🕮 II. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

Пространство сеточных функций. В настоящем разделе мы обсудим такие понятия вычислительной математики как *сеточная область* и *сеточная функция,* определим *семейство норм* в *пространстве сеточных функций* и исследуем их свойства.

О п р е д е л е н и е 1. Произвольное *конечное множество* ω_h *точек* из R^q (q - целое и положительное) будем называть сеточной областью в R^q, а его элементы - *узлами сетки* или просто *узлами.* Число элементов множества ω_h будем обозначать символом $|\omega_h|$. Пусть Ω - произвольная область в R^q. Если множество точек ω_h содержится в Ω, то говорят, что в области Ω *задана сетка* ω_h или Ω *аппроксимируется сеточной областью* ω_h ■

Примеры сеточных областей.

1). Пусть $\Omega = [a,b]$- отрезок в R^1. В качестве сеточной области ω_h, аппроксимирующей Ω, можно рассматривать множество $\omega_h \equiv \{x_i\}_{i=1}^{n}$ точек

$$x_i \equiv (b-a)\frac{i-1}{n-1} + a, \quad i = 1,2,...n.$$

В этом случае будем говорить, что на отрезке $[a,b]$ задана *равномерная* сетка ω_h, а величину $h \equiv x_{i+1} - x_i = \dfrac{b-a}{n-1}$, будем называть *шагом* сетки ω_h.

2). Пусть $\Omega = [a,b]\times[c,d]$- прямоугольник в R^2. Равномерной сеткой в прямоугольнике Ω можно считать множество ω_h, элементами которого являются точки:

$$p_{i,j} \equiv (x_i, y_j);\ i = 1,2,...n,\ \ j = 1,2,...m;$$

$$x_i = (b-a)\frac{i-1}{n-1} + a,\ \ i = 1,2,...n;\ y_j = (d-c)\frac{j-1}{m-1} + c,\ \ j = 1,2,...m;$$

Шагами сетки по «направлениям x и y» будем называть соответственно величины Δx и Δy, которые определим следующими соотношениями:

$$\Delta x \equiv x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n-1}; \quad \Delta y \equiv y_{i+1} - y_i = \frac{d-c}{m-1}.$$

О п р е д е л е н и е 2. 1). Предположим, что в R^q задана некоторая сеточная область ω_h. Функцию $u^h(\zeta)$, определенную на множестве ω_h и принимающую вещественные значения, будем называть *сеточной функцией.*

2). Пусть $\Omega \subset R^q$, в области Ω рассмотрим некоторую сетку ω_h. Произвольной непрерывной в области Ω функции $f(x)$ $(f \in C(\Omega))$ сопоставим некоторую сеточную функцию $(f)^h$ по правилу:

$$(f)^h(\zeta) = f(\zeta), \ \zeta \in \omega_h.$$

Сеточную функцию $(f)^h$ будем называть *проекцией непрерывной функции* $f(x)$ *во множество сеточных функций* ■

Проекцию непрерывной функции $f(x)$ во множество сеточных функций можно выбрать и другим способом, например, если ω_h из примера 1), то в качестве проекции функции f можно рассмотреть функцию:

$$(f)^h(x_1) = \int_a^{a+h/2} f(x)dx; \quad (f)^h(x_i) = \int_{x_i - h/2}^{x_i + h/2} f(x)dx \ , i = 2,3,...n-1; \quad (f)^h(x_N) = \int_{b-h/2}^{b} f(x)dx\,.$$

О п р е д е л е н и е 3. Обозначим символом $U_h \equiv U_h(\omega_h)$ -множество сеточных функций, заданных в области ω_h, с «естественным образом» определенными на этом множестве операциями сложения (вычитания) функций и умножения функций на вещественное число. Будем говорить, что на множестве U_h задана *норма,* если определено однозначное соответствие:

$$\|\cdot\| : u^h \to \|u^h\| \in R^1 \text{ для любого } u^h \in U_h,$$

или, что то же самое:

$$\|\cdot\| : U_h \to R^1,$$

которое удовлетворяет следующим условиям (*аксиомам нормы*):

1) $\|u^h\| \geq 0$ для любого $u^h \in U_h$; $\|u^h\| = 0 \Leftrightarrow u^h = 0$;

2) $\|a \cdot u^h\| = |a| \cdot \|u^h\|$ для любых $a \in R^1$, $u^h \in U_h$;

3) $\|u^h + v^h\| \le \|u^h\| + \|v^h\|$ для любых $u^h, v^h \in U_h$ ■

На множестве сеточных функций, заданных в области ω_h, будем рассматривать одну из следующих норм:

$$\|u^h\|_p \equiv \left(\frac{1}{|\omega_h|} \sum_{\zeta \in \omega_h} |u^h(\zeta)|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p \le \infty. \tag{1}$$

З а д а ч а 1. Доказать, что выражение (1) удовлетворяет аксиомам нормы (О п р е д е л е н и е 3) ■

Для сеточной функции, заданной в «одномерной» сеточной области (см. пример 1) будем в дальнейшем использовать обозначение:

$$u^h = \{u_i^h\}_{i=1}^n,$$

в котором: $u_i^h \equiv u(x_i)$ при i=1,2,…n – значения этой функции в узлах сетки. В этом случае нормы из (1) удобней записать следующим образом:

$$\|u^h\|_p \equiv \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |u_i^h|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p \le +\infty. \tag{2}$$

Во множестве сеточных функций будем рассматривать также *скалярное произведение:*

$$(u^h, v^h) \equiv \frac{1}{|\omega_h|} \sum_{\zeta \in \omega_h} u^h(\zeta) v^h(\zeta),$$

которое «порождает» гильбертову норму $\|u^h\|_2$ по правилу: $\|u^h\|_2 = \sqrt{(u^h, u^h)}$.

Т е о р е м а 1. Справедливы следующие свойства норм (1):

1) $\|u^h\|_\infty \equiv \lim\limits_{p \to +\infty} \|u^h\|_p = \max\limits_{\zeta \in \omega_h} |u^h(\zeta)|$.

2) $\left(\frac{1}{|\omega_h|} \right)^{\frac{q-p}{pq}} \|u^h\|_q \le \|u^h\|_p \le \|u^h\|_q$, при $1 \le p \le q \le +\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Для доказательства нам потребуется *обобщенное неравенство Коши-Шварца* для конечных сумм [1]: пусть v^h и w^h - произвольные сеточные функции, заданные в области ω_h; числа p', q' таковы, что: $1 \le p' \le +\infty$, $1 \le q' \le +\infty$, $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1$, тогда:

$$\left| \sum_{\zeta \in \omega_h} u^h(\zeta) \cdot w^h(\zeta) \right| \le \left(\sum_{\zeta \in \omega_h} \left| v^h(\zeta) \right|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \cdot \left(\sum_{\zeta \in \omega_h} \left| w^h(\zeta) \right|^{q'} \right)^{\frac{1}{q'}}. \tag{3}$$

Докажем *первое утверждение*. Неравенство

$$\left\| u^h \right\|_p \le \left\| u^h \right\|_\infty \tag{4}$$

очевидно для любого p такого, что $1 \le p \le +\infty$. Пусть $\zeta_0 \in \omega_h$, таково, что $\left| u^h(\zeta_0) \right| = \max\limits_{\zeta \in \omega_h} \left| u^h(\zeta) \right|$, рассмотрим сеточную функцию

$$v^h(\zeta) \equiv \begin{cases} 1, \ \zeta = \zeta_0 \\ 0, \ \zeta \in \omega_h, \ \zeta \ne \zeta_0. \end{cases}$$

Используя неравенство (3), получим для любого $p \in [1, +\infty)$

$$\left\| u^h \right\|_\infty = \left| \sum_{\zeta \in \omega_h} u^h(\zeta) \cdot v^h(\zeta) \right| \le \left(\sum_{\zeta \in \omega_h} \left| u^h(\zeta) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{\zeta \in \omega_h} \left| v^h(\zeta) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\frac{1}{\left| \omega_h \right|} \right)^{-\frac{1}{p}} \cdot \left\| u^h \right\|_p. \tag{5}$$

В силу неравенств (4) и (5) получим для любого $p \in [1, +\infty)$ оценки:

$$\left(\frac{1}{\left| \omega_h \right|} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left\| u^h \right\|_\infty \le \left\| u^h \right\|_p \le \left\| u^h \right\|_\infty. \tag{6}$$

Переходя в (6) к пределу при $p \to +\infty$, приходим к выводу о справедливости первой части теоремы.

Докажем *второе утверждение* теоремы. Полагая в неравенстве (3): $p' = \frac{q}{p} \ge 1$ получим оценку:

$$\left\| u^h \right\|_p = \left(\frac{1}{\left| \omega_h \right|} \sum_{\zeta \in \omega_h} \left| u^h(\zeta) \right|^p \cdot 1 \right)^{\frac{1}{p}} \le \left[\left(\frac{1}{\left| \omega_h \right|} \sum_{\zeta \in \omega_h} \left| u^h(\zeta) \right|^q \right)^{\frac{p}{q}} \cdot \left(\frac{1}{\left| \omega_h \right|} \sum_{\zeta \in \omega_h} 1^{q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \right]^{\frac{1}{p}} = \left\| u^h \right\|_q \tag{7}$$

Далее, используя левое неравенство в (5):

$$\left\|u^h\right\|_q = \left(\frac{1}{\left|\omega_h\right|}\sum_{\zeta\in\omega_h}\left|u^h(\zeta)\right|^{q-p}\cdot\left|u^h(\zeta)\right|^p\right)^{\frac{1}{q}} \le \left\|u^h\right\|_p^{\frac{p}{q}}\cdot\left\|u^h\right\|_\infty^{\frac{q-p}{q}} \le$$

$$\le \left\|u^h\right\|_p^{\frac{p}{q}}\cdot\left(\frac{1}{\left|\omega_h\right|}\right)^{-\frac{q-p}{qp}}\cdot\left\|u^h\right\|_p^{\frac{q-p}{q}} = \left(\frac{1}{\left|\omega_h\right|}\right)^{-\frac{q-p}{qp}}\cdot\left\|u^h\right\|_p$$

Последняя оценка, вместе с (6), доказывают вторую часть теоремы ■

Оценка части 2 Т е о р е м ы 1 говорит о том, что при фиксированном $\left|\omega_h\right|$ все нормы вида (1) *эквивалентны.*

О п р е д е л е н и е 3. Пусть $U_h \equiv U_h(\omega_h)$ - множество сеточных функций, удовлетворяющих условиям О п р е д е л е н и я 2. Если, кроме того, на этом множестве задана одна из норм семейства (1), то U_h будем называть *пространством сеточных функций* ■.

Заметим, что если упорядочить множество узлов сеточной области ω_h с $\left|\omega_h\right| = n$, то сеточное пространство U_h можно отождествлять с *эвклидовым пространством* R^n, оснащенным одной из норм (1).

Наряду с пространством сеточных функций $U_h \equiv U_h(\omega_h)$, рассмотрим пространство $C^1(\Omega)$-один раз непрерывно дифференцируемых функций в области Ω, при этом считаем, что ω_h аппроксимирует Ω в смысле О п р е д е л е н и я 1. В пространстве $C^1(\Omega)$ рассмотрим семейство норм

$$\left\|f\right\|_p \equiv \left(\frac{1}{mes(\Omega)}\int_\Omega\left|f(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},\quad 1\le p\le+\infty \tag{8}$$

Можно доказать, что нормы (1) и (8) в некотором смысле *согласованы*, если сеточная область ω_h удовлетворяет определенным условиям. Сделаем это в простейшем случае.

Т е о р е м а 2. Пусть $\Omega = [a,b]$ и ω_h - равномерная сетка в области Ω (П р и м е р 1), тогда для любых $f\in C^1[a,b]$, $p\in[0,+\infty)$:

$$\lim_{h\to 0}\left\|(f)^h\right\|_p = \|f\|_p \equiv \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Это означает, что для любого $p\in[0,\infty)$ *нормы* (1) и (8) *согласованы*.

З а м е ч а н и е. Мы не делаем (и в дальнейшем не будем делать) различий в записи норм (1) и (8), полагая, что эти различия определяются тем, какая функция стоит под знаком нормы: непрерывная «f», или дискретная «f^h».

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим:

$$g(x)\equiv |f(x)|^p .$$

Используя формулу интегрирования «по-частям» легко проверить равенство:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x_i)|^p dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x)|^p dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} g'(x)(x_{i+1}-x)dx\,;$$

теперь проделаем выкладку:

$$\begin{aligned}\left\|(f)^h\right\|_p^p &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)|^p = \frac{n-1}{n(b-a)}\sum_{i=1}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}|f(x_i)|^p dx + \frac{|f(b)|^p}{n} = \frac{n-1}{n(b-a)}\int_a^b |f(x)|^p dx + \\ &+ \frac{|f(b)|^p}{n} - \frac{n-1}{n(b-a)}\sum_{i=1}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} g'(x)(x_{i+1}-x)dx \equiv \frac{n-1}{n(b-a)}\int_a^b |f(x)|^p dx + \delta_n .\end{aligned} \tag{9}$$

Следующая оценка и предельный переход при $n\to+\infty$ в обеих частях соотношения (9) доказывают теорему:

$$|\delta_n| \le \frac{1}{n}\left[|f(b)|^p + \int_a^b |g'(x)|dx\right] \to 0 \text{ при } n\to+\infty \qquad \blacksquare.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. Москва «Мир», 1965, с.276.