КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ СОСТАВНОГО ТИПА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Основная цель. Познакомиться с методами вычисления определенных интегралов, основанными на использовании квадратурных формул составного типа.

Основные формулы. Простейшие способы приближенного вычисления определенных интегралов

$$I = \int_a^b f(x)dx,$$

основаны на замене интеграла конечной суммой

$$\sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i),$$

в которой c_i - числовые коэффициенты, а x_i - точки отрезка [a,b] (i=1,2,…n). Предполагаем в дальнейшем, что, по крайней мере, $f \in C[a,b]$. Приближенное равенство

$$I \approx \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$$

называется *квадратурной формулой*, точки x_i - *узлами квадратурной формулы*, а числа c_i - *коэффициентами квадратурной формулы.*

Величину

$$\int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$$

будем называть *погрешностью квадратурной формулы.* Погрешность, очевидно, зависит как от выбора коэффициентов, так и от расположения узлов. Обсуждаемые ниже методы вычисления интегралов относятся к числу простейших и обычно предлагаемых в традиционных курсах численных методов.

На отрезке $[a,b]$ используем равномерную сетку с n узлами, которые вычисляются по формулам:

$$x_i = a + h\cdot(i-1),\ i=1,2,...,n;\ h=\frac{b-a}{n-1}.$$

Формулы прямоугольников:

Вариант 1:

$$I=\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n-1} h\cdot f(x_i(\theta)),$$
$$x_i(\theta)=\theta\cdot x_{i+1}+(1-\theta)\cdot x_i,\ \theta\in[0,1]. \qquad (1)$$

Вариант 2:

$$I=\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n-1} h\cdot\left[(1-\theta)\cdot f(x_i)+\theta\cdot f(x_{i+1})\right]=$$
$$=h\cdot\left[(1-\theta)\cdot f(a)+\sum_{i=2}^{n-1} f(x_i)+\theta\cdot f(b)\right],\ \theta\in[0,1]. \qquad (2)$$

Формула трапеций:

$$I=\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n-1}\frac{h}{2}\cdot\left[f(x_i)+f(x_{i+1})\right]=\frac{h}{2}\cdot\left[f(a)+2\sum_{i=2}^{n-1} f(x_i)+f(b)\right]. \qquad (3)$$

Отметим, что формула (3) является частным случаем (2) при $\theta=\frac{1}{2}$.

Формула Симпсона:

$$I=\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n-1}\frac{h}{6}\cdot\left[f(x_i)+4\cdot f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)+f(x_{i+1})\right]. \qquad (4)$$

Тестовые задачи. В данной лабораторной работе предполагается вычисление одномерных определенных интегралов вида

$$I(a,b)=\int_a^b f(x)dx.$$

Интегралы 1-6 являются «табличными», их можно найти в [1]:

1. $\int_0^2 x^n dx\ \ (=\frac{2^{n+1}}{n+1},\ n=0,1,\ldots);$

2. $\int_0^1 \cos(2\pi x)dx \quad (=0)$;

3. $\int_0^1 \sin(2\pi x)dx \quad (=0)$;

4. $\int_1^2 \frac{ds}{s} \quad (=\ln 2)$;

5. $\int_0^2 \frac{ds}{1+s^2} \quad (= arctg\, 2)$;

6. $\int_0^{0,99} \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} \quad (=\arcsin(0,99))$;

Далее следуют интегралы, которые могут быть вычислены с использованием специальных технических приемов, таких как замена переменной, интегрирование по частям, интегрирование рациональных выражений и т.д. (см. [1]):

7. $\int_0^1 \sqrt{4-s^2}ds \quad (=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3})$;

8. $\int_0^1 \frac{s}{\sqrt{4-s^2}}ds \quad (=2-\sqrt{3})$;

9. $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}dx \quad (=2(\sqrt{2}-1))$;

10. $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\, dx \quad (=\frac{1}{2}\cdot \ln 2)$;

11. $\int_1^3 \ln s\, ds \quad (=3(\ln 3\text{-}1)\text{+}1)$;

12. $\int_0^1 e^x \cdot \cos(2\pi x)dx \quad (=\frac{e-1}{1+4\pi^2})$;

13. $\int_0^1 e^x \cdot \sin(2\pi x)dx \quad (=\frac{2\pi(1-e)}{1+4\pi^2})$;

14. $\int_1^2 \frac{2x-3}{(x+2)(5-x)}dx \quad (=0);$

15. $\int_1^3 \sin(\ln s)ds \quad (=\frac{3}{2}[\sin(\ln 3)-\cos(\ln 3)+1]);$

16. $\int_1^3 \cos(\ln s)ds \quad (=\frac{3}{2}[\sin(\ln 3)+\cos(\ln 3)-1]);$

17. $\int_0^{2\pi} x^2 \cos x\, dx \quad (=4\pi);$

18. $\int_1^3 \left(\frac{a}{x}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{a}{x}\right)dx \quad (a>0 - \text{параметр});$

19. $\int_{0.01}^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)dx;$

20. $\int_{0.01}^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)dx;$

Несколько интегралов, которые не вычисляются в элементарных функциях (см.[1]):

21. $erf(5) \equiv \int_0^5 \exp(-s^2)\,ds \quad (\text{"интеграл ошибок"});$

22. $\text{li}(x) \equiv \int_0^{0,99} \frac{ds}{\ln s} \quad (\text{"интегральный логарифм"});$

23. $si(3) \equiv \int_0^3 \frac{\sin s}{s} ds \quad (\text{"интегральный синус"});$

24. $\text{ci}(3) \equiv \int_{0.01}^3 \frac{\cos(s)}{s} ds \quad (\text{"интегральный косинус"});$

Требования к программе. *Программа должна включать*:

1) набор тестовых задач (по заданию преподавателя) и возможность выбора конкретной задачи;

2) возможность ввода числа узлов квадратурной сетки (сетка рассматривается равномерная);
3) вычисление интегралов должно производится методами, рассмотренными выше (или по заданию преподавателя);
4) вычисление и вывод погрешности интегрирования Err(I):

$$Err(I)=Abs(I(a,b)-\tilde{I}(a,b)),$$

где $I(a,b)$- точное, а $\tilde{I}(a,b)$-приближённое (вычисленное) значение интеграла;

5) графику:

должны отрисовываться узлы квадратурной сетки и две криволинейные трапеции: «точная»: построенная по аналитически заданной подинтегральной функции и «приближенная»: интерполянт, отвечающий выбранной квадратурной формуле.

Задание для работы с программой. Провести численные расчеты, используя все задействованные в программе тестовые задачи и методы. Произвести сравнительный анализ методов. Критерии качества методов: величина погрешности и визуальное сравнение графиков криволинейных трапеций. Сопоставить теоретическую информацию о свойствах используемых квадратурных формул с резултатами, полученными при их практическом использовании.

[1]: Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, том II. Москва «Наука», 1970 г., -800 с.