Тема 8. МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Краевые задачи на плоскости. Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона в простейших областях (круг, кольцо, прямоугольник и другие) можно решать методом разделения переменных.

Изложим этот метод для задачи Дирихле в круге:

$$\Delta u(x,y)=0, \quad x^2+y^2<r_0^2, \tag{8.1}$$

$$u\,|_{r=r_0}=h(x',y'), \qquad x'^2+y'^2=r_0^2. \tag{8.2}$$

I. *Редукция.* Переход в этой краевой задаче в круге к полярным координатам (r,φ) дает эквивалентную краевую задачу в прямоугольнике:

$$\Delta u=\frac{1}{r}(r\tilde{u}_r)_r+\frac{1}{r^2}\tilde{u}_{\varphi\varphi}=0, \qquad 0<r<r_0, \qquad 0\le\varphi<2\pi, \tag{8.3}$$

$$\tilde{u}(r,\varphi)=\tilde{u}(r,\varphi+2\pi), \qquad 0<r\le r_0, \quad \forall\varphi, \tag{8.4}$$

$$\left|\tilde{u}\,|_{r=0}\right|<+\infty, \qquad \tilde{u}\,|_{r=r_0}=h(r_0\cos\varphi, r_0\sin\varphi)=\tilde{h}(\varphi), \quad 0\le\varphi<2\pi. \tag{8.5}$$

II. $\Phi_k(\varphi)=?$ Подставляя произведение $\hat{u}(r,\varphi)=R(r)\Phi(\varphi)\ne 0$ в уравнение (8.3) и разделяя переменные

$$\frac{\frac{1}{r}(rR')'}{R}+\frac{\Phi''}{r^2\Phi}=0 \Leftrightarrow \frac{r(rR')'}{R}=-\frac{\Phi''}{\Phi}=\lambda\in\mathbb{R},$$

получаем уравнения

$$r(rR'(r))'-\lambda R(r)=0, \quad 0<r<r_0, \tag{8.6}$$

$$\Phi''(\varphi)+\lambda\Phi(\varphi)=0, \quad \varphi\in\mathbb{R}. \tag{8.7}$$

Подстановка этого произведения в условие периодичности (8.4) и разделение переменных

$$R(r)\Phi(\varphi) \equiv R(r)\Phi(\varphi + 2\pi) \Leftrightarrow R(r)\left[\Phi(\varphi) - \Phi(\varphi + 2\pi)\right] \equiv 0$$

приводит нас к условию периодичности

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi), \quad \varphi \in \mathbb{R}. \tag{8.8}$$

Полученная задача Штурма – Лиувилля (8.7) − (8.8) совпадает с задачей Штурма − Лиувилля (7.36)-(7.37), которая имеет собственные значения $\lambda_k = k^2$ и собственные функции $\cos k\varphi, \quad \sin k\varphi \neq 0, \quad k = 0,\ 1, \ldots$

III. $R_k(r) = ?$ Найдем коэффициенты $R_k^{(i)}(r), \quad i = 1, 2,$ разложения решения КЗ (8.3) − (8.5) в ряд по этим собственным функциям:

$$\tilde{u}(r,\varphi) = \frac{1}{2} R_0^{(1)}(r) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(R_k^{(1)}(r) \cos k\varphi + R_k^{(2)}(r) \sin k\varphi \right). \tag{8.9}$$

Заменяем этим рядом решение уравнения (8.3) и с помощью уравнения (8.6), найденного в результате разделения переменных, приходим к ряду

$$\frac{1}{2} r\left(rR_0^{(1)\prime}\right)' + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left[r\left(rR_k^{(1)\prime}\right)' - k^2 R_k^{(1)} \right] \cos k\varphi + \left[r\left(rR_k^{(2)\prime}\right)' - k^2 R_k^{(2)} \right] \sin k\varphi \right) = 0,$$

из которого вытекают уравнения

$$r\left(rR_k^{(i)\prime}(r)\right)' - k^2 R_k^{(i)}(r) = 0, \quad 0 < r < r_0, \quad i = 1,\ 2, \quad k = 0,\ 1, \ldots \tag{8.10}$$

Подставив ряд (8.9) в краевые условия (8.5), находим ряд

$$\frac{1}{2} R_0^{(1)}(r_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(R_k^{(1)}(r_0) \cos k\varphi + R_k^{(2)}(r_0) \sin k\varphi \right) = \tilde{h}(\varphi), \quad 0 \le \varphi < 2\pi,$$

и, соответственно, краевые условия

$$\left| R_k^{(i)}(0) \right| < +\infty, \quad R_k^{(i)}(r_0) = \tilde{h}_k^{(i)}, \quad i = 1,\ 2, \quad k = 0,\ 1, \ldots, \tag{8.11}$$

где согласно формулам коэффициентов классических рядов Фурье

$$\tilde{h}_k^{(1)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{h}(\varphi) \cos k\varphi d\varphi, \quad \tilde{h}_k^{(2)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{h}(\varphi) \sin k\varphi d\varphi, \quad k = 0,\ 1, \ldots \tag{8.12}$$

Теперь решаем граничные задачи (8.10), (8.11).

1) $k=0$. При $k=0$ интегрированием уравнения (8.10) находим его общее решение $R_0^{(1)}(r)=a_0\ln r+b_0 \quad \forall a_0,b_0\in R$. Из первого краевого условия в (8.11) следует, что коэффициент $a_0=0$, а из второго краевого условия в (8.11) заключаем, что $b_0=\tilde{h}_0^{(1)}$, т. е. функция $R_0^{(1)}(r)=\tilde{h}_0^{(1)}$.

2) $k>0$. При $k>0$, полагая $R(r)=r^{\alpha}$ в уравнениях (8.10), получаем $\alpha^2=k^2, \quad \alpha=\pm k, \quad k=1,\ 2,\dots$, и, следовательно, их общими решениями являются функции

$$R_k^{(i)}(r)=a_k^{(i)}r^k+b_k^{(i)}r^{-k} \quad \forall a_k^{(i)},b_k^{(i)}\in\mathbb{R}, \quad i=1,\ 2,\ \ k=1,\ 2,\dots, \tag{8.13}$$

так как частные решения r^k и r^{-k} линейно-независимы на $]0,r_0[$. Здесь, в силу первого краевого условия из (8.11), коэффициенты $b_k^{(i)}=0$, а в силу второго краевого условия из (8.11) получаем, что коэффициенты $a_k^{(i)}=\tilde{h}_k^{(i)}/r_0^k, \quad i=1,\ 2,\ \ k=1,\ 2,\dots$, т. е. функции $R_k^{(i)}(r)=\tilde{h}_k^{(i)}\left(r/r_0\right)^k$, $i=1,\ 2,\ \ k=1,\ 2,\dots$

В результате формальным решением краевой задачи (8.1) $-$ (8.2) является

$$u(x,y)=\tilde{u}(r,\varphi)=\frac{1}{2}\tilde{h}_0^{(1)}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(r/r_0\right)^k\left(\tilde{h}_k^{(1)}\cos k\varphi+\tilde{h}_k^{(2)}\sin k\varphi\right).$$

Подставив сюда выражение коэффициентов (8.12) и просуммировав соответствующие геометрические прогрессии, убеждаемся, что это решение представляет собой интеграл Пуассона

$$\tilde{u}(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{r_0^2-r^2}{r^2-2r_0r\cos(\varphi-\psi)+r_0^2}\tilde{h}(\psi)d\psi.$$

Замечание 8.1. Решения краевых задач для уравнения Лапласа и Пуассона вне круга $r>r_0$ имеют вид

$$\tilde{u}(r,\varphi)=\frac{1}{2}b_0^{(1)}+\sum_{k=1}^{\infty}r^{-k}\left(b_k^{(1)}\cos k\varphi+b_k^{(2)}\sin k\varphi\right)$$

и в кольце $r_1<r<r_2$ имеют вид

$$\tilde{u}(r,\varphi)=\frac{1}{2}\left(a_0^{(1)}\ln r+b_0^{(1)}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(a_k^{(1)}r^k+b_k^{(1)}r^{-k}\right)\cos k\varphi+\left(a_k^{(2)}r^k+b_k^{(2)}r^{-k}\right)\sin k\varphi\right],$$

где постоянные $a_k^{(i)}$ и $b_k^{(i)}$ определяются из краевых условий.

Задача 8.1. В круге решить краевую задачу для уравнения Пуассона:

$$\Delta u(x,y) = \Delta\tilde{u}(r,\varphi) = \frac{1}{r}(r\tilde{u}_r)_r + \frac{1}{r^2}\tilde{u}_{\varphi\varphi} = \tilde{f}(r,\varphi),\ 0 < r < r_0,\ 0 \le \varphi < 2\pi, \quad (8.14)$$

$$\tilde{u}(r,\varphi) = \tilde{u}(r,\varphi + 2\pi),\ 0 < r \le r_0,\ \forall\varphi, \quad (8.15)$$

$$\left|\tilde{u}\,|_{r=0}\right| < +\infty, \quad \tilde{u}\,|_{r=r_0} = \tilde{h}(\varphi),\ 0 \le \varphi < 2\pi. \quad (8.16)$$

Решение. I. $\Phi_k(\varphi) = ?$ Подстановка произведения $\hat{u}(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi) \ne 0$ в однородное уравнение (8.14) приводит к ЗШ–Л (8.7) – (8.8), которая имеет СЗ $\lambda_k = k^2$ и СФ $\Phi_k(\varphi) = \cos k\varphi,\ \sin k\varphi \ne 0,\ k = 0,\ 1, \ldots$ Поэтому решение КЗ (8.14) – (8.16) ищем в виде ряда (8.9).

II. $R_k(\varphi) = ?$ Заменяя решение уравнения (8.14) рядом (8.9), приходим к ряду

$$\frac{1}{2}r\left(rR_0^{(1)\prime}\right)' + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left[r\left(rR_k^{(1)\prime}\right)' - k^2R_k^{(1)}\right]\cos k\varphi + \left[r\left(rR_k^{(2)\prime}\right)' - k^2R_k^{(2)}\right]\sin k\varphi\right) \equiv$$
$$\equiv r^2\tilde{f}(r,\varphi),$$

из которого выводим уравнения

$$r\left(rR_k^{(i)\prime}(r)\right)' - k^2R_k^{(i)}(r) = \tilde{f}_k^{(i)}(r), \quad 0 < r < r_0, \quad i = 1,\ 2, \quad k = 0,\ 1, \ldots, \quad (8.17)$$

с правыми частями

$$\tilde{f}_k^{(1)}(r) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r^2\tilde{f}(r,\varphi)\cos k\varphi d\varphi, \quad \tilde{f}_k^{(2)}(r) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r^2\tilde{f}(r,\varphi)\sin k\varphi d\varphi, \quad k = 0,\ 1, \ldots$$

Также, как и выше, к уравнениям (8.17) присоединяются КУ

$$\left|R_k^{(i)}(0)\right| < +\infty\,, \quad R_k^{(i)}(r_0) = \tilde{h}_k^{(i)}, \quad i = 1,\ 2, \quad k = 0,\ 1, \ldots \tag{8.18}$$

1) $k = 0$. Интегрируем уравнение (8.17) при $k = 0$ и получаем его ОР

$$R_0^{(1)}(r) = a_0 \ln r + b_0 + \int_0^r \frac{1}{\tau} \int_0^\tau s\tilde{f}_0^{(1)}(s)\,ds\,d\tau \quad \forall a_0, b_0 \in \mathbb{R}.$$

Ввиду первого КУ в (8.18) коэффициент $a_0 = 0$. Благодаря второму КУ в (8.18) определяется коэффициент

$$b_0 = \tilde{h}_0^{(1)} - \int_0^r \frac{1}{\tau} \int_0^\tau s\tilde{f}_0^{(1)}(s)\,ds\,d\tau$$

и, следовательно, функция

$$R_0^{(1)}(r) = \tilde{h}_0^{(i)} + \int_{r_0}^r \frac{1}{\tau} \int_0^\tau s\tilde{f}_0^{(1)}(s)\,ds\,d\tau\,. \tag{8.19}$$

2) $k > 0$. Ясно, что для $k > 0$ ОР однородных уравнений (8.17) имеют вид (8.13). ЧР неоднородных уравнений (8.17) будем искать методом вариации произвольных постоянных в виде

$$R^{*(i)}_{\;k}(r) = a_k^{(i)}(r)r^k + b_k^{(i)}(r)r^{-k} \qquad i = 1,\ 2,\ k = 1,\ 2, \ldots \tag{8.20}$$

Согласно методу Лагранжа, производные коэффициентов определяются линейными системами уравнений

$$\begin{cases} a_k^{(i)\prime}(r)r^k + b_k^{(i)\prime}(r)r^{-k} = 0, \\ a_k^{(i)\prime}(r)kr^{k-1} - b_k^{(i)\prime}(r)kr^{-k-1} = r^{-2}\tilde{f}_k^{(i)}(r),\ k = 1,\ 2, \ldots, \end{cases}$$

главный определитель которых равен $\Delta = -2kr^{-1}$. Решая их методом Крамера, находим

$$a_k^{(i)\prime}(r)=\frac{\begin{vmatrix}0 & r^{-k}\\ r^{-2}\tilde f_k^{(i)}(r) & -kr^{-k-1}\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{r^{-k-1}}{2k}\tilde f_k^{(i)}(r)\Rightarrow a_k^{(i)}(r)=\frac{1}{2k}\int_0^r s^{-k-1}\tilde f_k^{(i)}(s)ds,$$

$$b_k^{(i)\prime}(r)=\frac{\begin{vmatrix}r^{k} & 0\\ kr^{k-1} & r^{-2}\tilde f_k^{(i)}(r)\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{-r^{k-1}}{2k}\tilde f_k^{(i)}(r)\Rightarrow b_k^{(i)}(r)=\frac{-1}{2k}\int_0^r s^{k-1}\tilde f_k^{(i)}(s)ds.$$

Подставив найденные коэффициенты в формулу (8.20), получаем ЧР уравнений (8.17):

$$R^{*(i)}_{k}(r)=\frac{r^k}{2k}\int_0^r s^{-k-1}\tilde f_k^{(i)}(s)ds-\frac{r^{-k}}{2k}\int_0^r s^{k-1}\tilde f_k^{(i)}(s)ds,\ \ i=1,\ 2,\ \ k=1,\ 2,... \quad (8.21)$$

Теперь ОР уравнений (8.17), которые представляют собой сумму выражений (8.13) и (8.21), удовлетворяем КУ (8.18). Из первого КУ в (8.18) заключаем, что коэффициенты $b_k^{(i)}=0$, а из второго КУ в (8.18) определяем коэффициенты

$$a_k^{(i)}=\frac{\tilde h_k^{(i)}}{r_0^k}-\frac{1}{2k}\int_0^{r_0} s^{-k-1}\tilde f_k^{(i)}(s)ds+\frac{r_0^{-2k}}{2k}\int_0^{r_0} s^{k-1}\tilde f_k^{(i)}(s)ds,\ \ i=1,\ 2,\ \ k=1,\ 2,... \quad (8.22)$$

Таким образом, формальным решением КЗ (8.14) – (8.16) является ряд (8.9), в котором коэффициент $R_0^{(1)}(r)$ определяется формулой (8.19) и остальные коэффициенты имеют вид:

$$R_k^{(i)}(r)=a_k^{(i)}r^k+\frac{r^k}{2k}\int_0^r s^{-k-1}\tilde f_k^{(i)}(s)ds-\frac{r^{-k}}{2k}\int_0^r s^{k-1}\tilde f_k^{(i)}(s)ds,\ \ i=1,\ 2,\ \ k=1,\ 2,...,$$

где постоянная $a_k^{(i)}$ определяется формулой (8.22).

Задача 8.2. В круге решить внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа:

$$\Delta u = \frac{1}{r}(r\tilde{u}_r)_r + \frac{1}{r^2}\tilde{u}_{\varphi\varphi} = 0,\ 0 < r < r_0,\ 0 \le \varphi < 2\pi, \tag{8.23}$$

$$\tilde{u}(r,\varphi) = \tilde{u}(r,\varphi + 2\pi),\ 0 < r \le r_0,\ \forall\varphi, \tag{8.24}$$

$$\left|\tilde{u}\,|_{r=0}\right| < +\infty, \quad \tilde{u}_r\,|_{r=r_0} = \sin\varphi,\ 0 \le \varphi < 2\pi. \tag{8.25}$$

Решение. I. $\mathit{\Phi}_k(\varphi) = ?$ СЗ и СФ этой КЗ те же, что и для предыдущей КЗ (8.14)−(8.16): $\lambda_k = k^2$, $\Phi_k(\varphi) = \cos k\varphi$, $\sin k\varphi \ne 0$, $k = 0,\ 1, \ldots$

II. $R_k(r) = ?$ Решения данной КЗ ищем в виде ряда (8.9), коэффициенты $R_k^{(i)}(r)$ которого должны быть решениями уравнений (8.10). Подставив ряд (8.9) во второе КУ из (8.25), имеем ряд

$$\tilde{u}_r\,|_{r=r_0} = \frac{1}{2}R_0^{(1)\prime}(r_0) + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(R_k^{(1)\prime}(r_0)\cos k\varphi + R_k^{(2)\prime}(r_0)\sin k\varphi\Big) = \sin\varphi,\ 0 \le \varphi < 2\pi,$$

из которого приравниванием коэффициентов при одинаковых косинусах и синусах определяем коэффициенты разложения в ряд Фурье:

$$R_k^{(1)\prime}(r_0) = 0,\ k = 0,\ 1, \ldots,\ R_1^{(2)\prime}(r_0) = 1,\ R_k^{(2)\prime}(r_0) = 0 \quad \forall k \ne 1. \tag{8.26}$$

Осталось решить ГЗ (8.10), (8.26). Подставляя все ограниченные в нуле $r = 0$ решения $R_0^{(1)}(r) = b_0$ и $R_k^{(i)}(r) = a_k^{(i)} r^k$, $i = 1,\ 2$, $k = 1,\ 2, \ldots$, уравнений (8.10) в ГУ (8.26), видим, что условие $R_k^{(1)\prime}(r_0) = 0$ выполняется при любом $b_0 \in \mathbb{R}$, $a_k^{(1)} = 0$, $k = 0,\ 1, \ldots$, $a_1^{(2)} = 1$ и $a_k^{(2)} = 0$ $\forall k \ne 1$.

Итак, классическими решениями КЗ (8.23)−(8.25) являются функции $\tilde{u}(r,\varphi) = \frac{1}{2}b_0 + r\sin\varphi$, $b_0 \in \mathbb{R}$, в чем легко убедиться подстановкой в исходную КЗ.

Замечание 8.2. Решения КЗ (8.23)−(8.25) полностью соответствуют теоремам существования и единственности решений внутренней задачи Неймана (N_i): данная Неймана $\psi(\varphi) = \sin\varphi$ удовлетворяет необходимому и достаточному условию разрешимости $\int\limits_{S(0,r_0)} \psi(\varphi)dS = 0$ и решения единственны с точностью до произвольной аддитивной постоянной.

Задача 8.3. Вне круга решить внешнюю задачу Неймана для уравнения Лапласа:

$$\Delta u = \frac{1}{r}(r\tilde{u}_r)_r + \frac{1}{r^2}\tilde{u}_{\varphi\varphi} = 0,\ r > r_0,\ 0 \le \varphi < 2\pi, \tag{8.27}$$

$$\tilde{u}(r,\varphi) = \tilde{u}(r,\varphi + 2\pi),\ 0 < r \le r_0,\ \forall\varphi, \tag{8.28}$$

$$\left|\tilde{u}\,|_{r=+\infty}\right| < +\infty, \quad \tilde{u}_r\,|_{r=r_0} = 1,\ 0 \le \varphi < 2\pi. \tag{8.29}$$

Решение. I. $\Phi_k(\varphi) = ?$ СЗ и СФ этой КЗ очевидно прежние $\lambda_k = k^2$, $\Phi_k(\varphi) = \cos k\varphi, \quad \sin k\varphi \ne 0, \quad k = 0,\ 1, \ldots$

II. $R_k(r) = ?$ Решение искомой КЗ естественно ищем в виде ряда (8.9) с коэффициентами $R_k^{(i)}(r)$ – решениями уравнений (8.10). Подстановка ряда (8.9) во второе КУ из (8.29) приводит к тождеству

$$\tilde{u}_r\,|_{r=r_0} = \frac{1}{2}R_0^{(1)\prime}(r_0) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(R_k^{(1)\prime}(r_0)\cos k\varphi + R_k^{(2)\prime}(r_0)\sin k\varphi\right) = 1,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi,$$

из которого приравниванием коэффициентов при одинаковых косинусах и синусах определяются производные коэффициентов

$$R_0^{(1)\prime}(r_0) = 2,\ R_k^{(i)\prime}(r_0) = 0,\ i = 1,\ 2,\ \ k = 1,\ 2, \ldots \tag{8.30}$$

Решаем ГЗ (8.10), (8.30). Все ограниченные на бесконечности $r = +\infty$ решения уравнений (8.10) имеют вид $R_0^{(1)}(r) = b_0$ и $R_k^{(i)}(r) = b_k^{(i)} r^{-k}$, $k = 1,\ 2, \ldots$ Подстановка решений $R_0^{(1)}(r) = b_0$ в первое ГУ из (8.30) дает неверное равенство $0 = 2$ и, следовательно, КЗ (8.27) – (8.29) не имеет решений.

Замечание 8.3. Отсутствие решений КЗ (8.27)–(8.29) не противоречит теореме существования решений внешней задачи Неймана (N_e) для уравнения Лапласа, потому что данная Неймана $\psi(\varphi) = 1$ не удовлетворяет необходимому и достаточному условию разрешимости, так как $\int\limits_{S(0,r_0)} dS = 2\pi r_0 \ne 0.$

Задача 8.4. В кольце решить краевую задачу для уравнения Лапласа:

$$\Delta u = \frac{1}{r}(r\tilde{u}_r)_r + \frac{1}{r^2}\tilde{u}_{\varphi\varphi} = 0,\ 0 < r_1 < r < r_2,\ 0 \le \varphi < 2\pi, \qquad (8.31)$$

$$\tilde{u}(r,\varphi) = \tilde{u}(r,\varphi + 2\pi),\ r_1 \le r \le r_2,\ \forall\varphi, \qquad (8.32)$$

$$u|_{r=r_1} = \tilde{h}(\varphi), \quad u_r|_{r=r_2} = \tilde{g}(\varphi),\ 0 \le \varphi < 2\pi. \qquad (8.33)$$

Решение. Берем те же СЗ $\lambda_k = k^2$ и СФ $\cos k\varphi$, $\sin k\varphi \ne 0$, $\sin k\varphi \ne 0$, $k = 0,\ 1, \ldots$ Решение данной КЗ будем искать в виде ряда (8.9), коэффициенты которого $R_k^{(i)}(r)$ как все решения уравнений (8.10) имеют вид

$$R_0^{(1)}(r) = a_0 \ln r + b_0,\quad R_k^{(i)}(r) = a_k^{(i)} r^k + b_k^{(i)} r^{-k},\quad i = 1,\ 2,\ k = 1,\ 2, \ldots \qquad (8.34)$$

Для ряда (8.9) КУ (8.33) превращаются в равенства

$$u|_{r=r_1} = \frac{1}{2}R_0^{(1)}(r_1) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(R_k^{(1)}(r_1)\cos k\varphi + R_k^{(2)}(r_1)\sin k\varphi\right) = \tilde{h}(\varphi),$$

$$u_r|_{r=r_2} = \frac{1}{2}R_0^{(1)\prime}(r_2) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(R_k^{(1)\prime}(r_2)\cos k\varphi + R_k^{(2)\prime}(r_2)\sin k\varphi\right) = \tilde{g}(\varphi),$$

из которых по формулам коэффициентов полных рядов Фурье имеем ГУ

$$R_k^{(i)}(r_1) = \tilde{h}_k^{(i)},\qquad R_k^{(i)\prime}(r_2) = \tilde{g}_k^{(i)},\qquad i = 1,\ 2;\quad k = 0,\ 1, \ldots, \qquad (8.35)$$

где

$$\tilde{h}_k^{(1)} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{h}(\varphi)\cos k\varphi d\varphi,\quad \tilde{h}_k^{(2)} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{h}(\varphi)\sin k\varphi d\varphi,$$

$$\tilde{g}_k^{(1)} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{g}(\varphi)\cos k\varphi d\varphi,\quad \tilde{g}_k^{(2)} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{g}(\varphi)\sin k\varphi d\varphi,\quad k = 0,\ 1, \ldots$$

1) $k=0$. Подстановка ОР из (8.34) в ГУ (8.35) для $k=0$ дает систему уравнений

$$\begin{cases} R_0^{(1)}(r_1) = a_0 \ln r_1 + b_0 = \tilde{h}_0^{(1)}, \\ R_0^{(1)}{}'(r_2) = \dfrac{a_0}{r_2} = \tilde{g}_0^{(1)} \end{cases}$$

с единственным решением

$$a_0 = r_2 \tilde{g}^{(1)}, \quad \mathrm{b}_0 = \tilde{h}_0^{(1)} - r_2 \ln r_1 \tilde{g}^{(1)}. \tag{8.36}$$

2) $k>0$. Подстановка остальных ОР из (8.34) в ГУ (8.35) для $k>0$ приводит к линейным системам уравнений

$$\begin{cases} R_k^{(i)}(r_1) = a_k^{(i)} r_1^k + b_k^{(i)} r_1^{-k} = \tilde{h}_k^{(i)}, \\ R_k^{(i)}{}'(r_2) = a_k^{(i)} k r_2^{k-1} - b_k^{(i)} k r_2^{-k-1} = \tilde{g}_k^{(i)}, \quad i=1,\ 2;\ k=1,\ 2,\dots, \end{cases}$$

с единственными решениями

$$a_k^{(i)} = \frac{r_2^{-k}\tilde{h}_k^{(i)} + \dfrac{r_1^{-k} r_2}{k}\tilde{g}_k^{(i)}}{r_1^k r_2^{-k} + r_1^{-k} r_2^k},$$

$$b_k^{(i)} = \frac{r_2^{k}\tilde{h}_k^{(i)} - \dfrac{r_1^{k} r_2}{k}\tilde{g}_k^{(i)}}{r_1^k r_2^{-k} + r_1^{-k} r_2^k}, \quad i=1,\ 2; \quad k=1,\ 2,\dots \tag{8.37}$$

Таким образом, формальным решением КЗ (8.31)−(8.33) является выражение

$$\tilde{u}(r,\varphi) = \frac{1}{2}\left(a_0 \ln r + b_0\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(a_k^{(1)} r^k + b_k^{(1)} r^{-k}\right)\cos k\varphi + \left(a_k^{(2)} r^k + b_k^{(2)} r^{-k}\right)\sin k\varphi\right],$$

постоянные которого однозначно определяются формулами (8.36) и (8.37).

Задача 8.5. В прямоугольнике решить краевую задачу для уравнения Пуассона:

$$\Delta u(x,y) = f(x,y), \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \tag{8.38}$$

$$\left.\begin{aligned} u|_{x=0} = \varphi_1(y), \quad u|_{x=a} = \varphi_2(y), \quad 0 < y < b, \\ u_y|_{y=0} = \psi_1(x), \quad u|_{y=b} = \psi_2(x), \quad 0 < x < a. \end{aligned}\right\} \tag{8.39}$$

Решение этой КЗ можно искать в виде суммы решений

$$u(x,y) = \varpi(x,y) + v(x,y) \tag{8.40}$$

двух вспомогательных КЗ:

$$\Delta\varpi(x,y) = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \tag{8.41}$$

$$\varpi|_{x=0} = 0, \quad \varpi|_{x=a} = 0, \quad 0 < y < b, \tag{8.42}$$

$$\varpi_y|_{y=0} = \psi_1(x), \quad \varpi|_{y=b} = \psi_2(x), \quad 0 < x < a. \tag{8.43}$$

$$\Delta v(x,y) = f(x,y), \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \tag{8.44}$$

$$v|_{x=0} = \varphi_1(y), \quad v|_{x=a} = \varphi_2(y), \quad 0 < y < b, \tag{8.45}$$

$$v_y|_{y=0} = 0, \quad \mathrm{v}|_{y=b} = 0, \quad 0 < x < a. \tag{8.46}$$

Вспомогательные КЗ будем решать методом разделения переменных.

I. Найдем решение КЗ (8.41) – (8.43).

1) $X_k(x) = ?$ Подставив произведение $\tilde{\varpi}(x,y) = X(x)Y(y) \neq 0$ в уравнение (8.41) и разделив переменные:

$$X''Y + XY'' = 0 \Leftrightarrow \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0 \Leftrightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda \in \mathbb{R},$$

получаем уравнения

$$Y''(y) - \lambda Y(y) = 0, \qquad 0 < y < b, \tag{8.47}$$

$$X''(x) = -\lambda X(x), \qquad 0 < x < a. \tag{8.48}$$

Подстановка $\tilde{\varpi}(x, y) = X(x)Y(y) \neq 0$ в ГУ (8.42) дает ГУ

$$X(0) = X'(a) = 0. \tag{8.49}$$

Нам известны СЗ и СФ: $\lambda_k = \left(\pi k / a\right)^2$ и $X_k(x) = \sin\frac{\pi k}{a}x,\ k = 1,\ 2, \dots,$ ЗШ – Л (8.48) – (8.49), совпадающей с ЗШ – Л (7.30) – (7.31).

2) $Y_k(y) = ?$ Найдем коэффициенты $Y_k(y)$ разложения решения КЗ (8.41) – (8.43) в ряд по СФ:

$$\varpi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(y) \sin\frac{\pi k}{a}x. \tag{8.50}$$

Подставляя этот ряд в уравнение (8.41), согласно уравнению (8.47), получаем ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[Y_k''(y) - \lambda_k Y_k(y)\right]\sin\frac{\pi k}{a}x = 0, \qquad 0 < x < a,\ \ 0 < y < b,$$

из которого вытекают уравнения

$$Y_k''(y) - \lambda_k Y_k(y) = 0, \quad 0 < y < b, \quad k = 1,\ 2, \dots \tag{8.51}$$

Ряд (8.50) удовлетворяет ГУ (8.42). Для ряда (8.50) ГУ (8.43) становятся рядами

$$\varpi_y\,|_{y=0} = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k'(0)\sin\frac{\pi k}{a}x = \psi_1(x), \quad 0 < x < a,$$

$$\varpi|_{y=b}=\sum_{k=1}^{\infty}Y_k(b)\sin\frac{\pi k}{a}x=\psi_2(x),\quad 0<x<a,$$

из которых имеем ГУ

$$Y_k'(0)=\psi_k^{(1)},\qquad Y_k(b)=\psi_k^{(2)},\quad k=1,\ 2,\dots,\qquad (8.52)$$

с граничными данными

$$\psi_k^{(1)}=\frac{2}{a}\int_0^a\psi_1(x)\sin\frac{\pi k}{a}xdx,\quad \psi_k^{(2)}=\frac{2}{a}\int_0^a\psi_2(x)\sin\frac{\pi k}{a}xdx,\quad k=1,\ 2,\dots$$

С целью решения ГЗ (8.51), (8.52) по корням $\tau_{1,2}=\pm\sqrt{\lambda_k}$ характеристических уравнений $\tau^2-\lambda_k=0$ для уравнений (8.51) строим их ОР:

$$Y_k(y)=A_ke^{\sqrt{\lambda_k}y}+B_ke^{-\sqrt{\lambda_k}y},\ A_k,B_k\in\mathbb{R},\ k=1,\ 2,\dots$$

Подстановка этих ОР в ГУ (8.52) приводит к линейным системам уравнений

$$\begin{cases} Y_k'(0)=\sqrt{\lambda_k}A_k-\sqrt{\lambda_k}B_k=\psi_k^{(1)}, \\ Y_k(b)=e^{\sqrt{\lambda_k}b}A_k+e^{-\sqrt{\lambda_k}b}B_k=\psi_k^{(2)},\ \mathrm{k}=1,2,\dots, \end{cases}$$

с единственными решениями

$$A_k=\frac{\sqrt{\lambda_k}\psi_k^{(2)}+e^{-\sqrt{\lambda_k}b}\psi_k^{(1)}}{2\sqrt{\lambda_k}ch\sqrt{\lambda_k}b},\quad B_k=\frac{\sqrt{\lambda_k}\psi_k^{(2)}-e^{\sqrt{\lambda_k}b}\psi_k^{(1)}}{2\sqrt{\lambda_k}ch\sqrt{\lambda_k}b},\quad k=1,\ 2,\dots$$

Из ОР при этих постоянных получаем решения ГЗ (8.51), (8.52):

$$Y_k(y)=\frac{\sqrt{\lambda_k}\psi_k^{(2)}ch\sqrt{\lambda_k}y+\psi_k^{(1)}sh\sqrt{\lambda_k}(y-b)}{\sqrt{\lambda_k}ch\sqrt{\lambda_k}b},\quad k=1,\ 2,\dots,$$

и, значит, решением КЗ (8.41)–(8.43) является

$$\varpi(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\lambda_k}\psi_k^{(2)}ch\sqrt{\lambda_k}\,y+\psi_k^{(1)}sh\sqrt{\lambda_k}\,(y-b)}{\sqrt{\lambda_k}ch\sqrt{\lambda_k}b}\sin\frac{\pi k}{a}x. \qquad (8.53)$$

II. Теперь отыщем решение КЗ (8.44) – (8.46).

1) $Y_k(x)=?$ Подставляя произведение $\tilde{v}(x,y)=X(x)Y(y)\neq 0$ в однородное уравнение (8.44) и в КУ (8.46) аналогично получаем следующие уравнения и ГУ:

$$X''(x)=\lambda X(x),\quad 0<x<a, \qquad (8.54)$$

$$Y''(y)=-\lambda Y(y),\quad 0<y<b, \qquad (8.55)$$

$$Y'(0)=Y(b)=0. \qquad (8.56)$$

a) $\lambda\le 0$. ЗШ – Л (8.55)–(8.56) среди $\lambda\le 0$ не имеет СЗ.

b) $\lambda>0$. Корням $\tau_{1,2}=\pm i\sqrt{\lambda}$ характеристического уравнения $\tau^2=-\lambda$ соответствует ОР $Y(y)=C_1\cos\sqrt{\lambda}\,y+C_2\sin\sqrt{\lambda}\,y\quad\forall C_1,C_2\in\mathbb{R}$, уравнения (8.55). Для этого ОР из ГУ (8.56) находим $Y'(0)=C_2\sqrt{\lambda}=0\Rightarrow C_2=0$ и $Y(b)=C_1\cos\sqrt{\lambda}b=0\Rightarrow\sqrt{\lambda}b=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k=0,\ 1,\dots,$ так как должна быть постоянная $C_1\neq 0$. Отсюда следует, что СЗ и СФ для ЗШ–Л (8.55), (8.56) являются

$$\lambda_k=\left(\frac{\pi(2k+1)}{2b}\right)^2,\quad Y_k(y)=\cos\frac{\pi(2k+1)}{2b}y,\ k=0,\ 1,\dots$$

2) $X_k(x)=?$ Определим коэффициенты разложения по этим СФ в ряде

$$v(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}X_k(x)\cos\frac{\pi(2k+1)}{2b}y. \qquad (8.57)$$

Для этого ряда уравнение (8.44) с помощью (8.54) становятся рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[X_k''(x)-\lambda_k X_k(x)\right]\cos\frac{\pi(2k+1)}{2b}y = xy, \quad 0<x<a, \quad 0<y<b,$$

из которого имеем уравнения

$$X_k''(x)-\lambda_k X_k(x) = f_k(x), \quad 0<x<a, \; k=0,\, 1, \dots, \tag{8.58}$$

с правыми частями $\quad f_k(x)=\dfrac{2}{b}\displaystyle\int_0^b f(x,y)\cos\frac{\pi(2k+1)}{2b}y\,dy, \quad k=0,\, 1, \dots$

Для ряда (8.57) из ГУ (8.45) получаем ряды

$$v\,|_{x=0} = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(0)\cos\frac{\pi(2k+1)}{2b}y = \varphi_1(y), \quad 0<y<b,$$

$$v\,|_{x=a} = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(a)\cos\frac{\pi(2k+1)}{2b}y = \varphi_2(y), \quad 0<y<b,$$

из которых выводим ГУ

$$X_k(0)=\varphi_k^{(1)}, \quad X_k(a)=\varphi_k^{(2)}, \quad k=0,\, 1, \dots, \tag{8.59}$$

с граничными данными

$$\varphi_k^{(1)}=\frac{2}{b}\int_0^b \varphi_1(y)\cos\frac{\pi(2k+1)}{2b}y\,dy, \quad \varphi_k^{(2)}=\frac{2}{b}\int_0^b \varphi_2(y)\cos\frac{\pi(2k+1)}{2b}y\,dy, \quad k=0,\, 1, \dots$$

Для решения ГЗ (8.58)–(8.59) сначала найдем ОР уравнений (8.58), которые будем искать в виде $X_k(x)=\tilde{X}_k(x)+X_k^*(x)$ суммы ОР $\tilde{X}_k(x)$ однородных уравнений (8.58) и ЧР $X_k^*(x)$ неоднородных уравнений (8.58). Как и в п. I. ОР однородных уравнений (8.58) являются функции $\tilde{X}_k(x)=A_k e^{\sqrt{\lambda_k}x}+B_k e^{-\sqrt{\lambda_k}x}$, $A_k, B_k \in \mathbb{R}$, $k=0,\, 1,\, 2, \dots$ Будем искать ЧР неоднородных уравнений (8.58) методом вариации Лагранжа, т. е. в виде

$$X_k^*(x) = A_k(x)e^{\sqrt{\lambda_k}x} + B_k(x)e^{-\sqrt{\lambda_k}x}, \quad k = 0,\ 1, \dots,$$

где производные коэффициентов определяются линейными системами

$$\begin{cases} e^{\sqrt{\lambda_k}x} A_k'(x) + e^{-\sqrt{\lambda_k}x} B_k'(x) = 0, \\ \left(e^{\sqrt{\lambda_k}x}\right)' A_k'(x) + \left(e^{-\sqrt{\lambda_k}x}\right)' B_k'(x) = f_k(x), \end{cases} \quad k = 0,\ 1, \dots,$$

с единственными решениями

$$A_k'(x) = \frac{f_k(x)}{2\sqrt{\lambda_k}} e^{-\sqrt{\lambda_k}x} \Rightarrow A_k(x) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}} \int_0^x e^{-\sqrt{\lambda_k}s} f_k(s)ds,$$

$$B_k'(x) = \frac{-f_k(x)}{2\sqrt{\lambda_k}} e^{\sqrt{\lambda_k}x} \Rightarrow B_k(x) = \frac{-1}{2\sqrt{\lambda_k}} \int_0^x e^{\sqrt{\lambda_k}s} f_k(s)ds, \quad k = 0,\ 1, \dots$$

Поэтому ЧР $X_k^*(x)$ являются функции

$$\frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}} \int_0^x e^{\sqrt{\lambda_k}(x-s)} f_k(s)ds - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}} \int_0^x e^{-\sqrt{\lambda_k}(x-s)} f_k(s)ds = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^x sh\left(\sqrt{\lambda_k}(x-s)\right) f_k(s)ds$$

и ОР уравнений (8.58) имеют вид

$$X_k(x) = A_k e^{\sqrt{\lambda_k}x} + B_k e^{-\sqrt{\lambda_k}x} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^x sh\left(\sqrt{\lambda_k}(x-s)\right) f_k(s)ds, \quad k = 0,\ 1, \dots \qquad (8.60)$$

Подставив ОР (8.60) в ГУ (8.59), приходим к линейным системам

$$\begin{cases} X_k(0) = A_k + B_k = \varphi_k^{(1)}, \\ X_k(a) = A_k e^{\sqrt{\lambda_k}a} + B_k e^{-\sqrt{\lambda_k}a} + \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \displaystyle\int_0^a sh\left(\sqrt{\lambda_k}(a-s)\right) f_k(s)ds = \varphi_k^{(2)}, \quad k = 0,\ 1, \dots, \end{cases}$$

с единственными решениями

$$A_k = \frac{\varphi_k^{(2)} - e^{-\sqrt{\lambda_k}a}\varphi_k^{(1)}}{2sh\sqrt{\lambda_k}a} - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}sh\sqrt{\lambda_k}a}\int_0^a sh\left(\sqrt{\lambda_k}(a-s)\right)f_k(s)ds,$$

$$B_k = \frac{e^{\sqrt{\lambda_k}a}\varphi_k^{(1)} - \varphi_k^{(2)}}{2sh\sqrt{\lambda_k}a} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}sh\sqrt{\lambda_k}a}\int_0^a sh\left(\sqrt{\lambda_k}(a-s)\right)f_k(s)ds, \quad k = 0,\ 1, ...$$

Из ОР (8.60) при этих постоянных имеем решения ГЗ (8.58), (8.59):

$$X_k(x) = \frac{\varphi_k^{(2)}sh\sqrt{\lambda_k}x + \varphi_k^{(1)}sh\sqrt{\lambda_k}(a-x)}{sh\sqrt{\lambda_k}a} - \frac{sh\sqrt{\lambda_k}x}{\sqrt{\lambda_k}sh\sqrt{\lambda_k}a}\int_0^a sh\left(\sqrt{\lambda_k}(a-s)\right)f_k(s)ds +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\int_0^x sh\left(\sqrt{\lambda_k}(x-s)\right)f_k(s)ds, \quad k = 0,\ 1, ...,$$

и, следовательно, формальным решением КЗ (8.44)–(8.46) является

$$v(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{\varphi_k^{(2)}sh\sqrt{\lambda_k}x + \varphi_k^{(1)}sh\sqrt{\lambda_k}(a-x)}{sh\sqrt{\lambda_k}a} - \right.$$

$$-\frac{sh\sqrt{\lambda_k}x}{\sqrt{\lambda_k}sh\sqrt{\lambda_k}a}\int_0^a sh\left(\sqrt{\lambda_k}(a-s)\right)f_k(s)ds +$$

$$\left. +\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\int_0^x sh\left(\sqrt{\lambda_k}(x-s)\right)f_k(s)ds\right]\cos\frac{\pi(2k+1)}{2b}y, \qquad (8.61)$$

а формальным решением искомой КЗ (8.38)−(8.39) ввиду (8.40) является сумма рядов (8.53) и (8.61).

Замечание 8.4. Частные решения некоторых неоднородных уравнений (8.58) можно находить проще – специальными методами курса обыкновенных дифференциальных уравнений в виде правых частей этих уравнений.

Тема 9. МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Смешанные задачи (Начально-краевые задачи). Пусть $\Omega-$ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n=1,\ 2,\dots$, с достаточно гладкой границей $S=\partial\Omega$. В цилиндре $G=\Omega\times]0,+\infty[$ переменных $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\Omega$ и $t>0$ требуется найти решения $u=u(x,t)$ гиперболического уравнения

$$u_{tt}+bu_t+A(x)u=f(x,t),\ x\in\Omega,\ t>0\,, \tag{9.1}$$

удовлетворяющие граничным условиям (ГУ)

$$\alpha(x')\frac{\partial u(x',t)}{\partial n}+\beta(x')u(x',t)=0,\ x'\in S,\ t>0\,, \tag{9.2}$$

и начальным условиям (НУ)

$$u\,|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t\,|_{t=0}=\psi(x),\ \ x\in\Omega\,. \tag{9.3}$$

Здесь $b\in\mathbb{R}$, $\mathrm{A}(x)u=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i})+q(x)u$ $-$эллиптический положительный дифференциальный оператор с коэффициентами $a_i(x)\in C^{(1)}(\bar{\Omega})$, $q(x)\in C(\bar{\Omega})$, $\frac{\partial}{\partial n}-$производная по внешней нормали n к S в ее точке x' и коэффициенты $0\le\alpha(x'),\ \beta(x')\in C(S),\ \alpha(x')+\beta(x')\ne 0\ \forall x'\in S'$,

Решения $u=u(x,t)$ смешанной задачи (СмЗ) $(9.1)-(9.3)$ из класса $C^{(2)}(G)\bigcap C^{(1)}(\bar{G})$ называются *классическими решениями* смешанной задачи $(9.1)-(9.3)$.

Классические решения смешанных задач не всегда существуют. При определенных условиях на достаточно гладкие правую часть $f(x,t)$ уравнения (9.1) и начальные данные $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ начальных условий (9.3) существует единственное классическое решение смешанной задачи $(9.1)-(9.3)$. В общем случае может существовать лишь единственное формальное (обобщенное) решение этой смешанной задачи, для построения которого будем использовать *метод разделения переменных* (метод Фурье). Чтобы построенное формальное решение смешанной задачи $(9.1)-(9.3)$ было ее классическим решением, необходимо соответствующее обоснование метода Фурье.

Решение. I. $X_k(x) = ?$ *Нахождение собственных функций (собственных значений).* По определению собственными функциями (СФ) и собственными значениями (СЗ) смешанной задачи $(9.1)-(9.3)$ называют решения соответствующей ей задачи Штурма–Лиувилля (ЗШ$-$Л). Для постановки этой ЗШ$-$Л (устно) ставится и письменно решается следующая вспомогательная задача: найти все решения вида $\tilde{u}(x,t) = T(t)X(x) \neq 0$ всегда однородного уравнения (9.1), т. е.

$$\tilde{u}_{tt} + b\tilde{u}_t + A(x)\tilde{u} = 0,\ x \in \Omega,\ t > 0\,, \tag{9.4}$$

с однородными ГУ (9.2), т. е.

$$\alpha(x')\frac{\partial \tilde{u}(x')}{\partial n} + \beta(x')\tilde{u}(x') = 0,\ x' \in S,\ t > 0\,. \tag{9.5}$$

1) Подставляем произведение $T(t)X(x)$ функций разных переменных в уравнение (9.4)

$$T''(t)X(x) + bT'(t)X(x) + A(x)T(t)X(x) = 0\,,$$

результат делим на произведение $T(t)X(x)$

$$\frac{T''(t) + bT'(t)}{T(t)} + \frac{A(x)X(x)}{X(x)} = 0\,,$$

разделяем функции разных переменных и получаем

$$\frac{T''(t) + bT'(t)}{T(t)} = -\frac{A(x)X(x)}{X(x)} = -\lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Отсюда имеем два уравнения

$$T''(t) + bT'(t) + \lambda T(t) = 0,\ t > 0\,, \tag{9.6}$$

$$A(x)X(x) = \lambda X(x),\ x \in \Omega\,. \tag{9.7}$$

2) Подставляя произведение $T(t)X(x)$ в граничные условия (9.5), находим тождество

$$T(t)\left[\alpha(x')\frac{\partial X(x')}{\partial n} + \beta(x')X(x')\right] = 0\,,\ x' \in S,\ t > 0\,,$$

из которого следует, что

$$\alpha(x')\frac{\partial X(x')}{\partial n}+\beta(x')X(x')=0\,,\; x'\in S\,, \tag{9.8}$$

так как $T(t)\neq 0$.

Выведенная краевая задача на отыскание решений $X(x)\neq 0$ и соответствующих им постоянных разделения $\lambda\in\mathbb{R}$ дифференциального уравнения (9.7) с граничными условиями (9.8) является искомой ЗШ$-$Л. Далее решают эту ЗШ$-$Л и находят собственные функции и собственные значения смешанной задачи $(9.1)-(9.3)$.

Теорема 1 [6, с. 334]. *Множество собственных значений ЗШ$-$Л* $(9.7)-(9.8)$ *счетно и не имеет конечных предельных точек. Каждое собственное значение имеет конечную кратность. Множество базисных собственных функций ЗШ$-$Л* $(9.7)-(9.8)$ *счетно. Собственные функции попарно ортогональны и образуют полную систему в* $L_2(\Omega)$.

Согласно этой теореме делаем следующее заключения.

1^0. Все собственные значения можно пронумеровать в порядке возрастания их величины:

$$0\le\lambda_0\le\lambda_1\le\ldots\le\lambda_k\to+\infty \quad \text{при} \quad k\to\infty\,,$$

где λ_k повторяется столько раз, какова его кратность.

2^0. Каждому собственному значению λ_k соответствует только одна собственная функция $X_k(x),\; k=0,\,1,\ldots,$ и

$$\int\limits_{\Omega}X_k(x)X_m(x)dx=0\,,\; k\neq m\,.$$

3^0. Каждая функция $g(x)\in L_2(\Omega)$ разлагается в $L_2(\Omega)$ в ряд Фурье

$$g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}g_kX_k(x) \tag{9.9}$$

с коэффициентами Фурье

$$g_k=\frac{1}{\|X_k(x)\|^2}\int\limits_{\Omega}g(x)X_k(x)dx\,,\; \|X_k(x)\|^2=\int\limits_{\Omega}|X_k(x)|^2\,dx\,,\; k=0,\,1,\ldots \tag{9.10}$$

Если функция $g\in C^{(2)}(\Omega)\bigcap C^{(1)}(\bar{\Omega})$ удовлетворяет ГУ (9.8) и $A(x)g\in L_2(\Omega)$, то ряд Фурье (9.9) с коэффициентами (9.10) сходится в обычном смысле равномерно и абсолютно на $\bar{\Omega}$.

Формальное решение исходной задачи (9.1) (9.3) ищем в виде разложения по всем ее собственным функциям

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}T_k(t)X_k(x)\,. \tag{9.11}$$

II. $T_k(t) = ?$ *Нахождение коэффициентов ряда* (9.11). Этот ряд граничным условиям (9.2) удовлетворяет.

1) Подставляя его в уравнение (9.1), с помощью левой части уравнения (9.6) легко придти к ряду

$$\sum_{k=0}^{\infty}[T_k''(t) + bT_k'(t) + \lambda_k T_k(t)]X_k(x) = f(x,t)\,,\ x \in \Omega\,,\ t > 0\,,$$

из которого ввиду свойства 3^0 выводим, что коэффициенты $T_k(t)$ являются решениями уравнений

$$T_k''(t) + bT_k'(t) + \lambda_k T_k(t) = f_k(t)\,,\ \ t > 0,\ \ k = 0,\ 1, \ldots, \tag{9.12}$$

с правыми частями

$$f_k(t) = \frac{1}{\|X_k(x)\|^2}\int\limits_{\Omega} f(x,t)X_k(x)dx\,, \quad k = 0,\ 1, \ldots$$

2) Подставляя ряд (9.11) в начальные условия (9.3), имеем

$$u(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(0)X_k(x) = \varphi(x)\,,\ u_t(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k'(0)X_k(x) = \psi(x)\,,\ x \in \Omega\,.$$

Отсюда аналогично получаем начальные условия

$$T_k(0) = \varphi_k\,,\ T_k'(0) = \psi_k\,,\ \ k = 0,\ 1,\ 2, \ldots, \tag{9.13}$$

с начальными данными

$$\varphi_k = \frac{1}{\|X_k(x)\|^2}\int\limits_{\Omega}\varphi(x)X_k(x)dx\,,\ \ \psi_k = \frac{1}{\|X_k(x)\|^2}\int\limits_{\Omega}\psi(x)X_k(x)dx\,,\ \ k = 0,\ 1, \ldots$$

Таким образом, коэффициенты $T_k(t)$ являются решениями задач Коши (9.12), (9.13). В силу линейности уравнений (9.12) их общие решения можно искать в виде $T_k(t) = \tilde{T}_k(t) + T_k^*(t)$, где $\tilde{T}_k(t) -$ общие решения однородных уравнений (9.12) и $T_k^*(t) -$ частные решения неоднородных уравнений (9.12). Для стационарных уравнений (9.12) общие решения $\tilde{T}_k(t)$ строятся по корням их характеристических уравнений

$$\tau^2 + b\tau + \lambda_k = 0\,,\ \ k = 0,\ 1, \ldots$$

a) Если для индексов $k=\overline{0,k_0}$ собственные значения $\lambda_k=0$, то

$$\tilde{T}_k(t)=a_k t+b_k,\ \forall a_k,b_k\in\mathbb{R},\ k=\overline{0,k_0},\ \text{при}\ \ b=0, \tag{9.14}$$

$$\tilde{T}_k(t)=a_k e^{-bt}+b_k,\ \forall a_k,b_k\in\mathbb{R},\ k=\overline{0,k_0},\ \text{при}\ \ b\neq 0. \tag{9.15}$$

b) Для всех индексов $k=\overline{k_0+1,k_1}$, при которых $0<\lambda_k<b^2/4$, имеем два различных вещественных характеристических корня: $\tau_1^{(k)}=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4\lambda_k}}{2}$, $\tau_2^{(k)}=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4\lambda_k}}{2}$ и, следовательно, общие решения

$$\tilde{T}_k(t)=a_k e^{\frac{-b+\sqrt{b^2-4\lambda_k}}{2}t}+b_k e^{\frac{-b-\sqrt{b^2-4\lambda_k}}{2}t}\ \forall a_k,b_k\in\mathbb{R},\ k=\overline{k_0+1,k_1}. \tag{9.16}$$

c) Для всех индексов $k=\overline{k_1+1,k_2}$, при которых $\lambda_k=b^2/4$, имеем один вещественный характеристический корень $\tau=-b/2$ кратности 2 и, следовательно, общие решения

$$\tilde{T}_k(t)=e^{-\frac{bt}{2}}(a_k t+b_k)\ \forall a_k,b_k\in\mathbb{R},\ k=\overline{k_1+1,k_2}. \tag{9.17}$$

d) Для остальных индексов $k>k_2$, при которых $\lambda_k>b^2/4$, имеем два комплексно-сопряженных характеристических корня $\tau_{1,2}=\dfrac{-b\pm i\sqrt{4\lambda_k-b^2}}{2}$ и, следовательно, общие решения

$$\tilde{T}_k(t)=e^{\frac{-bt}{2}}(a_k\cos\sqrt{\lambda_k-(b^2/4)}t+b_k\sin\sqrt{\lambda_k-(b^2/4)t})\ \forall a_k,b_k\in\mathbb{R},\ k>k_2. \tag{9.18}$$

Частные решения $T_k^*(t)$ уравнений (9.12) можно искать специальными методами в случае их правых частей $f_k(t)$ особого вида или известными методом вариации произвольных постоянных Лагранжа в случае $f_k(t)$ любого вида. Применение этого метода Лагранжа в каждом из рассмотренных выше общих решений дает следующие частные решения.

a) $\lambda_k=0,\ k=\overline{0,k_0}$. Нетрудно убедиться, что частными решениями являются

$$T_k^*(t) = \int_0^t (t-s) f_k(s)ds, \quad k = \overline{0, k_0}\ , \text{ при } \ b = 0; \tag{9.19}$$

$$T_k^*(t) = \frac{1}{b}\int_0^t (1 - e^{b(s-t)}) f_k(s)ds, \quad k = \overline{0, k_0}\ , \text{ при } \ b \neq 0. \tag{9.20}$$

Первые из них являются пределом вторых при $b \to 0$.

b) $\lambda_k < b^2/4,\ k = \overline{k_0+1, k_1}$. Согласно методу Лагранжа, первые производные коэффициентов частных решений $T_k^*(t) = a_k(t)e^{\tau_1^{(k)}t} + b_k(t)e^{\tau_2^{(k)}t}$ являются решениями системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_k'(t)e^{\tau_1^{(k)}t} + b_k'(t)e^{\tau_2^{(k)}t} = 0, \\ a_k'(t)(e^{\tau_1^{(k)}t})' + b_k'(t)(e^{\tau_2^{(k)}t})' = f_k(t), \end{cases}$$

главный определитель которой равен $\Delta = (\tau_2^{(k)} - \tau_1^{(k)})e^{(\tau_1^{(k)}+\tau_2^{(k)})t}$. Решая ее методом Крамера, получаем

$$a_k'(t) = \frac{1}{\tau_1^{(k)} - \tau_2^{(k)}} e^{(b+\tau_2^{(k)})t} f_k(t), \quad b_k'(t) = \frac{-1}{\tau_1^{(k)} - \tau_2^{(k)}} e^{(b+\tau_1^{(k)})t} f_k(t).$$

Отсюда интегрированием находим коэффициенты

$$a_k(t) = \frac{1}{\tau_1^{(k)} - \tau_2^{(k)}} \int_0^t e^{(b+\tau_2^{(k)})s} f_k(s)ds, \quad b_k(t) = \frac{-1}{\tau_1^{(k)} - \tau_2^{(k)}} \int_0^t e^{(b+\tau_1^{(k)})s} f_k(s)ds$$

и частные решения

$$T_k^*(t) = \frac{1}{\tau_1^{(k)} - \tau_2^{(k)}} \int_0^t \left[e^{\tau_1^{(k)}(t-s)} - e^{\tau_2^{(k)}(t-s)} \right] f_k(s)ds, \ k = \overline{k_0+1, k_1}\,. \tag{9.21}$$

c) $\lambda_k = b^2/4,\ k = \overline{k_1+1, k_2}$. Первые производные коэффициентов частных решений $T_k^*(t) = e^{-\frac{bt}{2}}(ta_k(t) + b_k(t))$ удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\begin{cases} a_k'(t) + e^{\frac{-bt}{2}} + b_k'(t)e^{-\frac{bt}{2}} = 0, \\ a_k'(t)\left(te^{\frac{-bt}{2}}\right)' + b_k'(t)\left(e^{-\frac{bt}{2}}\right)' = f_k(t), \end{cases}$$

главным определителем которой является $\Delta = -e^{-bt}$. Решаем ее по правилу Крамера:

$$a_k'(t) = e^{\frac{bt}{2}} f_k(t),\ \ b_k'(t) = -te^{\frac{bt}{2}} f_k(t),$$

интегрируем и получаем частные решения

$$T_k^*(t) = \int_0^t e^{\frac{b(s-t)}{2}} (t-s) f_k(s) ds\,,\ \ k = \overline{k_1+1, k_2}\,. \tag{9.22}$$

d) $\lambda_k > b^2/4,\ k > k_2$. Первые производные коэффициентов частных решений $T_k^*(t) = e^{\frac{-bt}{2}}\left[a_k(t)\cos\sqrt{\lambda_k - (b^2/4)}t + b_k(t)\sin\sqrt{\lambda_k - (b^2/4)}t\right]$ находятся методом Крамера из системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_k'(t) e^{-\frac{bt}{2}} \cos\sqrt{\lambda_k - (b^2/4)}t + b_k'(t) e^{-\frac{bt}{2}} \sin\sqrt{\lambda_k - (b^2/4)}t = 0, \\ a_k'(t)\left(e^{-\frac{bt}{2}} \cos\sqrt{\lambda_k - (b^2/4)}t\right)' + b_k'(t)\left(e^{-\frac{bt}{2}} \sin\sqrt{\lambda_k - (b^2/4)}t\right)' = f_k(t) \end{cases}$$

с главным определителем $\Delta = \sqrt{\lambda_k - (b^2/4)}e^{-bt}$. На основании ее решений

$$a_k'(t) = \frac{-1}{\sqrt{\lambda_k - (b^2/4)}} e^{\frac{bt}{2}} \sin\left(\sqrt{\lambda_k - (b^2/4)}t\right) f_k(t)\,,$$

$$b_k'(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k - (b^2/4)}} e^{\frac{bt}{2}} \cos\left(\sqrt{\lambda_k - (b^2/4)}t\right) f_k(t)$$

заключаем, что частными решениями являются

$$T_k^*(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k - (b^2/4)}} \int_0^t e^{\frac{b(s-t)}{2}} \sin\left(\sqrt{\lambda_k - \left(b^2/4\right)}\left(t-s\right)\right) f_k(s) ds\,,\ \ k > k_2. \tag{9.23}$$

Итак, общие решения уравнений (9.12) найдены. Для завершения решения задач Коши (9.12), (9.13) остается подставить эти общие решения в начальные условия (9.13) в соответствии с рассмотренными выше случаями.

а) $\lambda_k = 0,\ k = \overline{0, k_0}$. При $b = 0$, согласно формулам (9.14) и (9.19) и начальным условиям (9.13), имеем

$$T_k(0) = \tilde{T}_k(0) + T_k^*(0) = b_k + 0 = \varphi_k,$$
$$T_k'(0) = \tilde{T}_k'(0) + T_k^{*\prime}(0) = a_k + 0 = \psi_k$$

и поэтому

$$T_k(t) = \psi_k t + \varphi_k + \int_0^t (t-s) f_k(s) ds\,,\quad k = \overline{0, k_0}\,. \tag{9.24}$$

При $b \neq 0$, согласно формулам (9.15) и (9.20), аналогично имеем

$$T_k(0) = a_k + b_k + 0 = \varphi_k \Rightarrow b_k = \varphi_k - \left(\frac{\psi_k}{b}\right),$$
$$T_k'(0) = -b a_k + 0 = \psi_k \Rightarrow a_k = -\left(\frac{\psi_k}{b}\right)$$

и поэтому

$$T_k(t) = -\left(\frac{\psi_k}{b}\right) e^{-bt} + \psi_k - \left(\frac{\psi_k}{b}\right) + \frac{1}{b}\int_0^t \left(1 - e^{b(s-t)}\right) f_k(s) ds\,,\quad k = \overline{0, k_0}\,. \tag{9.25}$$

b) $\lambda_k < b^2/4,\quad k = \overline{k_0 + 1, k_1}$. В силу формул (9.16) и (9.21) получаем систему

$$\begin{cases} T_k(0) = a_k + b_k + 0 = \varphi_k, \\ T_k'(0) = \tau_1^{(k)} a_k + \tau_2^{(k)} b_k + 0 = \psi_k, \end{cases}$$

которая имеет единственные решения

$$a_k = \frac{\tau_2^{(k)}\varphi_k - \psi_k}{\tau_2^{(k)} - \tau_1^{(k)}},\ b_k = \frac{\tau_1^{(k)}\varphi_k - \psi_k}{\tau_1^{(k)} - \tau_2^{(k)}}\,,\ k = \overline{k_0 + 1, k_1}\,. \tag{9.26}$$

c) $\lambda_k = b^2/4,\ k = \overline{k_1 + 1, k_2}$. На основании формул (9.17) и (9.22) приходим к

$$T_k(0) = b_k + 0 = \varphi_k \Rightarrow b_k = \varphi_k,$$
$$T_k'(0) = -\frac{b}{2} b_k + a_k = \psi_k \Rightarrow a_k = \psi_k + \frac{b}{2}\varphi_k$$

и получаем, что коэффициенты

$$T_k(t)=e^{-\frac{bt}{2}}\left[\left(\psi_k+\frac{b}{2}\varphi_k\right)t+\varphi_k\right]+\int_0^t e^{\frac{b(s-t)}{2}}(t-s)f_k(s)ds,\ k=\overline{k_1+1,k_2}. \quad (9.27)$$

d) $\lambda_k > b^2/4,\ k > k_2$. В виду формул (9.18) и (9.23) приходим к системе

$$\begin{cases} T_k(0)=a_k+0=\varphi_k, \Rightarrow a_k=\varphi_k \\ T_k'(0)=-\dfrac{b}{2}a_k+\sqrt{\lambda_k-\left(\dfrac{b^2}{4}\right)}b_k=\psi_k \Rightarrow b_k=\dfrac{\psi_k+(b/2)\varphi_k}{\sqrt{\lambda_k-(b^2/4)}}. \end{cases} \quad (9.28)$$

В итоге найдено единственное формальное решение смешанной задачи (9.1)$-$(9.3) вида (9.11), где коэффициенты $T_k(t)$ выражаются формулами (9.24), (9.25), (9.27) в случаях a), c) и однозначно выражаются соответствующими формулами по коэффициентам (9.26) и (9.28) в остальных случаях b), d).

Замечание 9.1 Смешанные задачи для дифференциального уравнения (9.1) при неоднородных граничных условиях

$$\alpha(x')\frac{\partial u(x',t)}{\partial n}+\beta(x')u(x',t)=\mu(x',t),\ x'\in S,\ t>0, \quad (9.29)$$

и начальных условиях (9.3) сводятся к смешанным задачам

$$v_{tt}+bv_t+A(x)v=f(x,t)-\omega_{tt}-b\omega_t-A(x)\omega,\ x\in\Omega,\ t>0, \quad (9.30)$$

с однородными граничными условиями

$$\alpha(x')\frac{\partial v(x',t)}{\partial n}+\beta(x')v(x',t)=0,\ x'\in S,\ t>0, \quad (9.31)$$

и начальными условиями

$$v|_{t=0}=\varphi(x)-\omega(x,0),\ v_t|_{t=0}=\psi(x)-\omega_t(x,0),\ x\in\Omega, \quad (9.32)$$

если их решения искать в виде суммы

$$u(x,t)=\omega(x,t)+v(x,t), \quad (9.33)$$

где $\omega(x,t)$ – любая дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая граничным условиям

$$\alpha(x')\frac{\partial\omega(x',t)}{\partial n}+\beta(x')\omega(x',t)=\mu(x',t),\ x'\in S,\ t>0\,. \tag{9.34}$$

В случае конечного множества точек $x'\in S$ из бесконечного множества таких функций $\omega(x,t)$ одну из них обычно удается подобрать или, в крайнем случае, вычислить в виде

$$\omega(x,t)=\sum_{x'\in S}\left[a(x')x^2+b(x')x+c(x')\right]\mu(x',t) \tag{9.35}$$

методом неопределенных коэффициентов после подстановки (9.35) в (9.34). В общем случае вопрос существования таких функций $\omega(x,t)$ решается теоремами о продолжении функций с границы на всю область [7]. Отметим, что если достаточно гладкая функция $\omega(x,t)$, удовлетворяющая граничным условиям (9.34), найдена, то вспомогательную смешанную задачу $(9.30)-(9.32)$ можно решать методом разделения переменных, потому что граничные условия (9.31) однородные.

Задача 9.1. Решить смешанную задачу

$$u_{tt}-u_{xx}+2u=t,\quad 0<x<1,\quad t>0, \tag{9.36}$$

$$(u_x-u)\,|_{x=0}=0,\quad (u_x+u)\,|_{x=0}=0,\quad t>0, \tag{9.37}$$

$$u\,|_{t=0}=\sin x,\quad u_t\,|_{t=0}=\cos x,\quad 0<x<1. \tag{9.38}$$

Решение. I. $X_k(x)=?$ Подставляя произведение $\tilde{u}(x,t)=$ $=T(t)X(x)\neq 0$ в однородное уравнение (9.36)

$$T''X-TX''+2TX=0\Leftrightarrow\frac{T''}{T}-\frac{X''-2X}{X}=0\Leftrightarrow\frac{T''}{T}=\frac{X''-2X}{X}=-\lambda\in\mathbb{R},$$

получаем уравнения

$$T''(t)+\lambda T(t)=0,\quad t>0, \tag{9.39}$$

$$X''(x)-2X(x)=-\lambda X(x),\quad 0<x<1. \tag{9.40}$$

Подставляя $T(t)X(x)\neq 0$ в ГУ (9.37)

$$T(t)(X'(0)-X(0))\equiv 0,\qquad T(t)(X'(1)+X(1))\equiv 0,$$

находим ГУ

$$X'(0)-X(0)=0, \qquad X'(1)+X(1)=0. \qquad (9.41)$$

Полученная ЗШ – Л (9.40) – (9.41) является уже решенной ЗШ–Л (7.3)–(7.4), которая имеет следующие СЗ и СФ:

$$\lambda_k=\mu_k^2+2, \quad X_k(x)=\mu_k\cos\mu_k x+\sin\mu_k x, \quad k=1,\ 2,\dots$$

II. $T_k(t)=?$ Для определения коэффициентов $T_k(t)$ подстановка ряда

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)(\mu_k\cos\mu_k x+\sin\mu_k x) \qquad (9.42)$$

в уравнение (9.36), согласно левой части уравнения (9.39), дает ряд Фурье

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[T_k''(t)+\lambda_k T_k(t)\right]X_k(x)=t, \quad 0<x<1, \quad t>0,$$

из которого по формуле коэффициентов Фурье (9.10) имеем уравнения

$$T_k''(t)+\lambda_k T_k(t)=f_k(t), \quad t>0, \quad k=1,\ 2,\dots, \qquad (9.43)$$

с правыми частями

$$f_k(t)=\frac{t}{\|X_k(x)\|^2}\int_0^1 X_k(x)dx=\alpha_k t, \quad k=1,\ 2,\dots \qquad (9.44)$$

Подставив ряд (9.42) в НУ(9.38), согласно (9.13), приходим к НУ

$$T_k(0)=\varphi_k, \quad T_k'(0)=\psi_k, \quad k=1,\ 2,\dots, \qquad (9.45)$$

с начальными данными

$$\varphi_k = \frac{1}{\|X_k(x)\|^2}\int_0^1 \sin x X_k(x)dx, \quad \psi_k = \frac{1}{\|X_k(x)\|^2}\int_0^1 \cos x X_k(x)dx.$$

Решаем ЗК (9.43) – (9.45). Корням $\tau_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda_k}$ характеристического уравнения $\tau^2 + \lambda_k = 0$ соответствует ОР однородных уравнений (9.43):

$$\tilde{T}_k(t) = a_k \cos\sqrt{\lambda_k}t + b_k \sin\sqrt{\lambda_k}t, \quad k = 1,\ 2, ... \tag{9.46}$$

ЧР уравнений (9.43) будем искать в виде их правых частей (9.44). Поэтому подстановка функции $T_k^*(t) = c_k t + d_k$ в уравнения (9.43) и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях переменной t:

$$\lambda_k(c_k t + d_k) = \alpha_k t \Rightarrow c_k = \frac{\alpha_k}{\lambda_k}, \quad d_k = 0,$$

приводит к ЧР

$$T_k^*(t) = \frac{\alpha_k}{\lambda_k}t, \quad k = 1,\ 2, ... \tag{9.47}$$

Теперь подставляем ОР

$$T_k(t) = a_k \cos\sqrt{\lambda_k}t + b_k \sin\sqrt{\lambda_k}t + \frac{\alpha_k}{\lambda_k}t, \quad k = 1,\ 2, \dots,$$

в НУ (9.45)

$$T_k(0) = a_k = \varphi_k, \qquad T_k'(0) = \sqrt{\lambda_k}b_k + \frac{\alpha_k}{\lambda_k} = \psi_k \Rightarrow b_k = \frac{\psi_k - (\alpha_k/\lambda_k)}{\sqrt{\lambda_k}}$$

и находим решения ЗК (9.43) – (9.45)

$$T_k(t) = \varphi_k \cos\sqrt{\lambda_k}t + \frac{\psi_k - (\alpha_k/\lambda_k)}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}t + \frac{\alpha_k}{\sqrt{\lambda_k}}, \quad k = 1,\ 2, ...$$

В результате получаем формальное решение СмЗ (9.36)–(9.38)

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\varphi_k\cos\sqrt{\lambda_k}t+\frac{\psi_k-\dfrac{\alpha_k}{\lambda_k}}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}t+\frac{\alpha_k}{\sqrt{\lambda_k}}\right](\mu_k\cos\mu_k x+\sin\mu_k x).$$

Задача 9.2. Решить смешанную задачу

$$u_{tt}-4u_{xx}+2u_t-u=\sin t,\quad 0<x<\pi,\quad t>0,\tag{9.48}$$

$$u_x|_{x=0}=e^t,\ \ u|_{x=\pi}=1,\quad t>0,\tag{9.49}$$

$$u|_{t=0}=x^2,\quad u_t|_{t=0}=1,\quad 0<x<\pi.\tag{9.50}$$

Решение. I. *Редукция к СмЗ с однородными ГУ.* На основании замечания 9.1 решение этой СЗ будем искать в виде суммы

$$u(x,t)=\omega(x,t)+v(x,t),\tag{9.51}$$

где $\omega\in C^{(2)}\big([0,\pi]\times[0,+\infty[\big)$ – некоторая функция, удовлетворяющая неоднородным ГУ

$$\omega_x|_{x=0}=e^t,\ \ \omega|_{x=\pi}=1,\quad t>0\ .\tag{9.52}$$

Эти ГУ для функций $\omega(x,t)=(a_1x+b_1)e^t+(a_2x+b_2)$ вида (9.35) становятся системой линейных уравнений

$$\begin{cases}\omega_x|_{x=0}=a_1e^t+a_2=e^t,\Rightarrow a_1=1,a_2=0,\\ \omega|_{x=\pi}=(a_1\pi+b_1)e^t+(a_2\pi+b_2)=1,\Rightarrow a_1\pi+b_1=0,a_2\pi+b_2=1,\end{cases}$$

имеющей ЧР $a_1=1,\ a_2=0,\ b_1=-\pi,\ b_2=1$, которому соответствует функция $\omega(x,t)=(x-\pi)e^t+1$, которая, как показывает проверка, действительно удовлетворяет ГУ (9.52).

Поэтому, подставив сумму (9.51) с выбранной функцией $\omega(x,t)$ в (9.48)−(9.50), согласно формулам (9.30)−(9.32), соответственно приходим к следующей СмЗ для функции $\nu(x,t)$:

$$\nu_{tt} - 4\nu_{xx} + 2\nu_t - \nu = \sin t + 2(\pi - x)e^t + 1, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \tag{9.53}$$

$$\nu_x|_{x=0} = \nu|_{x=\pi} = 0, \quad t > 0, \tag{9.54}$$

$$\nu|_{t=0} = x^2 - x + \pi - 1, \quad \nu_t|_{t=0} = 1 + \pi - x, \quad 0 < x < \pi. \tag{9.55}$$

II. $X_k(x) = ?$ Подстановкой $\tilde{\nu}(x,t) = T(t)X(x) \neq 0$ в однородное уравнение (9.53), делением результата на $4T(t)X(x)$ и разделением переменных

$$T''X - 4TX'' + 2T'X - TX = 0 \Leftrightarrow \frac{T'' + 2T' - T}{4T} = \frac{X''}{X} = -\lambda \in \mathbb{R}$$

получаем два уравнения:

$$T''(t) + 2T'(t) + (4\lambda - 1)T(t) = 0, \ \ t > 0, \tag{9.56}$$

$$X''(x) = -\lambda X(x), \quad 0 < x < \pi. \tag{9.57}$$

ГУ (9.54) для функций вида $T(t)X(x) \neq 0$ не зависят от функций $T(t) \neq 0$ и сводятся к ГУ

$$X'(0) = X(\pi) = 0. \tag{9.58}$$

Надо всегда стремиться к тому, чтобы ЗШ−Л была как можно проще или совпадала с уже решенной ЗШ−Л. К сожалению ЗШ−Л (9.57) − (9.58) в теме 7 мы не решали и решим ее теперь.

1), 2) $\lambda \leq 0$. При решении задачи 7.1 доказывается, что среди $\lambda \leq 0$ нет СЗ и для них нет СФ для ЗШ−Л (9.57)−(9.58).

3). $\lambda > 0$. Как в решении задачи 7.1 находится ОР

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R} \tag{9.59}$$

уравнения (9.57). Подставляя это ОР в ГУ (9.58), имеем систему

$$\begin{cases} X'(0) = C_2\sqrt{\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0, \\ X(\pi) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}\pi = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 \neq 0, \cos\sqrt{\lambda}\pi = 0, \end{cases}$$

из которой находятся СЗ $\lambda_k = (k + (1/2))^2$, $k = 0,\ 1, \ldots$, так как

$$\sqrt{\lambda}\pi = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow 0 < \sqrt{\lambda} = k + \frac{1}{2} > 0, \quad k = 0,\ 1, \ldots,$$

и СФ $\quad X_k(x) = \cos(k + \frac{1}{2})x, \quad k = 0,\ 1, \ldots,\quad$ ввиду ОР (9.59).

III. $T_k(t) = ?$ Подставив ряд $v(x,t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} T_k(t) \cos(k + \frac{1}{2})x$ в уравнение (9.53), благодаря левой части уравнения (9.56) легко получить ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[T_k''(t) + 2T_k'(t) + (4\lambda_k - 1)T_k(t) \right] \cos(k + \frac{1}{2})x = \sin t + 2(\pi - x)e^t + 1,\ 0 < x < \pi,\ t > 0,$$

из которого заключаем, что коэффициенты $T_k(t)$ должны быть решениями уравнений

$$T_k''(t) + 2T_k'(t) + (4\lambda_k - 1)T_k(t) = f_k(t), \;\; t > 0, \;\; k = 0,\ 1, \ldots, \tag{9.60}$$

с правыми частями

$$f_k(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left[\sin t + 2(\pi - x)e^t + 1 \right] \cos(k + \frac{1}{2})x dx = \tag{9.61}$$

$$= \alpha_k \sin t + \beta_k e^t + \gamma_k, \;\; k = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

Для ряда $v(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}T_k(t)\cos(k+\frac{1}{2})x$ НУ (9.55) превращаются в НУ

$$T_k(0)=\varphi_k,\quad T_k'(0)=\psi_k,\quad k=0,\ 1,\ 2,\ldots,\qquad (9.62)$$

где

$$\varphi_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x^2-x+\pi-1)\cos(k+\frac{1}{2})xdx,\ \psi_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1+\pi-x)\cos(k+\frac{1}{2})xdx.$$

Характеристическое уравнение $\tau^2+2\tau+(4\lambda_k-1)=0$ стационарного ОДУ (9.60) имеет корни $\tau_{1,2}^{(k)}=-1\pm\sqrt{2-4\lambda_k}=-1\pm\sqrt{1-4k^2-4k}$, из которых два корня $\tau_1^{(0)}=0$ и $\tau_2^{(0)}=-2$ вещественные при $k=0$, а корни $\tau_1^{(k)}=-1+i\sqrt{4k^2+4k-1}$, $\tau_2^{(k)}=-1-i\sqrt{4k^2+4k-1}$ – попарно комплексно-сопряженные для всех $k\geq 1$.

1) $k=0$. Этот случай соответствует случаю b) решения СмЗ (9.1)−(9.3). Ясно, что ОР однородного уравнения (9.60) при $k=0$ является функция

$$\tilde{T}_0(t)=a_0+b_0e^{-2t}\quad\forall a_0,b_0\in\mathbb{R}.$$

ЧР неоднородных уравнений (9.60) при всех $k\geq 0$ будем искать в виде функции

$$T_k^*(t)=c_k\sin t+d_k\cos t+e_ke^t+g_k,\quad k=0,\ 1,\ 2,\ldots,\qquad (9.63)$$

соответствующих правым частям (9.61) этих уравнений. Подставив функцию (9.63) в уравнения (9.60) и приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях, получаем систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\sin t&:(4\lambda_k-2)c_k-2d_k=\alpha_k,\\ \cos t&:\ 2c_k+(4\lambda_k-2)d_k=0,\\ e^t&:\quad (4\lambda_k+2)e_k=\beta_{k,}\\ const&:\quad (4\lambda_k-1)g_k=\gamma_k,\end{aligned}\right\}$$

которая имеет единственные решения

$$
\begin{aligned}
&c_k = \frac{(4\lambda_k - 2)\lambda_k}{(4\lambda_k - 2)^2 + 4}, \quad d_k = \frac{-2\lambda_k}{(4\lambda_k - 2)^2 + 4}, \\
&e_k = \frac{\beta_k}{4\lambda_k + 2}, \quad g_k = \frac{\gamma_k}{4\lambda_k - 1}, \quad k = 0,\, 1, \ldots
\end{aligned}
\tag{9.64}
$$

Поскольку знаменатель $4\lambda_0 - 1 = 0$ при $k = 0$ в коэффициенте g_0, то при $k = 0$ последнее слагаемое g_0 в ЧР (9.63) не является ЧР уравнения (9.60) для последнего слагаемого γ_0 правой части (9.61), так как $\tau_1^{(0)} = 0 -$ характеристический корень. Нетрудно проверить, что при $k = 0$ ЧР уравнения (9.60) является функция

$$
T_0^*(t) = c_0 \sin t + d_0 \cos t + e_0 e^t + \frac{\gamma_0}{2} t
$$

и, следовательно, ОР этого уравнения задается функциями

$$
T_0(t) = a_0 + b_0 e^{-2t} + c_0 \sin t + d_0 \cos t + e_0 e^t + \frac{\gamma_0}{2} t \quad \forall a_0, b_0 \in \mathbb{R}\,.
$$

В силу НУ (9.62), его коэффициенты a_0 и b_0 однозначно определяются из линейной системы уравнений

$$
\begin{cases}
T_0(0) = a_0 + b_0 + d_0 + e_0 = \varphi_{0,} \\
T_0'(0) = a_0 - 2b_0 + c_0 + e_0 + \dfrac{\gamma_0}{2} = \psi_0
\end{cases}
$$

формулами

$$
a_0 = \frac{2}{3}\varphi_0 + \frac{1}{3}\psi_0 - \frac{1}{3}c_0 - \frac{2}{3}d_0 - e_0 - \frac{1}{6}\gamma_0, \; b_0 = \frac{1}{3}\varphi_0 - \frac{1}{3}\psi_0 - \frac{1}{3}c_0 - \frac{1}{3}d_0 + \frac{1}{6}\gamma_0.
$$

2) $k > 0$. Этот случай соответствует случаю d) решения СмЗ (9.1)–(9.3). ОР однородных уравнений (9.60) соответствуют функции

$$\tilde{T}_k(t) = e^{-t}(a_k \cos\sqrt{4k^2+4k-1}\ t + b_k \sin\sqrt{4k^2+4k-1}\ t),$$
$$\forall a_k, b_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1,\ 2, \ldots \tag{9.65}$$

ОР $T_k(t)$ неоднородных уравнений (9.60) представляют собой сумму решений (9.65) и (9.63). Подставляя эти $T_k(t)$ в НУ (9.62), получаем линейную систему

$$\begin{cases} T_k(0) = a_k + d_k + e_k + g_k = \varphi_k, \\ T_k'(0) = -a_k + \sqrt{4k^2+4k-1}\ b_k + c_k + e_k = \psi_k, \end{cases}$$

имеющую единственные решения

$$a_k = \varphi_k - d_k - e_k - g_k,\ b_k = \frac{\varphi_k + \psi_k - c_k - d_k - 2e_k - g_k}{\sqrt{4k^2+4k-1}},\ \ k = 1,\ 2, \ldots$$

Таким образом, все коэффициенты $T_k(t)$ найдены и формальным решением СмЗ (9.48)−(9.50) является функция

$$u(x,t) = (x-\pi)e^t + 1 + \left(a_0 + b_0 e^{-2t} + c_0 \sin t + d_0 \cos t + e_0 e^t + \frac{\gamma_0}{2}t\right)\cos\frac{x}{2} +$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}[e^{-t}(a_k \cos\sqrt{4k^2+4k-1}\ t + b_k \sin\sqrt{4k^2+4k-1}\ t) + c_k \sin t +$$
$$+d_k \cos t + e_k e^t + g_k]\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x.$$

Задача 9.3. Решить следующую смешанную задачу о вынужденных колебаниях прямоугольной мембраны с жестко закрепленными краями:

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = f(x,y,t), \quad 0 < x < p,\ 0 < y < q,\ t > 0, \tag{9.66}$$

$$\left.\begin{aligned} u|_{x=0} = u|_{x=p} = 0,\ 0 < y < q,\ t > 0, \\ u|_{y=0} = u|_{y=q} = 0,\ 0 < x < p,\ t > 0, \end{aligned}\right\} \tag{9.67}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x,y), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x,y), \quad 0 < x < p, \; 0 < y < q. \qquad (9.68)$$

Решение. I. СФ $\nu_{k,m}(x,y) = ?$ Если искать все решения $\tilde{u}(x,y,t) = T(t)\nu(x,y) \neq 0$ однородного уравнения (9.66)

$$T''\nu - T\Delta\nu = 0 \Leftrightarrow \frac{T''}{T} - \frac{\Delta\nu}{\nu} = 0 \Leftrightarrow \frac{T''}{T} = \frac{\Delta\nu}{\nu} = -\lambda \in \mathbb{R},$$

то приходим к уравнениям

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0, \quad t > 0, \qquad (9.69)$$

$$\Delta\nu(x,y) = -\lambda\nu(x,y), \quad 0 < x < p, \quad 0 < y < q. \qquad (9.70)$$

Для всех функций $T(t) \neq 0$ ГУ (9.67) равносильны ГУ

$$\nu(x',y') = 0, \quad (x',y') \in S. \qquad (9.71)$$

ЗШ–Л (9.70)−(9.71) совпадает с ЗШ−Л (7.27)−(7.28) задачи (7.6), решениями которой являются следующие СЗ и СФ:

$$\lambda_{k,m} = \pi^2\left(\frac{k^2}{p^2} + \frac{m^2}{q^2}\right), \quad \nu_{k,m}(x,y) = \sin\frac{\pi k}{p}x \sin\frac{\pi m}{q}y, \quad k,m \in \mathbb{N}.$$

II. $T_{k,m}(t) = ?$ Для решений СмЗ (9.66)−(9.68) в виде ряда

$$u(x,y,t) = \sum_{k,m=1}^{\infty} T_{k,m}(t) \sin\frac{\pi k}{p}x \sin\frac{\pi m}{q}y \qquad (9.72)$$

уравнение (9.66) с учетом (9.69) превращается в ряд Фурье

$$\sum_{k,m=1}^{\infty} \left[T''_{k,m}(t) + \lambda_{k,m}T_{k,m}(t)\right] \sin\frac{\pi k}{p}x \sin\frac{\pi m}{q}y = f(x,y,t),$$

из которого заключаем, что $T_{k,m}(t)-$решение ОДУ

$$T''_{k,m}(t)+\lambda_{k,m}T_{k,m}(t)=f_{k,m}(t),\quad t>0,\ k,m\in\mathbb{N}, \tag{9.73}$$

с правыми частями

$$f_{k,m}(t)=\frac{4}{pq}\int_0^p\int_0^q f(x,y,t)\sin\frac{\pi k}{p}x\sin\frac{\pi m}{q}ydxdy,\quad k,m\in\mathbb{N}.$$

Для ряда (9.72) из НУ (9.68) выводим НУ

$$T_{k,m}(0)=\varphi_{k,m},\quad T'_{k,m}(0)=\psi_{k,m},\quad k,m\in\mathbb{N}, \tag{9.74}$$

с начальными данными

$$\varphi_{k,m}=\frac{4}{pq}\int_0^p\int_0^q \varphi(x,y)\sin\frac{\pi k}{p}x\sin\frac{\pi m}{q}ydxdy,$$

$$\psi_{k,m}=\frac{4}{pq}\int_0^p\int_0^q \psi(x,y)\sin\frac{\pi k}{p}x\sin\frac{\pi m}{q}ydxdy,\quad k,m\in\mathbb{N}.$$

В силу формул (9.18), (9.23) при $b=0$ уравнения (9.73) имеют ОР

$$T_{k,m}(t)=a_{k,m}\cos\sqrt{\lambda_{k,m}}t+b_{k,m}\sin\sqrt{\lambda_{k,m}}t+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\lambda_{k,m}}}\int_0^t\sin(\sqrt{\lambda_{k,m}}(t-s))f_{k,m}(s)ds,\ \ k,m\in\mathbb{N},$$

коэффициенты $a_{k,m}$ и $b_{k,m}$ которых однозначно определяются НУ (9.74)

$$T_{k,m}(0)=a_{k,m}=\varphi_{k,m},$$
$$T'_{k,m}(0)=\sqrt{\lambda_{k,m}}b_{k,m}=\psi_{k,m}\Rightarrow b_{k,m}=\psi_{k,m}/\sqrt{\lambda_{k,m}}.$$

На этом основании можем утверждать, что формальным решением СмЗ (9.66)$-$(9.68) является функция

$$u(x,y,t)=\sum_{k,m=1}^{\infty}\Big[\varphi_{k,m}\cos\sqrt{\lambda_{k,m}}t+\frac{\psi_{k,m}}{\sqrt{\lambda_{k,m}}}\sin\sqrt{\lambda_{k,m}}t+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\lambda_{k,m}}}\int_0^t\sin(\sqrt{\lambda_{k,m}}(t-s))f_k(s)ds\Big]\sin\frac{\pi k}{p}x\sin\frac{\pi m}{q}y.$$

Задача 9.4. Решить следующую смешанную задачу о вынужденных колебаниях круглой мембраны, жестко закрепленной по краю:

$$u_{tt}-u_{xx}-u_{yy}=f(x,y,t),\ \ x^2+y^2<r_0^2,\ \ t>0, \tag{9.75}$$
$$u(x',y',t)=0,\ \ x'^2+y'^2=r_0^2,\ \ t>0, \tag{9.76}$$

$$u|_{t=0}\,u_0(x,y),\ u_t|_{t=0}=u_1(x,y),\ \ x^2+y^2<r_0^2. \tag{9.77}$$

Решение. I. *Редукция к См3 в прямоугольной области.* В данной См3 переходим к полярным координатам $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi,\ 0<r\le r_0$, и для функции $\tilde u(r,\varphi)=u(r\cos\varphi,r\sin\varphi)$ получаем эквивалентную См3

$$\begin{aligned}&\tilde u_{tt}-\tilde u_{rr}-\frac{1}{r}\tilde u_r-\frac{1}{r^2}\tilde u_{\varphi\varphi}=f(r\cos\varphi,r\sin\varphi,t)=\\&=\hat f(r,\varphi,t),\ 0<r<r_0,\ 0\le\varphi<2\pi,\ t>0,\end{aligned} \tag{9.78}$$

$$\left|\tilde u(0,\varphi,t)\right|<+\infty,\ \tilde u|_{r=r_0}=0,\ 0\le\varphi<2\pi,\ t>0, \tag{9.79}$$

$$\tilde u(r,\varphi,t)=\tilde u(r,\varphi+2\pi,t),\ 0<r\le r_0,\ \forall\varphi,\ t>0, \tag{9.80}$$

$$\begin{aligned}&\tilde u|_{t=0}=u_0(r\cos\varphi,r\sin\varphi)=\tilde u_0(r,\varphi),\tilde u_t|_{t=0}=u_1(r\cos\varphi,r\sin\varphi)=\\&=\tilde u_1(r,\varphi),\ 0<r<r_0,\ 0\le\varphi<2\pi.\end{aligned} \tag{9.81}$$

II. СФ $\nu_{k,m}(r,\varphi)=?$ Подставляя произведение $\hat u(r,\varphi,t)=T(t)\nu(r,\varphi)\ne0$ в однородное уравнение (9.78) и разделяя переменные:

$$T''\nu - T\nu_{rr} - \frac{1}{r}T\nu_r - \frac{1}{r^2}T\nu_{\varphi\varphi} = 0 \Leftrightarrow \frac{T''}{T} = \frac{\nu_{rr}}{\nu} + \frac{\nu_r}{r\nu} + \frac{\nu_{\varphi\varphi}}{r^2\nu} = -\lambda \in \mathbb{R},$$

имеем два уравнения:

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0,\ t > 0, \tag{9.82}$$

$$\nu_{rr}(r,\varphi) + \frac{1}{r}\nu_r(r,\varphi) + \frac{1}{r^2}\nu_{\varphi\varphi}(r,\varphi) = -\lambda\nu(r,\varphi),\ 0 < r < r_0. \tag{9.83}$$

Подставив произведение $\hat{u}(r,\varphi,t) = T(t)\nu(r,\varphi) \neq 0$ в условие периодичности (9.80)

$$T(t)\nu(r,\varphi) \equiv T(t)\nu(r,\varphi+2\pi) \Rightarrow T(t)\left[\nu(r,\varphi) - \nu(r,\varphi+2\pi)\right] \equiv 0,$$

получаем условие периодичности

$$\nu(r,\varphi) = \nu(r,\varphi+2\pi),\ 0 < r \le r_0,\ \forall\varphi. \tag{9.84}$$

Подстановка произведения $T(t)\nu(r,\varphi) \neq 0$ в ГУ (9.79) дает ГУ

$$\left.\begin{aligned} \left|\hat{u}(0,\varphi,t)\right| = \left|T(t)v(0,\varphi)\right| < +\infty \Rightarrow \left|v(0,\varphi)\right| < +\infty\ \forall\varphi, \\ \hat{u}\,|_{r=r_0} = T(t)v(r_0,\varphi) \equiv 0 \Rightarrow v(r_0,\varphi) = 0\ \forall\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{9.85}$$

Согласно решению задачи 7.7, решениями ЗШ−Л (9.83)−(9.85) являются СЗ $\lambda_{k,m} = (\mu_m^{(k)}/r_0)^2$, $k = 0,\ 1,\dots,\ m = 1,\ 2,\dots$, и соответствующие им СФ

$$\cos k\varphi\, J_k(\mu_m^{(k)} r/r_0),\ \sin k\varphi\, J_k(\mu_m^{(k)} r/r_0) \neq 0,\ k = 0,\ 1,\dots,\ m = 1,\ 2,\dots$$

Поэтому формальное решение СмЗ (9.75)−(9.77) ищем в виде двойного ряда

$$\tilde{u}(r,\varphi,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(T_{k,m}^{(1)}(t)\cos k\varphi+T_{k,m}^{(2)}(t)\sin k\varphi)J_k(\frac{\mu_m^{(k)}r}{r_0}). \qquad (9.86)$$

III. $T_{k,m}^{(1)}(t)$, $T_{k,m}^{(2)}(t)=?$ Для ряда (9.86) уравнение (9.78) ввиду (9.82) превращается в ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\left[T_{k,m}^{(1)\prime\prime}(t)+\lambda_{k,m}T_{k,m}^{(1)}(t)\right]\cos k\varphi+\left[T_{k,m}^{(2)\prime\prime}(t)+\lambda_{k,m}T_{k,m}^{(2)}(t)\right]\sin k\varphi\right\}J_k(\frac{\mu_m^k r}{r_0})\equiv$$
$$\equiv\tilde{f}(r,\varphi,t),$$

из которого для коэффициентов ряда (9.86) имеем уравнения

$$T_{k,m}^{(i)\prime\prime}(t)+\lambda_{k,m}T_{k,m}^{(i)}(t)=f_{k,m}^{(i)}(t),\ i=1,\ 2;\ k=0,\ 1,\dots;\ m=1,\ 2,\dots, \qquad (9.87)$$

с правыми частями

$$f_{0,m}^{(1)}(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\tilde{f}_{0,m}(\varphi,t)d\varphi,\ f_{k,m}^{(1)}(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\tilde{f}_{k,m}(\varphi,t)\cos k\varphi d\varphi,$$

$$f_{k,m}^{(2)}(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\tilde{f}_{k,m}(\varphi,t)\sin k\varphi d\varphi,\ k=1,\ 2,\dots,\ m=1,\ 2,\dots,$$

где

$$\tilde{f}_{k,m}(\varphi,t)=\frac{1}{\left\|J_k\left(\frac{\mu_m^{(k)}r}{r_0}\right)\right\|^2}\int_0^{r_0}r\tilde{f}(r,\varphi,t)J_k\left(\frac{\mu_m^{(k)}r}{r_0}\right)dr,\ k=0,\ 1,\dots,\ m=1,\ 2,\dots$$

Для ряда (9.86) НУ (9.81) аналогично дают НУ

$$T_{k,m}^{(i)}(0)=h_{k,m}^{(i)},\quad T_{k,m}^{(i)\prime}(0)=g_{k,m}^{(i)},\quad i=1,\ 2;\ k=0,\ 1,\dots;\ m=1,\ 2,\dots, \qquad (9.88)$$

с начальными данными

$$h_{0,m}^{(1)}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}h_{0,m}(\varphi)d\varphi,\ \ h_{k,m}^{(1)}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}h_{k,m}(\varphi)\cos k\varphi d\varphi,$$

$$h_{k,m}^{(2)}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}h_{k,m}(\varphi)\sin k\varphi d\varphi,\quad k=1,2,\dots,\ \ m=1,2,\dots,$$

$$g_{0,m}^{(1)}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}g_{0,m}(\varphi)d\varphi,\ \ g_{k,m}^{(1)}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}g_{k,m}(\varphi)\cos k\varphi d\varphi,$$

$$g_{k,m}^{(2)}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}g_{k,m}(\varphi)\sin k\varphi d\varphi,\quad k=1,2,\dots,\ \ m=1,2,\dots,$$

где

$$h_{k,m}(\varphi)=\frac{1}{\left\|J_k\left(\frac{\mu_m^{(k)}r}{r_0}\right)\right\|^2}\int_0^{r_0}r\tilde{u}_0(r,\varphi)J_k\left(\frac{\mu_m^{(k)}r}{r_0}\right)dr,\quad k=0,1,\dots,$$

$$g_{k,m}(\varphi)=\frac{1}{\left\|J_k\left(\frac{\mu_m^{(k)}r}{r_0}\right)\right\|^2}\int_0^{r_0}r\tilde{u}_1(r,\varphi)J_k\left(\frac{\mu_m^{(k)}r}{r_0}\right)dr,\quad k=1,2,\dots,$$

$$\left\|J_k\left(\frac{\mu_m^{(k)}r}{r_0}\right)\right\|^2=\int_0^{r_0}r\left|J_k\left(\frac{\mu_m^{(k)}r}{r_0}\right)\right|^2dr=\frac{r_0^{\ 2}}{2}J_{k+1}^2\left(\mu_m^{(k)}\right),\quad k=0,\ 1,\dots,\quad m=1,\ 2,\dots$$

Осталось решить ЗК (9.87),(9.88). Согласно формулам пункта d) в решении СмЗ $(9.1)-(9.3)$ при $b=0$, решениями ЗК (9.87), (9.88) являются следующие коэффициенты:

$$T_{k,m}^{(i)}(t)=h_{k,m}^{(i)}\cos\sqrt{\lambda_{k,m}}t+\frac{g_{k,m}^{(i)}}{\sqrt{\lambda_{k,m}}}\sin\sqrt{\lambda_{k,m}}t+\frac{1}{\sqrt{\lambda_{k,m}}}\int_0^t\sin\left(\sqrt{\lambda_{k,m}}(t-s)\right)f_{k,m}^{(i)}(s)ds,$$

$$i=1,\ 2;\ \ k=0,\ 1,\ 2,\dots;\ \ m=1,\ 2,\dots$$

Тема 10. МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Смешанные задачи для параболических уравнений второго порядка решаются методом разделения переменных – аналогично решению смешанных задач для гиперболических уравнений второго порядка. Задачи Штурма–Лиувилля выводятся и решаются также, а для коэффициентов разложений формальных решений искомых смешанных задач в ряды по их собственным функциям ставятся задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, решение которых проще.

Задача 10.1. Решить смешанную задачу для уравнения теплопроводности

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t),\ a>0,\ 0<x<l,\ t>0, \tag{10.1}$$

$$\left(u_x - h\cdot u\right)\Big|_{x=0} = \mu_1(t),\ \left(u_x + h\cdot u\right)\Big|_{x=l} = \mu_2(t),\ h\ge 0,\ t>0, \tag{10.2}$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ 0<x<l. \tag{10.3}$$

Решение. I. *Редукция к СмЗ с однородными ГУ.* Решение ищем в виде суммы

$$u(x,t) = w(x,t) + v(x,t), \tag{10.4}$$

где w – достаточно гладкая функция, удовлетворяющая неоднородным ГУ

$$\left(w_x - h\cdot w\right)\Big|_{x=0} = \mu_1(t),\ \left(w_x + h\cdot w\right)\Big|_{x=l} = \mu_1(t),\ t>0. \tag{10.5}$$

Будем искать ее в виде

$$w(x,t) = \left(a_1\cdot x^2 + b_1\cdot x + c_1\right)\cdot\mu_1(t) + \left(a_2\cdot x^2 + b_2\cdot x + c_2\right)\cdot\mu_2(t). \tag{10.6}$$

Подставляя (10.6) в первое ГУ из (10.5), имеем равенство

$$\left(w_x - h\cdot w\right)\Big|_{x=0} = \left(b_1 - h\cdot c_1\right)\cdot \mu_1(t) + \left(b_2 - h\cdot c_2\right)\cdot\mu_2(t) = \mu_1(t)\,,\ t>0\,,$$

где полагаем, что $b_1 - h\cdot c_1 = 1$ и $b_2 - h\cdot c_2 = 0$. Подставив (10.6) во второе ГУ из (10.5), находим равенство

$$\left(w_x + h\cdot w\right)\Big|_{x=l} = \left(2\cdot a_1\cdot l + b_1 + h\cdot\left(a_1\cdot l^2 + b_1\cdot l + c_1\right)\right)\cdot\mu_1(t) +$$
$$+\left(2\cdot a_2\cdot l + b_2 + h\cdot\left(a_2\cdot l^2 + b_2\cdot l + c_2\right)\right)\cdot\mu_2(t) = \mu_2(t),\ t>0,$$

где полагаем

$$2\cdot a_1\cdot l + b_1 + h\cdot\left(a_1\cdot l^2 + b_1\cdot l + c_1\right) = 0$$

$$\text{и}\ \ 2\cdot a_2\cdot l + b_2 + h\cdot\left(a_2\cdot l^2 + b_2\cdot l + c_2\right) = 1.$$

Отсюда при $a_1 = -1/(2\cdot l + h\cdot l^2)$, $b_1 = 1 + h\cdot c_1$ и $a_2 = 1/(2l)$, $b_2 = h\cdot c_2$ определяем, что

$$a_0 = c_1 = -l/(2 + h\cdot l)\,,\ \ b_0 = c_2 = -l/(2(2 + h\cdot l))\ .$$

В результате мы подобрали функцию:

$$w(x,t) = \left(\frac{-x^2}{2\cdot l + h\cdot l^2} + \left(1 + h\cdot a_0\right)\cdot x + a_0\right)\mu_1(t) + \left(\frac{x^2}{2\cdot l} + h\cdot b_0\cdot x + b_0\right)\mu_2(t)\,,$$

которая удовлетворяет ГУ (10.5) при всех $h \ge 0$.

Поэтому, в силу формулы искомого решения (10.4), для функции v получаем следующую СмЗ:

$$v_t - a^2\cdot v_{xx} = f(x,t) - w_t + a^2\cdot w_{xx} \equiv g(x,t)\,,\ 0<x<l\,,\ t>0\,, \quad (10.7)$$

$$\left(v_x - h\cdot v\right)\Big|_{x=0} = 0\,,\ \left(v_x + h\cdot v\right)\Big|_{x=l} = 0\,,\ t>0\,, \quad (10.8)$$

$$v\Big|_{t=0} = \varphi(x) - w(x,0)\,,\ 0<x<l\,. \quad (10.9)$$

II. $X_k(x) = ?$ Решая вспомогательную задачу для произведения $\tilde{v}(x,t) = T(x) \cdot X(x) \neq 0$ из однородного уравнения (10.7) и ГУ (10.8) стандартным разделением переменных:

$$T' \cdot X - a^2 \cdot T \cdot X'' = 0 \Rightarrow \frac{T'}{a^2 \cdot T} - \frac{X''}{X} = 0 \Leftrightarrow \frac{T'}{a^2 \cdot T} = \frac{X''}{X} = -\lambda \in \mathbb{R},$$

$$T(t) \cdot \left(X'(0) - h \cdot X(0) \right) \equiv 0,$$

$$T(t) \cdot \left(X'(l) + h \cdot X(l) \right) \equiv 0,$$

выводим два уравнения:

$$T'(t) + a^2 \cdot \lambda \cdot T(t) = 0, \ \ t > 0, \qquad (10.10)$$

$$X''(x) = -\lambda \cdot X(x), \ \ 0 < x < l, \qquad (10.11)$$

и ГУ

$$X'(0) - h \cdot X(0) = 0, \ \ X'(l) + h \cdot X(l) = 0. \qquad (10.12)$$

В ЗШ$-$Л дифференциальное уравнение и ГУ могут оказаться такими, для которых теорема 1 и, в частности, теорема Стеклова [8, с. 22] о неотрицательности СЗ несправедливы. Следует уметь решать ЗШ$-$Л в полном объеме и находить отрицательные СЗ, если такие СЗ существуют.

1) $\lambda < 0$. Все решения $X(x) = C_1 \cdot e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{-\lambda}x}$ $\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ при $|C_1| + |C_2| \neq 0$ уравнения (10.11) не удовлетворяют условиям (10.12). Действительно, линейная система

$$\begin{cases} X'(0) - h \cdot X(0) = \left(\sqrt{-\lambda} - h\right) \cdot C_1 - \left(\sqrt{-\lambda} + h\right) \cdot C_2 = 0, \\ X'(l) + h \cdot X(l) = \left(\sqrt{-\lambda} + h\right) \cdot e^{\sqrt{-\lambda}\pi} \cdot C_1 - \left(\sqrt{-\lambda} - h\right) \cdot e^{\sqrt{-\lambda}\pi} \cdot C_2 = 0 \end{cases}$$

имеет при всех $h \geq 0$ ненулевой главный определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sqrt{-\lambda} - h & -\left(\sqrt{-\lambda} + h\right) \\ \left(\sqrt{-\lambda} + h\right) \cdot e^{\sqrt{-\lambda}\pi} & -\left(\sqrt{-\lambda} - h\right) \cdot e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{-\lambda} + h\right)^2}{e^{\sqrt{+\lambda}\pi}} \cdot \left[e^{2\sqrt{-\lambda}\pi} - \left(\frac{\sqrt{-\lambda} - h}{\sqrt{-\lambda} + h} \right)^2 \right] \neq 0,$$

так как $e^{2\sqrt{-\lambda}\pi} > 1$ и $\left(\frac{\sqrt{-\lambda} - h}{\sqrt{-\lambda} + h} \right)^2 \leq 1$ для $\lambda < 0$ и $h \geq 0$.

2) $\lambda = 0$. Из всех решений $X(x) = C_1 \cdot x + C_2$ уравнения (10.11) ГУ (10.12), т. е.

$$\begin{cases} X'(0) - h \cdot X(0) = C_1 - h \cdot C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = h \cdot C_2, \\ X'(l) + h \cdot X(l) = \left(1 + h \cdot l\right) \cdot C_1 + h \cdot C_2 = 0 \Rightarrow h \cdot \left(\left(1 + h \cdot l\right) + 1\right) \cdot C_2 = 0, \end{cases}$$

выполняются только для $X(x) \equiv 0$ при $h \neq 0$ и для $X(x) = C_2$ $\forall C_2 \in \mathbb{R}$ при $h = 0$. Значит $\lambda = 0$ не СЗ при $h \neq 0$, но $\lambda_0 = 0$ – СЗ и $X_0(x) = 1/2$ – СФ при $h = 0$.

3) $\lambda > 0$. Среди всех нетривиальных решений $X(x) = C_1 \cdot \cos\sqrt{\lambda}x + {}$ $+ C_2 \cdot \sin\sqrt{\lambda}x$ $\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ уравнения (10.11) ГУ (10.12), т. е.

$$\begin{cases} X'(0) - h \cdot X(0) = C_2\sqrt{\lambda} - h \cdot C_1 = 0 \Rightarrow C_2 = {}^{h \cdot C_1}\!\big/_{\sqrt{\lambda}}, \\ X'(l) + h \cdot X(l) = C_1\left[\left({}^{h^2}\!\big/_{\sqrt{\lambda}} - \sqrt{\lambda}\right)\sin\sqrt{\lambda}l + 2 \cdot h \cdot \cos\sqrt{\lambda}l\right] = 0 \end{cases}$$

справедливы только для тех λ, для которых $\mu = \sqrt{\lambda}l$ являются решениями трансцендентного уравнения

$$\mathrm{tg}\mu = \frac{\rho}{\mu - \rho} + \frac{\rho}{\mu + \rho}, \quad \rho = h \cdot l, \quad h \geq 0. \tag{10.13}$$

Последнее уравнение при всех $h \geq 0$ имеет счетное множество положительных корней μ_k, $k = 1,\ 2, \ldots$, (см. рис.7.1) и, в частности, при $h = 0$ – корни $\mu_k = \pi \cdot k$, $k = 1,\ 2, \ldots$ Таким образом, для всех $h \geq 0$ получаем положительные СЗ $\lambda_k = \left(\mu_k / l\right)^2$, $k = 1,\ 2, \ldots$, и при $C_1 = \mu_k$ соответствующие им СФ $X_k(x) = \mu_k \cos \dfrac{\mu_k}{l} x + \rho \sin \dfrac{\mu_k}{l} x$, $k = 1,\ 2, \ldots$, и, в частности, при $h = 0$ СЗ $\lambda_k = \left(\pi k / l\right)^2$ и СФ $X_k(x) = \cos \dfrac{\pi \cdot k}{l} x$, $k = 1,\ 2, \ldots$

III. $T_k(t) = ?$ При всех $h \geq 0$ для коэффициентов ряда $v(x,t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} T_k(t) \cdot X_k(x)$ полагаем $T_0(t) \equiv 0$, если $h \neq 0$, подстановкой его в уравнение (10.7) благодаря уравнению (10.10) сразу находим уравнения

$$T_k'(t) + a^2 \cdot \lambda_k \cdot T_k(t) = g_k(t),\ k = 0,\ 1, \ldots, \qquad (10.14)$$

с правыми частями

$$g_k(t) = \frac{1}{\left\|X_k(x)\right\|^2} \int_0^l g(x,t) \cdot \left(\mu_k \cos \frac{\mu_k}{l} x + \rho \sin \frac{\mu_k}{l} x \right) dx,\ \ k = 0,\ 1, \ldots,$$

и – в НУ (10.9) находим НУ

$$T_k(0) = \psi_k,\ k = 0,\ 1, \ldots, \qquad (10.15)$$

с начальными данными

$$\psi_k = \frac{1}{\left\|X_k(x)\right\|^2} \int_0^l \big(\varphi(x) - w(x,0)\big) \cdot \left(\mu_k \cos \frac{\mu_k}{l} x + \rho \sin \frac{\mu_k}{l} x \right) dx,\ k = 0,\ 1, \ldots,$$

где $\qquad \left\|X_k(x)\right\|^2 = \int\limits_0^l \left\|X_k(x)\right\|^2 dx = \dfrac{l}{2}\left(\rho \cdot \left(\rho + 2\right) + \mu_k^2\right).$

Решаем ЗК (10.14), (10.15). ОР однородных уравнений (10.14) имеют вид

$$\tilde{T}_k(t) = a_k e^{-a^2\lambda_k t} \quad \forall a_k \in \mathbb{R}.$$

ЧР неоднородных уравнений (10.14) легко отыскать методом вариации произвольных постоянных в виде функции $T_k^*(t) = a_k(t)e^{-a^2\lambda_k t}$, подстановка которой в эти уравнения дает

$$a_k'(t)e^{-a^2\lambda_k t} - a^2 \cdot \lambda_k \cdot a_k(t)e^{-a^2\lambda_k t} + a^2 \cdot \lambda_k \cdot a_k(t)e^{-a^2\lambda_k t} = g_k(t).$$

Отсюда получаем, что $a_k'(t) = e^{a^2\lambda_k t} g_k(t)$ и, следовательно,

$$a_k(t) = \int_0^t e^{a^2\lambda_k \tau} g_k(\tau)d\tau, \quad T_k^*(t) = \int_0^t e^{a^2\lambda_k(\tau - t)} g_k(\tau)d\tau.$$

Подставив ОР

$$T_k(t) = a_k \cdot e^{-a^2\lambda_k t} + \int_0^t e^{a^2\lambda_k(\tau - t)} g_k(\tau)d\tau$$

уравнений (10.14) в НУ (10.15), выводим, что $T_k(0) = a_k = \psi_k$ и, следовательно, при всех $h \ge 0$ коэффициенты исходного ряда равны

$$T_k(t) = \psi_k \cdot e^{-a^2\lambda_k t} + \int_0^t e^{a^2\lambda_k(\tau - t)} g_k(\tau)d\tau, \; k = 0, \; 1, \ldots \quad (10.16)$$

Итак, при всех $h \ge 0$ формальным решением СмЗ (10.1)−(10.3) является

$$u(x,t) = \left[\frac{-x^2}{2 \cdot l + h \cdot l^2} + \left(1 + h \cdot a_0\right) \cdot x + a_0 \right] \cdot \mu_1(t) + \left[\frac{x^2}{2 \cdot l} + h \cdot b_0 \cdot x + b_0 \right] \cdot \mu_2(t) +$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \left[\psi_k \cdot e^{-a^2\lambda_k t} + \int_0^t e^{a^2\lambda_k(\tau - t)} g_k(\tau)d\tau \right] \cdot \left(\mu_k \cos\frac{\mu_k}{l}x + \rho \sin\frac{\mu_k}{l}x \right),$$

где полагаем $\varphi_0 = 0$, $g_0(t) = 0$, если $h \ne 0$, и, в частности, при $h = 0$

$$v(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\psi_k\cdot e^{-a^2\lambda_k t}+\int_0^t e^{a^2\lambda_k(\tau-t)}g_k(\tau)d\tau\right]\cdot\cos\frac{\mu_k}{l}x\,.$$

Задача 10.2. Решить смешанную задачу

$$u_t-u_{xx}+2\cdot b\cdot u_x=f(x,t)\,,\ b\in\mathbb{R}\,,\ 0<x<\pi\,,\ t>0\,, \qquad (10.17)$$

$$u\big|_{x=0}=t^2\,,\ u_x\big|_{x=\pi}=1\,,\ \ t>0\,, \qquad (10.18)$$

$$u\big|_{t=0}=e^x\,,0<x<\pi\,. \qquad (10.19)$$

Решение. I. *Редукция*. Будем искать решение этой СмЗ в виде $u(x,t)=w(x,t)+v(x,t)$, где $w(x,t)$ – некоторая достаточно гладкая функция, удовлетворяющая неоднородным ГУ (10.18). В качестве такой функции можно взять $w(x,t)=x+t^2$. Тогда, согласно замечанию 9.1, функция $v(x,t)$ должна быть решением следующей СмЗ:

$$v_t-v_{xx}+2\cdot b\cdot v_x=f(x,t)-2\cdot t-2\cdot b\equiv g(x,t)\,,\ 0<x<\pi\,,\ t>0\,, \qquad (10.20)$$

$$v\big|_{x=0}=v_x\big|_{x=\pi}=0\,,\ \ t>0\,, \qquad (10.21)$$

$$v\big|_{t=0}=e^x-x\,,\ 0<x<\pi\,. \qquad (10.22)$$

II. $X_k\left(x\right)=?$ Для вывода ЗШ−Л подставляем произведение $\tilde{v}(x,t)=T(t)\cdot X(x)\neq 0$ в однородное уравнение (10.20) и в ГУ (10.21) и разделением переменных получаем два уравнения:

$$T'(t)+\lambda\cdot T(t)=0\,,\ t>0\,, \qquad (10.23)$$

$$X''(x)-2\cdot b\cdot X'(x)=-\lambda\cdot X(x)\,,\ 0<x<\pi\,, \qquad (10.24)$$

и ГУ

$$X(0)=X'(\pi)=0\,. \qquad (10.25)$$

Решаем ЗШ$-$Л (10.24), (10.25). Характеристическое уравнение $\tau^2 - 2\cdot b\cdot\tau + \lambda = 0$ стационарного ОДУ (10.24) имеет корни $\tau_{1,2} = b \pm \sqrt{b^2 - \lambda}$.

1) $\lambda < b^2$. Среди этих значений λ нет СЗ решаемой ЗШ$-$Л, потому что для ОР $X(x) = C_1 e^{\tau_1 x} + C_2 e^{\tau_2 x}$ $\forall\, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ уравнения (10.24) полученная из ГУ (10.25) линейная система

$$\begin{cases} X(0) = C_1 + C_2 = 0, \\ X'(\pi) = \tau_1 e^{\tau_1 \pi}\cdot C_1 + \tau_2 e^{\tau_2 \pi}\cdot C_2 = 0 \end{cases}$$

допускает лишь тривиальное решение $C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow X(x) \equiv 0$.

2) $\lambda = b^2$. Это значение λ не является СЗ решаемой ЗШ$-$Л, так как для ОР $X(x) = e^{bx}\left(C_1 x + C_2\right)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, уравнения (10.24) из ГУ (10.25) получаем уравнения

$$X(0) = C_2 = 0,\ X'(\pi) = C_1 e^{b\pi}\left(b\cdot\pi + 1\right) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow X(x) \equiv 0 .$$

3) $\lambda > b^2$. Характеристическим корням $\tau_{1,2} = b \pm i\sqrt{\lambda - b^2}$ соответствует общее решение $X(x) = e^{bx}\left(C_1 \cos\sqrt{\lambda - b^2}\,x + C_2 \sin\sqrt{\lambda - b^2}\,x\right)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, уравнения (10.24), подстановка которого в ГУ (10.25) приводит к уравнениям

$$X(0) = C_1 = 0 \Rightarrow X'(\pi) = C_2 e^{b\pi}\left(b\cdot\sin\sqrt{\lambda - b^2}\,\pi + \sqrt{\lambda - b^2}\cos\sqrt{\lambda - b^2}\,\pi\right) = 0 .$$

Отсюда для СЗ выводим трансцендентное уравнение

$$ctg\mu = -b/\mu, \quad \mu = \sqrt{\lambda - b^2} ,$$

которое имеет счетное множество положительных корней μ_k, $k = 0,\ 1, \ldots$ Таким образом, для ЗШ$-$Л (10.24), (10.25) решениями являются СЗ

$\lambda_k = \left(\mu_k / \pi\right)^2 + b^2$ и СФ $X_k(x) = e^{bx} \sin \dfrac{\mu_k}{\pi} x$, $k = 0,\ 1, \ldots$, и, в частности, при $b = 0$ СЗ $\lambda_k = \left(k + \dfrac{1}{2}\right)^2$ и СФ $X_k(x) = \sin\left(k + \dfrac{1}{2}\right)x$, $k = 0,\ 1, \ldots$

III. $T_k(t) = ?$ Решение вспомогательной СмЗ (10.20)−(10.22) представим в виде:

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) e^{bx} \sin \frac{\mu_k}{\pi} x . \tag{10.26}$$

Подстановка ряда (10.26) в уравнение (10.20) с учетом (10.23) и в НУ (10.22) дает ряды:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[T_k'(t) + \lambda_k T_k(t)\right] e^{bx} \sin \frac{\mu_k}{\pi} x = g(x,t),\ 0 < x < \pi,\ t > 0,$$

$$v\big|_{t=0} = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(0) e^{bx} \sin \frac{\mu_k}{\pi} x = e^x - x,\ 0 < x < \pi,$$

их при $b \neq 0$ делим на экспоненту e^{bx}, с которой найденные СФ не ортогональны в $L_2(0,\pi)$, и получаем ряды:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[T_k'(t) + \lambda_k T_k(t)\right] \sin \frac{\mu_k}{\pi} x = e^{-bx} g(x,t),\ 0 < x < \pi,\ t > 0,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} T_k(0) \sin \frac{\mu_k}{\pi} x = e^{(1-b)x} - x e^{-bx},\ 0 < x < \pi,$$

из которых уже, в силу полноты и ортогональности множества $\left\{\sin \dfrac{\mu_k}{\pi} x\right\}$ при различных μ_k в $L_2(0,\pi)$, выводим уравнения и НУ:

$$T_k'(t) + \lambda_k T_k(t) = g_k(t),\ t > 0,\ k = 0,\ 1, \ldots, \tag{10.27}$$

$$T_k(0) = \psi_k,\ k = 0,\ 1, \ldots, \tag{10.28}$$

с исходными данными:

$$g_k(t) = \frac{1}{\left\| \sin \frac{\mu_k}{\pi} x \right\|^2} \int_0^{\pi} e^{-bx} g(x,t) \sin \frac{\mu_k}{\pi} x dx,$$

$$\left\| \sin \frac{\mu_k}{\pi} x \right\|^2 = \frac{\pi}{2} + \frac{|b|\pi^2}{2\left(\mu_k^2 + b^2\pi^2\right)},$$

$$\psi_k = \frac{1}{\left\| \sin \frac{\mu_k}{\pi} x \right\|^2} \int_0^{\pi} \left(e^{(1-b)x} - xe^{-bx} \right) \sin \frac{\mu_k}{\pi} x dx, \quad k = 0,\ 1, \ldots$$

Согласно формуле (10.16) при $a = 1$, ЗК (10.27), (10.28) имеют решения

$$T_k(t) = \psi_k e^{-\lambda_k t} + \int_0^t e^{\lambda_k(\tau - t)} g_k(\tau) d\tau, \quad k = 0,\ 1, \ldots,$$

и тем самым ввиду ряда (10.26) формальным решением исходной СмЗ (10.17) – (10.19) будет

$$u(x,t) = x + t^2 + e^{bx} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\psi_k e^{-\lambda_k t} + \int_0^t e^{\lambda_k(\tau - t)} g_k(\tau) d\tau \right] \sin \frac{\mu_k}{\pi} x \quad \forall b \in \mathbb{R}$$

и, в частности, при $b = 0$

$$u(x,t) = x + t^2 + \sum_{k=0}^{\infty} \left[\psi_k e^{-\lambda_k t} + \int_0^t e^{\lambda_k(\tau - t)} g_k(\tau) d\tau \right] \sin\left(k + \frac{1}{2} \right) x.$$

Задача 10.3. Решить следующую смешанную задачу о распространении тепла в однородной прямоугольной пластине, боковые стороны которой находятся при нулевой температуре:

$$u_t - u_{xx} - u_{yy} = f(x,y,t)\,,\ 0 < x < p\,,\ 0 < y < q\,,\ t > 0\,, \qquad (10.29)$$

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=p} = 0\,,\ \ 0 < y < q\,,\ t > 0\,, \quad u\big|_{y=0} = u\big|_{y=q} = 0\,,\ 0 < x < p\,,\ t > 0\,, \ (10.30)$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x,y)\,,\ 0 < x < p\,,\ 0 < y < q\,. \qquad (10.31)$$

Решение. I. СФ $v_{k,m}(x,y) = ?$ Для отыскания ЗШ$-$Л на СЗ и СФ данной СмЗ ищем все решения вида $\tilde{u}(x,y,t) = T(t)\cdot v(x,y) \neq 0$ однородного уравнения (10.29) с ГУ (10.30):

$$T'v - T\Delta v = 0 \Leftrightarrow \frac{T'}{T} = \frac{\Delta v}{v} = -\lambda \in \mathbb{R}\,,$$

$$\tilde{u}\big|_S = T(t)\cdot v(x',y') \equiv 0 \Rightarrow v(x',y') = 0,\ \ (x',y') \in S\,,$$

и приходим к следующим уравнению и ЗШ$-$Л:

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0\,,\ \ t > 0\,, \qquad (10.32)$$

$$\Delta v(x,y) = -\lambda v(x,y)\,,\ 0 < x < p\,,\ 0 < y < q\,, \qquad (10.33)$$

$$v(x',y') = 0,\ (x',y') \in S\,. \qquad (10.34)$$

Из решения задачи 7.6 известно, что ЗШ$-$Л (10.33), (10.34) имеет следующие СЗ и СФ:

$$\lambda_{k,m} = \pi^2\left(\frac{k^2}{p^2} + \frac{m^2}{q^2}\right),\ v_{k,m}(x,y) = \sin\frac{\pi k}{p}x\cdot\sin\frac{\pi m}{q}y\,,\ k,m \in \mathbb{N}\,. \quad (10.35)$$

II. $T_{k,m}(t) = ?$ Если решение СмЗ (10.29)$-$(10.31) искать в виде разложения по СФ из (10.35), т. е. в виде двойного ряда

$$u(x,y,t)=\sum_{k,m=1}^{\infty}T_{k,m}(t)\cdot\sin\frac{\pi k}{p}x\cdot\sin\frac{\pi m}{q}y,$$

который уже удовлетворяет ГУ (10.30), то подстановкой этого ряда в уравнение (10.29), используя уравнение (10.32), и в НУ (10.31) получаем ряды:

$$\sum_{k,m=1}^{\infty}\left[T'_{k,m}(t)+\lambda_{k,m}T_{k,m}(t)\right]\cdot\sin\frac{\pi k}{p}x\cdot\sin\frac{\pi m}{q}y=f(x,y,t),$$

$$u\big|_{t=0}=\sum_{k,m=1}^{\infty}T_{k,m}(0)\cdot\sin\frac{\pi k}{p}x\cdot\sin\frac{\pi m}{q}y=\varphi(x,y).$$

Отсюда заключаем, что коэффициенты $T_{k,m}(t)$ являются решениями уравнений

$$T'_{k,m}(t)+\lambda_{k,m}T_{k,m}(t)=f_{k,m}(t),\ \ t>0,\ \ k,m=1,\ 2,\dots, \tag{10.36}$$

с правыми частями

$$f_{k,m}(t)=\frac{4}{pq}\int_0^p\int_0^q f(x,y,t)\cdot\sin\frac{\pi k}{p}x\cdot\sin\frac{\pi m}{q}ydxdy,\ \ k,m=1,\ 2,\dots,$$

и НУ

$$T_{k,m}(0)=\varphi_{k,m}=\frac{4}{pq}\int_0^p\int_0^q \varphi(x,y)\cdot\sin\frac{\pi k}{p}x\cdot\sin\frac{\pi m}{q}ydxdy,\ k,m=1,\ 2,\dots \tag{10.37}$$

Как и в решении задачи 10.2 устанавливается, что у ЗК (10.36), (10.37) существуют единственные решения

$$T_{k,m}(t)=\varphi_{k,m}e^{-\lambda_{k,m}t}+\int_0^t e^{\lambda_{k,m}(\tau-t)}f_{k,m}(\tau)d\tau$$

и, следовательно, СмЗ (10.29) – (10.31) имеет формальное решение:

$$u(x,y,t)=\sum_{k,m=1}^{\infty}\left[\varphi_{k,m}e^{-\lambda_{k,m}t}+\int_0^t e^{\lambda_{k,m}(\tau-t)}f_{k,m}(\tau)d\tau\right]\sin\frac{\pi k}{p}x\cdot\sin\frac{\pi m}{q}y.$$

Задача 10.4. Решить следующую смешанную задачу о распространении тепла в однородном круговом цилиндре, на боковой поверхности которого поддерживается нулевая поверхность:

$$u_t-u_{xx}-u_{yy}=f(x,y,t),\ x^2+y^2<r_0^2,\ \ t>0, \qquad (10.38)$$

$$u(x',y',t')=0,\ x'^2+y'^2=r_0^2,\ t>0, \qquad (10.39)$$

$$u\big|_{t=0}=u_0(x,y),\ x^2+y^2<r_0^2. \qquad (10.40)$$

Решение. I. *Редукция.* Перейдя в этой СмЗ к полярным координатам (r,φ), получаем эквивалентную СмЗ

$$\tilde{u}_t-\tilde{u}_{rr}-\frac{1}{r}\tilde{u}_r-\frac{1}{r^2}\tilde{u}_{\varphi\varphi}=\tilde{f}(r,\varphi,t),\ 0<r<r_0,\ 0\le\varphi<2\pi,\ t>0, \quad (10.41)$$

$$\left|\tilde{u}(0,\varphi,t)\right|<+\infty,\ \tilde{u}\big|_{r=r_0}=0,\ 0\le\varphi<2\pi,\ t>0, \qquad (10.42)$$

$$\tilde{u}(r,\varphi,t)=\tilde{u}(r,\varphi+2\pi,t)\ \ \forall\varphi,\ \ t>0, \qquad (10.43)$$

$$\tilde{u}\big|_{t=0}=\tilde{u}_0(r,\varphi),\ 0<r<r_0,\ 0\le\varphi<2\pi. \qquad (10.44)$$

II. $v_{k,m}(x,y)=?$ Подстановка произведения $\hat{u}(r,\varphi,t)=T(t)v(r,\varphi)\ne 0$ в однородное уравнение (10.41) и в условие периодичности (10.43) приводит к следующим уравнениям и условиям:

$$T'(t)+\lambda T(t)=0,\ t>0, \qquad (10.45)$$

$$v_{rr}(r,\varphi)+\frac{1}{r}v_r(r,\varphi)+\frac{1}{r^2}v_{\varphi\varphi}(r,\varphi)=-\lambda v(r,\varphi),\ 0<r<r_0, \quad (10.46)$$

$$v(r,\varphi)=v(r,\varphi+2\pi),\ 0<r<r_0,\ \forall\varphi, \quad (10.47)$$

$$\left|v(0,\varphi)\right|<+\infty,\ v(r_0,\varphi)=0\ \ \forall\varphi. \quad (10.48)$$

Из задачи 9.4 известны СЗ и СФ этой ЗШ–Л (10.45) – (10.48) $\lambda_{k,m}=(\mu_m^{(k)}/r_0)^2$, $\cos k\varphi\ J_k\left(\mu_m^{(k)}r/r_0\right)$, $\sin k\varphi\ J_k\left(\mu_m^{(k)}r/r_0\right)\neq 0$, $k=0,\ 1,\ldots$, $m=1,\ 2,\ldots$

III. $T_{k,m}(t)=?$ Подставив в уравнение (10.41) и НУ (10.44) ряд

$$\tilde{u}(r,\varphi,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(T_{k,m}^{(1)}(t)\cos k\varphi+T_{k,m}^{(2)}(t)\sin k\varphi\right)J_k\left(\frac{\mu_m^{(k)}r}{r_0}\right)$$

имеем ряды:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\left[\left(T_{k,m}^{(1)}{}'(t)+\lambda_{k,m}T_{k,m}^{(1)}(t)\right)\cos k\varphi+\left(T_{k,m}^{(2)}{}'(t)+\lambda_{k,m}T_{k,m}^{(2)}(t)\right)\sin k\varphi\right]\right\}J_k\left(\frac{\mu_m^{(k)}r}{r_0}\right)\equiv$$
$$\equiv\tilde{f}(r,\varphi,t),$$

$$\tilde{u}\Big|_{t=0}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(T_{k,m}^{(1)}(0)\cos k\varphi+T_{k,m}^{(2)}(0)\sin k\varphi\right)J_k\left(\frac{\mu_m^{(k)}r}{r_0}\right)\equiv\tilde{u}_0(r,\varphi),$$

из которых выводим ЗК:

$$T_{k,m}^{(i)}{}'(t)+\lambda_{k,m}T_{k,m}^{(i)}(t)=f_{k,m}^{(i)}(t),\ i=1,\ 2,\ k=0,\ 1,\ldots,\ m=1,\ 2,\ldots, \quad (10.49)$$

$$T_{k,m}^{(i)}(0)=h_{k,m}^{(i)},\ \ i=1,\ 2;\ \ k=0,\ 1,\ldots,\ \ m=1,\ 2,\ldots, \quad (10.50)$$

с правыми частями

$$f_{0,m}^{(1)}(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \tilde{f}_{0,m}(\varphi,t)d\varphi, \qquad f_{k,m}^{(1)}(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \tilde{f}_{k,m}(\varphi,t)\cos k\varphi d\varphi,$$

$$f_{k,m}^{(2)}(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \tilde{f}_{k,m}(\varphi,t)\sin k\varphi d\varphi,$$

$$h_{0,m}^{(1)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} h_{0,m}(\varphi)d\varphi, \qquad h_{k,m}^{(1)} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} h_{k,m}(\varphi)\cos k\varphi d\varphi,$$

$$h_{k,m}^{(2)} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} h_{k,m}(\varphi)\sin k\varphi d\varphi, \quad k, m = 1,\ 2, \ldots,$$

где

$$\tilde{f}_{k,m}(\varphi,t) = \frac{2}{r_0^2 J_{k+1}^2\left(\mu_m^{(k)}\right)}\int_0^{r_0} r\tilde{f}(r,\varphi,t) J_k\left(\frac{\mu_m^{(k)} r}{r_0}\right) dr.$$

$$h_{k,m}(\varphi) = \frac{2}{r_0^2 J_{k+1}^2\left(\mu_m^{(k)}\right)}\int_0^{r_0} r\tilde{u}_0(r,\varphi) J_k\left(\frac{\mu_m^{(k)} r}{r_0}\right) dr, \quad k = 0,\ 1, \ldots, \quad m = 1,\ 2, \ldots$$

В завершение решения СмЗ (10.38) – (10.40) отметим, что аналогично решениям ЗК (10.36), (10.37) ЗК (10.49), (10.50) имеют решения

$$T_{k,m}^{(i)}(t) = h_{k,m}^{(i)} e^{-\lambda_{k,m} t} + \int_0^t e^{\lambda_{k,m}(\tau - t)} f_{k,m}^{(i)}(\tau) d\tau, \quad i = 1,\ 2, \quad k = 0,\ 1, \ldots, \quad m = 1,\ 2, \ldots$$

Задача 10.5. Решить смешанную задачу о распределении температур в однородном круговом цилиндре в случае, когда температура точек цилиндра зависит только от расстояния этой точки до оси цилиндра:

$$\tilde{u}_t(r,t)-\tilde{u}_{rr}(r,t)-\frac{1}{r}\tilde{u}_r(r,t)=\tilde{f}(r,t),\ 0<r<r_0,\quad t>0, \qquad (10.51)$$

$$\left|\tilde{u}\big|_{r=0}\right|<+\infty\,,\ \left(\tilde{u}_r+\tilde{u}\right)\Big|_{r=r_0}=\mu(t)\,,\ t>0\,, \qquad (10.52)$$

$$\tilde{u}\big|_{t=0}=\tilde{h}(r)\,,\ 0<r<r_0\,. \qquad (10.53)$$

Решение. I. *Редукция.* Если решение этой СмЗ искать в виде $\tilde{u}(r,t)=w(r,t)+v(r,t)$ согласно замечанию 9.1, где $w(r,t)=(1+r_0)^{-1}r\mu(t)$ удовлетворяет неоднородным ГУ (10.52), то функция $v(x,t)$ должна быть решением СмЗ:

$$v_t-v_{rr}-\frac{1}{r}v_r=\tilde{f}(r,t)-\left(1+r_0\right)^{-1}r\cdot\mu'(t)+\left(1+r_0\right)^{-1}r^{-1}\cdot\mu(t)=\hat{f}(r,t),\ (10.54)$$
$$0<r<r_0,\quad t>0,$$

$$\left|v/_{r=0}\right|<+\infty\,,\ \left(v_r+v\right)\Big|_{r=r_0}=0\,,\ t>0\,, \qquad (10.55)$$

$$v\big|_{t=0}=\tilde{h}(r)-(1+r_0)^{-1}r\cdot\mu(0)=\hat{h}(r)\,,\ 0<r<r_0\,. \qquad (10.56)$$

II. $R_k(r)=?$ Подставляем произведение $\tilde{v}(r,t)=T(t)R(r)\neq 0$ в однородное уравнение (10.54) и ГУ (10.55), разделяем переменные:

$$T'R-TR''-\frac{1}{r}TR'=0\Leftrightarrow\frac{T'}{T}=\frac{R''-\frac{1}{r}R'}{R}=-\lambda\in\mathbb{R}\,,$$

$$T(t)\cdot\left(R'(r)+R(r)\right)\Big|_{r=r_0}\equiv 0\Rightarrow\left(R'(r)+R(r)\right)\Big|_{r=r_0}=0\,,$$

и приходим к ЗШ$-$Л

$$R''(r)-\frac{1}{r}R'(r)=-\lambda R(r)\,,\ 0<r<r_0, \qquad (10.57)$$

$$|R(0)| < +\infty, \ (R' + R)\big|_{r=r_0} = 0, \qquad (10.58)$$

в которой ввиду теоремы 1 из темы 9 постоянная разделения $\lambda \geq 0$.

1) $\lambda = 0$. Для $\lambda = 0$ ОР $R(r) = A\ln r + B \ \ \forall A, B \in \mathbb{R}$ уравнения (10.57) удовлетворяет ГУ (10.58) лишь при $A = B = 0$, т. е. $R(r) \equiv 0$.

2) $\lambda > 0$. Как при решении ЗШ–Л (7.39), (7.40) для $\lambda > 0$ уравнение (10.57) заменой $z = \sqrt{\lambda} r$ сводится к уравнению Бесселя нулевого порядка $z^2 \tilde{R}''(z) + z\tilde{R}'(z) + \left(z^2 - 0^2\right)\tilde{R}(z) = 0$, из которого для уравнения (10.57) выводится ОР

$$R(r) = A \cdot J_0(\sqrt{\lambda} r) + B \cdot N_0(\sqrt{\lambda} r) \ \ \forall A, B \in \mathbb{R}. \qquad (10.59)$$

Из первого условия в ГУ (10.58) заключаем, что в ОР (10.59) коэффициент $B = 0$, так как $N_0(0) = -\infty$. Второе условие из ГУ (10.58) для решений $R(r) = A \cdot J_0(\sqrt{\lambda} r)$ приводит к уравнению $\sqrt{\lambda} \cdot J_0'(\sqrt{\lambda} r_0) + J_0(\sqrt{\lambda} r_0) = 0$. Пусть $\mu_k -$все положительные корни уравнения

$$\mu \cdot J_0'(\mu) + r_0 \cdot J_0(\mu) = 0, \ \ \mu = \sqrt{\lambda} r_0 > 0.$$

Тогда ЗШ$-$Л (10.57), (10.58) имеет СЗ $\lambda_k = \left(\mu_k / r_0\right)^2$ и СФ $R_k(r) = J_0\left(\mu_k r / r_0\right)$, $k = 1, 2, \ldots,$ где $J_0(\mu)$ – функция Бесселя нулевого порядка.

III. $T_k(t) = ?$ Подставив ряд $v(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0} r\right)$ в уравнение (10.54) с помощью уравнения (10.57) и в НУ (10.56), легко получаем ряды:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[T_k'(t) + \lambda_k T_k(t)\right] J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0} r\right) = \hat{f}(r,t),$$

$$v\big|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0} r\right) = \hat{h}(r),$$

которые указывают на то, что коэффициенты $T_k(t)$ должны быть решениями ЗК

$$T_k'(t) + \lambda_k T_k(t) = \hat{f}_k(t),\ t > 0, \tag{10.60}$$

$$T_k(0) = \hat{h}_k,\ \ k = 1,\ 2, \ldots, \tag{10.61}$$

где правыми частями являются коэффициенты разложения в ряд Фурье-Бесселя:

$$\hat{f}_k(t) = \frac{2}{r_0^2 J_1^2(\mu_k)} \int_0^{r_0} r \cdot \hat{f}(r,t) J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0} r\right) dr,$$

$$\hat{h}_k(t) = \frac{2}{r_0^2 J_1^2(\mu_k)} \int_0^{r_0} r \cdot \hat{h}(r) J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0} r\right) dr, \quad k = 1,\ 2, \ldots$$

Из предыдущих задач уже известно, что ЗК (10.60), (10.61) имеют решения

$$T_k(t) = \hat{h}_k e^{-\lambda_k t} + \int_0^t e^{\lambda_k(\tau - t)} \hat{f}_k(\tau) d\tau,\ \ k = 1,\ 2, \ldots$$

Поэтому формальным решением СмЗ (10.51)−(10.53) будет функция

$$\tilde{u}(r,t) = \frac{r}{1 + r_0} \mu(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\hat{h}_k e^{-\lambda_k t} + \int_0^t e^{\lambda_k(\tau - t)} \hat{f}_k(\tau) d\tau \right] \cdot J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0} r\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Кулешов А. А. Уравнения математической физики: лабораторный практикум для студентов мех.-мат. фак. БГУ / А. А. Кулешов, В. И. Чесалин, Н. И. Юрчук. Минск, 2005.

2. Сборник задач по уравнениям математической физики / Под редакцией В. С. Владимирова. М., 1982.

3. Бицадзе А. В. Сборник задач по уравнениям математической физики / А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко. М., 1985.

4. Будак Б.М., Сборник задач по математической физике / Б.М. Будак, А. А.. Самарский, А. Н. Тихонов. М., 1980.

5. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. М., 1999.

6. Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. М., 1981.

7. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С. М. Никольский. М., 1977.

8. Смирнов М. М. Задачи по уравнениям математической физики / М. М. Смирнов. М., 1975.

СОДЕРЖАНИЕ