🕮 I. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И СГЛАЖИВАНИЕ СЕТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

На отрезке $[a,b]$ рассмотрим ”n” произвольных точек, удовлетворяющих условию:

$$a \le x_1 < x_2 < ... < x_i < ... < x_n \le b.$$

Пусть $f^h \equiv \{f_i^h\}_{i=1}^n$ - произвольная сеточная функция со значениями f_i^h в точках x_i (i=1,2,...n), которые будем называть *узлами интерполяции*.

О п р е д е л е н и е I.1. *Задача интерполяции* сеточной функции f^h состоит в том, чтобы найти такую функцию $f \in C[a,b]$, которая удовлетворяет соотношениям: $(f)_i^h \equiv f(x_i) = f_i^h$ (i=1,2,…n). ■

Иными словами, это задача непрерывного продолжения функции f^h со множества узлов $\{x_i\}_{i=1}^n$ на весь отрезок $[a,b]$. Очевидно, что такая задача обратна задаче проектирования пространства $C[a,b]$ в пространство сеточных функций U_h и имеет бесконечно много решений. Чтобы сделать задачу интерполирования однозначно разрешимой, необходимо ограничиться неким классом функций из $C[a,b]$, в котором это продолжение (интерполянт) будет искаться. В качестве таких классов будем рассматривать *алгебраические многочлены* и *сплайн-функции*. Приведем определение *интерполяционного сплайна*, которое нам потребуется в дальнейшем.

О п р е д е л е н и е I.2. *Интерполяционным сплайном* степени "m" для сеточной функции f^h назовем функцию $S_m(x, f^h)$, определенную для $x \in [a,b]$ и удовлетворяющую условиям:

1. для любых i=1,2,…n-1 и $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $S_m(x, f^h) \in P_m[x_i, x_{i+1}]$;
2. $S_m(x, f^h) \in C^{m-1}[a,b]$;
3. $S_m(x_i, f^h) = f_i^h$, $i = 1,2,...n$ ■

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Основная цель. Научиться строить интерполяции при помощи многочлена Лагранжа. Изучить влияние выбора интерполяционной сетки на сходимость процесса интерполяции.

Теория и основные формулы. На отрезке [0,1] рассмотрим интерполяционную сетку:

$$0 \le x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots < x_n \le 1. \tag{I.1.1}$$

Пусть $f^h \equiv \{f_i^h\}_{i=1}^{n}$ - сеточная функция, заданная в узлах сетки (I.1.1). *Интерполяционный многочлен Лагранжа* определяется следующими формулами:

$$\ell_n\left(x, f^h\right) \equiv \sum_{k=1}^{N} \omega_{n,k}(x) \cdot f_k^h; \tag{I.1.2}$$

$$\omega_{n,k} \equiv \prod_{\substack{i=1 \\ i \ne k}}^{N} \left(\frac{x - x_i}{x_k - x_i} \right); \ \ x \in [0,1]. \tag{I.1.3}$$

Можно доказать (см. [1-7]), что многочлен, определяемый формулами (I.1.2-3), является единственным решением задачи интерполяции (Определение I.1) в классе многочленов, степени которых не превосходят “n-1” (класс $P_{n-1}[0,1]$). Тот же самый многочлен может быть построен методами, отличными от того, который определяется формулами (I.1.2-3), например интерполяционный многочлен в *форме Ньютона* описан в учебниках [1-7]; здесь мы приведем менее известный метод построения интерполяционного многочлена, который обычно называют *методом Невилле*.

Пусть $m_1, m_2, ..., m_k$ $(1 \le k \le n)$ -натуральные числа, удовлетворяющие условиям:

$$1 \le m_1 < m_2 < ... < m_k \le n.$$

Нам потребуется уточнить обозначение (I.1.2) для многочлена Лагранжа: если он построен по значениям сеточной функции f^h в узлах $x_{m_1}, x_{m_2}, ..., x_{m_k}$, то этот многочлен будем обозначать символом: $\ell_k\left(x, f^h; x_{m_1}, x_{m_2}, ..., x_{m_k}\right)$. Алгоритм метода Невилле основан на следующем утверждении, доказательство которого мы не приводим, чтобы не перегружать изложение.

Т е о р е м а I.1.1. Рассмотрим узлы $x_1, x_2, ..., x_k$ и выберем x_i и x_j - две различные точки из этого множества. Тогда:

$$\begin{aligned}\ell_k\left(x, f^h; x_1, x_2, ..., x_k\right) = [(x - x_i)\ell_{k-1}\left(x, f^h; x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_k\right) - \\ - (x - x_j)\ell_{k-1}\left(x, f^h; x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_k\right)]/(x_j - x_i).\end{aligned} \tag{I.1.4}$$

■

Чтобы вычислить значение $\ell_n(x, f^h)$ многочлена интерполяции по узлам $x_1, x_2, ..., x_n$ и фиксированном x, рассмотрим, опираясь на формулу (I.1.4), следующие цепочки значений в точке x:

1) многочленов, построенных по одному узлу:

$$\ell_1\left(x, f^h; x_i\right) = f_i^h,\ i = 1, 2, ..., n;$$

2) многочленов, построенных по двум узлам:

$$\begin{aligned}\ell_2\left(x, f^h; x_{i-1}, x_i\right) = [(x - x_{i-1})\ell_1\left(x, f^h; x_i\right) - \\ - (x - x_i)\ell_1\left(x, f^h; x_{i-1}\right)]/(x_i - x_{i-1}), i = 2, 3, ..., n;\end{aligned}$$

3) многочленов, построенных по трем узлам:

$$\begin{aligned}\ell_3\left(x, f^h; x_{i-2}, x_{i-1}, x_i\right) = [(x - x_{i-2})\ell_2\left(x, f^h; x_{i-1}, x_i\right) - \\ - (x - x_i)\ell_2\left(x, f^h; x_{i-2}, x_{i-1}\right)]/(x_i - x_{i-2}),\ i = 3, ..., n;\end{aligned}$$

и так далее, и наконец, многочленов, построенных по k ($1 \le k \le n$) узлам:

$$\begin{aligned}\ell_k\left(x, f^h; x_{i-k+1}, x_{i-k+2}, ..., x_i\right) = [(x - x_{i-k+1})\ell_{k-1}\left(x, f^h; x_{i-k+2}, ..., x_i\right) - \\ - (x - x_i)\ell_{k-1}\left(x, f^h; x_{i-k+1}, ..., x_{i-1}\right)]/(x_i - x_{i-k+1}),\ i = k, ..., n;\end{aligned} \tag{I.1.5}$$

последним в этой цепочке будет значение в точке x интересующего нас многочлена $\ell_n(x, f^h)$:

$$\ell_n\left(x, f^h; x_1, x_2, ..., x_n\right) = [(x - x_1)\ell_{n-1}\left(x, f^h; x_2, ..., x_n\right) -$$
$$- (x - x_n)\ell_{k-1}\left(x, f^h; x_1, ..., x_{n-1}\right)]/(x_n - x_1).$$

Обозначим:

$$Q_{i,k} = \ell_k\left(x, f^h; x_{i-k+1}, x_{i-k+2}, ..., x_i\right), \ i = 1, 2, ..., n; \ k = 1, 2, ..., i.$$

Эти величины, вычисленные в соответствии с формулой (I.1.5), можно расположить в виде нижне-треугольной таблицы (матрицы):

$$\begin{matrix} Q_{1,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Q_{2,1} & Q_{2,2} & \cdot & \cdot & \cdot \\ Q_{3,1} & Q_{3,2} & Q_{3,3} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Q_{n,1} & Q_{n,2} & Q_{n,3} & \cdot & Q_{n,n} \end{matrix}$$

Вычисления осуществляются последовательно: сначала – по строкам, а внутри каждой строки – по столбцам, их можно формализовать в виде следующего псевдо-кода:

Алгоритм I.1.1. *Позволяет вычислять значения многочлена Лагранжа* $\ell_n(x, f^h)$ *в фиксированной точке x.*

▼INPUT($\{x_i\}_{i=1}^n, \{f_i^h\}_{i=1}^n, x$);

for i = 1 to n do $Q_{i,1} = f_i^h$;

for i = 2 to n do

for j = 2 to i do $Q_{i,j} = \dfrac{(x - x_{i-j+1})Q_{i,j-1} - (x - x_i)Q_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j+1}}$;

OUTPUT($Q_{n,n}$)▲

$\ell_n(x, f^h) = Q_{n,n}$.

Будем рассматривать два варианта выбора интерполяционной сетки:

1) *равномерная сетка:* $x_i \equiv (i-1)\cdot h,\quad h \equiv \frac{1}{n-1},\quad i=1,2,...n.$

2) *Чебышёвская сетка:* в этом случае узлы сетки совпадают с нулями полинома Чебышёва степени n (см. [2-4]):

$$x_i \equiv \frac{1}{2}[1 - \cos\frac{(2i-1)\pi}{2n}],\quad i=1,2,...n.$$

Тестовые функции. Сеточные функции f^h будем получать, проектируя на сетку (I.1.1) следующие непрерывные функции (все функции рассматриваются на отрезке [0,1], $0 < \varepsilon \le 1$, если не оговорены иные условия):

1. функция с погранслоем у точки x=0:

$$f_1(x) = \frac{1-\exp(-\frac{x}{\varepsilon})}{1-\exp(-\frac{1}{\varepsilon})};$$

2. функция с двумя погранслоями у точек x=0 и x=1:

$$f_2(x) = 1 - \frac{\exp(-\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}) + \exp(\frac{x-1}{\sqrt{\varepsilon}})}{1+\exp(-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})};$$

3. функция с погранслоем у точки x=1:

$$f_3(x) = \frac{\exp(-\frac{1-x}{\varepsilon}) - \exp(-\frac{1}{\varepsilon})}{1-\exp(-\frac{1}{\varepsilon})};$$

4. $$f_4(x) = \frac{\ln\left(1+\frac{x}{\varepsilon}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)};$$

5. $$f_5(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{\varepsilon}\right);$$

6. $$f_6(x) = x \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{\varepsilon}\right);$$

7. “регуляризация дельта-функции”:

$$f_7(x) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + (2x-1)^2};$$

8. $$f_8(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x = 0; \\ \exp\left(-\frac{1-x}{\varepsilon x}\right), & \text{при } 0 < x \le 1; \end{cases}$$

9. $$f_9 = \begin{cases} 0, & \text{при } x = 0; \\ x \cdot \ln\frac{1}{x}, & \text{при } 0 < x \le 1; \end{cases}$$

10. “гладкая ступенька”:

$$f_{10}(x) \equiv \begin{cases} -\frac{2}{3} \cdot \dfrac{\exp(\frac{2x-1}{\varepsilon}) - 1}{\exp(\frac{2x-1}{\varepsilon}) + 1}, & \text{при } 0 \le x \le \frac{1}{2}; \\ -\frac{2}{3} \cdot \dfrac{1 - \exp(\frac{1-2x}{\varepsilon})}{1 + \exp(\frac{1-2x}{\varepsilon})}, & \text{при } \frac{1}{2} < x \le 1; \end{cases}$$

11.“ступенька”:

$$f_{11}(x) \equiv \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{при } 0 \le x < \frac{1}{2} - \varepsilon; \\ \frac{1-2x}{4\varepsilon}, & \text{при } \frac{1}{2} - \varepsilon \le x \le \frac{1}{2} + \varepsilon; \\ -\frac{1}{2}, & \text{при } \frac{1}{2} + \varepsilon < x \le 1. \end{cases} \qquad (\ \varepsilon \in (0, \tfrac{1}{2}]\ ).$$

12. “уступ”:

$$f_{12} = \begin{cases} \frac{2x}{\varepsilon}, & \text{при } 0 \le x < \frac{\varepsilon}{2}; \\ 1, & \text{при } \frac{\varepsilon}{2} \le x \le 1 - \frac{\varepsilon}{2}; \\ \frac{2(1-x)}{\varepsilon}, & \text{при } 1 - \frac{\varepsilon}{2} < x \le 1; \end{cases}$$

13. “угол”:

$$f_{13}=\begin{cases} 0,\ \text{при}\ 0\le x\le \dfrac{1-\varepsilon}{2}; \\ \dfrac{2x-1}{\varepsilon}+1,\ \text{при}\ \dfrac{1-\varepsilon}{2}<x\le \dfrac{1}{2}; \\ \dfrac{1-2x}{\varepsilon}+1,\ \text{при}\ \dfrac{1}{2}\le x<\dfrac{1+\varepsilon}{2}; \\ 0,\ \text{при}\ \dfrac{1+\varepsilon}{2}\le x\le 1; \end{cases}$$

14. индивидуально разработанный пример.

Требования к программе. *Программа должна включать*:

1) Построение интерполяционного многочлена Лагранжа по формулам (I.1.2-3): а) на равномерной сетке, б) на Чебышёвской сетке.
2) Построение интерполяционного многочлена Лагранжа *с* использованием рекурентных формул метода Невилле (Алгоритм I.1.1.): а) на равномерной сетке, б) на Чебышёвской сетке.
3) Тестовые функции (по заданию преподавателя) с возможностью выбора параметра “ε”. Может быть реализован дискретный выбор ε по формуле: $\varepsilon=2^{-к}$, к=0,1,2,…
4) Возможность выбора числа узлов сетки “n”, допустим дискретный вариант: $n=1+2^{к}$, к=2,3,4,…
5) Вывод погрешности интерполяции Err(f) на “контрольной” сетке с узлами:

$$y_i=\frac{x_i+x_{i+1}}{2},\ i=1,2,...n-1;$$

$$\mathrm{Err}(f)\equiv \max_{1\le i\le n-1}\left|f(y_i)-\ell_n(y_i,(f)^h)\right|. \qquad (I.1.6)$$

6) Графику: одновременная отрисовка графиков функции f(x) и многочленов Лагранжа $\ell_n(x,(f)^h)$, построенных вышеуказанными двумя способами; отрисовка узлов сетки $\{x_i\}_{i=1}^{n}$. Предусмотреть

возможность маштабирования графика: а) по исходной функции f(x); б) по всем функциям.

Задание для работы с программой. Провести численные расчеты, варьируя значения параметров ε и n; использовать все тестовые функции и все варианты интерполяции. Анализируя результаты расчетов, ответить на следующие вопросы:

1) Сходиться ли процесс интерполяции многочленом Лагранжа:
    a) на равномерной сетке,
    b) для Чебышевской сетке?
2) Сравнить между собой точность двух вариантов интерполяции (на равномерной и Чебышёвской сетках).

Основные критерии сравнения:

a) погрешность (I.1.6),
b) визуальная близость графиков функции f(x) и соответствующего интерполянта $\ell_n(x,(f)^k)$.

3) Во всех вышеперечисленных случаях оценить эффективность метода Невилле.

Все выводы необходимо аргументировать результатами численных расчетов и *оформить в виде Отчета*.