Интерполяция сеточных функций.

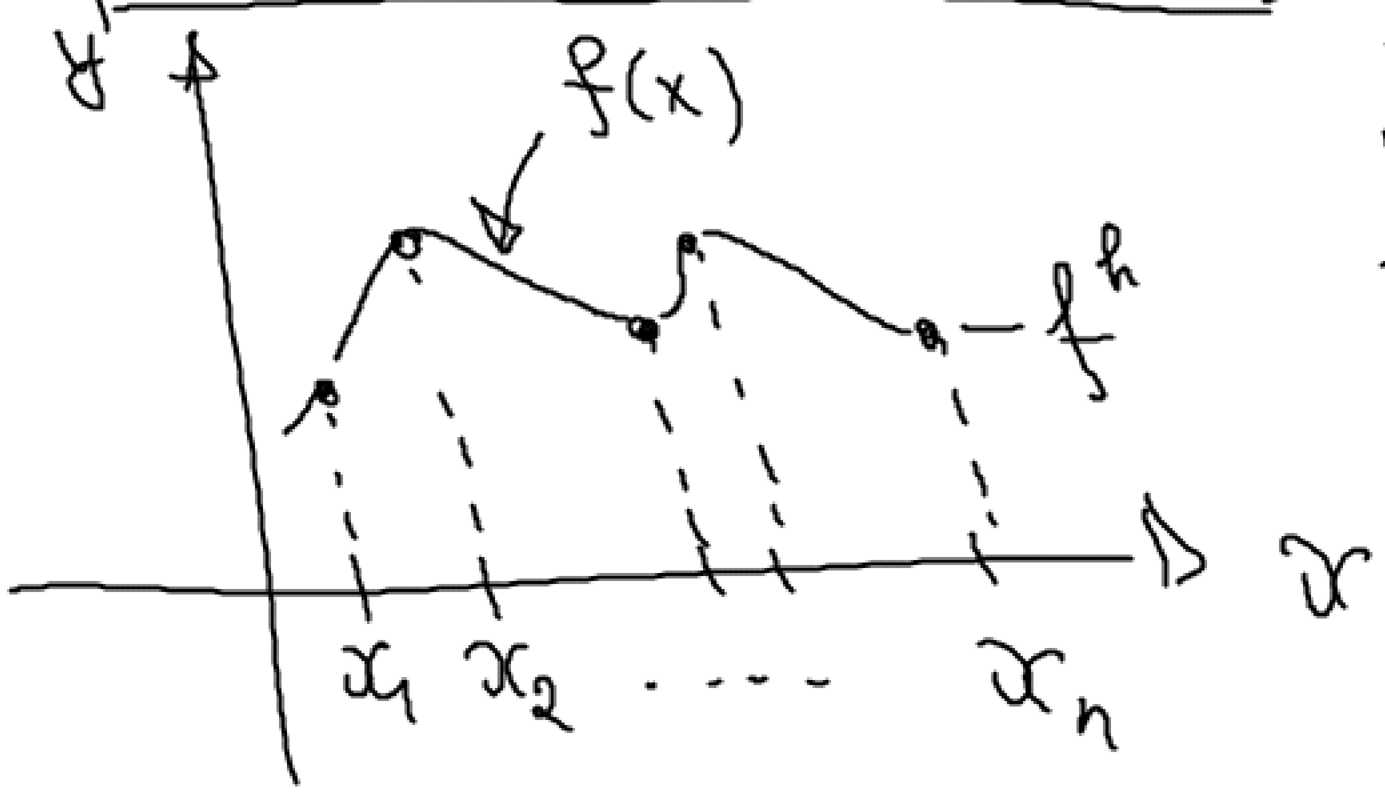
Задача интерполяции:

$[a,b]$; $a \le x_1 < x_2 < \ldots < x_n \le b$;

$\{x_i\}_{i=1}^{n}$ – сетка;

$f^h = \{f_i^h\}_{i=1}^{n}$; $f^h : x_i \longrightarrow f_i^h$ $(i=\overline{1,n})$

$$\boxed{\text{Найти } f \in C[a,b] : f(x_i) = f_i^h,\ i=\overline{1,n}}$$



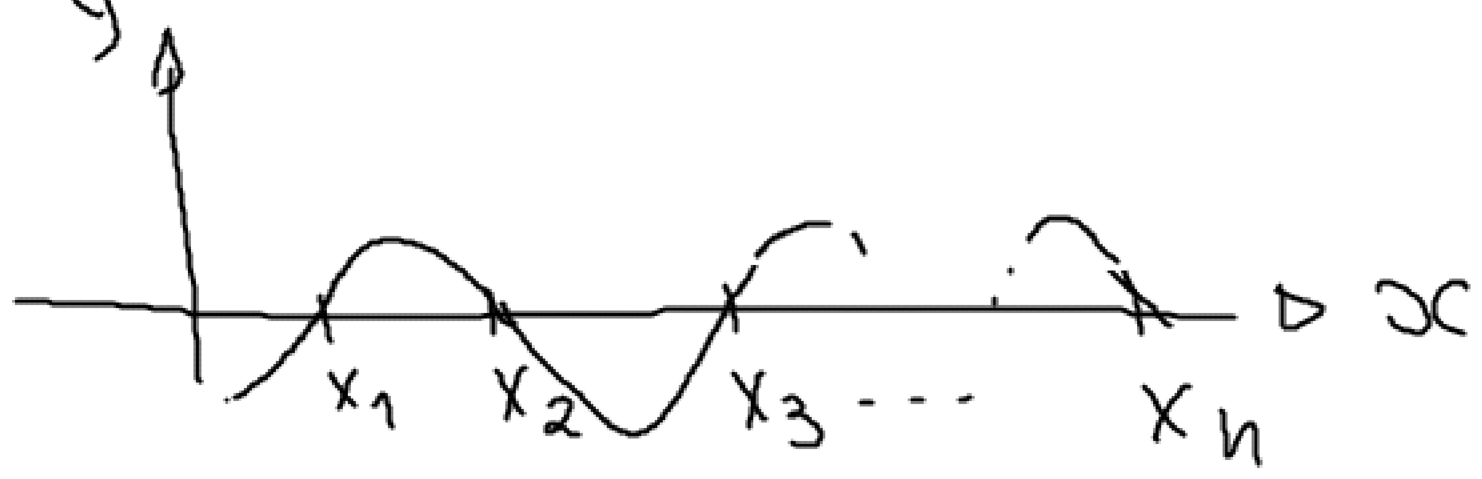
1) $\mathbb{P}_{n-1}$ – многочлены, $\deg \le n-1$;

2) Сплайн-функции.

Интерполяция алгебраическими многочленами

(в классе $\mathbb{P}_{n-1}$)

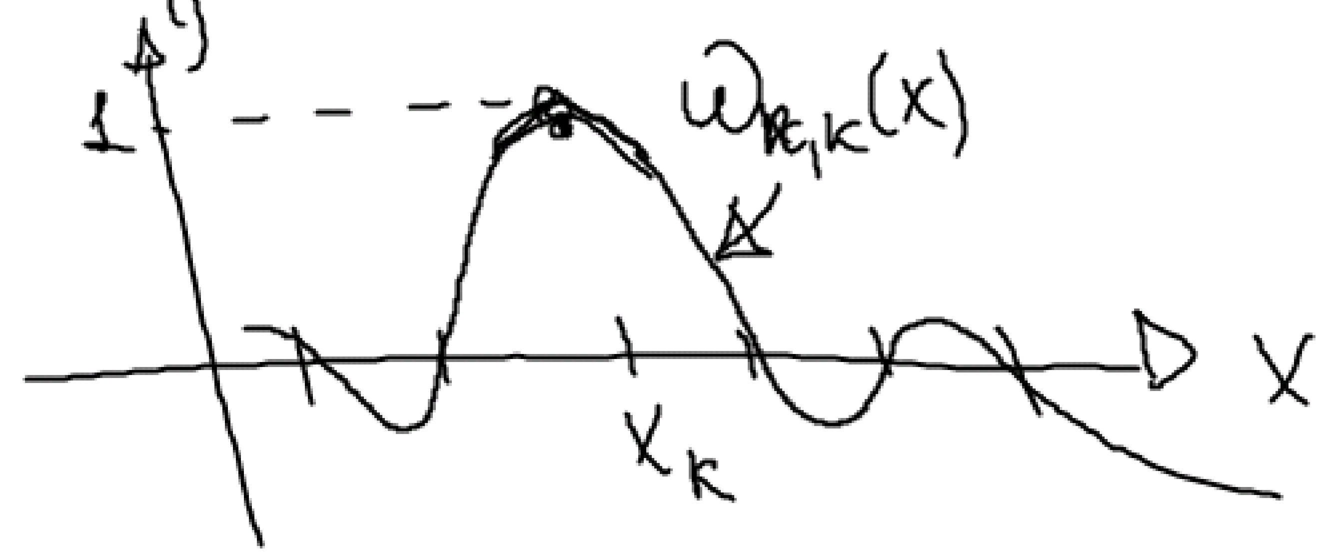
$$\omega_n(x) \equiv (x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdots(x-x_n) \in \mathbb{P}_n;$$



$$\omega_{n,k}(x) \equiv \frac{\omega_n(x)}{(x-x_k)\cdot\omega_n'(x_k)} \overset{?}{=} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\left(\frac{x-x_i}{x_k-x_i}\right) \in \mathbb{P}_{n-1};$$

$(k=\overline{1,n})$ "базис" интерполяции

(1) $\omega_{n,k}(x_j) = \begin{cases} 1, & j=k; \\ 0, & j\neq k. \end{cases}$



$$l_n(x, f^h) \equiv \sum_{k=1}^{n} \omega_{n,k}(x) \cdot f_k^h$$ – многочлен Лагранжа.

1) $l_n(x, f^h)$ – решение задачи интерполяции в $\mathbb{P}_{n-1}$;

$$\omega_{n,k} \in \mathbb{P}_{n-1} \Rightarrow l_n \in \mathbb{P}_{n-1} \; +$$

$$l_n(x_i, f^h) = \sum_{k=1}^{h} \omega_{n,k}(x_i) f_k^h \overset{(1)}{=} f_i^h, \; i=\overline{1,n}; \; +$$

2) $l_n(x, f^h)$ – единств. реш. задачи интерполяции в $\mathbb{P}_{n-1}$.

От противного: $\exists\, p(x) \in \mathbb{P}_{n-1}$; $p(x_i) = f_i^h \; (i=\overline{1,n})$;

$q(x) \equiv l_n(x, f^h) - p(x) \in \mathbb{P}_{n-1}$ и $q(x_i) = 0 \; (i=\overline{1,n})$;

$q(x) = \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n$; $\alpha_i \in R$;

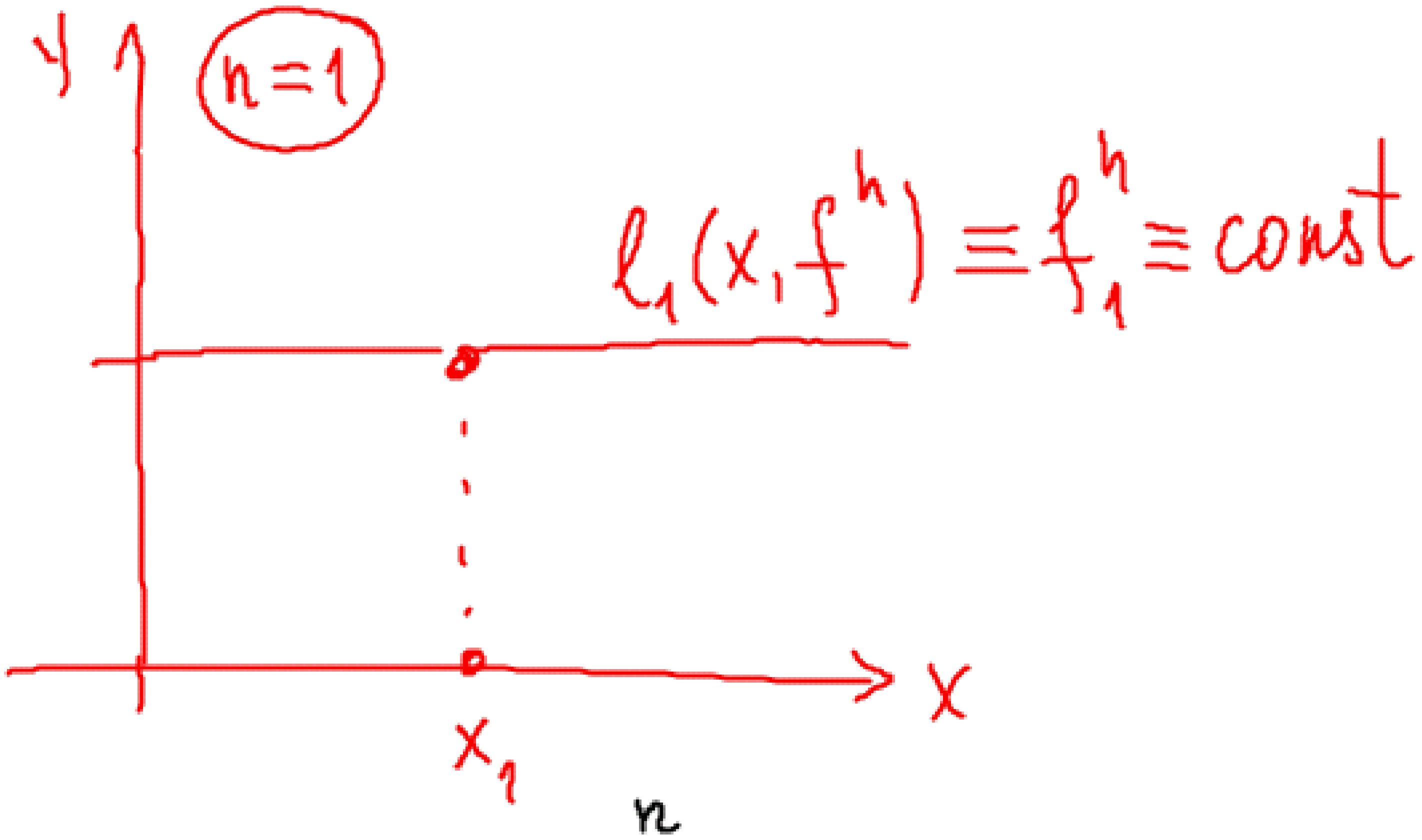
$$(2)\begin{cases} \alpha_{n-1}x_1^{n-1}+\alpha_{n-2}x_1^{n-2}+\dots+\alpha_1 x_1+\alpha_0=0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{n-1}x_n^{n-1}+\alpha_{n-2}x_n^{n-2}+\dots+\alpha_1 x_n+\alpha_0=0; \end{cases}$$

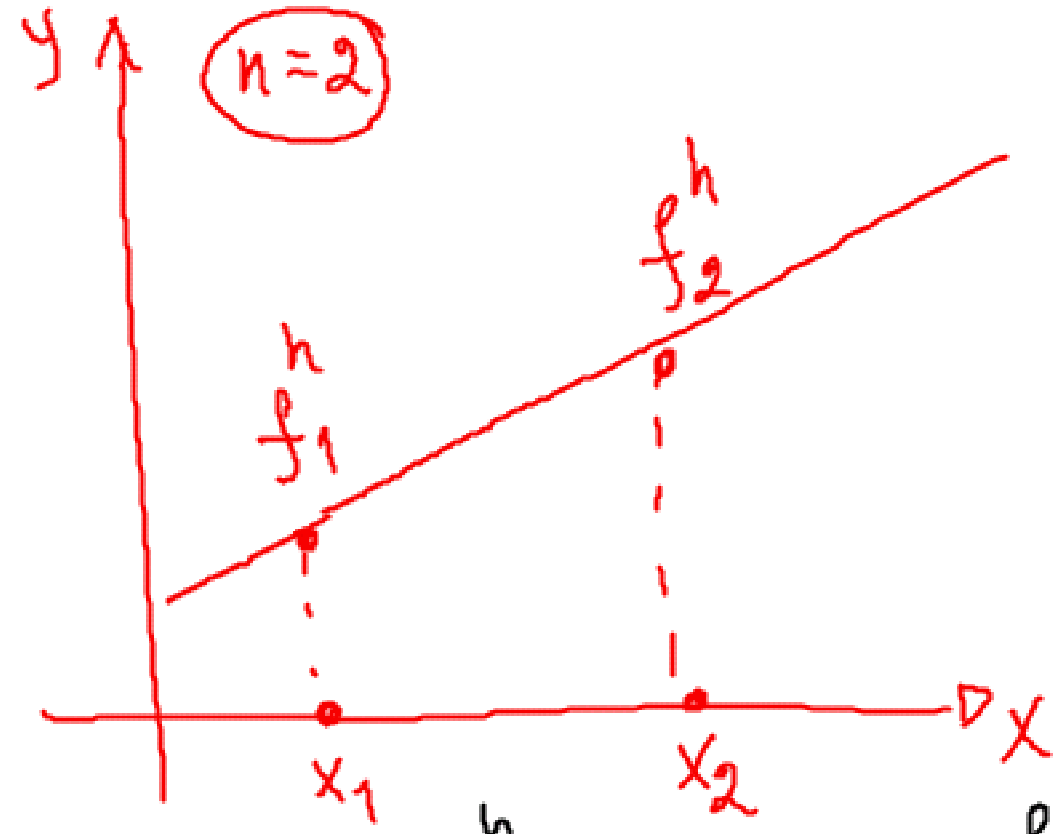
n-ур-ий, n-неизвестных $\{\alpha_i\}_{i=0}^{n-1}$;

Если $\mathrm{Det}\neq 0 \Rightarrow$ (2) имеет только нулевое реше-ние: $\alpha_i=0$, $i=\overline{0,n-1}$; $\Rightarrow q(x)\equiv 0 \Rightarrow l_n(x,f^n)$ - единств.

$$\mathrm{Det}=\begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \dots & x_1 & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \dots & x_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \dots & x_n & 1 \end{vmatrix}\neq 0 \text{ - опред. Вандермонда}$$

$$n=2 \Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} = x_1-x_2\neq 0$$



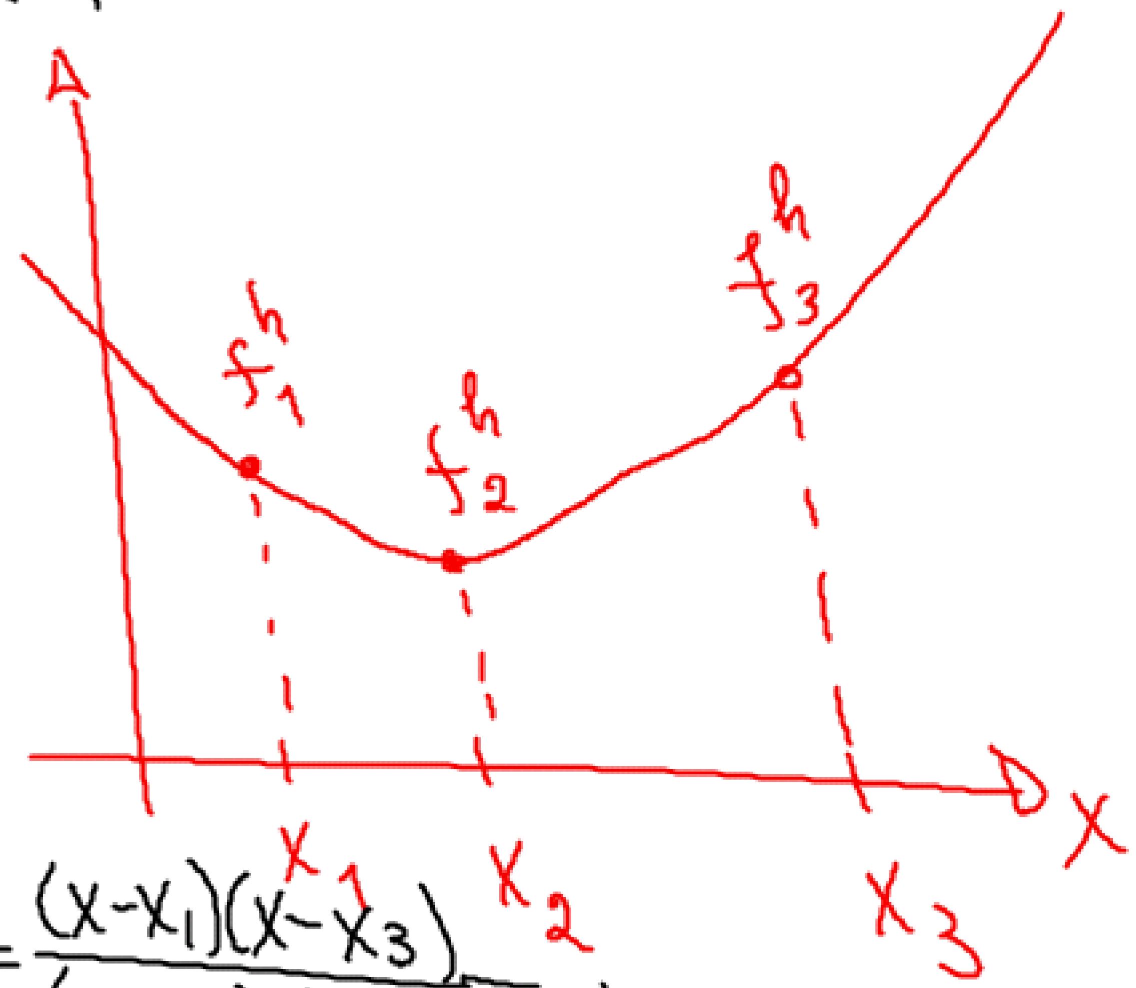


$$\omega_{n,k}(x) = \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i}; \qquad k=\overline{1,n}; \qquad \ell_n(x,f^h) = \sum_{k=1}^{n} \omega_{n,k}(x)\cdot f_k^h;$$

$n=2$

$$\omega_{2,1}(x) = \frac{x-x_2}{x_1-x_2}; \quad \omega_{2,2}(x) = \frac{x-x_1}{x_2-x_1};$$

$$\ell_2(x,f^h) = \frac{x-x_2}{x_1-x_2}\cdot f_1^h + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}\cdot f_2^h;$$



$n=3$

$$\omega_{3,1}(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}; \quad \omega_{3,2}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)};$$

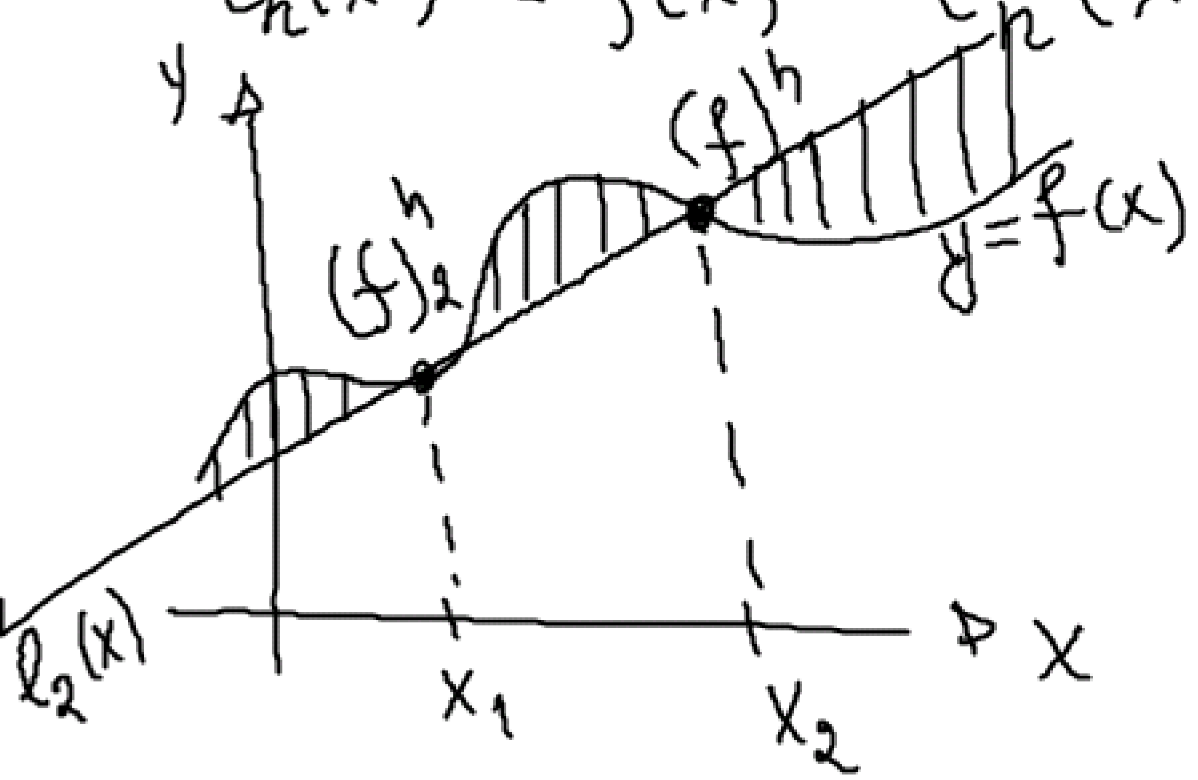
$$\omega_{3,3}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)};$$

Оценка погрешности интерполяции.

$f \in C^n[a,b]$ – пр-во ф-ций непрер. вместе с "n" производными на $[a,b]$;

$(f)^h \equiv \{f(x_i)\}_{i=1}^{n}$ – проекция $f(x)$ на сетку $\{x_i\}_{i=1}^{n}$.

$r_n(x) \equiv f(x) - l_n(x,(f)^h)$ – погрешность интерполяции.



$$r_n(x_i) = f(x_i) - l_n(x_i,(f)^h) =$$
$$= f(x_i) - f(x_i) = 0,\ i=\overline{1,n}.$$

$x \neq x_i,\ i=\overline{1,n};$

$$g_x(y) \equiv r_n(y) - \frac{r_n(x)}{\omega_n(x)}\cdot\omega_n(y); \quad \omega_n(y) = (y-x_1)(y-x_2)\cdots(y-x_n).$$

$g_x(y) \in C^n[a,b];\quad g_x(x_i)=0\ (i=\overline{1,n});\ g_x(x)=0;$

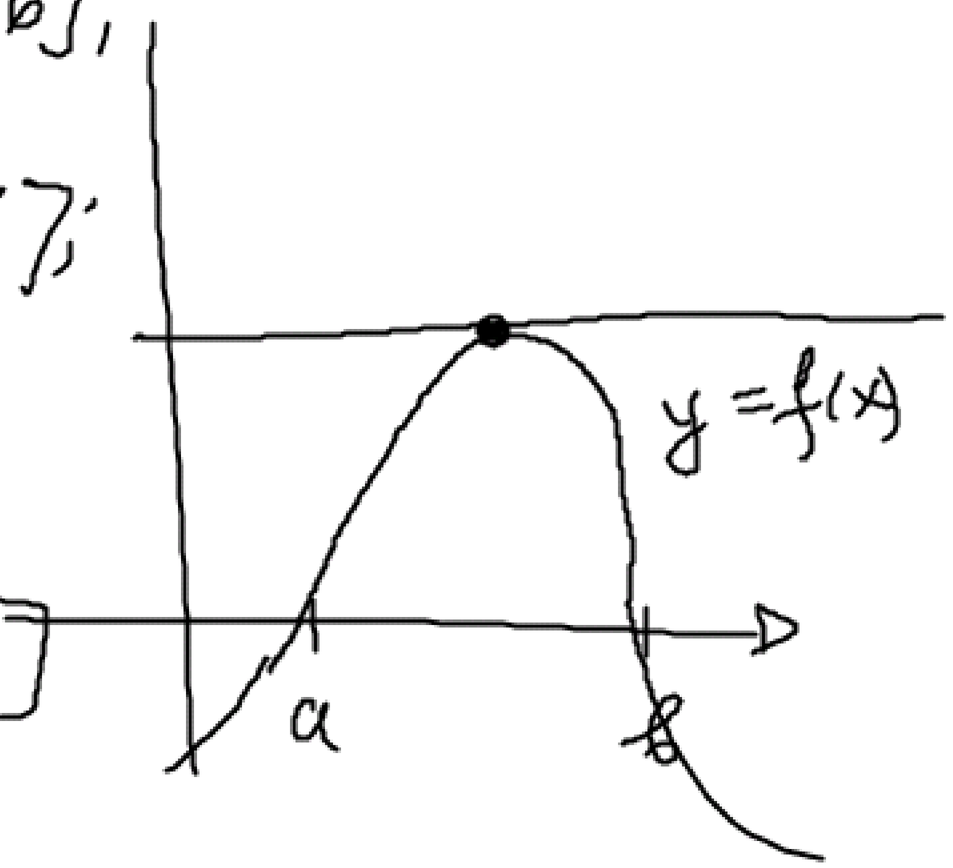
$g_x(y)$ - обращается в ноль в $n+1$ тчк. $[a,b]$;

$g_x'(y)$ — " — " — " — " — n тчк. $[a,b]$;

$g_x''(y)$ — " — " — " — " — $(n-1)$ тчк. $[a,b]$;

— — — — — — — — — — — —

$g_x^{(n)}(y)$ — " — " — " — " — "1" тчк. $[a,b]$



$$\boxed{g_x^{(n)}(\zeta_x)=0;\quad \zeta_x\in[a,b];}$$

$$0=g_x^{(n)}(\zeta_x)=\left(r_n(y)-\frac{r_n(x)}{\omega_n(x)}\cdot\omega_n(y)\right)_y^{(n)}(\zeta_x)=$$

$$=f^{(n)}(\zeta_x)-\frac{r_n(x)}{\omega_n(x)}\cdot n!;$$

(3) $$\boxed{r_n(x)=f(x)-\ell_n(x,(f)^h)=\frac{f^{(n)}(\zeta_x)}{n!}\cdot\omega_n(x);}$$

$$(4)\qquad \left| f(x) - \ell_n(x,(f)^h) \right| \leqslant \frac{M_n}{n!}\cdot \left|\omega_n(x)\right|;\quad x\in[a,b]$$

$$M_n \equiv \sup_{a\leqslant y\leqslant b} \left| f^{(n)}(y) \right|;$$

$g\in C[a,b] \Rightarrow \|g\|_\infty \equiv \max\limits_{a\leqslant y\leqslant b} |g(y)|$; – Чебышёвская норма;

$$(5)\left\{\ (4) \Rightarrow \boxed{\left\| f - \ell_n(\cdot,(f)^h) \right\|_\infty \leqslant \frac{M_n}{n!}\cdot \|\omega_n\|_\infty ;}\right.$$

$$f(x) = e^{-x/\varepsilon};\quad x\in[0,1];\quad \varepsilon>0;$$

$$f^{(n)}(x) = \left(e^{-x/\varepsilon}\right)^{(n)} = \left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)^n \cdot e^{-x/\varepsilon};\quad M_n = \frac{1}{\varepsilon^n};$$

$$\left\| e^{-\cdot/\varepsilon} - \ell_n(\cdot,(e^{-\cdot/\varepsilon})^h) \right\|_\infty \leqslant \frac{\|\omega_n\|_\infty}{\varepsilon^n\cdot n!} \leqslant \frac{(1/\varepsilon)^n}{n!} \longrightarrow 0\quad (n\to\infty)$$

Оптимальная сетка.

$$l_n(x,(f)^h) \equiv l_n(x,(f)^h, \{x_i\}_{i=1}^n);$$

$$\|f - l_n(\cdot,(f)^h,\{x_i\}_{i=1}^n)\|_\infty \to \min_{\{x_i\}_{i=1}^n}; \quad ?$$

$$\|f - l_n(\cdot,(f)^h,\{x_i\}_{i=1}^n)\|_\infty \le \frac{M_n}{n!} \|\omega_n\|_\infty \to \min_{\{x_i\}_{i=1}^n}$$

$\Downarrow$

Задаче о многочлене наименее уклоняющемся от нуля (Задача Чебышёва): найти многочлен степени "n" с единичным старшим коэф. такой, что он доставляет min: $\|T_n\|_\infty \to \min$;

$P = \{p\}$; $M = \{m\}$;

P — класс решаемых задач

M — мн-во методов для решения задач из P.

$e(p, m)$ — погрешность метода "m" при решении задачи "p".

$$e(P, m) \equiv \sup_{p \in P} e(p, m)$$ — погрешность метода "m" на классе P.

$$\inf_{m \in M} e(P, m) = e(P, m_*) \Rightarrow$$ m_* — <u>оптимальный в M метод решения задач из P</u>.

$n \in N$, $M_n \in \mathbb{R}$;

$$F \equiv \left\{ f \in C^n[a,b] \;\middle|\; |f^{(n)}(x)| \leq M_n,\ x \in [a,b] \right\}.$$

P = мн-во задач приближения ф-ций из F;

M = приближение ф-ций из F многочленами $l_n(x,(f)^h)$;

методы из M определяются выбором сетки $\{x_i\}_{i=1}^n$;

$$l_n(x,(f)^h) \equiv l_n(x,(f)^h,\{x_i\}_{i=1}^n).$$

$$e(p,m) \equiv \| f - l_n(\cdot,(f)^h)\|_\infty;$$

$$e(P,m) \equiv \sup_{f\in F} \| f - l_n(\cdot,(f)^h)\|_\infty \overset{(4)}{\leq} \frac{M_n}{n!}\|\omega_n\|_\infty;$$

$$p(x) \equiv \frac{M_n}{n!} \cdot x^n + \ldots \Rightarrow p^{(n)}(x) = M_n;$$

$$p(x) - \ell_n(x, (\varphi)^h) = \frac{p^{(n)}(\xi_x)}{n!} \cdot \omega_n(x) \equiv \frac{M_n}{n!} \cdot \omega_n(x);$$

$$\Downarrow \quad \| p - \ell_n(\cdot, (\varphi)^h) \|_\infty = \frac{M_n}{n!} \cdot \|\omega_n\|_\infty;$$

$$\Downarrow \quad e(P, m) = \frac{M_n}{n!} \cdot \|\omega_n\|_\infty;$$

$$\Downarrow$$

$$m_*: \quad e(P, m_*) = \inf_{m \in M} e(P, m) = \frac{M_n}{n!} \cdot \inf_{\{x_i\}_{i=1}^n} \|\omega_n\|_\infty$$

$\|\omega_n\|_\infty \to \inf\limits_{\{x_i\}_{i=1}^n} \Longleftrightarrow \|p\|_\infty \to \inf$ на классе $\{p\}$

многочленов степени "n" с единичными старшими коэф.

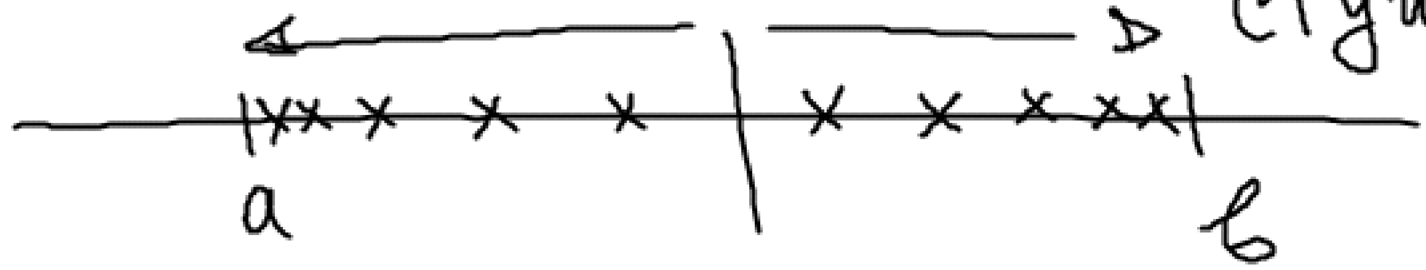
(Задача Чебышёва "о мн-не наименее уклоняющемся от нуля")

Решение задачи Чебышёва — многочлен:

$$T_n(x) = \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}}\cdot\cos\left(n\cdot\arccos\frac{2x-(a+b)}{b-a}\right);\quad n=0,1,2,\dots$$

$$x_i = \frac{b+a}{2} - \frac{b-a}{2}\cdot\cos\frac{(2i-1)\pi}{2n};\quad i=1,2,\dots,n;$$

сгущение к границам.



<u>Определение сходимости.</u>

Рассм. послед. сеток на $[a,b]$: $\left\{\{x_i^{(n)}\}_{i=1}^{n} \mid n\in N\right\} \equiv \mathcal{C}_n$

$f\in C[a,b] \longrightarrow \ell_n\left(x,(f)^n,\{x_i^{(n)}\}_{i=1}^{n}\right)$ <u>на послед. $\mathcal{C}_n$</u>

1) Процесс интерполяции сходится в точке $x_*\in[a,b] \Longleftrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \ell_n\left(x_*,(f)^n,\{x_i^{(n)}\}_{i=1}^{n}\right) = f(x_*)$$

2) Процесс интерполяции сходится равномерно на $[a,b]$ на послед $\mathcal{C}_n \iff \lim\limits_{n\to\infty} \| f - \ell_n(\cdot, (f)^h, \{x_i^{(n)}\}_{i=1}^n) \|_\infty \to 0$ (+)

Сплайн-интерполяция.

$[a,b]$; $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$; $f^h = \{f_i^h\}_{i=1}^n$;

Опред. сплайна. Интерполяционным сплайном степени "m" $\in \mathbb{N}$ для ф-ии f^h назовем функцию $S_m(x, f^h)$:

1) $\forall i = \overline{1, n-1} \Rightarrow S_m(x, f^h)$ - полином степени "m" на $[x_i, x_{i+1}]$;

2) $S_m(x, f^h) \in C^{m-1}[a,b]$;

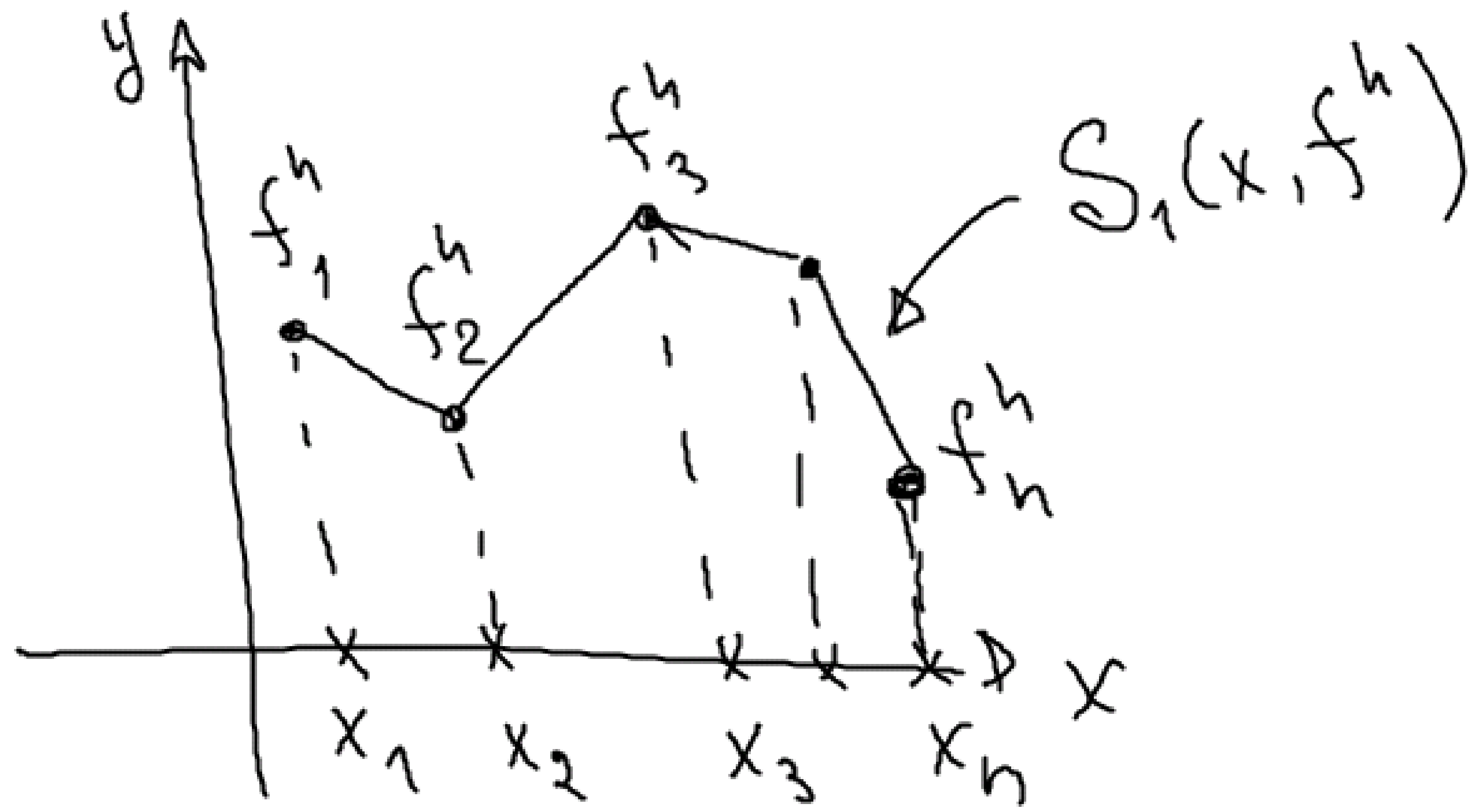
3) $S_m(x_i, f^h) = f_i^h$ $(i = \overline{1,n})$ - св-во интерполяционности (+)

Сплайн степени "1" = кусочно-линейный интерполянт.

$n=1$ 1) $\forall i=\overline{1,n-1}$; $S_1(x)$ – полином степени "1"; $x \in [x_i, x_{i+1}]$

2) $S_1 \in \mathbb{C}^0[a,b] \equiv \mathbb{C}[a,b]$;

3) $S_1(x_i) = f_i^h$, $i=\overline{1,n}$;



$x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i=\overline{1,n-1}$;

$$\boxed{S_1(x, f^h) = \frac{x - x_i}{x_{i+1}-x_i} \cdot f_{i+1}^h + \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} \cdot f_i^h;}$$

Оценка погрешности: $f \in C^2[a,b]$; $f_i^h = f(x_i)$

$i = \overline{1,n}$;

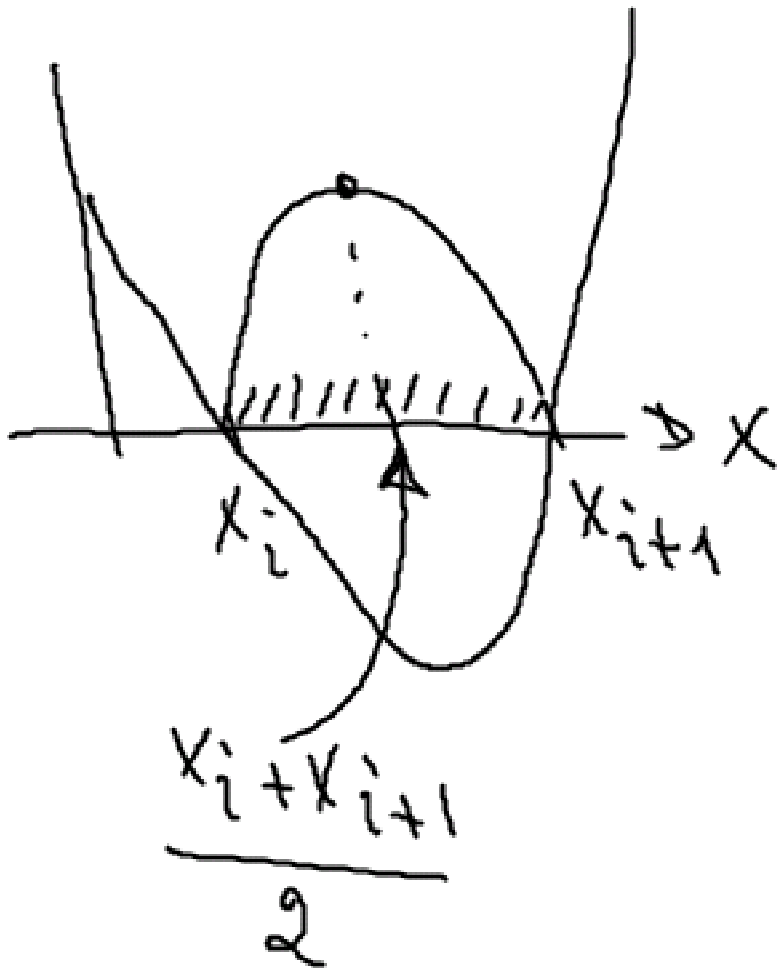
$$\left| f(x) - S_1(x,(f)^h) \right| \leq ? \quad x \in [a,b].$$

$$x \in [x_i, x_{i+1}] \Rightarrow S_1(x,(f)^h) = \ell_2(x,(f)^h); \quad x_i, x_{i+1}.$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) - S_1(x,(f)^h) = \frac{f^{(2)}(\xi_x)}{2!} \cdot (x-x_i)(x-x_{i+1});}$$

$$\Downarrow$$

$$\left| f(x) - S_1(x,(f)^h) \right| \leq \frac{1}{2} \cdot \max_{a \leq x \leq b} \left| f^{(2)}(x) \right| \cdot \max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} \left| (x-x_i)(x-x_{i+1}) \right|$$



$h_i \equiv x_{i+1} - x_i$;

$h \equiv \max\limits_{i=1,n-1} h_i$

$$= \frac{1}{2} \cdot \|f^{(2)}\|_\infty \cdot \frac{h_i^2}{4} \leq$$

$$\leq \frac{h^2}{8} \cdot \|f^{(2)}\|_\infty$$

$$\boxed{\|f - S_1(\cdot,(f)^h)\|_\infty \le \frac{h^2}{8}\cdot\|f^{(2)}\|_\infty}$$

$\Downarrow$

<u>Равномерная</u> на $[a,b]$ <u>сходимость</u> процесса интерполяции сплайном $S_1(x,(f)^h)$ $+$

Кубический сплайн: $S_3(x,f^h)$.

$m=3 \overset{\text{О.с.}}{\Longrightarrow}$ 1) $\forall i=\overline{1,n-1};\ x\in[x_i,x_{i+1}] \Rightarrow S_3(x,f^h)$ – полином 3-й степени;

2) $S_3(x,f^h)\in C^2[a,b]$;

3) $S_3(x_i,f^h)=f_i^h\ (i=\overline{1,n})$;

Построение кубического сплайна.

$i=\overline{1,n-1}$; $x\in[x_i,x_{i+1}]$; п.1. О.с. $\Rightarrow$ $S_3''(x,f^h)$ – полином степени один.

п.2. О.с. $\Rightarrow$ $S_3''\in C[a,b]$; $\Rightarrow$ определим параметры сплайна:

$$M_i\equiv S_3''(x_i,f^h),\ i=\overline{1,n};$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} S_3''(x,f^h)=\dfrac{x-x_i}{h_i}\cdot M_{i+1}+\dfrac{x_{i+1}-x}{h_i}\cdot M_i; \\ x\in[x_i,x_{i+1}] \end{cases} \quad (6)$$

$$S_3'(x,f^h)=\frac{(x-x_i)^2}{2h_i}\cdot M_{i+1}-\frac{(x_{i+1}-x)^2}{2h_i}\cdot M_i+C_1, \quad (7)$$

$$S_3(x,f^h)=\frac{(x-x_i)^3}{6h_i}\cdot M_{i+1}+\frac{(x_{i+1}-x)^3}{6h_i}\cdot M_i+C_1\cdot x+C_2 \quad (8)$$

Определим C_1 и C_2, пользуясь н.з.о.с.: $S_3(x_i, f^h) = f_i^h$;

$$(8) \Rightarrow \begin{cases} C_1 x_i + C_2 = f_i^h - \frac{h_i^2}{6} \cdot M_i; \\ C_1 x_{i+1} + C_2 = f_{i+1}^h - \frac{h_i^2}{6} \cdot M_{i+1}; \end{cases} \quad (9)$$

$\Delta = \begin{vmatrix} x_{i+1} & 1 \\ x_i & 1 \end{vmatrix} = h_i \neq 0 \Rightarrow C_1$ и C_2 из (9) находятся единств. образом.

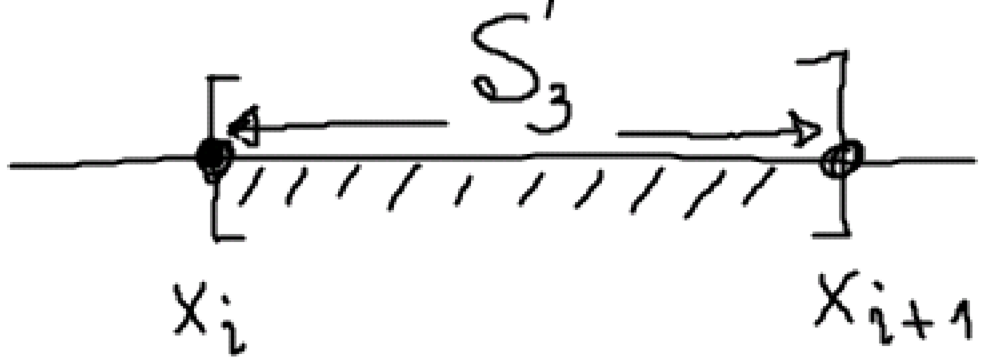
Подставим C_1 и C_2 в (7) и (8), получим:

$$S_3'(x, f^h) = \left[\frac{(x-x_i)^2}{2h_i} - \frac{h_i}{6}\right] \cdot M_{i+1} - \left[\frac{(x_{i+1}-x)^2}{2h_i} - \frac{h_i}{6}\right] \cdot M_i + \frac{f_{i+1}^h - f_i^h}{h_i}; \quad (10)$$

$$S_3(x, f^h) = \frac{(x-x_i)^3}{6h_i} \cdot M_{i+1} + \frac{(x_{i+1}-x)^3}{6h_i} \cdot M_i + \left(f_{i+1}^h - \frac{M_{i+1} h_i^2}{6}\right) \cdot \frac{x-x_i}{h_i} +$$

$$+ \left(f_i^h - \frac{M_i h_i^2}{6}\right) \cdot \frac{x_{i+1}-x}{h_i}; \quad (11)$$

Определим параметры сплайна M_i $(i=\overline{1,n})$:



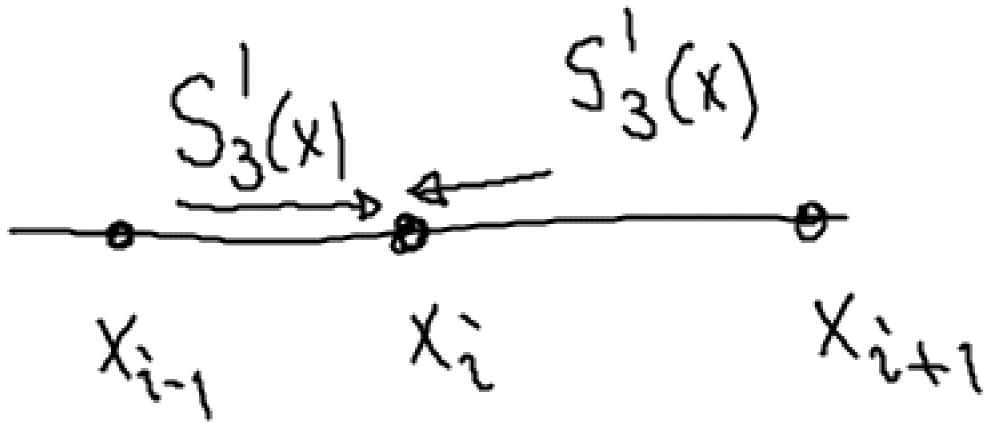
Подставим $x=x_i$ в (10), получим:

$$S_3'(x_i+0,f^h)=\frac{f^h_{i+1}-f^h_i}{h_i}-\frac{h_i}{3}\cdot M_i-\frac{h_i}{6}M_{i+1}; \qquad (12)$$

Подставим $x=x_{i+1}$ в (10), получим:

$$S_3'(x_{i+1}-0,f^h)=\frac{f^h_{i+1}-f^h_i}{h_i}+\frac{h_i}{3}M_{i+1}+\frac{h_i}{6}M_i; \qquad (13)$$

Из условия "непрерывности производной" на $[a,b]$ (п.2., О.с.) $\Rightarrow$



$$\boxed{S_3'(x_i+0,f^h)=S_3'(x_i-0,f^h)} \qquad (14)$$

$i=\overline{2,n-1}$

$(14)\wedge(12)\wedge(13)\Rightarrow$

$$\boxed{h_{i-1}M_{i-1}+2(h_{i-1}+h_i)\cdot M_i+h_iM_{i+1}=6\left(\frac{f^h_{i+1}-f^h_i}{h_i}-\frac{f^h_i-f^h_{i-1}}{h_{i-1}}\right);\ i=\overline{2,n-1};} \qquad (15)$$

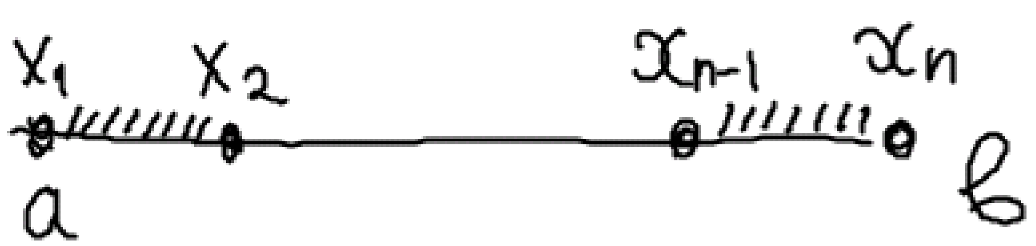
I вариант замыкания системы (15): если известные значения

$f''(a)$ и $f''(b)$, то: $$M_1 = f''(a),\quad M_n = f''(b) \qquad (16)$$

II вариант замык. системы (15): если $f''(a)$ и $f''(b)$ не известны

то: $M_1 = 0$, $M_n = 0$ — "нормальный" сплайн. (17)

III вариант замык. системы (15): если известны $f'(a)$ и $f'(b)$:



$$S_3'(a) = S_3'(x_1+0) = \frac{f_2^h - f_1^h}{h_1} - \frac{h_1}{3}M_1 - \frac{h_1}{6}M_2 = f'(a)$$

$$S_3'(b) = S_3'(x_n-0) = \frac{f_n^h - f_{n-1}^h}{h_{n-1}} + \frac{h_{n-1}}{3}M_n + \frac{h_{n-1}}{6}M_{n-1} = f'(b)$$

$$h_1M_2 + 2h_1M_1 = 6\left[\frac{f_2^h - f_1^h}{h_1} - f'(a)\right];\quad h_{n-1}M_{n-1} + 2h_{n-1}M_n = 6\left[f'(b) - \frac{f_n^h - f_{n-1}^h}{h_{n-1}}\right] \qquad (18)$$

Оценка сходимости сплайна $S_3(x, f^h)$:

сетка равномерная: $x_i = a + \frac{b-a}{n-1} \cdot (i-1)$, $i = \overline{1, n}$; $h = \frac{b-a}{n-1}$;

$$f \in C^4[a,b] \Rightarrow \| f - S_3(\cdot, (f)^h) \|_\infty \leq C \cdot h^4;$$

$$C = C(\|f^{(4)}\|_\infty) \quad +$$