宿題 1

原信号 $\{\boldsymbol{s}_i\}_{i=1}^n$ $\left(\boldsymbol{s}_i \in \mathbb{R}^d\right)$，観測信号 $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n$ $\left(\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^d\right)$ について，混合行列 $\boldsymbol{M}$ $(\in \mathbb{R}^{d\times d})$ を用いて，

$$\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{M}\boldsymbol{s}_i \tag{1}$$

が成立するときを考える。ここで，原信号 $\{\boldsymbol{s}_i\}_{i=1}^n$ は i.i.d，期待値 $\boldsymbol{\mu}_s = \boldsymbol{0}$ で，共分散行列が単位行列 $\boldsymbol{\Sigma}_s = \boldsymbol{I}_d$ であり，また，$\boldsymbol{M}$ は逆行列を持つと仮定する（独立成分分析）。

観測信号を球状化（白色化）することを考える。観測信号の期待値と共分散行列は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mu}_x &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \boldsymbol{x}_i && (2)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \boldsymbol{M}\boldsymbol{s}_i && (3)\\
&= \boldsymbol{M}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \boldsymbol{s}_i && (4)\\
&= \boldsymbol{M}\boldsymbol{\mu}_s && (5)\\
&= \boldsymbol{0} && (6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Sigma}_x &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{\mu}_x)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{\mu}_x) && (7)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_i && (8)\\
&\equiv \boldsymbol{C} && (9)
\end{aligned}$$

これより，$\boldsymbol{\Sigma}_x = \boldsymbol{C}$ が逆行列を持つことを仮定し，$\boldsymbol{x}_i$ を白色化すると，

$$\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{x}}_i &= \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{\mu}_x) && (10)\\
&= \boldsymbol{C}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{x}_i && (11)
\end{aligned}$$

また，式 (1) の両辺に左側から $\boldsymbol{C}^{-1/2}$ をかけることで，

$$\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{x}}_i &= \tilde{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{s}_i && (12)\\
\tilde{\boldsymbol{M}} &= \boldsymbol{C}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{M} && (13)
\end{aligned}$$

となる。

白色化された $\tilde{\boldsymbol{x}}_i$（平均 $\boldsymbol{0}$）の共分散行列を考える。$\boldsymbol{s}_i$ は平均 $\boldsymbol{0}$，共分散行列 $\boldsymbol{I}_d$ であることに注意しつつ，式

(12) を用いれば，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Sigma}_{\tilde{x}} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{\boldsymbol{x}}_i\tilde{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}} && (14)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\tilde{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{s}_i)(\boldsymbol{s}_i^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{T}}) && (15)\\
&= \tilde{\boldsymbol{M}}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{s}_i\boldsymbol{s}_i^{\mathrm{T}}\right)\tilde{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{T}} && (16)\\
&= \tilde{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{\Sigma}_s\tilde{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{T}} && (17)\\
&= \tilde{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{I}_d\tilde{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{T}} && (18)\\
&= \tilde{\boldsymbol{M}}\tilde{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{T}} && (19)
\end{aligned}$$

白色化より，当然これは単位行列 $\boldsymbol{I}_d$ となる。結局，

$$\tilde{\boldsymbol{M}}\tilde{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}_d \tag{20}$$

を得る。式 (20) は $\tilde{\boldsymbol{M}}$ が直交行列であることを示している。つまり，

$$\tilde{\boldsymbol{M}}^{-1} = \tilde{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{T}} \tag{21}$$

が成立する。これより，次式が成立する。

$$\tilde{\boldsymbol{M}}\tilde{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{T}} = \tilde{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{I}_d \tag{22}$$