Численные методы решения краевых задач для ур-ий 2-го порядка.

$$(1)\begin{cases} -Lu(x) \equiv \varepsilon u''(x) + a(x)u'(x) - b(x)u(x) = f(x), \quad x\in(0,1); \\ Lu(0) \equiv \zeta_0 u(0) - \eta_0 \varepsilon u'(0) = \varphi_0; \\ Lu(1) \equiv \zeta_1 u(1) + \eta_1 \varepsilon u'(1) = \varphi_1. \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} \varepsilon > 0; \quad a(x), b(x), f(x) \in C[0,1]; \quad b(x) \geq 0 \ \left(\forall x\in[0,1]\right); \\ \zeta_0, \zeta_1, \eta_0, \eta_1 \geq 0; \quad \zeta_0+\eta_0>0, \ \zeta_1+\eta_1>0. \end{cases}$$

$$F(x) \equiv \begin{cases} -f(x), & x\in(0,1); \\ \varphi_0, & x=0; \\ \varphi_1, & x=1. \end{cases} \Longrightarrow \boxed{Lu(x) = F(x), x\in[0,1]} \quad (3)$$

Теорема 1. Данные задачи (1) удовлетворяют условиям (2) и

$$\int_0^1 b(x)\,dx + \zeta_0 + \zeta_1 > 0.$$

Тогда (1) имеет единственное решение из класса:

$$u \in C^2(0,1) \cap C^1[0,1].$$

$$x_i = h(i-1); \quad h = \frac{1}{n-1}; \quad i = 1,2,\dots,n; \qquad u(x) \in C^4[0,1];$$

(4) $$u(x_{i+1}) = u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + \frac{h^3}{6}u^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{24}\cdot u^{(4)}(\theta_1);$$

(5) $$u(x_{i-1}) = u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}\cdot u''(x_i) - \frac{h^3}{6}u^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\theta_2).$$

$$u_i \equiv u(x_i) \qquad (i = \overline{1,n})$$

$$(4) \Rightarrow u_i' = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \frac{h}{2} u_i'' + O(h^2) \equiv D^+ u_i + \delta_i^+ ;$$

$$|\delta_i^+| \leq c \cdot h \quad (i = \overline{1, n-1}) ;$$

Разность, направленная вперед.

$$(5) \Rightarrow u_i' = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} + \frac{h}{2} u_i'' + O(h^2) \equiv D^- u_i + \delta_i^- ;$$

$$|\delta_i^-| \leq c \cdot h \quad (i = \overline{2, n}) ;$$

Разность, направленная назад.

$$(4)-(5) \Rightarrow u_i' = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + \frac{h^2}{12} u_i^{(3)} + O(h^4) \equiv$$

$$\equiv D^0 u_i + \delta_i^0 ;$$

Центральная разность.

$$|\delta_i^0| \leq c \cdot h^2 \quad (i = \overline{2, n-1}) ;$$

Общий вариант аппроксимации u_i':

$$u_i' \approx \frac{1+\theta_i}{2} \cdot D^+ u_i + \frac{1-\theta_i}{2} D^- u_i ; \quad i = \overline{2, n-1} ;$$

$$\theta_i \in [-1, 1], \quad (i = \overline{2, n-1}).$$

$$(4)+(5) \Rightarrow u_i'' = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + O(h^2) \equiv$$

$$(i = \overline{2, n-1}) \quad \equiv D^+ D^- u_i + \delta_i ; \quad |\delta_i| \le C \cdot h^2 ;$$

<u>Опред. 1.</u> L – дифференц., L_h – разностный операторы;
L_h аппроксимирует L с порядком $p > 0$, если $\forall u$ – дост. гладк.

$$| Lu(x_i) - L_h(u)_i | \le C \cdot h^p ; \quad i = \overline{2, n-1} ;$$

D^+ аппроксимирует $\frac{d}{dx}$ с первым порядком (по h);

D^- — " — " — $\frac{d}{dx}$ — " — " — " —

D^0 — " — " — $\frac{d}{dx}$ со вторым порядком (по h);

D^+D^- — " — " — $\frac{d^2}{dx^2}$ — " — " — " —

<u>Метод конечных разностей для (1):</u>

1) на отрезке $[0,1]$ выберем сетку: $x_i = h(i-1)$, $i=\overline{1,n}$;

2) Спроектируем на эту сетку задачу (1), записанную в операторной форме (3):

$$(6) \qquad Lu(x_i) = F(x_i), \quad i=\overline{1,n};$$

3) Встречающиеся в (6) производные $u'(x_i)$ и $u''(x_i)$ заменим аппроксимирующими их разностными аналогами.

Для задачи (1):
$$\begin{cases} \varepsilon u''(x_i) + a(x_i)u'(x_i) - b(x_i)u(x_i) = f(x_i); \\ u(x_1) = \varphi_0; \; u(x_n) = \varphi_1. \end{cases} \quad i = \overline{2, n-1};$$

$$(7) \begin{cases} \varepsilon D^+D^- \bar{u}_i + a_i\left[\frac{1+\theta_i}{2} D^+ \bar{u}_i + \frac{1-\theta_i}{2} D^- \bar{u}_i\right] - b_i \bar{u}_i = f_i; \\ \bar{u}_1 = \varphi_0; \; \bar{u}_n = \varphi_1. \quad \theta_i \in [-1, 1]; (i = \overline{2, n-1}) \end{cases} \quad i = \overline{2, n-1};$$

$\bar{u}_i \approx u(x_i)$, $i = \overline{1, n}$;

Выразим производные D^+ и D^- через D^+D^- и D^0:

$$
\begin{cases}
D^0 \bar{u}_i = \dfrac{1}{2}\left(D^+ \bar{u}_i + D^- \bar{u}_i\right); \\[2mm]
\dfrac{h}{2} \cdot D^+ D^- \bar{u}_i = \dfrac{1}{2} \cdot \left(D^+ \bar{u}_i - D^- \bar{u}_i\right).
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
D^+ \bar{u}_i = D^0 \bar{u}_i + \dfrac{h}{2} D^+ D^- \bar{u}_i; \\[2mm]
D^- \bar{u}_i = D^0 \bar{u}_i - \dfrac{h}{2} D^+ D^- \bar{u}_i;
\end{cases}
$$

$$
(7) \Rightarrow \varepsilon D^+ D^- \bar{u}_i + a_i \left\{ \frac{1+\theta_i}{2} \cdot \left(D^0 \bar{u}_i + \frac{h}{2} D^+ D^- \bar{u}_i \right) + \frac{1-\theta_i}{2} \cdot \left(D^0 \bar{u}_i - \frac{h}{2} D^+ D^- \bar{u}_i \right) \right\} - b_i \bar{u}_i = \underbrace{\varepsilon \left(1 + R_i \theta_i\right)}_{\text{коэф. аппроксим. вязкости}} D^+ D^- \bar{u}_i + a_i D^0 \bar{u}_i - b_i \bar{u}_i
$$

$$
\boxed{R_i \equiv \frac{a_i h}{2\varepsilon}} \leftarrow \text{разностный Рейнольдс.}
$$

Перепишем (7) в виде:

$$(8)\begin{cases} L_h \bar{u}_i \equiv -\varepsilon(1+R_i\theta_i)\cdot D^+D^-\bar{u}_i - a_i D^0\bar{u}_i + b_i\bar{u}_i = -f_i; \quad i=\overline{2,n-1}; \\ L_h\bar{u}_1 \equiv \bar{u}_1 = \varphi_0; \qquad \theta_i \in [-1,1]; \\ L_h\bar{u}_n \equiv \bar{u}_n = \varphi_1. \end{cases}$$

$$F_i^h \equiv \begin{cases} -f_i, & i=\overline{2,n-1}; \\ \varphi_0, & i=1; \\ \varphi_1, & i=n. \end{cases} \overset{(8)}{\Longrightarrow} \boxed{L_h\bar{u}_i = F_i^h \quad (i=\overline{1,n})} \quad (8')$$

Операторная форма записи разностной схемы (8).

Опред. 2. Разностная схема (8') (или (8)) аппроксимирует дифференциальную задачу (3) (или (1)) на её решении $u(x)$ с порядком $p>0$, если выполнено неравенство:

$$\left| L_h(u)_i^h - F_i^h \right| \leq C_a \cdot h^p \quad (i=\overline{1,n}),$$

с константой C_a — не зависящей от "h".

$$L_h(u)_i^h - F_i^h = -\varepsilon(1+R_i\theta_i)D^+D^-u_i - a_iD^0u_i +$$

$(i=\overline{2,n-1})$

$$+b_iu_i + f_i = -\varepsilon(1+R_i\theta_i)(u_i'' + \delta_i) - a_i(u_i' + \delta_i^0) +$$

$$+b_iu_i+f_i = \underbrace{\left(-\varepsilon u_i'' - a_iu_i' + b_iu_i + f_i\right)}_{=0} - \left[\varepsilon(1+R_i\theta_i)\delta_i + a_i\delta_i^0\right] - \underbrace{\varepsilon R_i\theta_i}\cdot u_i'';$$

$$|\delta_i|, |\delta_i^0| \leq C\cdot h^2;$$

$$\Downarrow \qquad \varepsilon R_i = \frac{a_ih}{2}$$

$$(9)\quad \boxed{\left|L_h(u)_i^h - F_i^h\right| \leq C_a\left[h|\theta_i| + h^2\right] = C_a\cdot h\left(|\theta_i| + h\right)}$$

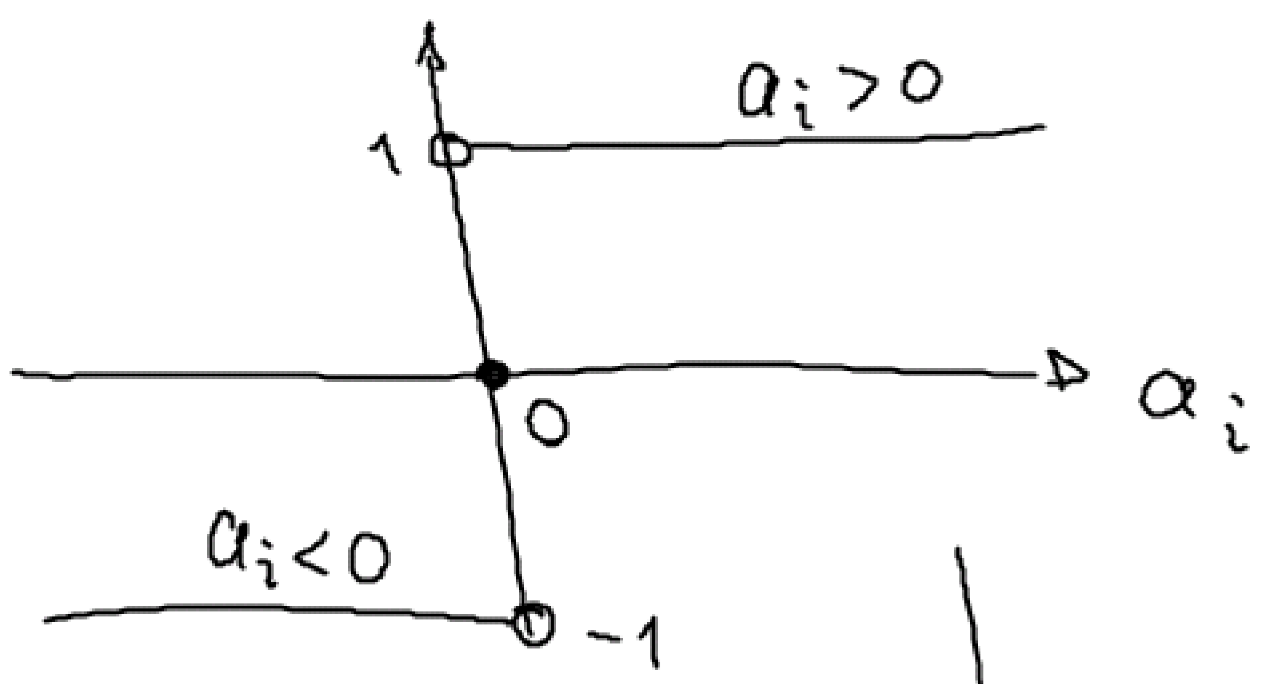
Оценка погрешности аппроксимации для семейства разностных схем (8) (или (8')) - см. Опред. 2.

Классические варианты выбора параметров θ_i $(i=\overline{2,n-1})$ в семействе (8)

1) $\theta_i = 0$ $(i=\overline{2,n-1})$ – "схема с центральной разностью"

имеет $2^{\text{й}}$ порядок аппроксимации (см. (9))

2) $\theta_i = \operatorname{sign} a_i$ $(i=\overline{2,n-1})$ – "схема с направленной разностью"



$$\varepsilon(1+|R_i|)D^+D^-u_i + a_i D^0 u_i - \ldots =$$

$$= \varepsilon D^+D^-u_i + \frac{|a_i|}{2}\left(D^+u_i - D^-u_i\right) +$$

$$\frac{a_i}{2}\left(D^+u_i + D^-u_i\right) = \qquad R_i = \frac{a_i h}{2\varepsilon}$$

$$= \begin{cases} \varepsilon D^+D^-u_i + a_i D^+u_i; & a_i>0 \\ \varepsilon D^+D^-u_i + a_i D^-u_i; & a_i<0 \end{cases} = \varepsilon D^+D^-u_i + \frac{|a_i|+a_i}{2}\cdot D^+u_i + \frac{a_i-|a_i|}{2}\cdot D^-u_i - \ldots =$$

$$a_i u_i'$$

имеет $1^{\text{й}}$ порядок аппроксимации (см. (9))

3) $\theta_i = \dfrac{|R_i|}{1+|R_i|} \cdot \operatorname{sign} a_i \quad (i=\overline{2,n-1})$ – схема А.А.Самарского.

$$h|\theta_i| \leqslant \frac{h|R_i|}{1+|R_i|} \leqslant C \cdot \frac{h^2/\varepsilon}{1+h/\varepsilon} = C\,\frac{h^2}{\varepsilon+h} = O(h^2);$$

аппроксимация $2^{\text{го}}$ порядка (см. (9)).

4) $\theta_i = \operatorname{cth} R_i - \dfrac{1}{R_i} \quad (i=\overline{2,n-1})$ – схема А.М.Ильина.

аппроксимация $2^{\text{го}}$ порядка (см. (9))

Устойчивость разностной схемы.

Рассмотрим операторное сеточное ур-ие вида (8'):

$$(8') \qquad L_h u^h = F^h$$

Будем наз. задачу (8') устойчивой, если:

1) (8') имеет единственное решение

2) $\exists C_u: \quad \|u^h\| \leq C_u \cdot \|F^h\|$, для любых правых частей F^h и соответствующих им решений u^h.

Теорема Лакса.

Предположим, что есть некая дифференциальная задача, записанная в операторной форме:

(10) $$L\,u(x) = F(x)\ ,\quad x \in \Omega\ ;$$

Рассмотрим сеточную (разностную) задачу, аппроксимирующую задачу (10):

(11) $$L_h u_i^h = F_i^h \quad (i=\overline{1,n})$$

Предположим:

1) (11) аппроксимирует (10) на её решении с оценкой:

$$|L_h(u)_i^h - F_i^h| \leq C_a \cdot h^p \quad (p>0;\ \underset{i=\overline{1,n}}{;}\ \text{см. Опр. 2.}) \tag{12}$$

2) (11) устойчива (см. Опр. 3.) и имеет место оценка:

$$\|u^h\|_\infty \leq C_u \cdot \|F^h\|_\infty \tag{13}$$

Тогда решение u^h задачи (11) <u>сходится</u> к решению $u(x)$ задачи (10) при $h \to 0$, и имеет место оценка:

$$\|(u)^h - u^h\|_\infty \leq C_a \cdot C_u \cdot h^p$$

(+)

Устойчивость семейства разностных схем (8).

Предположим, что сеточной оператор L_h имеет след. вид:

$$\begin{cases} L_h u_1^h \equiv B_1 u_1^h - C_1 u_2^h; \\ L_h u_i^h \equiv -A_i u_{i-1}^h + B_i u_i^h - C_i u_{i+1}^h; \quad i=\overline{2,n-1}; \\ L_h u_n^h \equiv -A_n u_{n-1}^h + B_n u_n^h; \end{cases} \qquad (14)$$

Опред. 3. Оператор (14) назовем M-оператором, если выполнены условия:

1) $B_1 \neq 0, B_n \neq 0;\ C_1 \geq 0, A_n \geq 0;$

$A_i > 0,\ C_i > 0 \quad (i=\overline{2,n-1})$

2) $B_1 \geq C_1$, $B_i \geq A_i + C_i$ $(i=\overline{2,n-1})$, $B_n \geq A_n$

и хотя бы одно из этих неравенств — <u>строгое</u>. ⊕

<u>Теорема</u> (об оценке решения).

Рассмотрим сеточное ур-ие, записанное в операторной форме:

(11) $$L_h u_i^h = F_i^h \quad (i=\overline{1,n}).$$

Предположим:

① L_h — является M-оператором (см. Опред. 3).

② $\exists$ сеточная ф-ия $w^h = \{w_i^h\}_{i=1}^n$ такая, что:

(15) $$L_h w_i^h \geq \alpha > 0 \quad (i=\overline{1,n})$$

w^h – "барьерная ф-ия"!

$\Downarrow$ имеет место оценка устойчивости:

$$\|u^h\|_\infty \leq \underbrace{\left(\frac{\|w^h\|_\infty}{\alpha}\right)}_{\equiv C_u} \cdot \|F^h\|_\infty .$$

Используем Теорему для исследования устойчивости семейства схем (8). Сначала найдем условия при которых оператор (8) будет М-оператором; Для этого перепишем семейство (8) в виде (14).

$$L_h u_1^h = u_1^h ; \qquad (B_1 = 1, C_1 = 0).$$

$$L_h u_i^h = -\varepsilon(1 + R_i\theta_i) D^+ D^- u_i^h - a_i D^0 u_i^h + b_i u_i^h =$$

$$= -\varepsilon(1+R_i\theta_i)\cdot \frac{u_{i+1}^h - 2u_i^h + u_{i-1}^h}{h^2} - a_i \cdot \frac{u_{i+1}^h - u_{i-1}^h}{2h} + b_i u_i^h =$$

$$= -\left[\frac{\varepsilon}{h^2}(1+R_i\theta_i) - \frac{a_i}{2h}\right]\cdot u_{i-1}^h + \left[\frac{2\varepsilon}{h^2}(1+R_i\theta_i) + b_i\right]\cdot u_i^h -$$

$$-\left[\frac{\varepsilon}{h^2}(1+R_i\theta_i) + \frac{a_i}{2h}\right]\cdot u_{i+1}^h = -\frac{\varepsilon}{h^2}\left(1+R_i\theta_i - R_i\right)\cdot u_{i-1}^h +$$

$$+\left[\frac{2\varepsilon}{h^2}(1+R_i\theta_i) + b_i\right]\cdot u_i^h - \frac{\varepsilon}{h^2}\left(1+R_i\theta_i + R_i\right) u_{i+1}^h; \quad i=\overline{2,n-1}$$

$$A_i = \frac{\varepsilon}{h^2}\left(1+R_i\theta_i - R_i\right), \quad C_i = \frac{\varepsilon}{h^2}\left(1+R_i\theta_i + R_i\right)$$

$$B_i = \frac{2\varepsilon}{h^2}(1+R_i\theta_i) + b_i;$$

$$L_h u_n^h \equiv u_n^h \qquad (A_n = 0, B_n = 1)$$

В силу ① Определения 3, потребуем выполнения условий:

$$1+R_i\Theta_i-R_i>0 \quad \text{и} \quad 1+R_i\Theta_i+R_i>0 \quad (i=\overline{2,n-1})$$

$$\Updownarrow$$

$$-(1+R_i\Theta_i)<R_i<1+R_i\Theta_i$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{|R_i|<1+R_i\Theta_i; \quad i=\overline{2,n-1}}$$

Проверим ②: $B_1 \geqslant C_1$ и $B_n \geqslant A_n$ – очевидные

$B_i \geqslant A_i + C_i$ (?) $\quad B_i - A_i - C_i = \frac{2\varepsilon}{h^2}(1+R_i\Theta_i)+b_i -$

$$-\frac{\varepsilon}{h^2}(1+R_i\Theta_i-\cancel{R_i})-\frac{\varepsilon}{h^2}(1+R_i\Theta_i+\cancel{R_i}) = b_i \geqslant 0 \quad (i=\overline{1,n})$$

Теорема. Если выполнено нер-ва:

$$|R_i| < 1 + R_i \Theta_i \quad (i = \overline{2, n-1}), \tag{16}$$

то оператор (8) является M-оператором

② $\boxed{\theta_i = \operatorname{sign} a_i} \overset{(16)}{\Longrightarrow} |R_i| < 1 + |R_i|$ – выполнено $\forall R_i$ $(\forall h)$

③ $\boxed{\theta_i = \dfrac{|R_i|}{1+|R_i|} \cdot \operatorname{sign} a_i} \overset{(16)}{\Longrightarrow} |R_i| < 1 + \dfrac{|R_i|^2}{1+|R_i|}$

$\cancel{|R_i|} + |R_i|^2 < 1 + \cancel{|R_i|} + |R_i^2|$ – верно!

④ $\boxed{\theta_i = \operatorname{cth} R_i - \dfrac{1}{R_i}} \overset{(16)}{\Longrightarrow} |R_i| < \cancel{1} + R_i \operatorname{cth} R_i - \cancel{1}$;

$R_i \operatorname{cth} R_i > |R_i|$ (?) ф-ия $x \operatorname{cth} x$ – чётная

$\Updownarrow$

$x \operatorname{cth} x > x$ $(\forall x > 0)$

$\Updownarrow$

$\operatorname{cth} x > 1 \iff \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} > 1$

Построение барьерной функции.

Предположим, что в исходной дифф. постановке выполнено нер-во: $b(x) \geq \beta > 0 \quad \forall x \in [0,1]$. Тогда барьерную функцию для семейства схем (8) можно выбрать в виде:

$$\boxed{w_i \equiv \frac{1}{\beta} \equiv const.}$$

Тогда:

$$\left.\begin{aligned} & L_h w_1 = \frac{1}{\beta}; \\ (i=\overline{2,n-1}) \quad & L_h w_i = b_i/\beta \geq \beta/\beta = 1 \\ & L_h w_n = \frac{1}{\beta} \end{aligned}\right\} L_h w_i \geq \min\left(1, \frac{1}{\beta}\right) > 0$$

<u>Оценка устойчивости:</u> $\|u^h\|_\infty \leq \frac{1/\beta}{\min(1, 1/\beta)} \cdot \|F^h\|_\infty.$

Итак, нами доказана следующая

<u>Теорема</u>. 1) Предположим, что в диффер. ур-ии (1)

$$b(x) \geq \beta > 0 \quad (x \in [0,1])$$

2) Предположим, что для сем-ва схем (8) имеет место нер-во (16): $|R_i| < 1 + R_i \Theta_i \quad (i = \overline{2, n-1})$

$\Downarrow$

Приближ. решение u^h семейства схем (8) существует, единственно и для него и решения $u(x)$ задачи (1) имеет место оценка сходимости:

$$\| (u)^h - u^h \|_\infty \leq C \cdot h \left(\|\Theta\|_\infty + h \right).$$

Константа C - не зависит от "h", $\|\Theta\|_\infty = \max\limits_{2 \leq i \leq n-1} |\Theta_i|$

Таким образом, для классических схем имеем следующие оценки сходимости:

1) Схема с центр. разностью: при условии $|R_i|<1$ $(i=\overline{2,n-1})$

$$\|(u)^h-u^h\|_\infty \le C_\varepsilon h^2;$$

2) Схема с направл. разностью: $\forall h,\varepsilon>0$

$$\|(u)^h-u^h\|_\infty \le C_\varepsilon h;$$

3) Схема Самарского: $\forall h,\varepsilon>0$

$$\|(u)^h-u^h\|_\infty \le C_\varepsilon\cdot h^2;$$

4) Схема Ильина: $\forall h,\varepsilon>0$

$$\|(u)^h-u^h\|_\infty \le C\cdot h^2;$$