Вычисление определенных интегралов. Квадратурные формулы.

(1) $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, $f \in C[a,b]$;

(2) $\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \sum\limits_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$; – квадратурная ф-ла

$\sum\limits_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$ – квадратурная сумма.

$c_i \in \mathbb{R}$ $(i=\overline{1,n})$ – коэфф. квадратурной ф-лы (суммы)

$x_i \in [a,b]$ $(i=\overline{1,n})$: $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ – узлы кв. ф-лы.

$$\Delta[f] \equiv \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$$ – погрешность квадратурной ф-лы.

План:

1) Простейшие кв. ф-лы (ф-лы прямоуг., трапеций, Симпсона).

2) Составные кв. ф-лы.

3) Интерполяционные кв. ф-лы

Кв. ф-лы Гаусса.

Простейшие квадратурные формулы.

I. Формула прямоугольников.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b f(c)\,dx = (b-a)\cdot f(c);$$

$f(c)$ – мн-н Лагранжа $\deg = 0$.

$$x(\theta) \equiv \theta\cdot b + (1-\theta)\cdot a; \quad \theta\in[0,1].$$

$$f(x) = f(x(\theta)) + [x-x(\theta)]\cdot f'(x(\theta)) + \frac{1}{2}[x-x(\theta)]^2\cdot f''(\xi_{x\theta}).$$

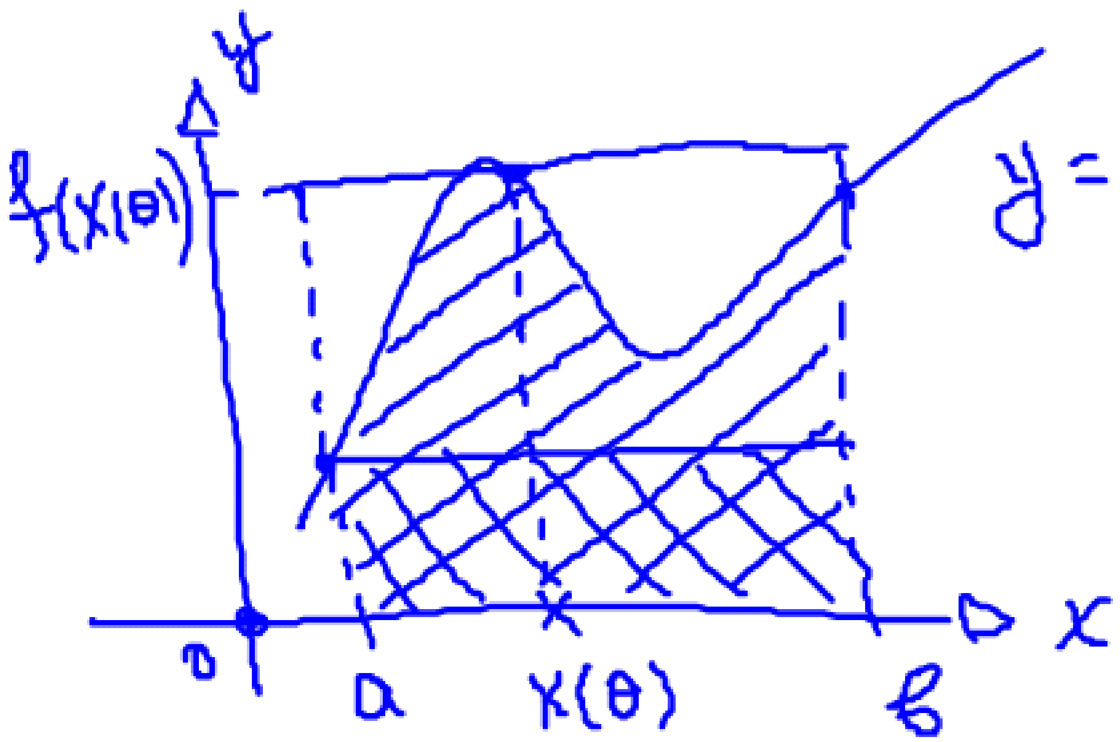
$$(3)\quad \int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\cdot f(x(\theta)) + \underbrace{(b-a)^2\left(\frac{1}{2}-\theta\right)\cdot f'(x(\theta)) + \frac{1}{2}\int_a^b (x-x(\theta))^2\cdot f''(\xi_{x,\theta})\,dx}_{\Delta[f]}$$

$$\int_a^b (x-x(\theta))\,dx = \frac{1}{2}(x-x(\theta))^2\Big|_a^b = \frac{1}{2}\left[(b-x(\theta))^2-(x(\theta)-a)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}(b-a)\left(b+a-2\theta b-2(1-\theta)a\right) = \frac{(b-a)^2}{2}(1-2\theta)$$

$$(3)\Rightarrow(4)\quad \boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\,f(x(\theta)),\quad \theta\in[0,1].}$$

$$\Delta[f] = (b-a)^2\cdot\left(\frac{1}{2}-\theta\right)\cdot f'(x(\theta)) + \frac{1}{2}\int_a^b \left[x-x(\theta)\right]^2\cdot f''(\xi_{x,\theta})\,dx$$



$$|\Delta[f]| \le (b-a)^2\cdot\left|\frac{1}{2}-\theta\right|\cdot\|f'\|_\infty + \frac{1}{2}(b-a)^3\cdot\|f''\|_\infty. \qquad (5)$$

<u>Составные ф-лы прямоугольников</u>:

$$x_i = a+(i-1)\cdot h;\quad h=\frac{b-a}{n-1};\quad i=\overline{1,n}.$$

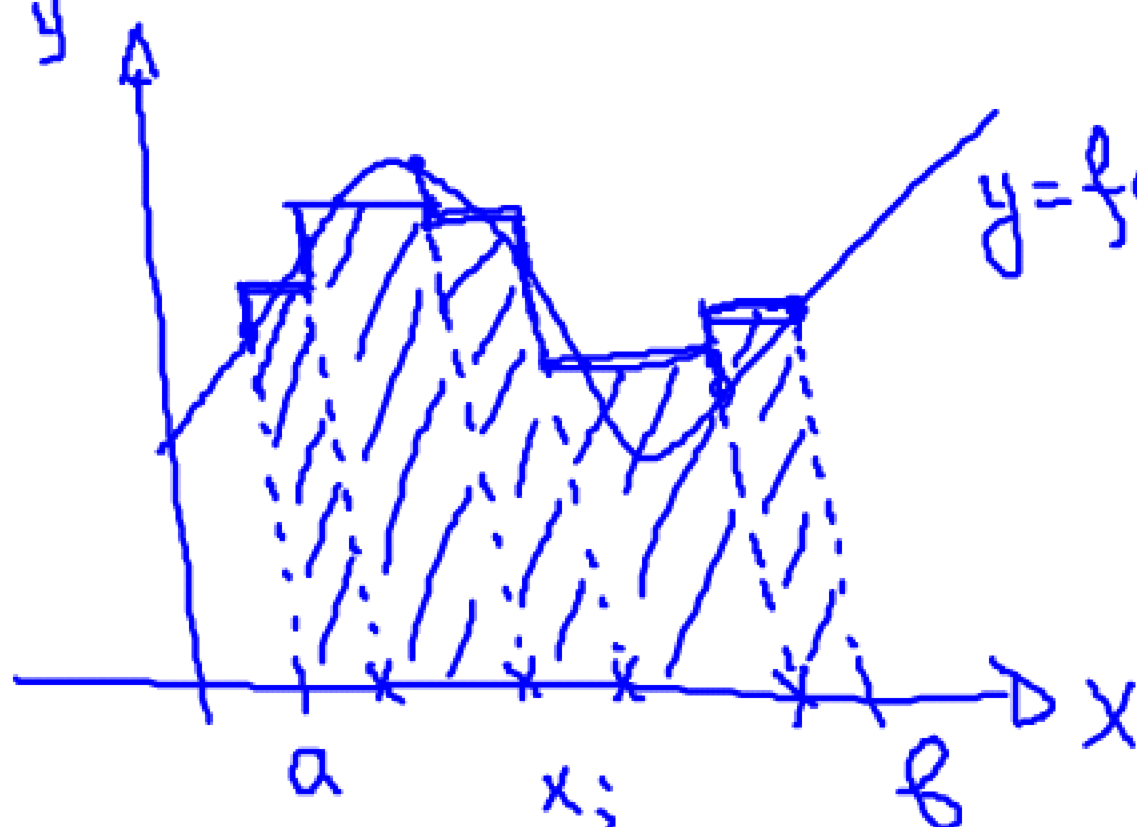
$$(6)\quad \underline{\underline{\int_a^b f(x)\,dx}} = \sum_{i=1}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \underline{\underline{\sum_{i=1}^{n-1} h\cdot f(x_i(\theta))}};\ \Leftarrow (4)\quad a=x_i,\ b=x_{i+1};$$

$$x_i(\theta)\equiv \theta x_i + (1-\theta)x_{i+1};\quad i=\overline{1,n};$$

$$\Delta[f] = \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n-1} h\cdot f(x_i(\theta)) = \sum_{i=1}^{n-1}\left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - h\cdot f(x_i(\theta))\right]$$

$$|\Delta[f]| \le \sum_{i=1}^{n-1}\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - h f(x_i(\theta))\right| \underset{\substack{(5)\\ a=x_i,\ b=x_{i+1}}}{\le} \sum_{i=1}^{n-1}\left[h^2\cdot\left|\frac{1}{2}-\theta\right|\cdot\|f'\|_\infty + \frac{1}{2}h^3\cdot\|f''\|_\infty\right];\qquad \sum_{i=1}^{n-1} 1 = n-1 = \frac{(b-a)}{h}$$

$$(7)\quad \boxed{|\Delta[f]| \le (b-a)\left[h\cdot\left|\frac{1}{2}-\theta\right|\cdot\|f'\|_\infty + \frac{1}{2}h^2\cdot\|f''\|_\infty\right];\ \theta\in[0,1]}$$



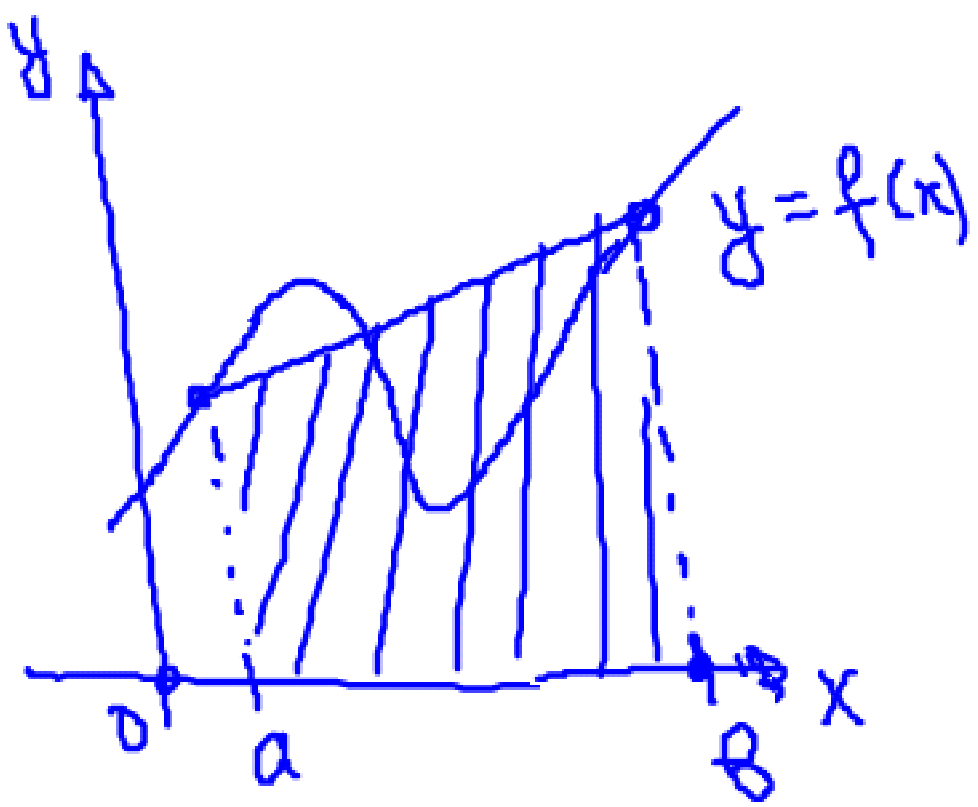
$\theta = \frac{1}{2}$ – ф-ла с центральной точкой

II. Формула трапеций.

Простейшая ф-ла трапеций:

$$(8)\quad \int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b \ell_2(x,(f)^h)\,dx = (b-a)\cdot\frac{f(a)+f(b)}{2};$$

$$\ell_2(x,(f)^h) = \frac{x-a}{b-a}\cdot f(b) + \frac{b-x}{b-a}\cdot f(a);$$



$$f(x) - \ell_2(x,(f)^h) = \frac{M_2}{2}\cdot(x-a)(x-b);$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta[f] = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b \ell_2(x,(f)^h)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi_x)\cdot(x-a)(x-b)\,dx;$$

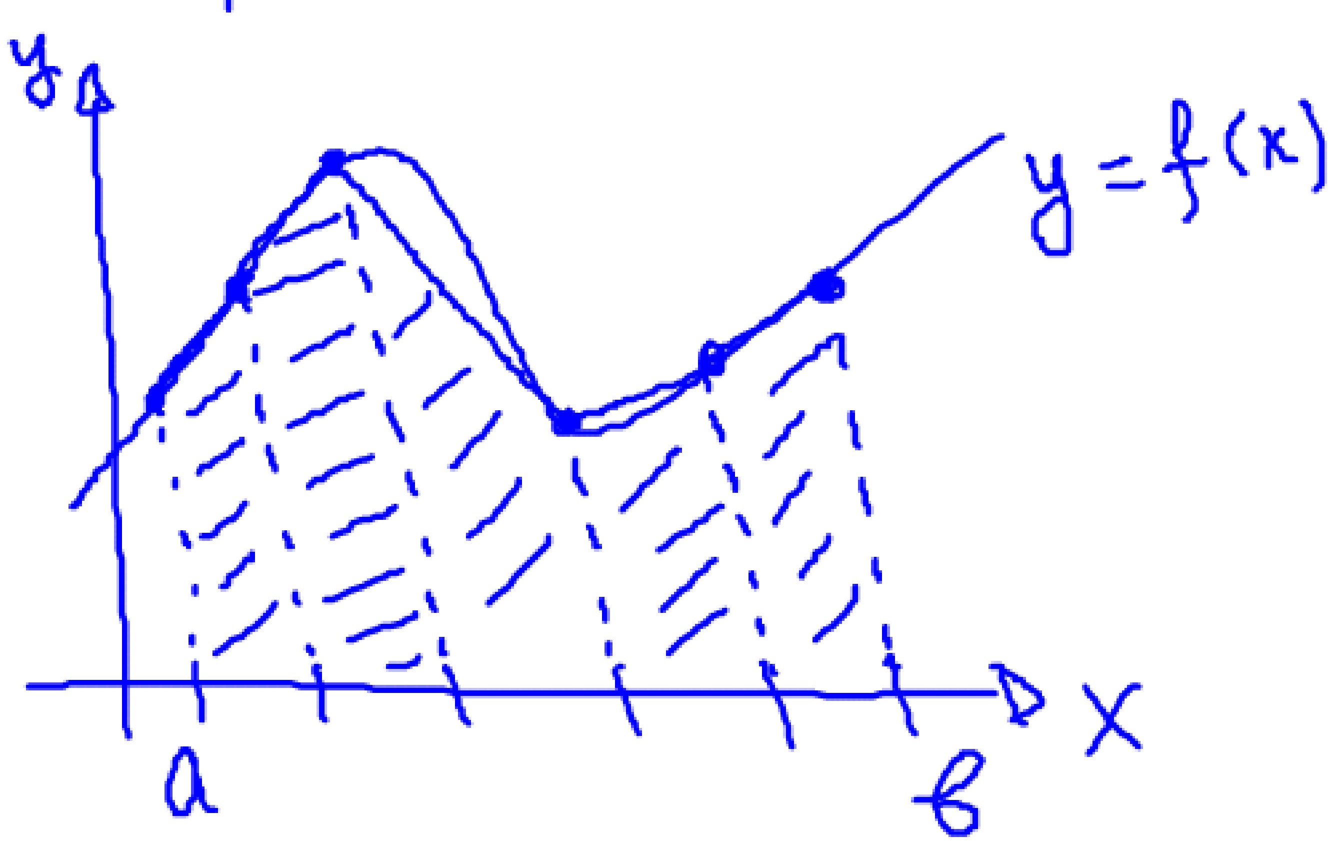
$$\underline{\underline{|\Delta[f]|}} \le \frac{1}{2}\int_a^b |f''(\xi_x)| \cdot |(x-a)(x-b)|\,dx \le$$

$$(9) \qquad \le \underline{\underline{\frac{\|f''\|_\infty}{2} \cdot (b-a)^3}};$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - h \cdot \frac{f_i + f_{i+1}}{2} \right] \overset{(9)}{\underset{a=x_i,\ b=x_{i+1}}{\Rightarrow}}$$

$$(11)\quad \underline{\underline{|\Delta[f]|}} \leq \sum_{i=1}^{n-1} h^3 \cdot \frac{\|f''\|_\infty}{2} = \underline{\underline{\frac{h^2}{2} \cdot \|f''\|_\infty \cdot (b-a)}}$$

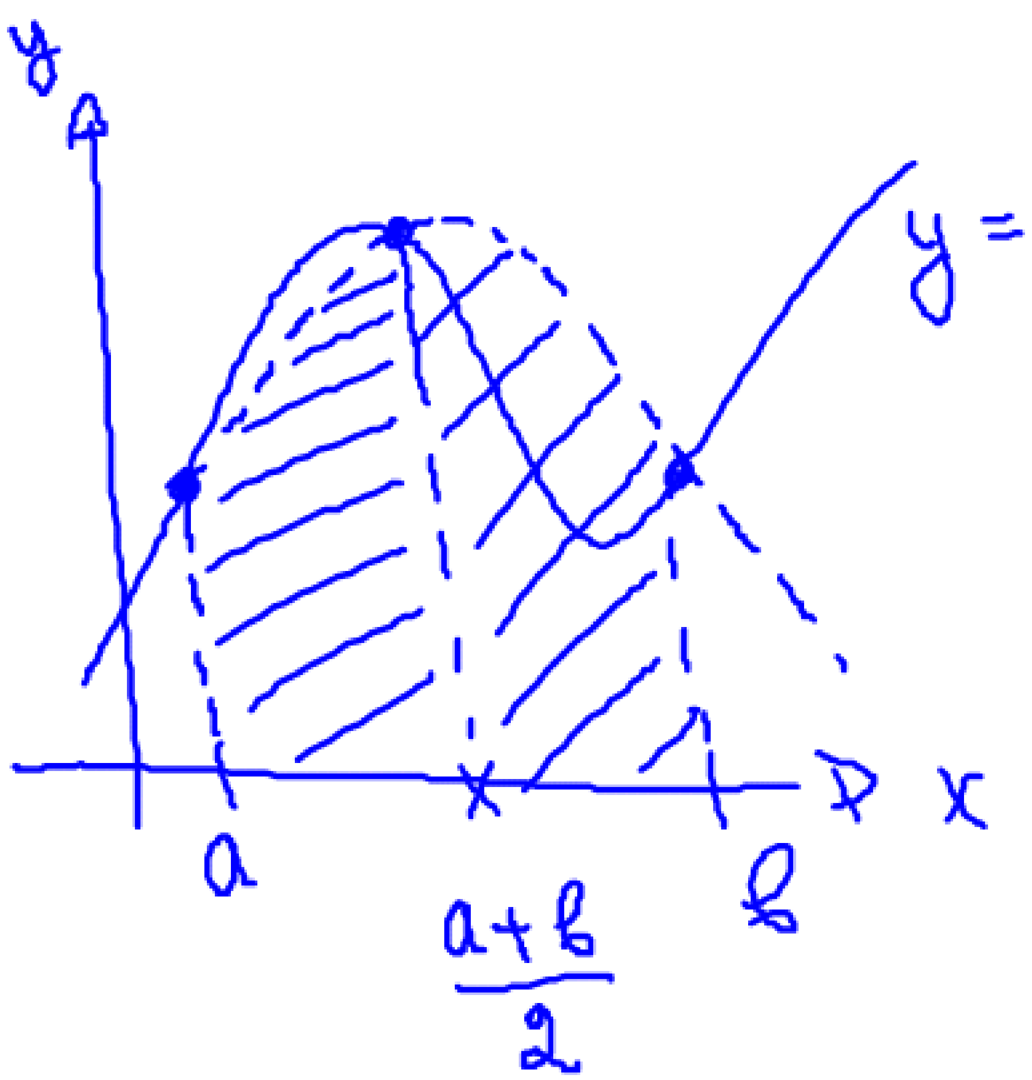
$$\sum_{i=1}^{n-1} h = h \sum_{i=1}^{n-1} 1 = h(n-1) = b-a \ ;$$



Формула Симпсона.

Простейшая ф-ла:

$$(12)\quad \int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b l_3\left(x,(f)^h\right)dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$



$$l_3\left(x,(f)^h\right) = \frac{2}{(b-a)^2}\cdot\left[(x-b)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\times\right.$$

$$\times f(a) - 2(x-b)(x-a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) +$$

$$\left. + \left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-a)\cdot f(b)\right];$$

$$f(x) - l_3(x,(f)^h) = \frac{f^{(3)}(\xi_x)}{3!} \cdot (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b);$$

$$\underline{\underline{|\Delta[f]|}} \leq \int_a^b \left|[f(x) - l_3(x,(f)^h)]\right| dx \leq \frac{\|f^{(3)}\|_\infty}{6} \times$$

$$(13) \qquad \times \int_a^b \left|(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)\right| dx \leq \underline{\underline{\frac{(b-a)^4}{6} \cdot \|f^{(3)}\|_\infty}};$$

<u>Составная ф-ла Симпсона:</u>

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \overset{(12)}{\approx} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h}{6}\left[f(x_i) + 4f(x_{i+1/2}) + f(x_{i+1})\right]$$

$$a = x_i,\ b = x_{i+1}$$

$$\frac{a+b}{2} = x_{i+1/2}$$

$$\Delta[f] = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x) - \ell_3(x, (f)^k)]\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{|\Delta[f]|}} \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h^4}{6} \cdot \|f^{(3)}\|_\infty = \underline{\underline{\frac{b-a}{6} \cdot h^3 \cdot \|f^{(3)}\|_\infty}}. \quad (14)$$

Более точная оценка:

$$|\Delta[f]| \leq \frac{\|f^{(4)}\|_\infty}{2880} \cdot h^4;$$

Интерполяционные квадратурные формулы.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b \ell_n(x,(f)^h)\,dx = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\int_a^b \omega_{i,n}(x)\,dx$$

$$\ell_n(x,(f)^h) = \sum_{i=1}^{n} \omega_{i,n}(x)\cdot f(x_i);$$

$$|\Delta[f]| \leq \int_a^b |f(x)-\ell_n(x,(f)^h)|\,dx = \int_a^b \left|\frac{f^{(n)}(\xi_x)}{n!}\,\omega_n(x)\right|dx \leq$$

$$\leq \frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{n!}\cdot\int_a^b |\omega_n(x)|\,dx;$$

<u>Опред. 1</u> ① Квадр. ф-ла <u>точна</u> на ф-ции $f(x)$

если

$$\Delta[f] \equiv \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i) = 0.$$

② Квадр. ф-ла : $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$

<u>устойчива</u>, если $\exists M \in (0,+\infty) : \forall n \Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n} |c_i| \le M ;$$ (+)

$f(x_i) \approx \overline{f}(x_i) = f(x_i) + \varepsilon_i \quad (\varepsilon_i > 0, i = \overline{1,n})$

$S = \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i) \approx \overline{S} = \sum_{i=1}^{n} c_i \overline{f}(x_i) = S + \sum_{i=1}^{n} c_i \varepsilon_i ;$

$$\Delta S = \bar{S} - S = \sum_{i=1}^{n} c_i \varepsilon_i$$

$$|\Delta S| \le \sum_{i=1}^{n} |c_i| \cdot |\varepsilon_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |c_i|\right) \cdot \max_i |\varepsilon_i| \le$$

$$\le M \cdot \max_i |\varepsilon_i|;$$

Теорема 1. Интерпол. кв. ф-ла с "n" узлами точна на пр-ве $\mathbb{P}_{n-1}$ - многочленов $\deg \le n-1$.

Док-во следует из (15) ⊕

Теорема 2. Интерп. кв. ф-ла с положит. коэф. $\{c_i\}_{i=1}^{n}$, устойчива.

Док-во. $n \geq 1 \overset{\text{Теор. 1.}}{\Longrightarrow}$ ф-ла точна для constant $\equiv$

$\equiv$ многочлены $\deg = 0$.

$$\sum_{i=1}^{n} |c_i| = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot 1 = \int_a^b 1\,dx = b-a \equiv M \quad \oplus$$

Следствие. Простейшие кв. ф-лы (прямоуг., трап., Симпс.) устойчивы $\oplus$

Квадратурные ф-лы Гаусса.

Опред. 2. Интерпол. кв. ф-ла наз. ф-лой Гаусса, если она точна на пр-ве $\mathbb{P}_{2n-1}$.

Теорема 3. Пусть $\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \sum\limits_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$ — кв. ф-ла

интерпол. типа, построеная по мн-ну $\omega_n(x)$.

Эта ф-ла точна на пр-ве $\mathbb{P}_{2n-1}$ $\Longleftrightarrow$

$$(16) \qquad \int\limits_a^b \omega_n(x)\cdot x^i\,dx = 0 \qquad (i=0,1,\ldots,n-1).$$

Док-во. "$\Rightarrow$" $i=\overline{0,n-1} \Rightarrow \deg[\omega_n(x)\cdot x^i] = n+i \leq 2n-1$.

$$\int\limits_a^b \omega_n(x)\cdot x^i\,dx = \sum_{k=1}^{n} C_k \omega_n(x_k)\cdot x_k^i = 0, \text{ т.к.}$$

x_k $(k=\overline{1,n})$ — нули мн-на $\omega_n(x)$ $+$

"$\Leftarrow$" $p(x) \in \mathbb{P}_{2n-1}$ і если $\deg p(x) \leq n-1$, то

кв. ф-ла на нем точна как интерполяционная.

Предположим, что $\deg p(x) \geq n$. $\Longrightarrow$

$$(17) \qquad p(x) = \omega_n(x) \cdot q(x) + r(x);$$

$$\deg q(x) \leq n-1 \text{ и } \deg r(x) \leq n-1.$$

$$\int_a^b p(x)dx = \underbrace{\int_a^b \omega_n(x) q(x) dx}_{\overset{(16)}{=}\,0} + \int_a^b r(x)dx =$$

$$= \int_a^b r(x)dx \overset{\text{T.1.}}{=} \sum_{i=1}^n c_i r(x_i) \overset{(17)}{=} \sum_{i=1}^n c_i [p(x_i) - \underbrace{\omega_n(x_i)}_{=0} q(x_i)] =$$

$$= \sum_{i=1}^n c_i p(x_i) \quad (+)$$

Система многочленов Лежандра:

(18) $$\mathcal{L}_n(x) \equiv \frac{n!}{(2n)!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}\left[(x-a)(x-b)\right]^n ; \quad n=0,1,2,\ldots$$

(19) $$\begin{cases} \mathcal{L}_0(x) = 1, \ \mathcal{L}_1(x) = x - \frac{a+b}{2} ; \\ \mathcal{L}_{n+1}(x) = \left(x - \frac{a+b}{2}\right) \cdot \mathcal{L}_n(x) - \frac{n^2}{4(2n+1)(2n-1)} \cdot (b-a)^2 \cdot \mathcal{L}_{n-1}(x) \end{cases}$$

$n = 1,2,\ldots$;

Теорема 4. Пусть мн-н $\omega_n(x)$ удовлетворяет условиям ортогональности (16) $\Longrightarrow$ он имеет "n" различных корней, лежащих на $[a,b]$.

Док-во. (16), $i=0 \Rightarrow \int_a^b \omega_n(x)dx = 0.$

$\Rightarrow \omega_n(x)$ имеет на $[a,b]$ хотя бы один корень нечетной кратности.

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ – все корни $\omega_n(x)$ нечетной кратности;

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$; Пусть $m<n$.

$$q(x) \equiv (x-\xi_1)(x-\xi_2)\cdots(x-\xi_m) \Rightarrow \deg q(x) \leq n-1.$$

(20) $\int_a^b \omega_n(x)\cdot q(x) = 0$ – в силу (16)

$\omega_n(x)\cdot q(x)$ – имеет корни только четной кратности:

$\alpha_1+1, \alpha_2+1, \dots \alpha_m+1 \Rightarrow$ (20) невозможно. $\Rightarrow m=n$