Методы Рунге-Кутта.

(1) $$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = f(t, u(t)), \quad t \in (0,T); \\ u(0) = \varphi. \end{cases}$$

$u \in C[0,T] \cap C^1(0,T)$;

Определение 1. Будем говорить, что ф-ция $f(t,u)$ удовлетворяет "условию Липшица по u" в области $\Omega \subseteq tOu$, если $\exists K > 0 : \forall (t,u_1),(t,u_2) \in \Omega \Rightarrow$

(2) $$|f(t,u_1) - f(t,u_2)| \leq K \cdot |u_1 - u_2|$$ ⊕

Общая схема явного N-стадийного метода Р-К.

На отрезке $[0,T]$ определим сетку:

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m < \ldots < t_M = T;$$

Будем считать, что: $t_m = \tau \cdot m \quad (m = 0, 1, \ldots, M)$; $\tau = \frac{T}{M}$;

Рассмотрим ячейку (t_m, t_{m+1}) и проинтегрируем ур-ие (1) по этой ячейке:

$$u(t_{m+1}) = u(t_m) + \int_{t_m}^{t_{m+1}} f(t, u(t))\,dt; \tag{3}$$

$$u(t_{m+1}) \approx u(t_m) + \tau \cdot f(t_m, u(t_m));$$

Метод Эйлера:

$u_m^h \approx u(t_m)$;

$$\begin{cases} u_{m+1}^h = u_m^h + \tau f(t_m, u_m^h); \quad m = 0, 1, \ldots, M-1; \\ u_0^h = \varphi. \end{cases}$$

$$t_m = x_0 \le x_1 \le \ldots \le x_i \le \ldots \le x_N = t_{m+1}.$$

$$\int_{t_m}^{t_{m+1}} f(t, u(t))\,dt = \tau \sum_{j=0}^{N-1} \sigma_{N_j} f(x_j, u(x_j)) + \delta_N;$$

$$u(t_{m+1}) = u(t_m) + \tau \sum_{j=0}^{N-1} \sigma_{N,j} \cdot f(x_j, \underline{\overset{?}{u}(x_j)}) + \delta_N;$$

$$(4)\begin{cases} u(x_i) = u(t_m) + \displaystyle\int_{t_m}^{x_i} f(t, u(t))\,dt = \\ \quad = u(t_m) + (x_i - x_0) \cdot \displaystyle\sum_{j=0}^{i-1} \sigma_{i,j} \cdot f(x_j, u(x_j)) + \delta_i; \end{cases}$$

$$(i = 1, 2, \ldots N);$$

$$u(x_i) \approx y_i \quad (i = \overline{1, N})$$

$$(5)\begin{cases} y_0 = u(t_m); \\ y_i = y_0 + (x_i - x_0) \cdot \displaystyle\sum_{j=0}^{i-1} \sigma_{i,j} \cdot f(x_i, y_i); \quad i = \overline{1, N}; \\ y_N \approx u(t_{m+1}). \end{cases}$$

$$x_i = x_0 + \tau\lambda_i \quad (i = 0, 1, \dots, N);$$

$$0 = \lambda_0 \le \lambda_1 \le \dots \le \lambda_i \le \dots \le \lambda_N = 1;$$

$$(6)\quad \begin{cases} y_0 = u(t_m), \\ y_i = y_0 + \tau\lambda_i \sum_{j=0}^{i-1} \sigma_{i,j} \cdot f(x_0 + \tau\lambda_j, y_j); \quad i = \overline{1, N}; \\ y_N \approx u(t_{m+1}). \end{cases}$$

$$u_m^h \approx u(t_m); \quad m = \overline{1, M};$$

$$(7)\quad \begin{cases} u_0^h = \varphi; \\ \begin{cases} y_0^h = u_m^h; \\ y_i^h = y_0^h + \tau\lambda_i \sum_{j=0}^{i-1} \sigma_{i,j} \cdot f(x_0 + \tau\lambda_j, y_j^h); \quad i = \overline{1, N}; \\ u_{m+1}^h = y_N^h. \quad m = \overline{0, M-1}; \end{cases} \end{cases}$$

Определение 1. ① Погрешность аппроксимации метода (7):

$$\ell_{m+1}(\tau) \equiv y_N - u(t_{m+1});$$ где y_N - определено в (6).

$m = \overline{0, M-1}$;

② Порядок "p": $\ell_{m+1}(\tau) = O(\tau^{p+1})$, $\forall m = \overline{0, M-1}$;
$\forall f(t,u)$ - дост. гладкой.

③ Решение (7) сходится с порядком "p";

$$|u^h_m - u(t_m)| \le C \cdot \tau^p \; ; \; (+)$$

Теорема 1. (сходимости).

Пусть (7) имеет погрешность аппроксимации "p":

(8) $$|\ell_{m+1}(\tau)| \le C_a \cdot \tau^{p+1} \left(\forall m = \overline{0, M-1}; \forall f\right).$$

C_a - не зависит от "τ" и "m". Ф - ия $f(t,u)$ - удовлетворяет

условию Липшица по "u"!
Тогда решение (7) сходится к решению (1) и
имеет место оценка:

(9) $$\left| u_m^h - u(t_m) \right| \le C \cdot \tau^p;$$

<u>Доказательство.</u>

$r_i \equiv y_i^h - y_i$; Вычтем ф-лы (6) из соотв. ф-л (7).

$$r_i = r_0 + \tau\lambda_i \sum_{j=0}^{i-1} \sigma_{i,j} \left[f(x_0+\tau\lambda_j, y_j^h) - f(x_0+\tau\lambda_j, y_j) \right]; \quad i=\overline{1,N};$$

(10) $$|r_i| \le |r_0| + \tau\lambda_i \sum_{j=0}^{i-1} |\sigma_{i,j}| \cdot \left| f(x_0+\tau\lambda_j, y_j^h) - f(x_0+\tau\lambda_j, y_j) \right|$$

$$\left| f(x_0+\tau\lambda_j, y_j^h) - f(x_0+\tau\lambda_j, y_j) \right| \le K \cdot \left| y_j^h - y_j \right| = K \cdot |r_j|;$$

$$\sigma \equiv \max\left\{ |\sigma_{i,j}| \;\middle|\; i=\overline{1,N};\ j=\overline{0,i-1} \right\}; \quad \lambda_i \le 1.$$

$$(10) \Rightarrow \underline{|r_i| \le |r_0| + \tau\sigma K \cdot \sum_{j=0}^{i-1} |r_j|}\ ; \quad i = \overline{1, N}\ ; \qquad (11)$$

Лемма 1. $\alpha_i \le C \cdot \sum_{j=0}^{i-1} \alpha_j + b\ ;\ i = \overline{1,N}\ ;\ \alpha_0 \le b\ ;$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_i \le (1+C)^i \cdot b \quad (i = \overline{1,N});$$

Док-во. Индукция по "i":

① $\alpha_0 \le b$ – дано по условию ($i=0$).

② $i \Rightarrow i+1$ $\quad \alpha_j \le (1+C)^j \cdot b \quad (0 \le j \le i) \overset{?}{\Rightarrow} \alpha_{i+1} \le (1+C)^{i+1} \cdot b$

$$\alpha_{i+1} \le C \cdot \sum_{j=0}^{i} \alpha_j + b \underset{\text{инд. предпол.}}{\le} C b \cdot \sum_{j=0}^{i} (1+C)^j + b = b\left[C \cdot \frac{(1+C)^{i+1} - 1}{(1+C) - 1} + 1\right] =$$

$$= (1+C)^{i+1} \cdot b \quad +$$

В силу леммы 1 из (11) получим:

(12) $$|r_i| \leq (1+\tau\sigma K)^i \cdot |r_0|; \quad i=\overline{1,N};$$

Из (12) $\Rightarrow$ $|r_N| \leq (1+\tau\sigma K)^N \cdot |r_0| \leq e^{\tau\sigma K N} \cdot |r_0|$

$\boxed{1+z \leq e^z \quad (z>0)}$

$$|u^h_{m+1}-y_N| = |y^h_N - y_N| \leq e^{\tau\sigma K N} \cdot |y^h_0 - y_0| = e^{\tau\sigma K N} \cdot |u^h_m - u(t_m)|$$

(13) $$\boxed{|u^h_{m+1}-y_N| \leq e^{\tau\sigma K N} \cdot |u^h_m - u(t_m)|;}$$

$$\varepsilon_m \equiv u^h_m - u(t_m); \; m=\overline{0,M}; \quad \varepsilon_0 = u^h_0 - u(0) = \varphi - \varphi = 0.$$

$$\varepsilon_{m+1} = u^h_{m+1} - u(t_{m+1}) = (u^h_{m+1} - y_N) + (y_N - u(t_{m+1})) \Rightarrow$$

$$\varepsilon_{m+1} = (u^h_{m+1} - y_N) + \ell_{m+1}(\tau) \Rightarrow$$

$$(14)\ \Rightarrow \begin{cases} |\varepsilon_{m+1}| \le |u^h_{m+1} - y_N| + |\ell_{m+1}(\tau)| \overset{(13)}{\underset{(8)}{\le}} \\ \le e^{\tau\sigma N K} \cdot |\varepsilon_m| + C_a \cdot \tau^{p+1}; \end{cases}$$

Лемма 2. $\left(\beta_{m+1} \le C \cdot \beta_m + b;\quad m = \overline{0, M-1};\quad C > 1 \right)$

$$\Downarrow$$

$$\beta_m \le C^m \cdot \beta_0 + \frac{C^m - 1}{C - 1} \cdot b;$$

Док-во. Индукция по "m":

① $m = 0$ $\quad \beta_0 \le \beta_0$ ⊕

② $m \Rightarrow m+1$ $\quad \beta_{m+1} \le C \left[C^m \beta_0 + \frac{C^m - 1}{C - 1} \cdot b \right] + b =$

$$= C^{m+1} \cdot \beta_0 + \left[\frac{C^m - 1}{C - 1} \cdot C + 1 \right] \cdot b = C^{m+1} \beta_0 + \frac{C^{m+1} - 1}{C - 1} \cdot b \quad ⊕$$

В силу леммы 2 из (14) получим:

$$|\varepsilon_m| \le e^{\tau\sigma N K m}\cdot\underbrace{|\varepsilon_0|}_{=0} + \frac{e^{\tau\sigma N K m}-1}{e^{\tau\sigma N K}-1}\cdot C_a\cdot\tau^{p+1} =$$

$$\le \frac{e^{\tau M\sigma N K}-1}{e^{\tau\sigma N K}-1}\cdot C_a\cdot\tau^{p+1} \le C_a\cdot\frac{e^{\sigma N K T}-1}{\sigma N K}\cdot\tau^{p};$$

$$\tau m \le \tau\cdot M = T; \qquad e^{\tau\sigma N K}-1 \ge \tau\sigma N K$$

Окончательно, получаем оценку сходимости (9):

$$|u_m^h - u(t_m)| \le \underbrace{\left(C_a\cdot\frac{e^{\sigma N K T}-1}{\sigma N K}\right)}_{\equiv C}\cdot\tau^{p}; \qquad +$$

Лемма 3. Пусть: $l_{m+1}(0) = l'_{m+1}(0) = \ldots = l^{(p)}_{m+1}(0) = 0$

$(\forall m = \overline{0, M-1}$ и $\forall f)$; $l^{(p+1)}_{m+1}(0) \neq 0$ (для некоторой "f")

$$\Downarrow$$

$$|l_{m+1}(\tau)| \leq C_a \cdot \tau^{p+1}.$$

Док-во:

$$l_{m+1}(\tau) = \sum_{k=0}^{p} \tau^k \cdot \underbrace{\frac{l^{(k)}_{m+1}(0)}{k!}}_{=0} + \frac{\tau^{p+1}}{(p+1)!} \cdot l^{(p+1)}_{m+1}(\tau\theta) =$$

$$= \frac{l^{(p+1)}(\tau\theta)}{(p+1)!} \cdot \tau^{p+1}$$

T

$$(6)\quad \begin{cases} y_0 = u(t_m), \\ y_i = y_0 + \tau\lambda_i \sum\limits_{j=0}^{i-1} \sigma_{i,j}\, f(t_m + \tau\lambda_j, y_j); \quad i = \overline{1,N}; \end{cases}$$

$$\ell_{m+1}(\tau) \equiv y_N - u(t_{m+1}) = y_N(\tau) - u(t_m + \tau)$$

$$(15)\quad \ell_{m+1}(0) = y_N(0) - u(t_m) = u(t_m) - u(t_m) = 0 \quad +$$

$$y_N(\tau) = y_0 + \tau \cdot \sum_{j=0}^{N-1} \sigma_{N,j}\, f(t_m + \tau\lambda_j, y_j);$$

$$\ell'_{m+1}(\tau) = y'_N(\tau) - u'(t_m + \tau) = \sum_{j=0}^{N-1} \sigma_{N,j}\, f(t_m + \tau\lambda_j, y_j) +$$

$$+ \tau \sum_{j=0}^{N-1} \sigma_{N,j} \cdot \left[\lambda_j f_t(t_m + \tau\lambda_j, y_j) + f_u(t_m + \tau\lambda_j, y_j) \cdot y'_j \right] - u'(t_m + \tau);$$

$$(16)\quad \ell'_{m+1}(0) = \left(\sum_{j=0}^{N-1} \sigma_{N,j} - 1 \right) \cdot f(t_m, u(t_m)) = 0$$

$$\ell'_{m+1}(\tau) = y'_N(\tau) - u'(t_m+\tau) = \sum_{j=0}^{N-1} \sigma_{N,j} f(t_m+\tau\lambda_j, y_j) +$$

$$+\tau \sum_{j=0}^{N-1} \sigma_{N,j} \cdot \left[\lambda_j f_t(t_m+\tau\lambda_j, y_j) + f_u(t_m+\tau\lambda_j, y_j)\cdot y'_j\right] - u'(t_m+\tau);$$

$$\underline{\underline{\ell''_{m+1}(0)}} = 2\sum_{j=0}^{N-1} \sigma_{N,j} \left[\lambda_j f_t(t_m+\tau\lambda_j, y_j) + f_u(t_m+\tau\lambda_j, y_j)\cdot y'_j\right]\Big|_{\boxed{\tau=0}} - u''(t_m) \underset{(*)}{=}$$

$$y'_j(0) = \lambda_j \sum_{k=0}^{j-1} \sigma_{j,k} f(t_m+\tau\lambda_k, y_k)\Big|_{\tau=0} = \left(\lambda_j \sum_{k=0}^{j-1} \sigma_{j,k}\right)\cdot f$$

$$(*) = 2\sum_{j=0}^{N-1} \sigma_{N,j} \left[\lambda_j \underline{f_t} + \left(\lambda_j \sum_{k=0}^{j-1} \sigma_{j,k}\right)\cdot \underline{\underline{f f_u}}\right] - \left(\underline{f_t} + \underline{\underline{f_u\cdot f}}\right) =$$

$$u'(t_m, u(t_m)) = f(t_m, u(t_m)) \Rightarrow u'' = f_t + f_u\cdot f;$$

$$\underset{(17)}{=} \left(2\sum_{j=0}^{N-1} \lambda_j \sigma_{N,j} - 1\right)\cdot f_t + \left[2\sum_{j=0}^{N-1} \lambda_j \sigma_{N,j} \left(\sum_{k=0}^{j-1} \sigma_{j,k}\right) - 1\right]\cdot f_u f$$

Из (15)–(17) следует:

① $l_{m+1}(0)=0 \quad (\forall f)$;

② $l'_{m+1}(0)=0 \ (\forall f) \Longleftrightarrow \sum\limits_{j=0}^{N-1} \sigma_{N,j} - 1 = 0$;

③ $l''_{m+1}(0)=0 \ (\forall f) \Longleftrightarrow \begin{cases} 2\sum\limits_{j=0}^{N-1} \lambda_j \sigma_{N,j} - 1 = 0; \\ 2\sum\limits_{j=0}^{N-1} \lambda_j \sigma_{N,j} \left(\sum\limits_{k=0}^{j-1} \sigma_{j,k}\right) - 1 = 0. \end{cases}$

Общая схема (7):

$$\begin{cases} u_0^h = \varphi; \\ y_0^h = u_m^h; \\ y_i^h = y_0^h + \tau\lambda_i \sum\limits_{j=0}^{i-1} \sigma_{i,j} f(t_m+\tau\lambda_j, y_j^h); \\ i=\overline{1,N}; \quad u_{m+1}^h = y_N^h; \quad m=\overline{0,M-1}; \end{cases}$$

$N=1$

$$u_{m+1}^h = u_m^h + \tau f(t_m, u_m^h)\cdot\sigma_{1,0};$$

$$u_0^h=\varphi, \ m=\overline{0,M-1}$$

метод Эйлера = одностадийный метод Р-К.

② $\Rightarrow N=1 \Rightarrow \sigma_{1,0}-1=0 \Rightarrow \sigma_{1,0}=1$;

$\Rightarrow$ Метод Эйлера имеет 1й порядок аппроксимации.

$N=2$ — в (7) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} y_1^h = u_m^h + \tau \underline{\lambda_1} \cdot \underline{\underline{\sigma_{1,0}}}\, f(t_m, u_m^h), \\ u_{m+1}^h = y_2^h = u_m^h + \tau\left[\sigma_{2,0} f(t_m, u_m^h) + \sigma_{2,1} f(t_m + \tau\lambda_1, y_1^h)\right]; \end{cases}$$

Положим в (2) и (3) $N=2$, получим:

$$\begin{cases} \sigma_{2,0} + \sigma_{2,1} = 1, \\ 2 \cdot \sigma_{2,1} \cdot \lambda_1 = 1, \\ 2\sigma_{2,1} \cdot \lambda_1 \cdot \sigma_{1,0} = 1. \end{cases}$$

Пусть $\lambda_1 = \lambda$ - произвольный параметр, при этом: $0 < \lambda \leq 1$;

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{2,1} = \frac{1}{2\lambda};\ \sigma_{2,0} = 1 - \frac{1}{2\lambda}; \\ \sigma_{1,0} = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_0^h = \varphi; \\ y^h = u_m^h + \tau\lambda f(t_m, u_m^h); \\ u_{m+1}^h = u_m^h + \tau\left[\left(1 - \frac{1}{2\lambda}\right) \cdot f(t_m, u_m^h) + \frac{1}{2\lambda} \cdot f(t_m + \tau\lambda, y^h)\right]; \\ m = \overline{0, M-1}; \end{cases}$$