Монотонная прогонка. Рассмотрим систему уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} B_1 u_1 - C_1 u_2 = f_1, \\ -A_i u_{i-1} + B_i u_i - C_{i+1} u_{i+1} = f_i, \ i = 2,3,\ldots n-1; \\ -A_n u_{n-1} + B_n u_n = f_n . \end{cases} \quad \textbf{(8)}$$

Отличные от нуля элементы матрицы систем (8) сосредоточены на трех диагоналях: главной, а также ближайших верхней и нижней, поэтому такие матрицы называют *трехдиагональными.* К виду (8) сводятся после дискретизации многие одномерные задачи для дифференциальных уранений, в частности, рассматриваемые нами в разделе VIII. Такой же вид имеет система уравнений, которую необходимо решать при построении кубического сплайна (см. раздел III_Interpol).

Найдем решение системы (8), используя метод исключения Гаусса; сначала приведем формальные рассуждения, а затем оговорим условия, гарантирующие их корректность. Разрешим первое уравнение в (8) относительно u_1:

$$\mathbf{u_1 = \frac{C_1}{B_1} u_2 + \frac{f_1}{B_1} \equiv \alpha_1 u_2 + \beta_1,} \quad (9)$$

u_1 содержится лишь во втором уравнении системы, исключая его, получим:

$$u_2 = \frac{C_2}{B_2 - \alpha_1 A_2} \cdot u_3 + \frac{f_2 + \beta_1 A_2}{B_2 - \alpha_1 A_2} \equiv \alpha_2 u_3 + \beta_2. \quad (10)$$

Заметим, что величины $\alpha_{1,2}, \beta_{1,2}$ мы, как обычно, определили тождествами в правых частях соотношений (9) и (10). Предположим, что, осуществляя процесс исключения, мы пришли к соотношению:

$$u_{i-1} = \alpha_{i-1} u_i + \beta_{i-1}.$$

Исключим u_{i-1} из i-го уравнения системы (8), одновременно разрешая его относительно u_i:

$$u_i = \frac{C_i}{B_i - \alpha_{i-1} A_i} u_{i+1} + \frac{f_i + \beta_{i-1} A_i}{B_i - \alpha_{i-1} A_i} \equiv \alpha_i u_{i+1} + \beta_i \quad (11)$$

Величину u_n находим из системы:

$$\begin{cases} u_{n-1} - \alpha_{n-1}u_n = \beta_{n-1}, \\ -A_n u_{n-1} + B_n u_n = f_n; \end{cases}$$

решая ее, получим:

$$u_n = \frac{f_n + \beta_{n-1}A_n}{B_n - \alpha_{n-1}A_n} \tag{12}$$

Собирая воедино формулы (9), (11) и (12), получаем метод, который называют *монотонной (или «стандартной») прогонкой*:

1) *Прямой ход прогонки* (вычисление прогоночных коэффициентов α_i, β_i):

$$\begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{C_1}{B_1}, \quad \beta_1 = \dfrac{f_1}{B_1}; \\ \alpha_i = \dfrac{C_i}{B_i - \alpha_{i-1}A_i}, \quad \beta_i = \dfrac{f_i + \beta_{i-1}A_i}{B_i - \alpha_{i-1}A_i}; \quad i = 2,3,..n-1; \end{cases} \tag{13}$$

2) *обратный ход прогонки* (вычисление решения u_i):

$$\begin{cases} u_n = \dfrac{f_n + \beta_{n-1}A_n}{B_n - \alpha_{n-1}A_n}; \\ u_i = \alpha_i u_{i+1} + \beta_i, \quad i = n-1, n-2, \ldots 1. \end{cases} \tag{14}$$

Прогонку (13) (14) называют *монотонной*, поскольку решение в ней насчитывается по монотонно изменяющимся индексам, в данном случае: *справа* - *налево*. Запишем квазиалгоритм стандартной прогонки, основываясь на формулах (13), (14).

Алгоритм 1. *Позволяет находить решение системы линейных алгебраических уравнений (8) с трехдиагональной матрицей методом стандартной прогонки.*

▼INPUT(n; $\{A_i\}_{i=2}^{n}$; $\{B_i\}_{i=1}^{n}$; $\{C_i\}_{i=1}^{n-1}$; $\{f_i\}_{i=1}^{n}$);

$\alpha_1 = \dfrac{C_1}{B_1}; \quad \beta_1 = \dfrac{f_1}{B_1};$

for i = 2 to n-1 do

begin

$$\alpha_i = \frac{C_i}{B_i - \alpha_{i-1}A_i};$$

$$\beta_i = \frac{f_i + \beta_{i-1}A_i}{B_i - \alpha_{i-1}A_i};$$

end;

$$u_n = \frac{f_n + \beta_{n-1}A_n}{B_n - \alpha_{n-1}A_n};$$

for i = n-1 downto 1 do

$$u_i = \alpha_i u_{i+1} + \beta_i;$$

OUTPUT($\{u_i\}_{i=1}^{n}$) ▲