.

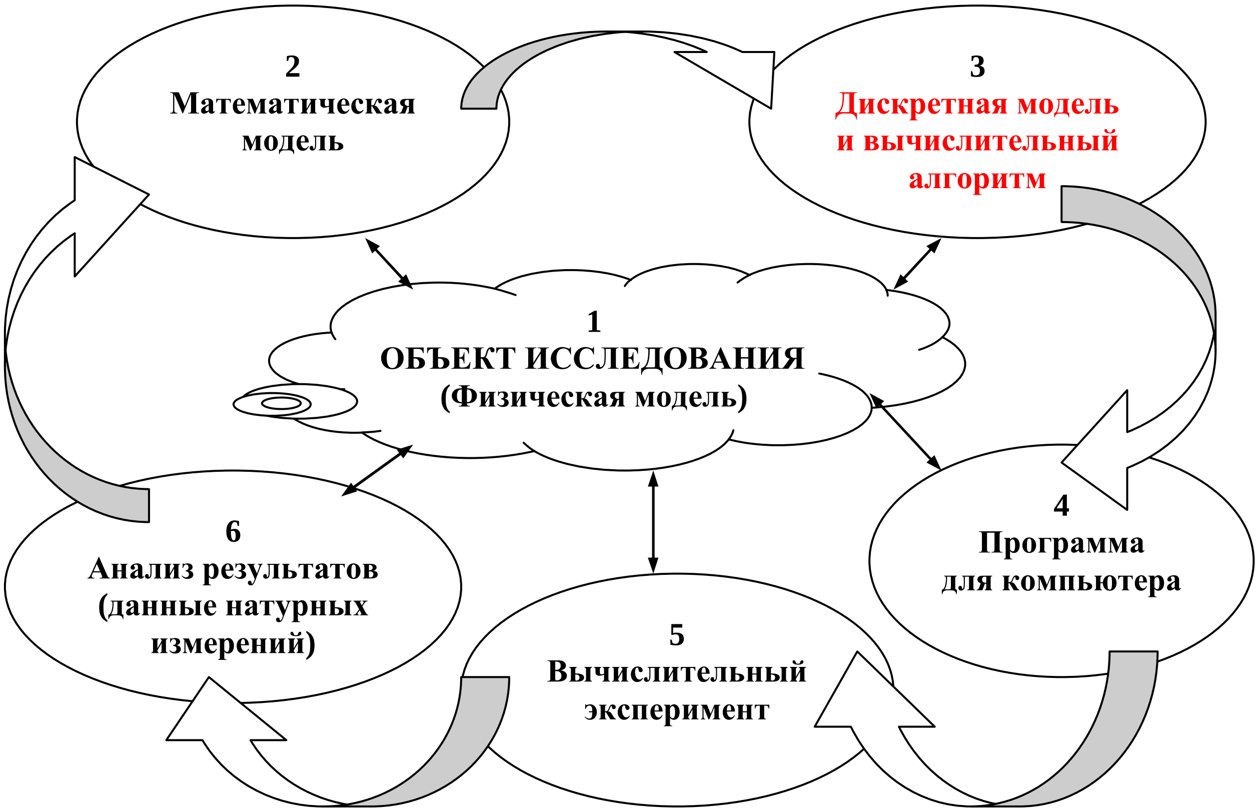
I. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Великая книга
Природы написана
языком математики
Галилео Галилей

Математическая модель и математическое моделирование не являются изобретением нашего века. В физике метод математического моделирования используется, по существу, со времен Галилея. Классическим примером может служить открытие планеты Нептун, сделанное французским астрономом У. Леверье в 1846 г. Открытие было сделано «на кочике пера»: исходной информацией послужили «отклонения» в движении планеты Уран, траектория которой не совпадала с вычисленной для нее кеплеровской орбитой. Леверье предположил, что «возмутителем порядка» является неизвестная планета и вычислил на основании уравнений небесной механики ее траекторию. На основе его указаний в том же году новая планета была обнаружена немецким астрономом Галле. Однако лишь в последние десятилетия, в связи с бурным развитием вычислительной техники, математическое моделирование и вычислительный эксперимент стали эффективными методами решения крупных естественно - научных и хозяйственных задач. Эта методология не только дополняет натурные эксперименты, но даже заменяет их в ситуациях, где эти эксперименты дороги (испытание летательных аппаратов в аэродинамических трубах), либо запрещены (здоровье человека), либо опасны (экологические эксперименты), либо попросту невозможны (астрофизические явления).

Число областей, в которых уже трудно обойтись без математического моделирования растет год от года. В настоящее время актуальна проблема разработки математических моделей в таких приоритетных для Кыргызстана областях как охрана и восстановление окружающей среды, горно - добывающая промышленность, производство и транспортировка электроэнергии. Решение подобных задач требует подготовки специалистов - математиков нового уровня: обладающих фундаментальными знаниями вычислительных и аналитических методов, с одной стороны, и навыками программирования вместе со знаниями в области современных компьютерных технологий - с другой. Высшей точкой приложения творческого потенциала таких специалистов и является деятельность, связанная с математическим моделированием различных природных, техногенных и социальных явлений.

Проследим основные этапы, из которых состоит процесс математического моделирования того или иного физического явления. Идея обсуждаемой ниже конструкции принадлежит академику А.А. Самарскому ([1], [2]), изложение соответствует работе [3].



На первом этапе строится *физическая модель* исследуемого явления (см. рисунок): формулируются основные законы, управляющие данным явлением. Как правило, это законы сохранения: закон сохранения массы (вещество не может возникать из ничего и исчезать бесследно), закон сохранения энергии и т.д., при этом осуществляется учет основных и отбрасывание второстепенных (не оказывающих существенное влияние на ход изучаемого процесса) факторов.

На втором этапе физическая модель облекается в математические формулы и становится *математической моделью*. Математическая модель, как правило, представляет собой начально-краевую задачу для уравнений с частными производными (уравнений математической физики), хотя в некоторых случаях, это могут быть обыкновенные дифференциальные, интегральные, либо алгебраические уравнения.

Процесс математического моделирования для своего эффективного осуществления, требует сотрудничества специалистов из различных областей. Разработка физической и математической моделей исследуемого явления - задача ученого - предметника: специалиста в той области науки, в которой это явление изучается. Исследованием математических моделей обычно занимаются математики-теретики. На этом этапе важно доказать, что математическая модель корректна, то есть она определяет единственное решение, устойчивое по отношению к малым возмущениям исходных параметров. Связано это с тем, что, как правило, только корректная математическая задача может описывать реальный физический процесс. Кроме того, математиками, по возможности, исследуются качественные свойства математической модели и ее решения, что также позволяет судить об адекватности модели, т. е. соответствии исходному объекту. Однако, требования реальной жизни зачастую далеко опережают возможности теоретической математики: попытка детального описания сложного физического явления приводит к необходимости использования многомерных нелинейных математических моделей, включающих большое число уравнений и, как правило, не поддающихся исследованию средствами современной теоретической математики (примером могут служить трехмерные гидродинамические задачи). Тем не менее, математики - прикладники успешно работают и с такими моделями, извлекая из них полезную для практики информацию, это происходит благодаря богатому опыту, накопленному *вычислительной математикой*. Что же касается математических моделей, то они наделены еще одним замечательным качеством - универсальностью. Одно и то же уравнение может служить для описания различных физических процессов: так известное уравнение теплопроводности пригодно для моделирования не только тепловых процессов, но и диффузии вещества, движения грунтовых вод, фильтрации газа в пористых средах. Изменяется только смысл входящих в него величин. Такая универсальность дает возможность накопленный при исследовании одного круга задач потенциал математического моделирования гибко и быстро применять к решению совсем других проблем.

Математическая модель, даже достаточно глубоко исследованная средствами теоретической математики, еще не дает той информации, которую можно использовать в практической деятельности: должны быть найдены некоторые числовые значения интересующего нас решения, причем найдены с достаточной степенью точности. Компьютеру, вычисляющему эти значения, необходимо предъявить последовательность действий, которые он совершит по написанной для него программе. Следующий (третий) этап моделирования и является связующим между математической моделью и программой для компьютера: здесь осуществляется построение *дискретной модели* и разработка *вычислительного алгоритма*. Этот этап - поле деятельности вычислительной математики. Дискретная модель, в отличие от исходной математической модели (которую еще называют непрерывной), определяет лишь конечное множество неизвестных величин - приближенных значений решения исходной непрерывной модели на некотором множестве точек, обычно называемых *узлами вычислительной сетки*. Дискретная модель, как правило, трансформируется в систему алгебраических уравнений (линейную или нелинейную), число уравнений которой прямо пропорционально числу узлов сетки, ее еще называют *разностной схемой.*

Определяемые дискретной задачей величины должны достаточно точно приближать значение решения непрерывной задачи в узлах вычислительной сетке. Этого можно добиться увеличивая “плотность” вычислительной сетки . Однако, численные расчеты проводят, используя конкретную дискретную модель, ей отвечает, пусть даже достаточно большое, но конечное число алгебраических уравнений. Такая модель живет по своим “конечномерным законам”, которые лишь приближённо соответствуют законам непрерывной модели. Поэтому важно проследить за тем, чтобы соблюдался своего рода *принцип соответствия* между обеими моделями. Прежде всего это означает, что *корректной непрерывной модели должна соответствовать корректная дискретная модель*. И, кроме того, необходимо помнить о тех фундаментальных законах изменения основных величин, которые были положены в основу физической и математической модели. Желательно, чтобы для дискретной модели имели место *дискретные аналоги* этих законов. Так, например, при решении задач газовой динамики предпочтение отдается разностным схемам, для которых выполнены дискретные аналоги законов сохранения массы, импульса и энергии, т.е. законов фундаментальных как для самого процесса движения газа, так и для его математической модели. И последнее требование, на котором мы остановимся, можно назвать *возможностью реализации дискретной модели*. Имеется в виду, что для данной модели может быть подобран вычислительный алгоритм, позволяющий ее реализовать на имеющемся компьютере за приемлемое время. Дискретная модель, к примеру, для обеспечения устойчивости может потребовать использования большого числа узлов сетки, либо очень мелкого шага по времени; первое - предъявляет повышенные требования к оперативной памяти компьютера, второе - к его быстродействию. В этом случае приходится думать либо над модификацией дискретной модели, либо, если это возможно, использовать более мощный компьютер.

Совершенствуя вычислительные методы и алгоритмы, ученые решают все более сложные задачи. Прогресс в этой области ничуть не менее важен, чем прогресс вычислительной техники, и приводит он к результатам, пожалуй, даже более поразительным. Стоимость расчета двумерных течений вязкого газа на компьютерах одного и того же типа за 15 лет уменьшилась почти в 1000 раз за счет улучшения алгоритмов. За счет увеличения мощности компьютеров (при фиксированном алгоритме) эта величина уменьшилась «лишь» в 100 раз. Суммарный выигрыш стоимости дается, конечно, произведением этих величин.

Итак, с использованием средств и методов вычислительной математики произведена дискретизация непрерывной математической модели и выбран экономичный алгоритм. После этого процесс математического моделирования подходит к следующему - четвертому этапу: вычислительный алгоритм реализуется в виде *программы* для компьютера. В настоящее время программа пишется на одном из алгоритмических языков высокого уровня, позволяющем осуществлять качественную визуализацию как процесса расчетов, так и окончательного результата. При написании программы нужно иметь ввиду, что отдельные ее части приходиться менять не только при отладке этой программы, но и в ходе процесса математического моделирования. Поэтому желательно, чтобы программа обладала *модульной структурой*. Как правило, заказчиком таких программ является специалист - предметник, который прекрасно разбираясь в физической сущности моделируемого процесса, не хочет углубляться в нюансы математической модели и тонкости вычислительного алгоритма. В этом случае большое значение приобретает удобный для пользователя интерфейс, который позволяет оптимальным образом использовать системные и технические возможности имеющегося компьютера, а также упростит процедуры ввода исходных данных и вывода результатов. Программирование превращается в творческую задачу и требует от исследователя высшей квалификации, ведь в работе программиста материализуются все достижения предыдущих этапов.

Теперь переходим к последним этапам процесса математического моделирования: *вычислительному эксперименту* и *анализу* его *результатов*. Казалось бы, слово «эксперимент» не принадлежит математическому лексикону. В действительности же эксперименты производятся с моделью как с экспериментальной установкой: на «вход» модели «подаются» специальным образом обработанные данные натурных измерений, производятся вычисления, результаты которых подвергаются тщательному анализу и, опять же, сравнению с данными измерений. После первой серии вычислительных экспериментов и анализа их результатов многое становится ясным. Поэтому, если надо, модель уточняется. Причем уточнение может быть как усложнением (учет дополнительных эффектов и связей), так и упрощением модели (выясняется, что какими - то явлениями, учтенными в первоначальной версии, можно пренебречь). И то, и другое обычно приводит к изменениям как в математической модели, так и на этапах построения ее дискретного аналога и создания программы. Таким образом, мы осуществляем новый «цикл» процесса моделирования; эти циклы повторяются до тех пор, пока не возникнет убеждение в адекватности модели, т.е. ее соответствии, исходному объекту.

Построение модели или целой иерархии моделей, их «калибровка» и «настройка», выяснение области применимости - первая фаза процесса математического моделирования. Далее модель рассматривается как самостоятельный объект, «полномочный представитель» изучаемого явления. Во второй фазе исследователь «играет» с моделью в вопросы и ответы. Ученый получает в свои руки мощный инструмент для анализа и прогноза сложных нелинейных многопараметрических процессов, изучение которых традиционными методами затруднено или невозможно.

Математическая модель, в отличие от реального объекта, «неприхотлива» и «покладиста». Ее можно «послать» в прошлое или в будущее, в глубины Земли или в соседнюю Галактику, можно «охлаждать» до абсолютного нуля и «нагревать» до термоядерных температур. В любых невыносимых условиях модель безропотно сообщит «полную правду и только правду» о своем поведении. Приведем один из, на наш взгляд, наиболее ярких примеров работы с такой моделью, описывающей экстремальную ситуацию.

В начале 80-х годов некоторые политики США и Европы пытались навязать общественному сознанию идею о возможности «ограниченной ядерной войны». Внушалось, что страна, обладающая космическим противоракетным «щитом», сможет выжить в условиях ядерного конфликта. Идею создания такого «ядерного зонтика» (СОИ), вызревшую в недрах военно - промышленного комплекса США, активно поддержал президент Р. Рейган. Ученые разных стран, разбиравшиеся в существе дела, пытались «открыть глаза» политикам и объяснить обществу опасность и бесперспективность переноса гонки вооружения в космос, но для этого нужны были не только научно - обоснованные, но и яркие аргументы, понятные простым людям. Такие аргументы появились после проведения исследований, связанных с математическим моделированием климатических последствий ядерной войны. Первые результаты в этом направлении были получены советскими учеными В.В.Александровым и Г.Л.Стенчиковым [4], эти результаты в дальнейшем были проверены и уточнены совместно с американскими и немецкими коллегами, работы велись в период с 1983 по 1985 г.г. Эксперименты проводились с трехмерной моделью климата, разрабатывавшейся с середины 70-х годов в Вычислительном центре АН СССР под руководством академика Н.Н.Моисеева. На тот момент это была одна из самых совершенных моделей, предназначенных для исследования крупномасштабных долговременных глобальных и региональных климатических сдвигов, вызванных антропогенными или естественными причинами. Модель климата включала гидродинамическую модель общей циркуляции атмосферы и термодинамическую модель верхнего слоя океана; в ней учитывалось влияние различных факторов, таких как солнечная радиация, изменение оптических свойств загрязненной атмосферы, транспорт аэрозоля и многие другие. Были рассмотрены различные сценарии ядерного конфликта: от «мягкого», характеризующегося взрывом ядерного заряда в 100 Мт, до «жесткого» - суммарная мощность которого 10000 Мт. Что такое 100 Мт ? Это менее 1% имевшегося тогда в мире ядерного арсенала, но это эквивалент 8200 Хиросим !

После экспериментов с моделью был сделан однозначный вывод: в результате конфликта наступит «ядерная зима». Это новое понятие образно описывает климатическую катастрофу. Оказалось, что не только ударные волны, радиация и излучение являются поражающими факторами. Пыль и сажевый аэрозоль, поднимаясь в результате взрывов в верхние слои атмосферы, даже в «мягком» случае уменьшают поток солнечной радиации у поверхности Земли в 20 раз. Температура у поверхности Земли резко падает, а на высоте горных ледников, наоборот, сильно возрастает, что вызывает наводнения континентального масштаба. Потоки воды, скатываясь на переохлажденные равнины, покрывают их ледяной коркой. Океан из-за своей большой теплоемкости остывает гораздо медленнее, и контраст температур между водой и сушей приводит к невиданной силы ураганам. Можно привести еще немало устрашающих выводов, но подчеркнем лишь одно обстоятельство - катастрофа глобальна: «ядерная зима» приходит в любую точку Планеты, в том числе и в ту, откуда был нанесен удар. Поднявший меч от него и погибнет, даже если не будет ответного удара.

Этот вывод дал еще один неопровержимый аргумент человечеству против ядерной войны, в том числе против так называемой ограниченной ядерной войны. Словосочетание «ядерная зима» вошло как предостережение в сознание миллионов людей, в лексикон политиков, хотя не многие знают, что это понятие рождено математическим моделированием.

ЛИТЕРАТУРА

1.Самарский А.А. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент // Вести АН СССР. -1975. -№5.

2.Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы.-М.: Наука,1989.

3.Скляр С.Н. Математическое моделирование – методология научного исследования // Сборник трудов конференции «Открытое общество: человек и образование», 11, 12 мая, 2001 г., Бишкек, Американский Университет в Кыргызстане.

3.Стенчиков Г.Л. Климатические последствия ядерной войны: численные эксперименты с гидродинамической моделью климата ВЦ АН СССР. –В кн.: Климатические и биологические последствия ядерной войны. –М.: Наука, 1986.