宿題 1

微分と積分の順序が交換できるとき，フィッシャー情報行列について式 (2) が成立することを示す。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\theta}) &\coloneqq \int \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \log q(\boldsymbol{x};\, \boldsymbol{\theta})\right)\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \log q(\boldsymbol{x};\, \boldsymbol{\theta})\right)^{\mathrm{T}} q(\boldsymbol{x};\, \boldsymbol{\theta})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} && (1)\\
&= -\int \left(\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}} \log q(\boldsymbol{x};\, \boldsymbol{\theta})\right) q(\boldsymbol{x};\, \boldsymbol{\theta})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} && (2)
\end{aligned}
$$

以下では，簡単のため $q(\boldsymbol{x};\, \boldsymbol{\theta})$ を q と記すこととする。$q, r \in \mathbb{R}$ について，

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \log q\right) q = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} q && (3)\\
&\left(\frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right)^{\mathrm{T}} = \frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}} && (4)
\end{aligned}
$$

が成立することから，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\theta}) &\coloneqq \int \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \log q\right)\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \log q\right)^{\mathrm{T}} q\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} && (5)\\
&= \int \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \log q\right) q \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \log q\right)^{\mathrm{T}} \mathrm{d}\boldsymbol{x} && (6)\\
&= \int \frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{\theta}} \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}} \log q\right) \mathrm{d}\boldsymbol{x} && (7)
\end{aligned}
$$

となる。

いま，

$$
G(\boldsymbol{\theta}) \coloneqq \int \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \left(q \frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}}\right) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \qquad (8)
$$

なる G について，微分と積分の順序が交換できるとき，

$$
\begin{aligned}
G(\boldsymbol{\theta}) &= \int \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \left(q \frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}}\right) \mathrm{d}\boldsymbol{x} && (9)\\
&= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \left(\int q \frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}}\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}\right) && (10)\\
&= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \left\{\int q \mathrm{d}\boldsymbol{x} \cdot \frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}} - \int \left(\int q \mathrm{d}\boldsymbol{x}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \left(\frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}}\right) \mathrm{d}\boldsymbol{x}\right\} && (11)
\end{aligned}
$$

が成立する。ここで，

$$
\int q \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 1 \qquad (12)
$$

から，

$$
\begin{aligned}
G(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \left(\frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}} - \int \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \left(\frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}}\right) \mathrm{d}\boldsymbol{x}\right) && (13)\\
&= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \left(\frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}} - \frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}}\right) && (14)\\
&= \boldsymbol{0} && (15)
\end{aligned}
$$

となる。また，G について，次式も成立する。

$$G(\boldsymbol{\theta}) = \int \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \left(q \frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}} \right) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{16}$$

$$= \int \left(\frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{\theta}} \frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}} + q \frac{\partial^2 r}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}} \right) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{17}$$

これらのことから，$r = \log q$ とすれば，

$$\int \frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{\theta}} \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}} \log q \right) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int q \left(\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}} \log q \right) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{18}$$

が成立することがわかる。

式 (7)，(18) から，

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\theta}) = -\int \left(\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}} \log q \right) q \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{19}$$

が示される。