ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ КВАДРАТИЧНЫМ СПЛАЙНОМ

Основная цель. Научиться строить квадратичную сплайн-интерполяцию и понять ее особенности; сравнить поведение квадратичного сплайна с поведением линейного и кубического сплайнов.

Теория и основные формулы. На отрезке [0,1] рассмотрим произвольную сетку:

$$0 \le x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots < x_n \le 1. \qquad (I.2.1)$$

обозначим $h_i = x_{i+1} - x_i$ -длину i-ой сеточной ячейки ($i=1,2,...n-1$). Пусть $f^h \equiv \{f_i^h\}_{i=1}^n$ - сеточная функция, заданная на сетке (I.2.1), возможно, что сеточная функция получена как проекция на сетку некоторой непрерывной функции, т.е. $f^h = (f)^h$, где $f \in \mathbf{C}[0,1]$. Согласно определению (см. определение I.2), интерполяционный сплайн $S_2(x,f^h)$ степени два удовлетворяет условиям:

1). $S_2(x, f^h)$ –полином второй степени на каждом интервале (x_i, x_{i+1});

2). $S_2(x, f^h)$ –непрерывен вместе с первой производной на [0,1];

3). $S_2(x_i, f^h) = f_i^h$, при $i=1,2,...n$.

М е т о д 1. В силу п.2), можно определить величины:

$$M_i = S_2'(x_i, f^h),\ i=1,2,...n.$$

В силу п.1), для любого $i=1,2,...n-1$ и $x \in [x_i, x_{i+1}]$:

$$S_2'(x,f^h) = \frac{x - x_i}{h_i} \cdot M_{i+1} + \frac{x_{i+1} - x}{h_i} \cdot M_i. \qquad (I.2.2)$$

Интегрируя (I.2.2), получим:

$$S_2(x,f^h)=\frac{(x-x_i)^2}{2h_i}\cdot M_{i+1}-\frac{(x_{i+1}-x)^2}{2h_i}\cdot M_i+C_i. \qquad (I.2.3)$$

Используя п.3), находим C_i:

$$S_2(x_i,f^h)=-\frac{h_i}{2}M_i+C_i=f_i^h,$$

$$C_i=\frac{h_i}{2}M_i+f_i^h.$$

Из (I.2.3) получаем:

$$S_2(x,f^h)=\frac{(x-x_i)^2}{2h_i}M_{i+1}-\frac{1}{2h_i}[h_i^2-(x_{i+1}-x)^2]\,M_i+f_i^h \qquad (I.2.4)$$

$$i=1,2,...n-1 \text{ и } x\in[x_i,x_{i+1}].$$

уравнения для M_i получим, подставляя x_{i+1} в (I.2.4):

$$M_{i+1}+M_i=2\frac{f_{i+1}^h-f_i^h}{h_i}, \quad i=1,2,...n-1. \qquad (I.2.5)$$

В случае, когда f^h является проекцией гладкой функции $f(x)$, система (I.2.5) дополняется одним из краевых условий:

$$M_1=f'(0), \text{ либо } M_n=f'(1). \qquad (I.2.6)$$

Если известна лишь сеточная функция f^h, либо не известны точные значения $f'(0)$ и $f'(1)$, можно положить:

$$M_1=\frac{x_3-x_1}{x_3-x_2}\frac{f_2^h-f_1^h}{x_2-x_1}-\frac{x_2-x_1}{x_3-x_2}\frac{f_3^h-f_1^h}{x_3-x_1}, \qquad (I.2.7)$$

$$M_n=\frac{x_n-x_{n-2}}{x_{n-1}-x_{n-2}}\frac{f_n^h-f_{n-1}^h}{x_n-x_{n-1}}-\frac{x_n-x_{n-1}}{x_{n-1}-x_{n-2}}\frac{f_n^h-f_{n-2}^h}{x_n-x_{n-2}},$$

Итак, расчет производится по формулам (I.2.5), (I.2.6) или (I.2.5), (I.2.6), а затем квадратичный сплайн вычисляется по формуле (I.2.4).

М е т о д 2. Запишем представление для квадратичного сплайна в следующем виде:

$$S_2(x,f^h)=\frac{x-x_i}{h_i}\cdot f_{i+1}^h+\frac{x_{i+1}-x}{h_i}f_i^h-\frac{(x-x_i)(x_{i+1}-x)}{2h_i}D_i \qquad (I.2.8)$$

$$i=1,2,...n-1 \text{ и } x\in[x_i, x_{i+1}].$$

Условия п.п. 1) и 3), очевидно, выполнены. Осталось удовлетворить условию 2). Сделаем это, предварительно вычислив следующие величины:

$$S_2'(x,f^h)=\frac{f_{i+1}^h-f_i^h}{h_i}-\frac{(x_{i+1/2}-x)D_i}{h_i},$$

$$S_2'(x_i,f^h)=\frac{f_{i+1}^h-f_i^h}{h_i}-\frac{D_i}{2}, \qquad (I.2.9)$$

$$S_2'(x_{i+1},f^h)=\frac{f_{i+1}^h-f_i^h}{h_i}+\frac{D_i}{2}. \qquad (I.2.10)$$

Приравнивая (I.2.9) к (I.2.10) при i=i+1, получим:

$$D_{i+1}+D_i=2\left(\frac{f_{i+1}^h-f_i^h}{h_i}-\frac{f_i^h-f_{i-1}^h}{h_{i-1}}\right), i=1,2,...n-1. \qquad (I.2.11)$$

К системе (I.2.11) добавляем одно из краевых условий:

$$D_1=2\left(\frac{f_2^h-f_1^h}{h_1}-M_1\right), \text{ либо } D_{n-1}=2\left(M_n-\frac{f_n^h-f_{n-1}^h}{h_{n-1}}\right), \qquad (I.2.12)$$

где M_1 и M_n определяются по одной из формул (I.2.6) или (I.2.7). В данном случае расчетными формулами являются формулы (I.2.11), (I.2.12) и (I.2.8).

Тестовые функции. Тестовые функции Лабораторной работы I.1.

Требования к программе. *Программа должна включать:*

1) Построение квадратичного сплайна *одним* из вышеприведенных методов на равномерной сетке $x_i = (i - 1)h$, $h=1/(n - 1)$. Необходимо использовать *два варианта* краевых условий: (I.2.6) и (I.2.7), с целью их сравнения.

2) Тестовые функции из Лабораторной работы I.1 (по заданию преподавателя) с возможностью выбора параметра “ε”. Может быть реализован дискретный выбор ε по формуле: $\varepsilon=2^{-к}$, к=0,1,2,…
3) Возможность выбора числа узлов сетки “n”, допустим дискретный вариант: $n=1+2^{к}$, к=2,3,4,…
4) Вывод погрешности интерполяции Err(f) на “контрольной” сетке с узлами:

$$y_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2},\ i=1,2,...n-1;$$

$$\mathrm{Err}(f) \equiv \max_{1\le i\le n-1} \left| f(y_i) - \ell_n(y_i,(f)^h) \right|.$$

5) Графику: одновременная отрисовка графиков функции f(x) и двух интерполяционных сплайнов (построенных по различным краевым условиям (I.2.6) и (I.2.7)), отрисовка узлов сетки $\{x_i\}_{i=1}^{n}$. Предусмотреть возможность маштабирования графика: а) по исходной функции f(x); б) по всем функциям.

Задание для работы с программой.

1) Варьируя значения параметров «ε» и «n», провести численные расчеты для всех тестовых функций. Выяснить при этом свойства и особенности интерполяции при помощи квадратичного сплайна. Попытаться ответить на вопрос: какое из краевых условий (I.2.6) или (I.2.7) лучше использовать.
2) Сравнить между собой точность приближения квадратичным сплайном и сплайнами: линейным и кубическим (предполагается некоторый опыт работы с этими сплайнами). Основные критерии качества: а) погрешность интерполяции, б) визуальная близость графиков функции и соответствующего интерполянта.

3) Выяснить, присущи ли квадратичной интерполяции колебательные эффекты, наблюдаемые в случаях интерполяции кубическим сплайном.

Все выводы необходимо аргументировать результатами численных расчетов и оформить их в *виде Отчета*.