Итерационные методы решения нелинейных уравнений.

(1) $$f(x) = 0;$$

$x \in \mathbb{R}^n$; $\|\cdot\|$; $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$;

$B_r(a) \equiv \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|a - x\| \leq r \}$.

Опред. 1. Ф-ия $G(x)$ наз. сжимающей на $B_r(a)$, если: (1) $\forall x \in B_r(a) \Rightarrow G(x) \in B_r(a)$;

(2) $\exists q \in (0,1) : \forall x, y \in B_r(a) \Rightarrow$

q – "коэф. сжатия".

$$\|G(x) - G(y)\| \leq q \cdot \|x - y\|. \quad (*)$$

Теорема 1. (о сжимающей ф-ии).

Пусть $G(x)$ - ф-ия сжимающая на шаре B;

$\Downarrow$ 1) $\exists!\, x_* \in B : G(x_*) = x_*$ (x_* - неподвижная точка $G(x)$).

2) $\forall x_0 \in B$ последовательность $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$:

$$x_{k+1} = G(x_k), \quad k=0,1,\dots; \tag{2}$$

сходится, и $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_*$. (+)

(2) - метод "простой" итерации; x_0 - "начальное приближ."

Док-во. Докажем сходимость посл. $\{x_k\}$

$m > k$;

$$\|x_m - x_k\| \overset{(2)}{=} \|G(x_{m-1}) - G(x_{k-1})\| \overset{0.1.}{\leq} q \cdot \|x_{m-1} - x_{k-1}\| \leq$$

$$\leq q^2 \cdot \|x_{m-2} - x_{k-2}\| \leq \ldots \leq q^k \cdot \|x_{m-k} - x_0\| ;$$

для $m = k+1 \Rightarrow \|x_{k+1} - x_k\| \leq q^k \cdot \|x_1 - x_0\| \quad (3).$

$$\underline{\underline{\|x_m - x_k\|}} \leq q^k \cdot \|x_{m-k} - x_0\| \leq q^k \|x_{m-k} - x_{m-k-1} + x_{m-k-1} -$$

$$- x_{m-k-2} + \ldots + x_1 - x_0\| \leq q^k \big(\|x_{m-k} - x_{m-k-1}\| +$$

$$+ \|x_{m-k-1} - x_{m-k-2}\| + \ldots + \|x_2 - x_1\| + \|x_1 - x_0\| \big) \overset{(3)}{\leq}$$

$$\leq q^k \cdot \left(q^{m-k-1} + q^{m-k-2} + \ldots + q + 1 \right) \cdot \|x_1 - x_0\| \leq$$

$$\underline{\underline{\leq \frac{q^k}{1-q} \cdot \|x_1 - x_0\|}} ;$$

$$(4)\quad \|x_m - x_k\| \le \frac{q^k}{1-q}\cdot\|x_1 - x_0\| \quad (m>k).$$

В (4): $m,k\to\infty \Rightarrow \|x_m - x_k\| \to 0$;

$\Downarrow$ $\{x_k\}$ - сходится в $\mathbb{R}^n$; В силу полноты $\mathbb{R}^n$

найдется $x_* = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$;

Покажем, что $x_* \in B$ $(\forall x_0 \in B)$; действительно,

$x_0 \in B \overset{\text{О.1.}}{\Rightarrow} x_1 = G(x_0) \in B \Rightarrow x_k \in B$ $(\forall k) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. B - замкнутое мн-во в $\mathbb{R}^n$, то $x_* \in B$ $\oplus$

Докажем, что $G(x_*) = x_*$.

$$\|G(x_*) - G(x_k)\| \le q\cdot\|x_* - x_k\| \to 0 \ (k\to\infty)$$

$\Downarrow$

$$\Downarrow \quad \lim_{k\to\infty} G(x_k) = G(x_*).$$

$$x_{k+1} = G(x_k)$$

$$\Downarrow$$

$$x_* = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} G(x_k) = G(x_*); \quad +$$

Докажем единственность тчк. x_*.

$$x_* = G(x_*) \text{ и } y_* = G(y_*);$$

$$\Downarrow$$

$$\|x_* - y_*\| = \|G(x_*) - G(y_*)\| \overset{0.1.}{\leq} q \cdot \|x_* - y_*\|$$

$$\Downarrow$$

$$(1-q)\cdot\|x_* - y_*\| = 0 \Rightarrow x_* = y_* \quad +$$

Пусть в (4): $m \to \infty$, k-фиксировано $\Downarrow$

$$\boxed{\|x_* - x_k\| \leq \frac{q^k}{1-q}\cdot\|G(x_0) - x_0\|} \quad + \qquad (5)$$

Пусть $x \in \mathbb{R}$; $f(x)$ - вещественнозначная ф-ция;

(1) $$f(x) = 0;$$

Рассмотрим семейство итерационных процессов:

(6) $$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{a_k - b_k \cdot f(x_k)}; \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ x_0 \text{ - задано; } \{a_k\}_{k=0}^{\infty}, \{b_k\}_{k=0}^{\infty} \text{ - известны.} \end{cases}$$

<u>Опр. 2.</u> 1 (6) будем называть <u>корректным</u>, если:

$$a_k - b_k f(x_k) \neq 0 \quad (\forall k).$$

2 (6) будем называть <u>устойчивым</u>, если:

$$\exists M \in (0, +\infty): |a_k - b_k f(x_k)| \leq M \quad (\forall k)$$ +

③ (6) – сходится, если послед. $\{x_k\}$ – сходится.

<u>Теорема 2.</u> Пусть $f(x)$ – непрерывна; итерац. процесс (6) корректен, устойчив и сходится

$$\Downarrow$$

(6) сходится к некоторому корню ур-ия (1).

<u>Док-во.</u> Из (6) $\Rightarrow$

$$|f(x_k)| = |a_k - b_k f(x_k)| \cdot |x_{k+1} - x_k| \leq M \cdot \underbrace{|x_{k+1} - x_k|}_{\downarrow\, k\to\infty \; 0}$$

Если $x_* = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$, то $\underbrace{\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k)}_{= 0} = f(x_*)$;

<u>Опред. 3.</u> $\mathfrak{M} \subseteq \mathbb{R}$; $\mathfrak{M}$ – область сходимости (6) к корню x_* ур-ия (1), если $\forall x_0 \in \mathfrak{M} \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_*$ ⊕

"Логика" итерационного процесса:

Процесс заканчивают, если выполнено одно из условий:

$$|f(x_k)| < \varepsilon, \quad |x_{k+1} - x_k| < \varepsilon.$$

Задаются числа: ε - дост. малое; E - дост. большое; $(\in R)$

N - натур., дост. большое.

Нашли x_{k+1} из (6), далее:

$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon \overset{да}{\Longrightarrow} x_* = x_{k+1}$ (остановка и.п.)

$\Downarrow$ нет

$|x_{k+1}| > E \overset{да}{\Longrightarrow}$ (остановка и.п.; диагноз: "расходится")

$\Downarrow$ нет

$k+1 \geq N \overset{да}{\Longrightarrow}$ (остановка и.п.; диагноз: "зацикливание")

$\Downarrow$ нет

возврат к (6), находим x_{k+2}

Метод простой итерации с параметром.

Положим в (6): $b_k \equiv 0$, $a_k \equiv a \equiv const \neq 0$ $(\forall k)$.

Получим:

$$(7)\quad \begin{cases} x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{a}; & k = 0, 1, \dots; \\ x_0 \text{ - задано}; & a \neq 0;\ a \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Теорема 3. Пусть x_* - корень ур-ия (1).

Предположим далее: $\exists r > 0$: в "шаре" $B \equiv [x_* - r, x_* + r]$:

1. $f \in C^1(B)$; 2. $f'(x)$ не меняет знак на B;
3. $\operatorname{sign} a = \operatorname{sign} f'$; 4. $|a| > \dfrac{1}{2} \max\limits_{s \in B} |f'(s)|$;

Тогда: $\forall x_0 \in B \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_*$; где x_k

определено ф-лой (6);

$$(8) \qquad |x_k - x_*| \le q^k \cdot r, \quad \forall k = 0, 1, \ldots$$

где $q \equiv \max\limits_{s\in B} \left| 1 - \dfrac{f'(s)}{a} \right| < 1$ (+')

Доказательство. В соответствии с Теоремой 1:

$g(x) \equiv x - \dfrac{f(x)}{a}$; $\Rightarrow$ (7) является частным случаем метода простой итерации: $x_{k+1} = g(x_k)$

Докажем сжимаемость ф-ии $g(x)$.

По ф-ле Тейлора: $\forall x, y \in B \Rightarrow g(x) - g(y) = g'(\theta)\cdot(x-y)$.

для некоторой $\theta \in B$. Обозначим:

$$q \equiv \max_{\theta \in B} |g'(\theta)| = \max_{\theta \in B} \left| 1 - \frac{f'(\theta)}{a} \right|;$$

Тогда: $\boxed{|g(x) - g(y)| \leq q \cdot |x-y|;}$ (9)

<u>Докажем, что</u> $q < 1$:

$$q < 1 \Longleftrightarrow \max_{\theta \in B} \left| 1 - \frac{f'(\theta)}{a} \right| < 1 \Longleftrightarrow$$

$\Longleftrightarrow \forall s \in B: -1 < 1 - \frac{f'(s)}{a} < 1 \Longleftrightarrow$ а) $\underline{\frac{f'(s)}{a} > 0}$;

в) $\frac{|f'(s)|}{|a|} < 2$; $\forall s \in B \Longleftrightarrow \underline{\underline{|a| > \frac{1}{2}|f'(s)|}}$ $\forall s \in B$.

Остается проверить, что:

$$\forall x \in B \Rightarrow g(x) \in B;$$

$$(g) \Rightarrow \quad |g(x_*) - g(x)| \leq q \cdot |x_* - x| \leq r;$$

$$g(x_*) = x_* \Rightarrow \quad |g(x_*) - g(x)| = |x_* - g(x)| \quad \Rightarrow \quad g(x) \in B \quad +$$

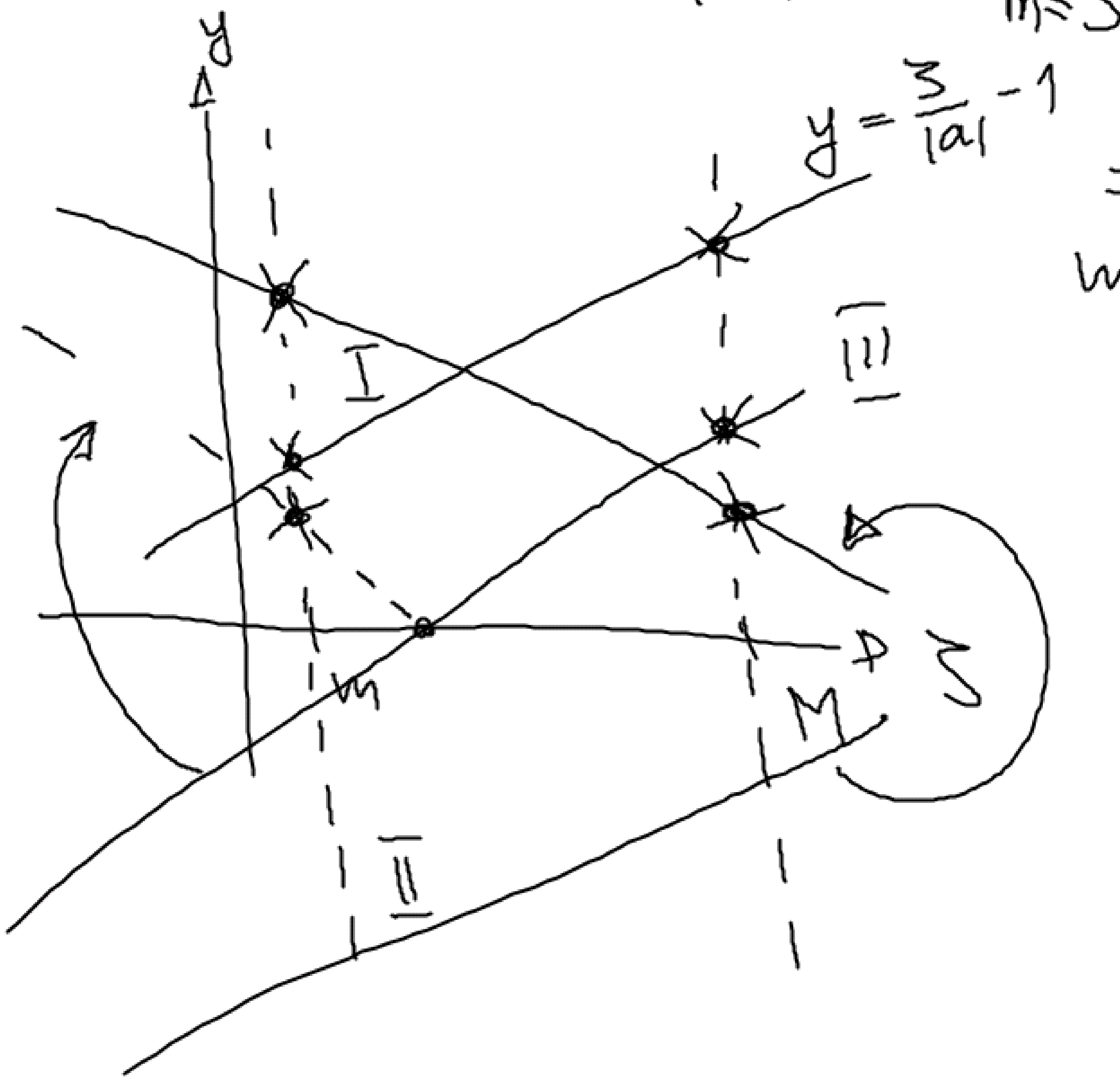
Найдем $a_* \in \mathbb{R}$: $\quad q(a_*) = \min\limits_{a \neq 0} q(a) = \min\limits_{a \neq 0} \left(\max\limits_{s \in B} \left| 1 - \frac{f'(s)}{a} \right| \right).$

<u>Пусть</u>: $0 < m \leq f'(s) \leq M \quad (\forall s \in B)$; Условия Т.3. выполнены.

I. Докажем, что: $\max\limits_{s \in B} \left| 1 - \frac{f'(s)}{a} \right| = \max \left\{ \left| 1 - \frac{m}{|a|} \right|, \left| 1 - \frac{M}{|a|} \right| \right\}.$

Действительно: $q(a) = \max\limits_{s\in B}\left|1 - \dfrac{f'(s)}{a}\right| =$

$= \max\limits_{s\in B}\left|1 - \dfrac{|f'(s)|}{|a|}\right| = \max\limits_{m\le \xi\le M}\left|1 - \dfrac{\xi}{|a|}\right| =$



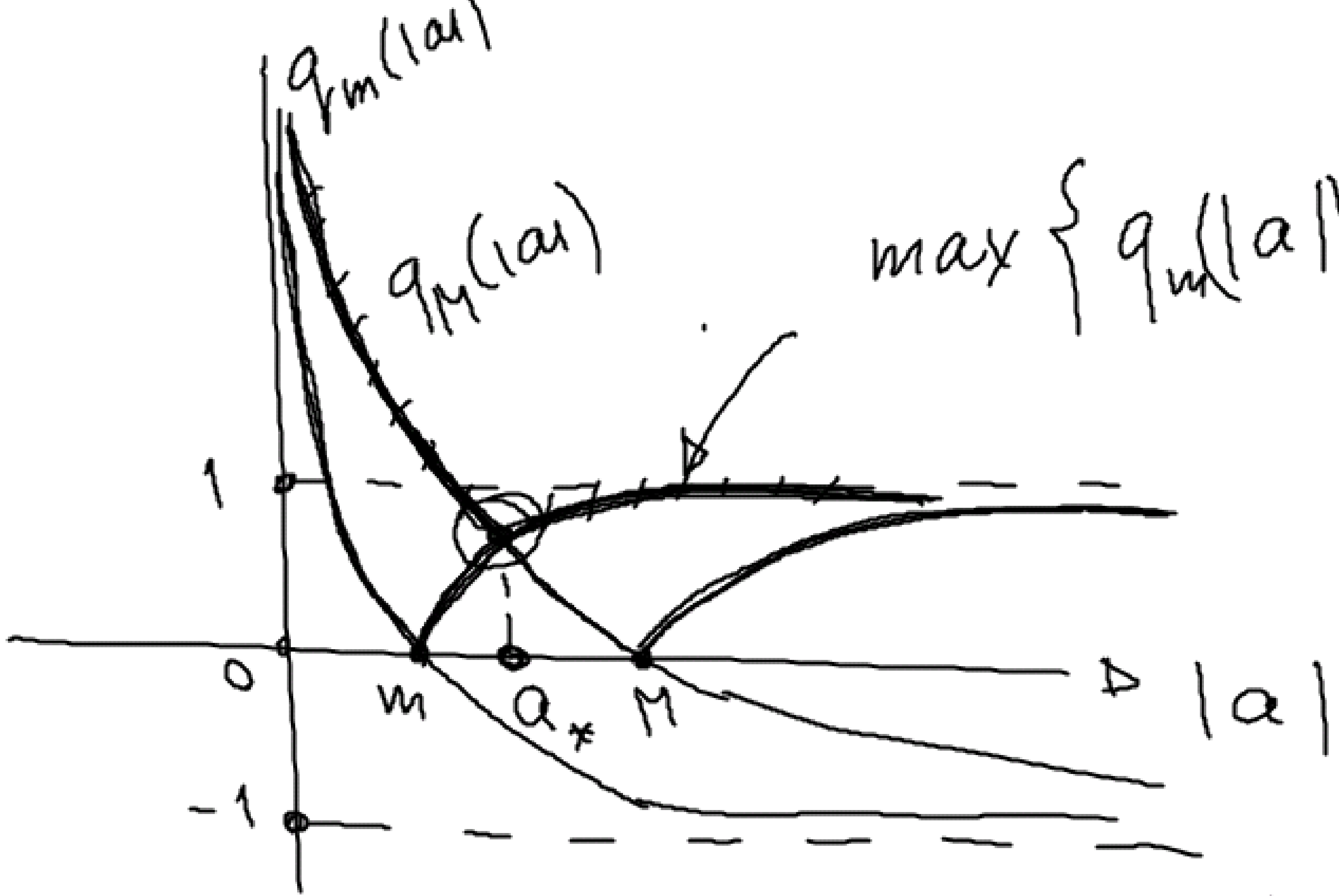
$= \max\limits_{m\le \xi\le M}\left|\dfrac{\xi}{|a|} - 1\right| =$

$= \max\left\{\left|\dfrac{m}{|a|} - 1\right|, \left|\dfrac{M}{|a|} - 1\right|\right\}.$

$\downarrow$ min

$|a|$ – ?

$$q_m(|a|) \equiv \left|\frac{m}{|a|}-1\right|; \quad q_M(|a|) \equiv \left|\frac{M}{|a|}-1\right|;$$



$$\max\{q_m(|a|), q_M(|a|)\} \to \min_{|a|} - ?$$

$$q_m(|a_*|) = q_M(|a_*|);$$

$$\left|\frac{m}{|a_*|}-1\right| = \left|\frac{M}{|a_*|}-1\right| \Rightarrow$$

1) $\frac{m}{|a_*|}-1 = \frac{M}{|a_*|}-1;$

2) $\frac{m}{|a_*|}-1 = 1-\frac{M}{|a_*|};$

$$|a_*| = \frac{m+M}{2}$$

Метод Ньютона

Пусть x_* - корень ур-ия $f(x)=0$; $x_k \approx x_*$;

$$0 = f(x_*) = f(x_k) + (x_* - x_k)\cdot f'(x_k) + \cancel{\frac{1}{2}(x_* - x_k)^2 \cdot f''(\theta_k)};$$

$$\Downarrow$$

$$0 = f(x_k) + (x_{k+1} - x_k)\cdot f'(x_k);$$

x_{k+1} - новое итерац. приближение к корню x_*;

$$(10)\quad \begin{cases} x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}; \quad f'(x_k) \neq 0; \\ k = 0, 1, 2, \dots; \ x_0 \text{ - задано.} \end{cases}$$

"Метод Ньютона"

В (6) дост. положить: $a_k = f'(x_k)$ и $b_k = 0$ $(\forall k)$

Метод (10) будем применять для отыскания <u>простых</u> корней ур-ия $f(x)=0$: $f'(x_*)\neq 0$;

Метод Ньютона (10) является частным случаем метода <u>простой итерации</u>: $G(x)\equiv x-\frac{f(x)}{f'(x)}$;

$$(10) \Longleftrightarrow \quad x_{k+1}=G(x_k);\ k=0,1,\dots$$

$$x,y\in \underset{\overset{\shortparallel}{B}}{[x_*-r,x_*+r]} \Rightarrow \quad G(x)-G(y)=(x-y)\cdot G'(\theta_{x,y});$$

$$|G(x)-G(y)|\leq \max_{s\in B}|G'(s)|\cdot|x-y|;$$

$<1\ (?)$

$$(11)\quad G'(x)=1-\frac{[f'(x)]^2-f(x)\cdot f''(x)}{[f'(x)]^2}=\frac{f(x)\cdot f''(x)}{[f'(x)]^2};$$

Т.к. $f(x_*)=0$ и $f'(x_*)\neq 0$, то из (11) следует, что при достаточно малом "r" можно получить:

$$q \equiv \max_{s\in B} |G'(s)| < 1.$$

Проверим, что $x\in B \Rightarrow G(x)\in B$;

$$|x_* - G(x)| = |G(x_*) - G(x)| \leq q\cdot|x_* - x| \leq$$
$$\leq q\cdot r < r;$$

$$\Downarrow$$
$$G(x)\in B \quad +$$

__Теорема 4.__ (о локальной сходимости метода Ньютона).

Пусть: $f(x_*)=0$ и $f'(x_*)\neq 0$; $f\in C^2$ (в нек. окр. x_*);

$\Downarrow$ Тогда $\exists B_r \equiv [x_*-r, x_*+r]$: $\forall x_0\in B_r$ итерационный процесс (10) сходится к x_* (со скоростью q^k)

Модифицированные методы Ньютона.

I. **метод секущих:**

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)};$$

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}};$$

(12) $$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)\cdot(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} = \dfrac{f(x_k)\cdot x_{k-1} - f(x_{k-1})\cdot x_k}{f(x_k) - f(x_{k-1})}; \\ k = 1, 2, 3, \ldots; \ x_0 \text{ и } x_1 \text{ - заданы.} \end{cases}$$

Первый вариант метода секущих.

$$(13)\quad \begin{cases} x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_0)}; \\ k = 0, 1, \dots; \quad x_0 \text{ - задано.} \end{cases}$$

$\Leftarrow$ модифицированный метод Ньютона.

Предполагается, что $x_0 \approx x_*$;

(13) является частным случаем метода простой итерации с параметром $a = f'(x_0)$.

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0} \Rightarrow$$

$$(14)\quad \begin{cases} x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)\cdot(x_k - x_0)}{f(x_k) - f(x_0)} = \dfrac{f(x_k)\cdot x_0 - f(x_0)\cdot x_k}{f(x_k) - f(x_0)}; \\ k = 1, 2, \dots; \quad x_0, x_1 \text{ - заданы.} \end{cases}$$

Второй вариант метода секущих.

Геометрическая интерпретация итерационных методов.

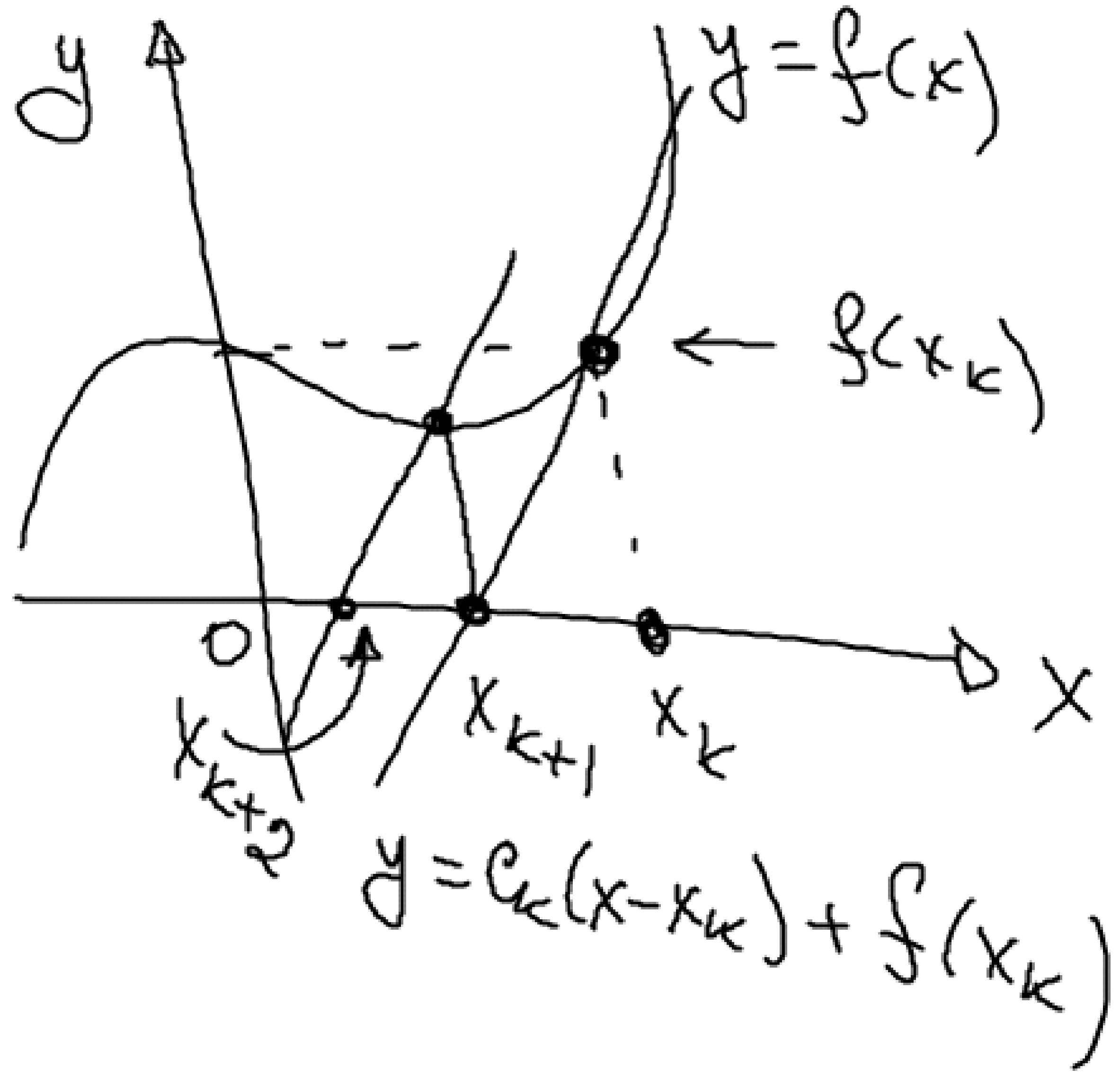
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{a_k - b_k \cdot f(x_k)}; \quad k = 0, 1, \ldots;$$

$$c_k \equiv a_k - b_k \cdot f(x_k);$$

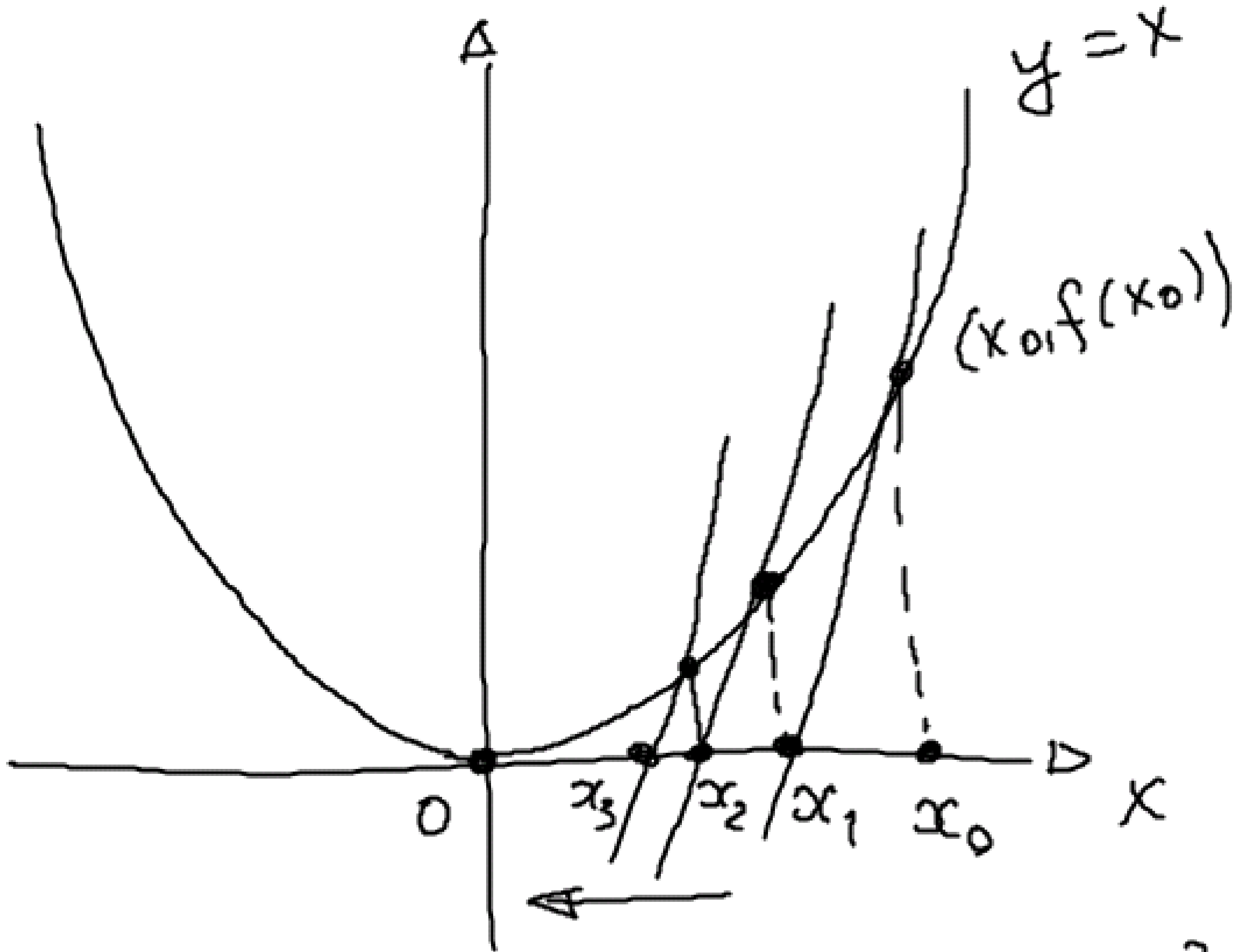
В плоскости (x, y) рассмотрим семейство прямых:

$$y = c_k(x - x_k) + f(x_k); \quad k = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$(x_k, f(x_k))$$



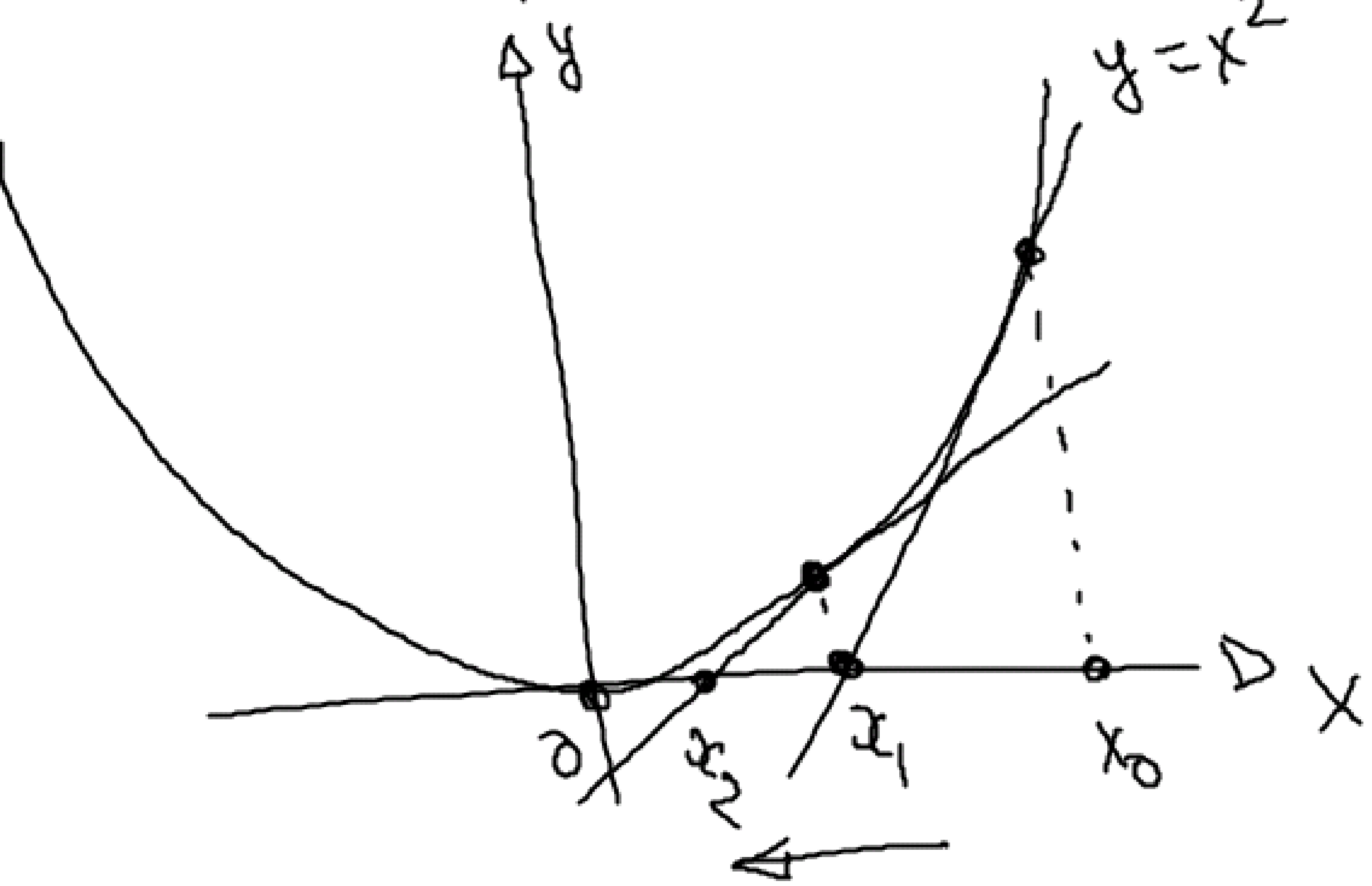
$$f(x) = x^2 = 0 \Rightarrow x_* = 0.$$

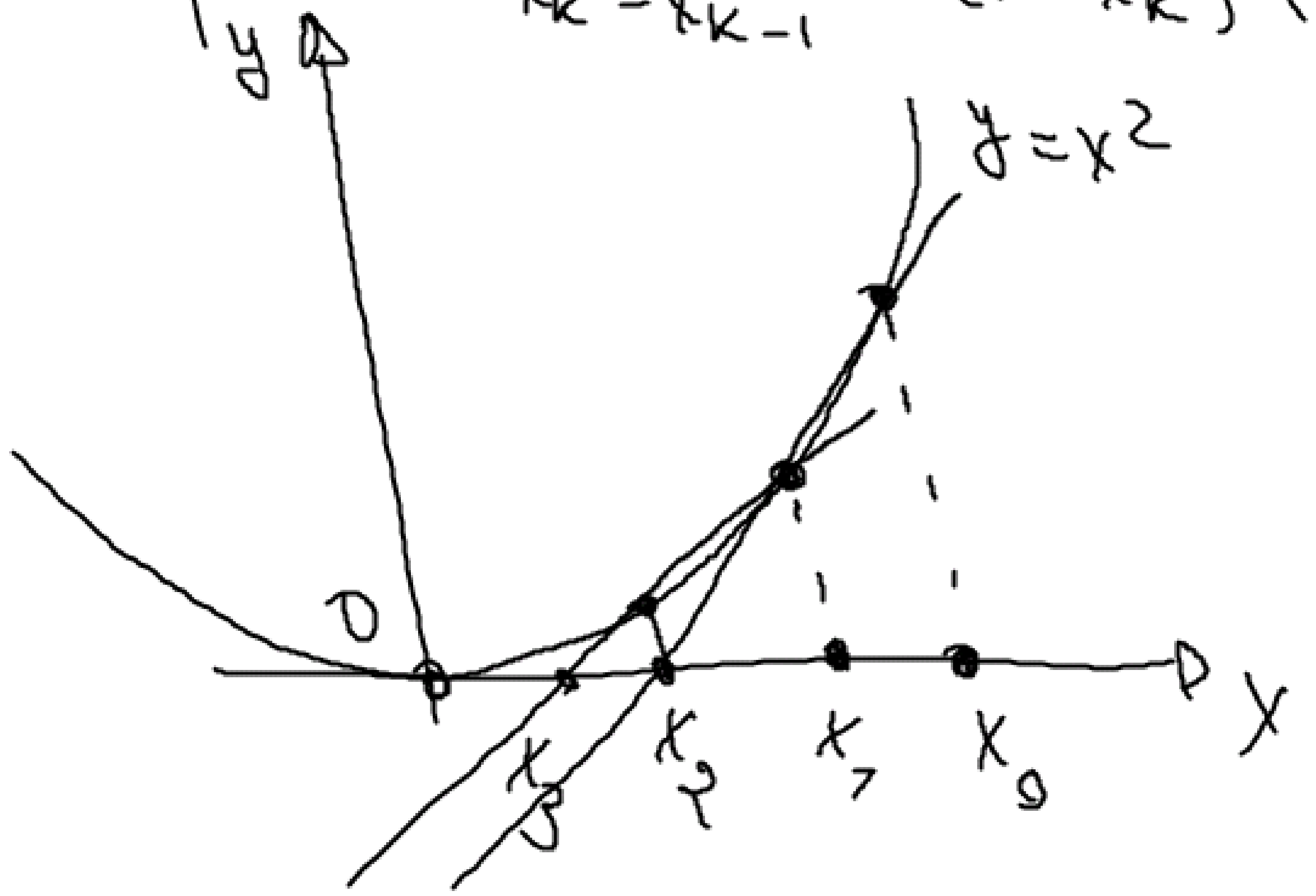


$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{a}; \quad a \neq 0; \\ y = a(x - x_k) + f(x_k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}; \\ y = f'(x_k)\cdot(x - x_k) + f(x_k). \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{k+1} = \dfrac{f(x_k)\cdot x_{k-1} - f(x_{k-1})\cdot x_k}{f(x_k) - f(x_{k-1})}; \\ y = \dfrac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\cdot(x - x_k) + f(x_k); \end{cases}$$





$\rho_k = |x_{k+1} - x_k|$; $k = 0, 1, \ldots$

Задание для Лабораторной 1.

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

① $f(x) = x^{\alpha}$ $(\alpha > 0)$; $x_* = 0$;

$x^n = 0$

a) Метод простой итерации с параметром

в) Метод Ньютона ;

c) Метод Хелли.

Найти соответствующие области сходимости к корню $x_* = 0$;

Метод Хэлли.

$$(15)\quad f(x) = f(a) + \frac{\alpha\cdot(x-a)}{1+\beta\cdot(x-a)} + R(x-a); \quad f\in C^3;$$

Задача: найти α и β : $R(x-a) = O((x-a)^3)$;

$$(16)\quad f(x) = f(a) + (x-a)\cdot f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2\cdot f''(a) + O((x-a)^3);$$

Вычтем (16) из (15), результат умножим на $1+\beta\cdot(x-a)$;

$$[1+\beta(x-a)]\cdot R(x-a) = -\alpha\cdot(x-a) + [1+\beta\cdot(x-a)]\cdot\Big[(x-a)f'(a) +$$
$$+\frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a) + O((x-a)^3)\Big]$$

$$R(x-a) = -\alpha\cdot(x-a) + \left[1+\beta\cdot(x-a)\right]\cdot\left[(x-a)\cdot f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2\cdot f''(a)\right] + O\left((x-a)^3\right) =$$

$$= (x-a)\cdot\left[f'(a)-\alpha\right] + (x-a)^2\cdot\left[\beta\cdot f'(a) + \frac{1}{2}f''(a)\right] + O\left((x-a)^3\right);$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\alpha = f'(a); \quad \beta = -\frac{1}{2}\cdot\frac{f''(a)}{f'(a)};} \quad \left(f'(a)\neq 0\right);$$

(15) $\Rightarrow$

(17) $$\boxed{f(x) = f(a) + \frac{(x-a)\cdot f'(a)}{1-(x-a)\cdot\frac{f''(a)}{2f'(a)}} + O\left((x-a)^3\right);}$$

Пусть $f(x_*) = 0$; $x_k \approx x_*$; в (17): $x = x_*$; $a = x_k$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad 0 = f(x_*) = f(x_k) + \frac{(x_* - x_k)\cdot f'(x_k)}{1 - (x_* - x_k)\cdot \dfrac{f''(x_k)}{2f'(x_k)}} + \cancel{O((x_* - x_k)^3)} \tag{18}$$

В (18) отбросим остаточное слагаемое, считая его достаточно малым. Заменим x_* на x_{k+1} – новое итер. приближение.

$$0 = f(x_k) + \frac{(x_{k+1} - x_k)\cdot f'(x_k)}{1 - (x_{k+1} - x_k)\cdot \dfrac{f''(x_k)}{2f'(x_k)}}; \tag{19}$$

Найдем x_{k+1} из (19):

$$0 = f(x_k) + (x_{k+1} - x_k)\left[f'(x_k) - \frac{f''(x_k)\cdot f(x_k)}{2f'(x_k)}\right];$$

$$(20)\quad \begin{cases} x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k) - \dfrac{f''(x_k)}{2f'(x_k)}\cdot f(x_k)}; \quad k = 0, 1, 2, \ldots \\ x_0 \text{ - задано.} \end{cases}$$

← Метод Хэлли

① (20) является частным случаем общего итер. процесса (6), для $a_k = f'(x_k)$; $b_k = -\dfrac{f''(x_k)}{2f'(x_k)}$;

② (20) используется для вычисления <u>простых</u> корней ур-ия $f(x) = 0$, т.к. "вблизи" корня предполагается выполненным условие: $f'(x_k) \neq 0$;

③ (20) является частным случаем метода простой итерации: $x_{k+1} = G(x_k)$, для:

$$G(x) \equiv x - \frac{f(x)}{f'(x) - \dfrac{f''(x)}{2f'(x)} \cdot f(x)};$$

$|G'(x)| < 1$ для x – достаточно близких к x_*;

$$G'(x) = 1 - \frac{[2f(x) \cdot f'(x)]' \cdot [2(f'(x))^2 - f''(x) \cdot f(x)] - 2f(x) \cdot f'(x) \cdot [2(f'(x))^2 - f''(x) \cdot f(x)]'}{[2(f'(x))^2 - f''(x) \cdot f(x)]^2} =$$

$$= [2(f')^2 - f'' \cdot f]^2 - (2(f')^2 + 2f \cdot f'')[2(f')^2 - f \cdot f''] +$$

$$+ 2f \cdot f' \cdot [3f' \cdot f'' - \cancel{f'' \cdot f'} - f^{(3)} \cdot f] = \cancel{4(f')^4} \cancel{- 4(f')^2 f'' \cdot f} + \underline{(f'' f)^2}$$

$$\cancel{-4(f')^4} \cancel{+ 2(f')^2 f'' \cdot f} \cancel{- 4(f')^2 f'' \cdot f} + \underline{2(f \cdot f'')^2} \cancel{+ 6(f')^2 \cdot f'' f} \underline{- 2f^{(3)} f' f^2}$$

$$= [3(f'')^2 - 2f^{(3)} f'] \cdot f^2.$$

$$G'(x) = f^2(x) \cdot \frac{3\left[f''(x)\right]^2 - 2 f'(x) f^{(3)}(x)}{\left[2\left(f'(x)\right)^2 - f(x)\cdot f''(x)\right]^2}$$

$\Downarrow$

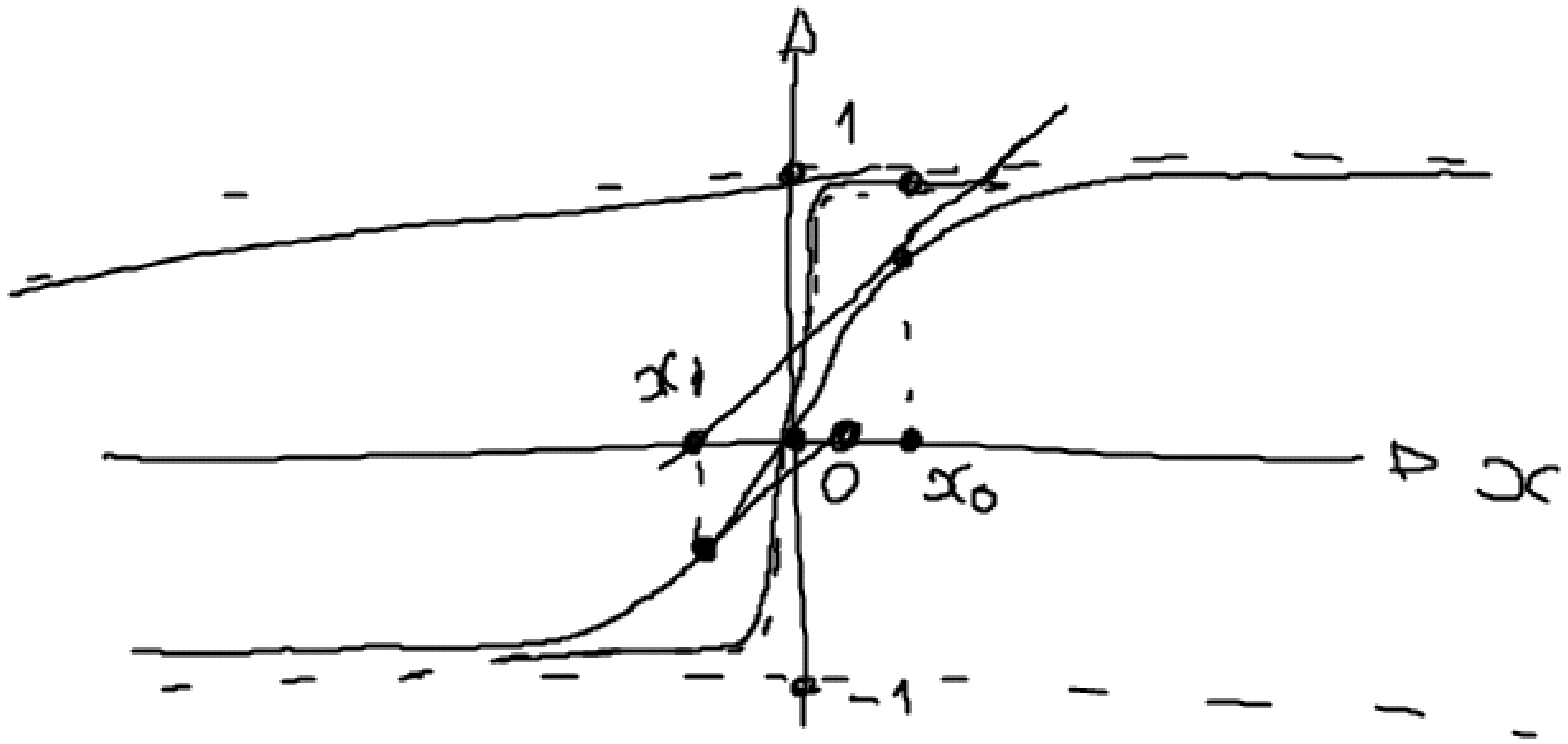
Если начальное приближение выбирать из достаточно малой окрестности корня x_*, то метод Хэлли будет сходится.

(21) $$f'(x_k) \approx \frac{x_k - x_{k-2}}{x_{k-1} - x_{k-2}} \cdot \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} - \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1} - x_{k-2}} \cdot \frac{f(x_k) - f(x_{k-2})}{x_k - x_{k-2}}$$

(22) $$f''(x_k) \approx \frac{2}{x_{k-1} - x_{k-2}} \cdot \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} - \frac{f(x_k) - f(x_{k-2})}{x_k - x_{k-2}} \right);$$

Модифицированный метод Хэлли: в (20) используются ф-лы (21), (22) и задается "3" начальных приближение: $\underline{\underline{x_0, x_1, x_2}}$.

Примеры. $f(x) = \dfrac{x}{\varepsilon + |x|}$; $x_* = 0$.



① Метод Ньютона:

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}; \\ x_0 \text{ - задано.} \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{(\varepsilon + |x|) - x \cdot (\varepsilon + |x|)'}{(\varepsilon + |x|)^2} = \frac{\varepsilon + |x| - x \cdot \frac{|x|}{x}}{(\varepsilon + |x|)^2} = \qquad (|x|)' = \frac{|x|}{x}$$

$$= \frac{\varepsilon}{(\varepsilon + |x|)^2}; \quad \underline{\underline{x_{k+1}}} = x_k - \frac{x_k}{\cancel{|x_k| + \varepsilon}} \cdot \frac{(|x_k| + \varepsilon)^{\cancel{2}}}{\varepsilon} = \underline{\underline{-\frac{|x_k|}{\varepsilon} \cdot x_k}};$$

Задача: найти $\{x_0\}$: $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = 0$;

$x_{k+1} = -\frac{|x_k|}{\varepsilon} \cdot x_k$; $k = 0, 1, \dots$; x_0 – задано.

<u>Лемма:</u> $x_{k+1} = q(|x_k|) \cdot x_k$

Пусть x_0 выбрано так, что $|q(|x_0|)| < 1$;

Если ф-ия $|q(x)|$ – возрастает по $x \in R_+$

то $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$;

$q(|x_k|) = -\frac{|x_k|}{\varepsilon}$;

$q(x) = -\frac{x}{\varepsilon}$

$\Downarrow$

$|q(x)| = \frac{x}{\varepsilon}$

$\uparrow$

возрастает!

<u>Док-во.</u> $|x_{k+1}| = |q(|x_k|)| \cdot |x_k|$

Пусть $|q(|x_0|)| < 1 \overset{?}{\Longrightarrow} |x_k| \le |q(|x_0|)|^k \cdot |x_0|$;

$\Downarrow$

$|x_k| < |x_0|$

$\Downarrow$

$|q(|x_k|)| \le |q(|x_0|)|$

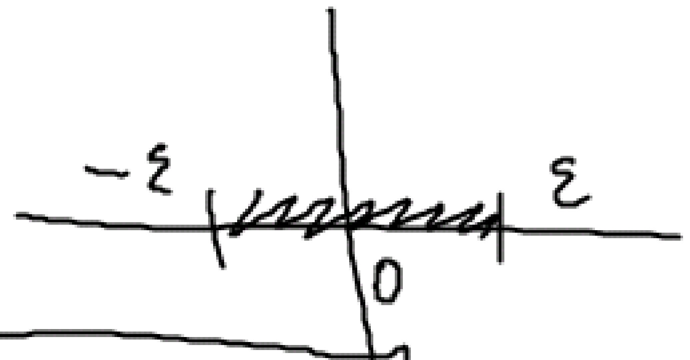
① База $|x_1| = |q(|x_0|)| \cdot |x_0|$

② Инд. переход: $|x_{k+1}| \le |q(|x_0|)|^{k+1} \cdot |x_0|$ – ?

$|x_{k+1}| = |q(|x_k|)| \cdot |x_k| \le |q(|x_k|)| \cdot |q(|x_0|)|^k \cdot |x_0| \le |q(|x_0|)|^{k+1} \cdot |x_0|$ ⊕

$$\{x_0 \mid |q(|x_0|)| < 1\} = \{x_0 \mid |x_0| < \varepsilon\}$$

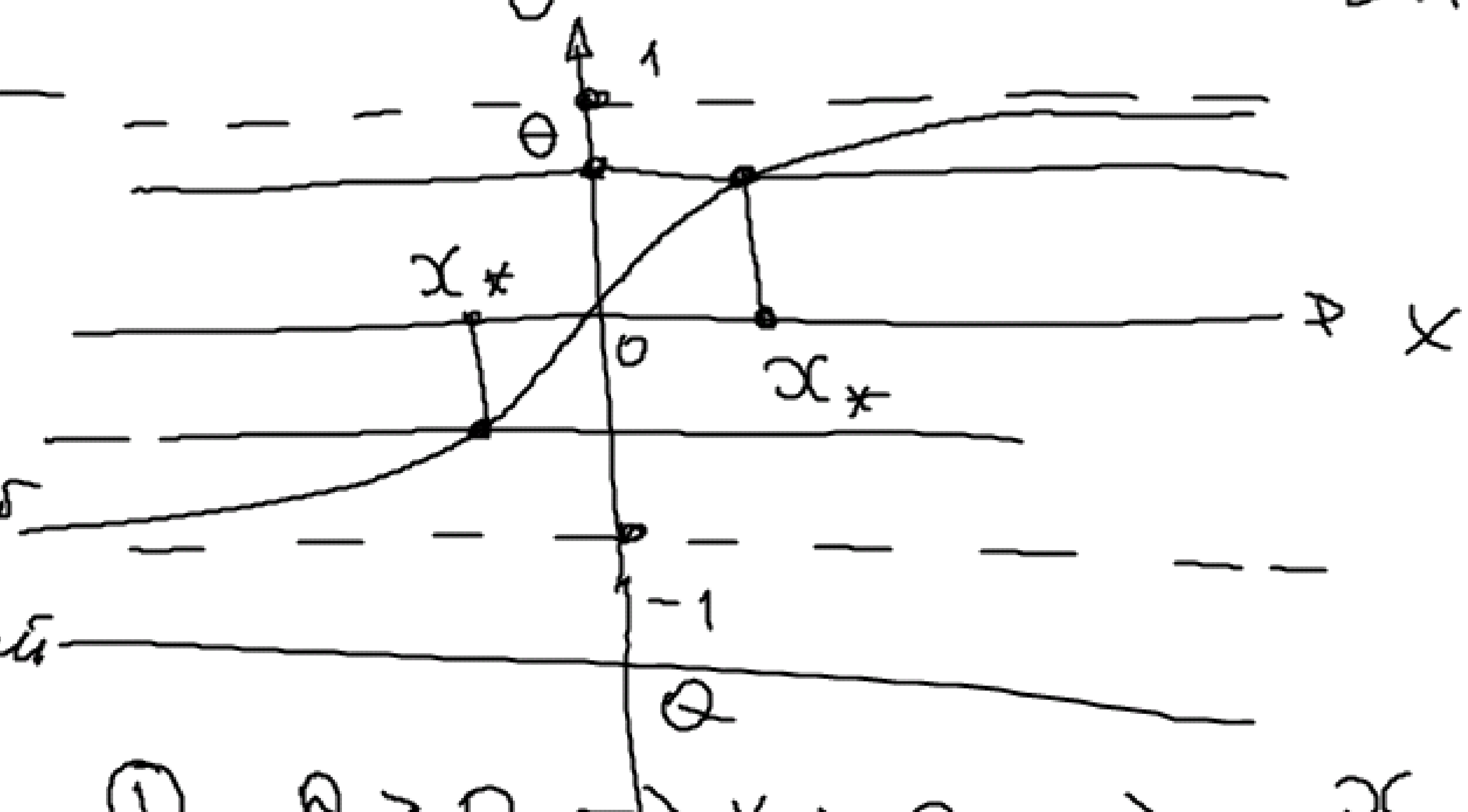
Метод Хэлли: $f(x) = \dfrac{x}{\varepsilon+|x|} - \theta = 0$; $\theta \in \mathbb{R}$;



$$\boxed{-1 < \theta < 1}$$

$\Updownarrow$

корень существует и единственный



$$\frac{x}{\varepsilon+|x|} = \theta$$

① $\theta \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow \dfrac{x}{\varepsilon + x} = \theta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{x_* = \frac{\varepsilon\theta}{1-\theta}}$$

② $\theta < 0 \Rightarrow x < 0$

$$\frac{x}{\varepsilon - x} = \theta \Rightarrow \boxed{x_* = \frac{\varepsilon\theta}{1+\theta}} \Longrightarrow x_* = \frac{\varepsilon\theta}{1-|\theta|}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k) - \frac{f''(x_k)}{2f'(x_k)} f(x_k)} =$$

$$f(x) = \frac{x}{\varepsilon + |x|} - \Theta$$

$$f'(x) = \frac{\varepsilon}{(\varepsilon + |x|)^2}$$

$$= x - \frac{\left(\frac{x}{\varepsilon+|x|} - \Theta\right)\frac{\cancel{2}\varepsilon}{(\varepsilon+|x|)^2}}{\frac{\cancel{2}\varepsilon^2}{(\varepsilon+|x|)^4} + \left(\frac{x}{\varepsilon+|x|} - \Theta\right)\frac{\cancel{2}\varepsilon|x|}{(\varepsilon+|x|)^3 x}} =$$

$$f''(x) = -2(\varepsilon+|x|)^{-3}\varepsilon \cdot \frac{|x|}{x}$$

$$= x - \frac{x - \Theta(\varepsilon+|x|)}{1 - \frac{\Theta|x|}{x}} =$$

$$= \frac{\cancel{x - \Theta}|x| - \cancel{x} + \Theta(\varepsilon + \cancel{|x|})}{1 - \frac{\Theta|x|}{x}} = \frac{\Theta\varepsilon}{1 - \frac{\Theta|x_k|}{x_k}}$$

$$x_{k+1} = \frac{\Theta\varepsilon}{1 - \frac{\Theta|x_k|}{x_k}}$$

$$x_* = \frac{\Theta\varepsilon}{1 - |\Theta|}$$

$k=0$ 1) $x_0 > 0$, $x_1 = \frac{\Theta\varepsilon}{1-\Theta}$

а) $\Theta > 0 \Rightarrow x_1 = x_*$

б) $\Theta < 0 \Rightarrow \frac{|x_1|}{x_1} = \operatorname{sign}\Theta$

$$x_2 = \frac{\Theta\varepsilon}{1-|\Theta|} = x_*$$

$$x_2 = \frac{\Theta\varepsilon}{1-|\Theta|} = x_*$$

2) $x_0 < 0$: $x_1 = \frac{\Theta\varepsilon}{1+\Theta}$

а) $\Theta < 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\Theta\varepsilon}{1-|\Theta|}$

б) $\Theta > 0 \Rightarrow \frac{|x_1|}{x_1} = \operatorname{sign}\Theta$

Системы нелинейных уравнений.

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0. \end{cases} \Longleftrightarrow \boxed{F(\bar{x}) = 0} \quad (23)$$

$\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ – ?

$F(\bar{x}) \equiv \left(f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), \ldots, f_m(\bar{x})\right)$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{a_k - b_k \cdot f(x_k)}; \quad k = 0, 1, \ldots$$

$$[a_k - b_k f(x_k)](x_{k+1} - x_k) = -f(x_k);$$

$$\begin{cases} [A_k - B_k \circ F(\bar{x}_k)](\bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k) = -F(\bar{x}_k); \quad k = 0, 1, \ldots \\ \bar{x}_0 \text{ – задано.} \end{cases} \quad (24)$$

A_k – матрицы размерности $m \times m$ (линейный оператор)

B_k – билинейный оператор.

① <u>Метод простой итерации с "параметром":</u>

$A_k = A$ – матрица "$m \times m$": $\exists A^{-1}$; $B_k = 0 \ (\forall k)$.

$$(25)\begin{cases} A \circ (\bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k) = -F(\bar{x}_k), \ k = 0, 1, \dots \\ \bar{x}_0 \text{ – задано.} \end{cases}$$

$$\Downarrow \ \bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k - A^{-1} \circ F(\bar{x}_k), \ k = 0, 1 \dots$$

② <u>Метод Ньютона:</u> $f'(x_k) \cdot (x_{k+1} - x_k) = -f(x_k)$;

$$(26)\begin{cases} F'(\bar{x}_k) \circ (\bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k) = -F(\bar{x}_k), \ k = 0, 1 \dots \\ \bar{x}_0 \text{ – задано.} \end{cases}$$

<u>Производная Фреше</u> $\rightarrow$

$$F'(\bar{x}_k) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_k); & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_k); & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(\bar{x}_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{x}_k) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\bar{x}_k) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(\bar{x}_m) \end{pmatrix}_{m \times m}$$

$f(x) = x^n \quad (n \in N);\quad f(x) = 0 \Rightarrow x_* = 0;$

Метод Ньютона:

$$f(x) = \sqrt{x} = 0$$

$$n = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = x^\alpha;\ 0<\alpha<1$$

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)};\ k = 0, 1, \dots \\ x_0 - \text{задано} \end{cases}$$

$f' = n x^{n-1}.$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^n}{n x_k^{n-1}} = x_k - \frac{1}{n} x_k = x_k \left(1 - \frac{1}{n}\right) = q \cdot x_k$$

$n > 0,\ (1 - |a|) < 1;\quad x_k = q^k \cdot x_0;\ k = 0, 1, \dots\ 0 < q < 1$

$x_k = q^k \cdot x_0 \to 0\ (k \to \infty)\ \forall x_0$

$$1 - \frac{1}{\alpha} = q \qquad |q| < 1$$

$$\left|1 - \frac{1}{\alpha}\right| < 1;\ -1 < 1 - \frac{1}{\alpha} < 1 \qquad 0 < \frac{1}{\alpha} < 2$$

$$-2 < -\frac{1}{\alpha} < 0 \qquad \alpha > \frac{1}{2}$$

Хэлли

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k) - \frac{f''(x_k)}{2f'(x_k)} f(x_k)} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} f' = n x^{n-1} \\ f'' = n(n-1) x^{n-2} \end{array} \right| = x_k - \frac{x_k^n}{n x_k^{n-1} - \frac{\cancel{n}(n-1)x^{n-2}}{2\cancel{n} x^{n-1}} \cdot x^n} =$$

$$= x_k - \frac{x_k^n}{n x_k^{n-1} - \frac{\boxed{(n-1)}}{2} x_k^{n-1}} = x_k \left(1 - \frac{1 \cdot 2}{2n - (n-1)} \right) = x_k \left(\frac{n-1}{n+1} \right)$$

$$q = \frac{n-1}{n+1}; \; |q| < 1; \quad \left| \frac{n-1}{n+1} \right| < 1 \quad -1 < \frac{n-1}{n+1} < 1$$

$$-(n+1) < n-1 < n+1$$

$$-n-1 < n-1$$

$$-2n < 0$$

$$n > 0$$