宿題 1

入力次元 $d=2$，カテゴリ数 $c=2$，各カテゴリの事前分布 $p(y=1)=p(y=2)=1/2$ の分類問題を考える。また，各カテゴリの条件付き確率 $p(x|y)$ は正規分布であるとし，その期待値と共分散行列は次のようになるとする。

$$\mu_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mu_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma = \begin{bmatrix} 9-8\cos^2\beta & 8\sin\beta\cos\beta \\ 8\sin\beta\cos\beta & 9-8\sin^2\beta \end{bmatrix} \tag{2}$$

線形判別分析に基づいて決定境界を求める。決定境界は，

$$p(y=1|x) = p(y=2|x) \tag{3}$$

で与えられる。ここで，各カテゴリの分散共分散行列が等しいので，

$$\log\ p(y|x) = {\mu_y}^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}x - \frac{1}{2}{\mu_y}^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}\mu_y + \log p_y + C'' \tag{4}$$

となる。よって

$$\log p(y=1|x) = {\mu_1}^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}x - \frac{1}{2}{\mu_1}^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}\mu_1 + \log p_1 + C'' \tag{5}$$

$$\log p(y=2|x) = {\mu_2}^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}x - \frac{1}{2}{\mu_2}^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}\mu_2 + \log p_2 + C'' \tag{6}$$

式 (3) と $p(y=1)=p(y=2)=1/2$ とから，辺々引いて，

$$({\mu_1}^{\mathrm{T}} - {\mu_2}^{\mathrm{T}})\Sigma^{-1}x - \frac{1}{2}({\mu_1}^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}\mu_1 - {\mu_2}^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}\mu_2) = 0 \tag{7}$$

を得る。いま，Σ の逆行列を求めると，

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 9-8\sin^2\beta & -8\cos\beta\sin\beta \\ -8\cos\beta\sin\beta & 9-8\cos^2\beta \end{bmatrix} \tag{8}$$

となるので，

$$({\mu_1}^{\mathrm{T}} - {\mu_2}^{\mathrm{T}})\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 9-8\sin^2\beta & -8\cos\beta\sin\beta \\ -8\cos\beta\sin\beta & 9-8\cos^2\beta \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$= \frac{4}{9}\begin{bmatrix} 9-8\sin^2\beta & -8\cos\beta\sin\beta \end{bmatrix} \tag{10}$$

$${\mu_1}^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}\mu_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 9-8\sin^2\beta & -8\cos\beta\sin\beta \\ -8\cos\beta\sin\beta & 9-8\cos^2\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{4}{9}(9-8\sin^2\beta) \tag{11}$$

$${\mu_2}^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}\mu_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 9-8\sin^2\beta & -8\cos\beta\sin\beta \\ -8\cos\beta\sin\beta & 9-8\cos^2\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{4}{9}(9-8\sin^2\beta) \tag{12}$$

となる。これらを式 (7) に代入して，

$$\frac{4}{9}\left((9-8\sin^2\beta)x^{(1)} - 8\cos\beta\sin\beta x^{(2)}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}(9-8\sin^2\beta) - \frac{4}{9}(9-8\sin^2\beta)\right) = 0 \tag{13}$$

$$(9-8\sin^2\beta)x^{(1)} - 8\cos\beta\sin\beta x^{(2)} = 0 \tag{14}$$

$$x^{(1)} = -\frac{8\cos\beta\sin\beta}{9-8\sin^2\beta}x^{(2)} \tag{15}$$

よって，決定境界は，

$$x^{(1)} = -\frac{8\cos\beta\sin\beta}{9-8\sin^2\beta}x^{(2)} \tag{16}$$

である。