# ПОСТРОЕНИЕ КУБИЧЕСКОГО СПЛАЙНА

**Основная цель.** Освоить интерполяцию кубическим сплайном и изучить ее особенности. Изучить влияние краевых условий на точность интерполяции.

**Теория и основные формулы.** На отрезке $[0,1]$ рассмотрим произвольную сетку:

$$0 = x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots < x_N = 1. \tag{I.3.1}$$

Пусть $f^h = \left\{f_i^h\right\}_{i=1}^{N}$ - сеточная функция, заданная в узлах сетки (I.3.1). Согласно определению (см. определение I.2), интерполяционный сплайн $S_3(x,f^h)$ степени три (кубический сплайн) удовлетворяет условиям:

1). $S_3(x,f^h)$ –полином третьей степени на каждом интервале $(x_i, x_{i+1})$;

2). $S_3(x,f^h)$ –непрерывен вместе со второй производной на $[0,1]$;

3). $S_3(x_i, f^h) = f_i^h$, при $i=1,2,...n$.

Обозначим: $h_i = x_{i+1} - x_i\left(i = 1,2,...n-1\right)$-длины сеточных ячеек; значения интерполяционного кубического сплайна определяются по следующим формулам (подробности см. в $[1],[2]$): $x \in [x_i, x_{i+1}]$,

$$\begin{aligned} S_3\left(x, f^h\right) &= \frac{\left(x-x_i\right)^3}{6h_i}M_{i+1} + \frac{\left(x_{i+1}-x\right)^3}{6h_i}M_i + \left(f_{i+1}^h - \frac{h_i^2 M_{i+1}}{6}\right)\frac{x-x_i}{h_i} + \\ &+ \left(f_i^h - \frac{h_i^2 M_i}{6}\right)\frac{x_{i+1}-x}{h_i}; \quad i = 1,2,...N-1. \end{aligned} \tag{I.3.2}$$

Параметры $\left\{M_i\right\}_{i=1}^{n}$ в (I.3.2) определяются из следующей системы уравнений:

$$h_{i-1}M_{i-1} + 2\left(h_{i-1} + h_i\right)M_i + h_i M_{i+1} = 6\left(\frac{f_{i+1}^h - f_i^h}{h_i} - \frac{f_i^h - f_{i-1}^h}{h_{i-1}}\right),\ i = 2,...N-1. \tag{I.3.3}$$

Для замыкания системы (I.3.3) недостает двух уравнений, которые мы будем называть *краевыми условиями*. Эти уравнения могут быть выбраны различными способами, опишем их. Предположим, что сеточная функция $f^h$ является проекцией на сетку (I.3.1) некоторой непрерывной функции $f(x)$ т.е. $f^h = (f)^h$.

1) Если известны значения $f''(0)$ и $f''(1)$, то положим:

$$M_1 = f''(0), \quad M_n = f''(1) \tag{I.3.4}$$

2) Если известны значения $f'(0)$ и $f'(1)$, то уравнения (I.3.3) дополним следующими:

$$\begin{cases} 2h_1 \cdot M_1 + h_1 \cdot M_2 = 6[\dfrac{f_2^h - f_1^h}{h_1} - f'(0)], \\ h_{n-1} \cdot M_{n-1} + 2h_{n-1} \cdot M_n = 6[f'(1) - \dfrac{f_n^h - f_{n-1}^h}{h_{n-1}}]. \end{cases} \tag{I.3.5}$$

3) Если априорная информация в значениях $f'(x)$ или $f''(x)$ на концах отрезка [0,1] неизвестна, то систему (I.3.3) можно дополнить уравнениями:

$$M_1 = 0, \quad M_n = 0. \tag{I.3.6}$$

Сплайн, построенный с учетом краевых условий (I.3.6) называется *нормальным*. Системы уравнений (I.3.3),(I.3.4), либо (I.3.3),(I.3.5), либо (I.3.3) (I.3.6) решаются *методом прогонки* [2].

**Тестовые функции.** Тестовые функции Лабораторной работы I.1.

**Требования к программе.** *Программа должна включать* :

1) Построение интерполяционного кубического сплайна в трех вариантах:
   а) по формулам (I.3.3),(I.3.4); б) по формулам (I.3.3),(I.3.5); в) по формулам (I.3.3),(I.3.6).
2) Тестовые функции из Лабораторной работы I.1 (по заданию преподавателя) с возможностью выбора параметра “$\varepsilon$”. Допустим дискретный вариант выбора : $\varepsilon = 2^{-k}$; $k = 0,1,2,...$

3) Возможность выбора числа узлов сетки «n». Допустим дискретный вариант: $n = 1 + 2^k$, $k = 2,3,4,...$ Ограничиться случаем равномерной сетки:

$$x_i = (i-1)h; \quad h = 1/(n-1); \quad i = 1,2,...,n .$$

4) Вывод погрешности интерполяции на *контрольной* сетке: $\{y_i\}_{i=1}^{n-1}$

$$y_i \equiv \frac{x_i + x_{i+1}}{2}; \quad i = 1,2,...n ,$$

$$Err(f) \equiv \underset{1 \le i \le n-1}{Max} \left| f(y_i) - S_3(y_i,(f)^h) \right|. \qquad (I.3.7)$$

5) Графику: одновременная отрисовка графиков функции f(x) и трех вариантов сплайн – интерполяции: (I.3.3),(I.3.4); (I.3.3),(I.3.5) и (I.3.3),(I.3.6); Отрисовка узлов сетки $\{x_i\}_{i=1}^{n}$. Предусмотреть возможность масштабирования графиков: а) по исходной функции f(x), б) по всем функциям f(x) и $S_3(x,(f)^h)$.

**Задание для работы с программой.** Провести все численные расчеты, варьируя значения параметров $\varepsilon$ и $n$; Использовать все тестовые функции и три варианта интерполяции. Анализируя результаты расчетов, ответить на следующие вопросы.

1) Сходится ли процесс интерполяции кубическим сплайном ?

2) Сравнить между собой точность трех вариантов интерполяции ((I.3.3) (I.3.4); (I.3.3),(I.3.5); (I.3.3),(I.3.7)). Основные критерии сравнения: а) погрешность (I.3.7); б) визуальная близость графиков функции $f(x)$ и соответствующих интерполянтов $S_3(x,(f)^h)$.

Все выводы необходимо аргументировать результатами численных расчетов и оформить в *виде Отчета*.