🕮 III. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{du(t)}{dt} = f(t, u(t)), \quad t \in (0, T) \qquad \text{(III.1)}$$

Под *задачей Коши* для уравнения (III.1) будем понимать следующую задачу: найти функцию $u \in C[0,T] \cap C^1(0,T)$, удовлетворяющую уравнению (III.1) и начальному условию:

$$u(0) = \varphi. \qquad \text{(III.2)}$$

Функция $f(t,u)$-двух вещественных переменных (t, u) и вещественное число φ в (III.1), (III.2) считаются заданными. Теорему о разрешимости задачи Коши (III.1), (III.2) можно отыскать в различных учебниках (см., например, [11-13]), ниже приведем без доказательства один из вариантов этой теоремы.

О п р е д е л е н и е III.1. Пусть функция $f(t,u)$ определена на некотором множестве Ω в плоскости (t,u). Говорят, что $f(t,u)$ *удовлетворяет условию Липшица по “u” в области* Ω, если найдется постоянная K, такая, что:

$$|f(t,u_1) - f(t,u_2)| \le K|u_1 - u_2|$$

для любых $(t,u_1),(t,u_2) \in \Omega$. Постоянная K в этом случае называется *константой Липшица* (для f на Ω) ■

Т е о р е м а III.1. [13] Пусть функция f(t,u) непрерывна в области:

$$\Omega = \{(t,u) | t \in [0,a], u \in [\varphi - b, \varphi + b]\},$$

(для некоторых a>0, b>0) и удовлетворяет условию Липшица по “u” в этой области. Пусть:

$$M = \max_{\Omega} \left| f(t,u) \right| .$$

Тогда задача Коши (III.1), (III.2) имеет единственное решение для

$$T = \min(a, \frac{b}{M}) \quad \blacksquare$$

При обсуждении численных методов решения задачи (III.1), (III.2) будем заранее предполагать, что ее решение существует, единственно и обладает необходимыми свойствами гладкости. В настоящем разделе мы рассмотрим две группы методов: методы Рунге-Кутта и методы с итерационным разрешением нелинейности.

МЕТОДЫ РУНГЕ-КУТТА

Основная цель. Знакомство с эффективным методом решения нелинейных дифференциальных уравнений и систем, каким является метод Рунге-Кутта.

Теория и основные формулы метода. Рассмотрим задачу Коши (III.1), (III.2) для обыкновенного дифференциального уравнения. Будем считать, что на отрезке [0,T] задана равномерная сетка: $t_k = k \cdot \tau$ (k=0,1,…m) с шагом $\tau = T/m$. Приближенное значение величины $u(t_k)$ будем обозначать символом u_k^h. Рассмотрим три различных метода Рунге-Кутта (их описание можно найти также в [1,2]).

Одностадийный метод (метод Эйлера):

$$\begin{cases} u_0^h = \varphi, \\ u_{k+1}^h = u_k^h + \tau f(t_k, u_k^h), \ \ k = 0,1,...m-1. \end{cases} \tag{III.1.1}$$

Порядок сходимости этого метода – первый: для него имеет место оценка:

$$\left| u(t_k) - u_k^h \right| \le C \cdot \tau, \ \ (k = 0,1,...m)$$

с константой «С» не зависящей от τ.

Семейство двухстадийных методов:

$$\begin{cases} u_0^h = \varphi, \\ y^h = u_k^h + \tau\lambda f\left(t_k, u_k^h\right), \\ u_{k+1}^h = u_k^h + \tau\left[\left(1 - \dfrac{1}{2\lambda}\right) f\left(t_k, u_k^h\right) + \dfrac{1}{2\lambda} f\left(t_k + \tau\lambda, y^h\right)\right], \\ k = 0,1,..m-1. \end{cases} \tag{III.1.2}$$

Для методов (III.1.2) рассматриваем следующие значения параметра λ:

$$0 < \lambda \le 1,$$

сходимость двухстадийных методов определяется оценкой:

$$\left|u(t_k) - u_k^h\right| \le C \cdot \tau^2, \ \ (k = 0,1,...m).$$

Семейство трехстадийных методов:

$$\begin{cases} u_0^h = \varphi, \\ y_1^h = u_k^h + \dfrac{2\tau}{3} f\left(t_k, u_k^h\right), \\ y_2^h = u_k^h + \dfrac{2\tau}{3}\left[\left(1 - \dfrac{3}{8\sigma}\right) f\left(t_k, u_k^h\right) + \dfrac{3}{8\sigma} f\left(t_k + \dfrac{2\tau}{3}, y_1^h\right)\right], \\ u_{k+1}^h = u_k^h + \tau\left[\dfrac{1}{4} f\left(t_k, u_k^h\right) + \left(\dfrac{3}{4} - \sigma\right) f\left(t_k + \dfrac{2\tau}{3}, y_1^h\right) + \sigma f\left(t_k + \dfrac{2\tau}{3}, y_2^h\right)\right], \\ k = 0,1,...m-1; \quad \sigma \ne 0. \end{cases} \qquad \text{(III.1.3)}$$

Методы семейства (III.1.3) обладают третьим порядком сходимости:

$$\left|u(t_k) - u_k^h\right| \le C \cdot \tau^3, \ \ (k = 0,1,...m).$$

Тестовые задачи. Параметр ε, если не оговорено противное, считается достаточно малым и лежащим в пределах: $0 < \varepsilon \le 1$.

1. $$\begin{cases} \varepsilon u'(t) + \dfrac{2u(t)}{t+1} = 0, \ \ t \in (0,1]; \\ u(0) = 2. \end{cases}$$

Решение: $u(t) = \dfrac{2}{(1+t)^{2/3}}$.

2. $$\begin{cases} \varepsilon u'(t) + 2tu(t) = t\exp\left(-t^2/\varepsilon\right), \ \ t \in (0,1]; \\ u(0) = 2. \end{cases}$$

Решение: $u(t) = \left(2 + \dfrac{t^2}{2\varepsilon}\right)\exp\left(-t^2/\varepsilon\right)$.

3. $$\begin{cases} \varepsilon u'(t) + u(t) = t, \ \ t \in (0,1]; \\ u(0) = \varphi. \end{cases}$$

Решение: $u(t) = (\varphi + \varepsilon)\exp(-t/\varepsilon) + t - \varepsilon$.

4. $$\begin{cases} \varepsilon u'(t)\cdot\cos^2(\pi t)+u(t)=1, \ \ t\in(0,1]; \\ u(0)=\varphi. \end{cases}$$

$$\text{Решение: } u(t)=1+(\varphi-1)\cdot\exp\left(-\frac{tg(\pi t)}{\varepsilon\pi}\right).$$

5. $$\begin{cases} \varepsilon(2-t)^2u'(t)=2\sqrt{1-[u(t)]^2}, \ \ t\in(0,1]; \\ u(0)=0. \end{cases}$$

$$\text{Решение: } u(t)=\sin\left(\frac{t}{\varepsilon(2-t)}\right).$$

6. $$\begin{cases} \varepsilon(1+t)^2u'(t)=1+u^2(t), \ \ t\in(0,1]; \\ u(0)=0. \ \ \varepsilon>1/\pi. \end{cases}$$

$$\text{Решение: } u(t)=tg\left(\frac{t}{\varepsilon(1+t)}\right), \varepsilon>\frac{1}{\pi}.$$

7. $$\begin{cases} 3\varepsilon(t-1)u'(t)=u(t)+u^4(t), \ \ t\in(0,1]; \\ u(0)=1. \end{cases}$$

$$\text{Решение: } u(t)=\frac{1}{\sqrt[3]{\dfrac{2}{(1-t)^{1/\varepsilon}}-1}}.$$

8. $$\begin{cases} \varepsilon u'(t)+tu(t)=tu^3(t), \ \ t\in(0,1]; \\ u(0)=1/2. \end{cases}$$

$$\text{Решение: } u(t)=\frac{1}{\sqrt{1+3\exp(t^2/\varepsilon)}}.$$

9. $$\begin{cases} \varepsilon(t-1)u'(t)=u(t)+u^2(t), \ \ t\in(0,1]; \\ u(0)=\varphi>0. \end{cases}$$

$$\text{Решение: } u(t)=\frac{(1-t)^{1/\varepsilon}}{\varphi^{-1}+1-(1-t)^{1/\varepsilon}}.$$

10. $$\begin{cases} \varepsilon u'(t)+[u(t)]^{2n+1}=0, \ t\in(0,1]; \\ u(0)=\varphi, \ \ n>0. \end{cases}$$

$$\text{Решение: } u(t)=\varphi\cdot\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon+2\varphi^{2n}nt}\right)^{\frac{1}{2n}}.$$

11.
$$\begin{cases}\varepsilon t^{\alpha}u'(t)+u(t)=0, & t\in(0,1];\\ u(0)=\varphi, \ \alpha<1.\end{cases}$$

$$\text{Решение: } u(t)=\varphi\cdot\exp\left(-\frac{t^{1-\alpha}}{\varepsilon(1-\alpha)}\right).$$

12.
$$\begin{cases}\varepsilon u'(t)-au(t)=bt[u(t)]^2, & t\in(0,1];\\ u(0)=\varphi.\end{cases}$$

$$\text{Решение: } u(t)=\frac{1}{\frac{b}{a}\cdot\left(\frac{\varepsilon}{a}-t\right)+\left(\frac{1}{\varphi}-\frac{\varepsilon b}{a^2}\right)\exp\left(-\frac{at}{\varepsilon}\right)}.$$

12.1
$$\begin{cases}\varepsilon u'(t)=u(t)-t[u(t)]^2, & t\in(0,1];\\ u(0)=1.\end{cases}$$

$$\text{Решение: } u(x)=\frac{1}{x-\varepsilon+(1+\varepsilon)\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)}.$$

12.2
$$\begin{cases}\varepsilon u'(t)=u(t)+t[u(t)]^2, & t\in(0,1];\\ u(0)=-0.1.\end{cases}$$

$$\text{Решение: } u(t)=\frac{1}{\varepsilon-t-(10+\varepsilon)\exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right)}.$$

12.3
$$\begin{cases}\varepsilon u'(t)=u(t)-2t[u(t)]^2, & t\in(0,1];\\ u(0)=0.1.\end{cases}$$

$$\text{Решение: } u(t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t-\varepsilon+(5+\varepsilon)\exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right)}.$$

13. Обобщенное логистическое ур-ие (эволюция биомассы в условиях ограниченных ресурсов):

$$\begin{cases}\varepsilon u'(t)=c(u-a)(b-u), & t\in(0,1];\\ u(0)=\varphi.\end{cases}$$

$$\text{Решение: } u(t)=\frac{a(b-\varphi)+b(\varphi-a)\exp\left(\frac{c(b-a)t}{\varepsilon}\right)}{(b-\varphi)+(\varphi-a)\exp\left(\frac{c(b-a)t}{\varepsilon}\right)}.$$

13.1

$$\begin{cases}\varepsilon u'(t)=(u+1)(u-2), \quad t\in(0,1];\\ u(0)=1.\end{cases}$$

$$\text{Решение: } u(t)=\frac{-1+4\exp\left(-\frac{3t}{\varepsilon}\right)}{1+2\exp\left(-\frac{3t}{\varepsilon}\right)}.$$

13.2

$$\begin{cases}\varepsilon u'(t)=-u(u+3), \quad t\in(0,1];\\ u(0)=-2.\end{cases}$$

$$\text{Решение: } u(t)=-\frac{6}{2+\exp\left(\frac{3t}{\varepsilon}\right)}.$$

13.3

$$\begin{cases}4\varepsilon u'(t)=(u+3)(1-u), \quad t\in(0,1];\\ u(0)=-2.\end{cases}$$

$$\text{Решение: } u(t)=\frac{-3+\exp\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)}{3+\exp\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)}.$$

13.4 Уравнение Риккати:

$$\begin{cases}\varepsilon u'(t)=a-\frac{u^2}{a}, \quad t\in(0,1];\\ u(0)=\varphi.\end{cases}$$

$$\text{Решение: } u(t)=a\cdot\frac{\varphi+a\cdot \operatorname{th}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)}{a+\varphi\cdot \operatorname{th}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)}.$$

14. Уравнение Абеля 2-го рода:

$$\begin{cases}u'(t)=\left(u-\frac{1}{u}\right)\pi\cos(2\pi t), \quad t\in(0,1];\\ u(0)=\varphi, \ \varphi>e-1.\end{cases}$$

Решение: $u(t) = \sqrt{(\varphi^2 - 1) \cdot \exp[\sin(2\pi t)] + 1}$

15. Система уравнений Лотки-Вольтерра (модель хищник-жертва):

$$\begin{cases} u'(t) = [a - bv(t)] \cdot u(t), \\ v'(t) = [cu(t) - d] \cdot v(t),\ t > 0, \\ u(0) = u_0,\ v(0) = v_0. \\ a > 0, b > 0, c > 0, d > 0. \end{cases}$$

16. Однородная «b-ε» модель турбулентности:

$$\begin{cases} u'(t) = \alpha \cdot \dfrac{[u(t)]^2}{v(t)} - v(t), \\ v'(t) = C_1\alpha \cdot u(t) - C_2 \cdot \dfrac{[v(t)]^2}{u(t)},\ t > 0, \\ u(0) = u_0,\ v(0) = v_0, \\ u_0 > 0,\ v_0 > 0,\ C_1, C_2 \in (1,2]. \end{cases}$$

Решения задачи 16:

$$u(t) = \left[\theta(t) \cdot f^{C_1}(t)\right]^{\frac{1}{C_1-1}},\ v(t) = \left[\theta(t) \cdot f(t)\right]^{\frac{1}{C_1-1}},$$

где:

a) при $\alpha > 0$:

$$\begin{cases} f(t) = \dfrac{f_0 + |a|^{1/2} \cdot \mathrm{th}[t(C_2 - 1)|a|^{1/2}]}{1 + f_0|a|^{-1/2} \cdot \mathrm{th}[t(C_2 - 1)|a|^{1/2}]}, \\ \theta(t) = \theta_0\left[\mathrm{ch}[t(C_2 - 1)|a|^{1/2}] + f_0|a|^{-1/2} \cdot \mathrm{sh}[t(C_2 - 1)|a|^{1/2}\right]^{\frac{C_2-C_1}{C_2-1}}; \end{cases}$$

$$a \equiv \alpha\frac{C_1 - 1}{C_2 - 1},\ f_0 \equiv \frac{v_0}{u_0},\ \theta_0 \equiv \frac{(u_0)^{C_1}}{v_0}.$$

b) при $\alpha = 0$:

$$\begin{cases} f(t) = \dfrac{f_0}{1 + f_0 \cdot t(C_2 - 1)}, \\ \theta(t) = \theta_0\left[1 + f_0 \cdot t(C_2 - 1)\right]^{\frac{C_2-C_1}{C_2-1}}. \end{cases}$$

c) при $\alpha < 0$:

$$\begin{cases} f(t) = \dfrac{f_0 - |a|^{1/2} \cdot tg[t(C_2 - 1)|a|^{1/2}]}{1 + f_0|a|^{-1/2} \cdot tg[t(C_2 - 1)|a|^{1/2}]}, \\ \theta(t) = \theta_0 \left[\cos[t(C_2 - 1)|a|^{1/2}] + f_0|a|^{-1/2} \cdot \sin[t(C_2 - 1)|a|^{1/2}]\right]^{\frac{C_2 - C_1}{C_2 - 1}}. \end{cases}$$

В задаче 16 целесообразно рассмотреть следующие варианты выбора констант:

$$C_1 = C_2 = 1.5;$$
$$C_1 = 1.5,\ C_2 = 2;$$
$$C_1 = 1.5,\ C_2 = 1.52;$$
$$C_1 = 1.52,\ C_2 = 1.5.$$

17. Линейная динамическая система:

$$\begin{cases} u'(t) = v(t), \\ v'(t) = bu(t) + av(t),\ t > 0, \\ u(0) = u_0,\ \ v(0) = v_0. \end{cases}$$

Эта задача эквивалентна задаче Коши для уравнения (см. [11]):

$$\begin{cases} x''(t) - ax'(t) - bx(t) = 0, \\ x(0) = u_0,\ x'(0) = v_0. \end{cases}$$

Решения задачи 17:

характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - a\lambda - b = 0, \tag{III.1.4}$$

его решения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}\ .$$

а) Комплексные корни ур-ия (III.1.4) *(«фокус», «центр»)*:

$$\mathrm{Dis} \equiv \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b < 0,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{a}{2} \pm i \cdot |\mathrm{Dis}|^{\frac{1}{2}} \equiv \mathrm{Re}\lambda \pm i \cdot \mathrm{Im}\lambda.$$

$$\begin{cases} u(t) = \exp(t \cdot \mathrm{Re}\lambda)\left[u_0 \cos(t \cdot \mathrm{Im}\lambda) + \dfrac{v_0 - u_0 \mathrm{Re}\lambda}{\mathrm{Im}\lambda} \cdot \sin(t \cdot \mathrm{Im}\lambda)\right], \\ v(t) = \exp(t \cdot \mathrm{Re}\lambda)\left[v_0 \cos(t \cdot \mathrm{Im}\lambda) + \dfrac{v_0 \mathrm{Re}\lambda - u_0 |\lambda|^2}{\mathrm{Im}\lambda} \cdot \sin(t \cdot \mathrm{Im}\lambda)\right]. \end{cases}$$

a.1) $\mathrm{Re}\lambda < 0 \Rightarrow$ *устойчивый фокус* (можно выбрать: a=b=-2),

a.2) $\mathrm{Re}\lambda = 0 \Rightarrow$ *центр* (можно выбрать: a=0, b=$-\omega^2$, $\omega \in R$),

a.3) $\mathrm{Re}\lambda > 0 \Rightarrow$ *неустойчивый фокус* (можно выбрать: a=2, b=-2),

$u_0 = v_0 = 0 \Rightarrow$ *точка покоя.*

b) Вещественные и различные корни уравнения (III.1.4) *(«узел», «седло»)*:

$$\mathrm{Dis} \equiv \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b > 0,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{a}{2} \pm |\mathrm{Dis}|^{\frac{1}{2}}.$$

$$\begin{cases} u(t) = \dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left[(v_0 - \lambda_2 u_0)\exp(t\lambda_1) - (v_0 - \lambda_1 u_0)\exp(t\lambda_2)\right], \\ v(t) = \dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left[\lambda_1 \cdot (v_0 - \lambda_2 u_0) \cdot \exp(t\lambda_1) - \lambda_2 \cdot (v_0 - \lambda_1 u_0) \cdot \exp(t\lambda_2)\right]. \end{cases}$$

b.1) $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0 \Rightarrow$ *устойчивый узел* (можно выбрать: a=-0.2, b=-$^3\!/\!_4$),

b.2) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0 \Rightarrow$ *неустойчивый узел* (можно выбрать: a=2, b=-$^3\!/\!_4$),

b.3) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0 \Rightarrow$ *седло* (можно выбрать: a=2, b=3).

c) Кратный корень $\lambda = {}^a\!/\!_2$ уравнения (III.1.4) *(«вырожденый узел»)*:

$$\mathrm{Dis} \equiv \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b = 0,$$

$$\begin{cases} u(t) = \exp(t \cdot \lambda)\left[u_0 + (v_0 - u_0\lambda) \cdot t\right], \\ v(t) = \exp(t \cdot \lambda)\left[v_0 + \lambda \cdot (v_0 - u_0\lambda) \cdot t\right]. \end{cases}$$

Требования к программе. *Программа должна включать:*

1) Методы Рунге-Кутта с возможностью выбора параметров или при их фиксированных значениях (по усмотрению преподавателя).
2) Тестовые задачи (по выбору преподавателя).
3) Вывод относительных погрешностей по формуле:

$$Err \equiv \frac{\max\limits_{0 \le k \le m} \left| u(t_k) - u_k^h \right|}{\max\limits_{0 \le k \le m} \left| u(t_k) \right|} \cdot 100(\%).$$

4) Возможность выбора числа узлов сетки «m», или шага сетки «τ», а также параметра «ε» (если он есть по условию тестовой задачи).
5) Графика: одновременная отрисовка точного и приближенных решений (проинтерполированных кусочно-линейным сплайном).
6) При решении систем уравнений 15-17 желательна отрисовка и траектории (u(t), v(t)) при t>0 в координатной системе (u, v).

Задание для работы с программой.

1) Провести расчеты с использованием предложенных тестовых задач, варьируя шаг сетки и различные методы Рунге-Кутта.
2) Сравнить методы между собой, ориентируясь на величину погрешности «Err» и визуальное восприятие. Указать наиболее точный метод.
3) Уменьшая шаг сетки проверить сходимость методов Рунге-Кутта.

Все выводы необходимо аргументировать результатами численных расчетов и *оформить в виде Отчета.*