統計的機械学習
第八回　レポート ID: 03

37-196360　森田涼介

2019 年 6 月 10 日

ベイズ推定の逐次合理性を示す。データ $x_{1:n} = (x_1, \cdots, x_n)$ について，条件付き独立性を仮定すると，尤度は，

$$p(x_{1:n}|\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i|\theta) \tag{1}$$

また，De Finetti の定理より，確率変数の列 $x_{1:n}$ が交換可能であるとき，任意 n に対して次が成立する。

$$p(x_{1:n}) = \int \prod_{i=1}^{n} p(x_i|\theta)p(\theta)\mathrm{d}\theta \tag{2}$$

これより，事前分布を $p(\theta)$ とすると，事後分布は，

$$p(\theta|x_{1:n}) = \frac{p(x_{1:n}|\theta)p(\theta)}{p(x_{1:n})} \tag{3}$$

となる。式 (1) を用いると，

$$\begin{aligned} p(x_{1:n}|\theta)p(\theta) &= \prod_{i=1}^{n} p(x_i|\theta)p(\theta) \\ &= p(x_n|\theta)\prod_{i=1}^{n-1} p(x_i|\theta)p(\theta) \\ &= p(x_n|\theta)p(x_{1:n-1}|\theta)p(\theta) \end{aligned}$$

ベイズの定理より，

$$p(x_{1:n-1}|\theta)p(\theta) = p(\theta|x_{1:n-1})p(x_{1:n-1})$$

が成立するので，結局，

$$p(x_{1:n}|\theta)p(\theta) = p(x_n|\theta)p(\theta|x_{1:n-1})p(x_{1:n-1}) \tag{4}$$

式 (2)，(3)，(4) から，

$$\begin{aligned} p(\theta|x_{1:n}) &= \frac{p(x_{1:n}|\theta)p(\theta)}{p(x_{1:n})} \\ &= \frac{p(x_n|\theta)p(\theta|x_{1:n-1})p(x_{1:n-1})}{\int p(x_n|\theta)p(\theta|x_{1:n-1})p(x_{1:n-1})\mathrm{d}\theta} \\ &= \frac{p(x_n|\theta)p(\theta|x_{1:n-1})}{\int p(x_n|\theta)p(\theta|x_{1:n-1})\mathrm{d}\theta} \end{aligned}$$

これより，$p(\theta|x_{1:n-1})$ を事前分布とすると，事後分布は，

$$p(\theta|x_{1:n}) = \frac{p(x_n|\theta)p(\theta|x_{1:n-1})}{\int p(x_n|\theta)p(\theta|x_{1:n-1})\mathrm{d}\theta} \tag{5}$$

と表すことができ，逐次性を持つことが示された。