宿題 1

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ についての関数 f を，

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{1}$$

とする。ここで，$\boldsymbol{A}$ は正定値対称行列である。この f の厳密直線探索の最適なステップ幅は，$f(\boldsymbol{x}_k - \varepsilon_k \nabla f(\boldsymbol{x}_k))$ を最小にする ε_k を考えることにより，

$$\varepsilon_k = \frac{||\nabla f(\boldsymbol{x}_k)||^2}{\nabla f(\boldsymbol{x}_k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\nabla f(\boldsymbol{x}_k)} = \frac{\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}_k}{\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x}_k} \tag{2}$$

で与えられる（$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$）。

いま，f の真の減少量を，

$$g(\varepsilon_k) = f(\boldsymbol{x}_k) - \varepsilon_k \nabla f(\boldsymbol{x}_k) - f(\boldsymbol{x}_k) \tag{3}$$

とすると，Armijo 規準より，$\alpha \in (0,\ 1)$ について，

$$g(\varepsilon_k) \leq \alpha \varepsilon_k g'(0) \tag{4}$$

が成り立つ。ここで，g を ε_k について Taylor 展開することで，

$$g'(0) = -||\nabla f(\boldsymbol{x}_k)||^2 \tag{5}$$

を得る。ここで，

$$f(\boldsymbol{x}_k - \varepsilon_k \nabla f(\boldsymbol{x}_k)) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_k - \varepsilon_k \nabla f(\boldsymbol{x}_k))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_k - \varepsilon_k \nabla f(\boldsymbol{x}_k)) \tag{6}$$

$$= \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k - \varepsilon_k \nabla f(\boldsymbol{x}_k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k + \frac{1}{2}\varepsilon_k^2 \nabla f(\boldsymbol{x}_k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\nabla f(\boldsymbol{x}_k) \tag{7}$$

から，結局 Armijo 規準は次のように整理される。

$$g(\varepsilon_k) \leq \alpha \varepsilon_k g'(0) \tag{8}$$

$$\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k - \varepsilon_k \nabla f(\boldsymbol{x}_k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k + \frac{1}{2}\varepsilon_k^2 \nabla f(\boldsymbol{x}_k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\nabla f(\boldsymbol{x}_k)\right) - \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k \leq -\alpha \varepsilon_k ||\nabla f(\boldsymbol{x}_k)||^2 \tag{9}$$

$$\left(\frac{1}{2}\nabla f(\boldsymbol{x}_k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\nabla f(\boldsymbol{x}_k)\right)\varepsilon_k^2 \leq (1-\alpha)||\nabla f(\boldsymbol{x}_k)||^2 \varepsilon_k \tag{10}$$

$\varepsilon_k > 0,\ \boldsymbol{A} > \boldsymbol{O}$ から，

$$\varepsilon_k \leq 2(1-\alpha)\frac{||\nabla f(\boldsymbol{x}_k)||^2}{\nabla f(\boldsymbol{x}_k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\nabla f(\boldsymbol{x}_k)} \tag{11}$$

よって，$\alpha = 1/2$ の Armijo 規準を満たす最大の ε_k は，

$$\varepsilon_k = \frac{||\nabla f(\boldsymbol{x}_k)||^2}{\nabla f(\boldsymbol{x}_k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\nabla f(\boldsymbol{x}_k)} = \frac{\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}_k}{\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x}_k} \tag{12}$$

となり，厳密直線探索の最適なステップ幅と一致する。