\ \theta + u - \lambda) + \min(0,\ \theta + u + \lambda) \tag{2}$$

であることを証明する。

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \lambda \mathrm{sign}(z) - u + (z - \theta) \tag{3}$$

$$= z - (\theta + u - \lambda \mathrm{sign}(z)) \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 1 \quad (> 0) \tag{5}$$

より，$T$ は下に凸な関数である。以下では $z$ の正負について場合分けをし，$T$ に最小を与える $z$ を求める。

$z \geq 0$ のとき，

$$\frac{\partial T}{\partial z} = z - (\theta + u - \lambda) \tag{6}$$

1. $\theta + u \leq \lambda$ のとき
   $\forall z \geq 0$ に対して $\partial T / \partial z \geq 0$ が成立し，$T$ は増加関数となるので，$T$ に最小を与える $z = 0$ となる。
2. $\theta + u \geq \lambda$ のとき
   $T$ は下に凸な関数であるから，$\partial T / \partial z = 0$ を与える $z$ が $T$ に最小を与える。よって $z = \theta + u - \lambda$ となる。

これをまとめると，

$$\arg\min_z T(z) = \max(0,\ \theta + u - \lambda) \tag{7}$$

$z \leq 0$ のとき，

$$\frac{\partial T}{\partial z} = z - (\theta + u + \lambda) \tag{8}$$

1. $\theta + u \geq -\lambda$ のとき
   $\forall z \leq 0$ に対して $\partial T / \partial z \leq 0$ が成立し，$T$ は減少関数となるので，$T$ に最小を与える $z = 0$ となる。
2. $\theta + u \leq -\lambda$ のとき
   $\partial T / \partial z = 0$ を与える $z = \theta + u + \lambda$ が $T$ に最小を与える。

これをまとめると，

$$\arg\min_z T(z) = \min(0,\ \theta + u + \lambda) \tag{9}$$

以上をグラフで表すと，図 1 のようになる。

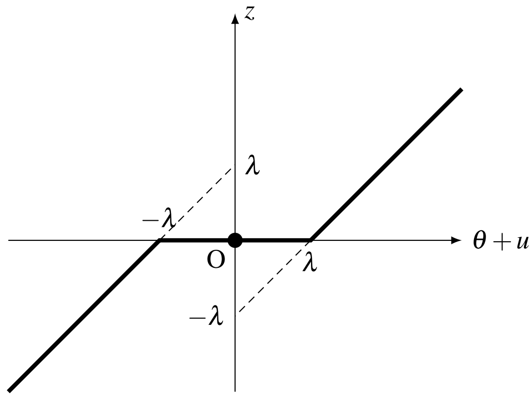


図 1: $z-\theta+u$ 曲線

以上より，

$$\arg\min_{z} T(z) = \max(0,\ \theta+u-\lambda)+\min(0,\ \theta+u+\lambda) \tag{10}$$

であることがわかる。