🕮 IV. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Численные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений рассматриваются на примере следующей задачи для линейного уравнения с малым параметром при старшей производной:

$$\begin{cases} \varepsilon \cdot u''(x) + a(x) \cdot u'(x) - b(x) \cdot u(x) = f(x), \quad x \in (0,1); \\ \zeta_0 \cdot u(0) - \eta_0 \cdot \varepsilon \cdot u'(0) = \phi_0, \\ \zeta_1 \cdot u(1) + \eta_1 \cdot \varepsilon \cdot u'(1) = \phi_1. \end{cases} \tag{IV.1}$$

В (IV.1): $\varepsilon > 0$ - малый параметр; a(x), b(x), f(x) - непрерывные функции на отрезке [0,1], причем $b(x) \geq 0$ для $x \in [0,1]$; для параметров, входящих в краевые условия предположим выполненными неравенства:

$$\zeta_0 \geq 0, \zeta_1 \geq 0, \eta_0 \geq 0, \eta_1 \geq 0; \quad \zeta_0 + \eta_0 > 0, \ \zeta_1 + \eta_1 > 0.$$

Если к выше перечисленным условиям добавить еще одно:

$$\int_0^1 b(x)dx + \zeta_0 + \zeta_1 > 0,$$

то можно гарантировать существование и единственность классического решения задачи (IV.1) (см. [14]).

Задачи вида (IV.1) являются простейшими математическими моделями диффузионно-конвективных процессов и родственных физических явлений [15]. Наличие относительно малых подобластей с большими градиентами решения, которые возникают при малых значениях параметра ε, делают такие задачи сложными для численной реализации и требует использования разностных схем, учитывающих их специфику [16].

МОНОТОННЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Основная цель. Познакомиться с монотонными разностными схемами для решения простейших краевых задач с краевыми условиями общего вида. В том числе, рассмотреть задачи, решения которых формируют пограничные слои.

Теория и основные формулы. На отрезке [0,1] рассмотрим сетку

$$0 = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = 1$$

с равноотстоящими друг от друга узлами:

$$x_i = \frac{i-1}{n-1}, \; i = 1,2,...,n;$$

и шагом $h = \dfrac{1}{n-1}$. Примем также следующие обозначения:

$$a_i \equiv a(x_i), \; b_i \equiv b(x_i), \; f_i \equiv f(x_i), \; R_i \equiv \frac{a_i \cdot h}{2 \cdot \varepsilon}, \; (i=1,2,\ldots,n);$$

$$D_+ u_i^h \equiv \frac{u_{i+1}^h - u_i^h}{h}, \; i = 1,2,...,n-1; \; D_- u_i^h \equiv \frac{u_i^h - u_{i-1}^h}{h}, \; i = 2,3,...,n.$$

Для аппроксимации задачи (IV.1) рассматривается следующее семейство разностных схем, полученное с использованием простейшего метода дискретизации – метода конечных разностей:

$$\varepsilon \cdot \gamma_i \cdot \frac{D_+ u_i^h - D_- u_i^h}{h} + a_i \cdot \frac{D_+ u_i^h + D_- u_i^h}{2} - b_i \cdot u_i^h = f_i, \; i = 2,3,..n-1; \quad \text{(IV.1.1)}$$

$$\begin{aligned} &\zeta_0 u_1^h - \eta_0 \cdot \varepsilon D_+ u_1^h = \phi_0, \\ &\zeta_1 u_n^h + \eta_1 \cdot \varepsilon D_- u_n^h = \phi_1. \end{aligned} \quad \text{(IV.1.2)}$$

В (IV.1.1) $\gamma_i \ (i=1,2,...,n)$- *параметры аппроксимационной вязкости*, их выбор и определяет разностную схему в семействе (IV.1.1); неизвестными в (IV.1.1), (IV.1.2) являются величины $u_i^h, i=1,2,...,n,$ аппроксимирующие значения $u(x_i)$, (i=1,2,…,n) точного решения задачи (IV.1). Разностные краевые условия (IV.1.2) могут быть заменены на более точные:

$$
\begin{aligned}
&(\zeta_0 + b_1 \cdot h \cdot \frac{1+\mu_1}{2}) \cdot u_1^h - \eta_0 \varepsilon \cdot (\gamma_1 + R_1) \cdot D_+ u_1^h = \phi_0 - \eta_0 \cdot f_1 \cdot h \cdot \frac{1+\mu_1}{2}, \\
&(\zeta_1 + b_n \cdot h \cdot \frac{1-\mu_n}{2}) \cdot u_n^h + \eta_1 \varepsilon \cdot (\gamma_n - R_n) \cdot D_- u_n^h = \phi_1 - \eta_1 \cdot f_n \cdot h \cdot \frac{1-\mu_n}{2}.
\end{aligned}
\tag{IV.1.3}
$$

Здесь:

$$\mu_i = \frac{\gamma_i - 1}{R_i}, \ i = 1,2,...,n.$$

Для выбора параметров $\gamma_i \ (i=1,2,...,n)$ можно предложить следующие известные из литературы варианты :

1) $\gamma_i = 1$, (i = 1,2,...,n) - схема с центральной разностью [15];

2) $\gamma_i = 1 + |R_i|$, (i = 1,2,...,n) - схема с направленной разностью [15];

3) $\gamma_i = 1 + \dfrac{R_i^2}{1+|R_i|}$, (i = 1,2,...,n) - схема Самарского А.А. [17];

4) $\gamma_i = 1 + \dfrac{|R_i^3|}{1+|R_i| + R_i^2}$, (i = 1,2,...,n) - схема Булеева Н.И. и ТимухинаТ.И. [18];

5) $\gamma_i = 1 + R_i^2 \cdot \dfrac{1 + 2\cdot|R_i|}{3 + 3\cdot|R_i| + 2\cdot R_i^2}$, (i = 1,2,...,n)-схема Булеева Н.И. [19];

6) $\gamma_i = R_i \cdot \mathrm{cth} R_i$, (i = 1,2,...,n) - схема Ильина А.М. [16,20].

Следующая схема (El-Mistikawy & Werle [21]) не содержится в семействе (IV.1.1), для ее записи примем обозначения:

$$a_{i+1/2} \equiv \frac{a(x_i) + a(x_{i+1})}{2}, \ b_{i+1/2} \equiv \frac{b(x_i) + b(x_{i+1})}{2}, \ f_{i+1/2} \equiv \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2};$$

$$R_{i+1/2} \equiv \frac{a_{i+1/2} \cdot h}{2 \cdot \varepsilon}, \quad \mu_{i+1/2} \equiv \operatorname{cth} R_{i+1/2} - \frac{1}{R_{i+1/2}}.$$

В этих обозначениях разностные уравнения имеют вид:

$$\begin{gathered}
\frac{\varepsilon}{h} \cdot (1 + R \cdot \mu + R)_{i+1/2} \cdot D_+ u_i^h - \frac{\varepsilon}{h} \cdot (1 + R \cdot \mu - R)_{i-1/2} D_- u_i^h - \\
-(b_{i+1/2} \cdot \frac{1+\mu_{i+1/2}}{2} + b_{i-1/2} \cdot \frac{1-\mu_{i-1/2}}{2}) \cdot u_i^h = \\
= f_{i+1/2} \cdot \frac{1+\mu_{i+1/2}}{2} + f_{i-1/2} \cdot \frac{1-\mu_{i-1/2}}{2}, \ i = 2,3,\dots,n-1;
\end{gathered} \tag{IV.1.4}$$

$$\begin{gathered}
(\zeta_0 + b_{1/2} \cdot h \cdot \frac{1+\mu_{1/2}}{2}) \cdot u_1^h - \eta_0 \cdot \varepsilon \cdot (1 + R \cdot \mu + R)_{1/2} \cdot D_+ u_1^h = \\
= \phi_0 - \eta_0 \cdot f_{1/2} \cdot h \cdot \frac{1+\mu_{1/2}}{2}; \\
(\zeta_1 + b_{n-1/2} \cdot h \cdot \frac{1-\mu_{n-1/2}}{2}) \cdot u_n^h + \eta_1 \cdot \varepsilon \cdot (1 + R \cdot \mu - R)_{n-1/2} \cdot D_- u_n^h = \\
= \phi_1 - \eta_1 \cdot f_{n-1/2} \cdot h \cdot \frac{1-\mu_{n-1/2}}{2}.
\end{gathered} \tag{IV.1.5}$$

Разностные задачи (IV.1.1), (IV.1.2); (IV.1.1), (IV.1.3) и (IV.1.4), (IV.1.5) могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned}
& B_1 \cdot u_1^h - C_1 \cdot u_2^h = F_1, \\
& -A_i \cdot u_{i-1}^h + B_i \cdot u_i^h - C_i \cdot u_{i+1}^h = F_i, \ i = 2,3,\dots,n-1; \\
& -A_n \cdot u_{n-1}^h + B_n \cdot u_n^h = F_n.
\end{aligned} \tag{IV.1.6}$$

и решены при помощи *метода прогонки* [17] . «Внутренние» свойства дискретной задачи (IV.1.6) определяются понятием *монотонная разностная схема.*

О п р е д е л е н и е IV.1.1 (см. [17]). Дискретная задача (IV.1.6) называется *монотонной,* если для нее выполнены условия:

1) $B_1 \neq 0$, $C_1 \geq 0$, $B_n \neq 0$, $A_n \geq 0$;

2) $A_i > 0$, $C_i > 0$, i =2,3,...,n-1;

3) $B_1 \geq C_1$, $B_i \geq A_i + C_i$, (i = 2,3,...,n-1), $B_n \geq A_n$.

и хотя бы одно из этих неравенств - строгое.

Разностные схемы (IV.1.1), (IV.1.2); (IV.1.1), (IV.1.3) и (IV.1.4), (IV.1.5) называются *монотонными*, если соответствующие им разностные задачи (IV.1.6) монотонны для любых положительных значений параметров h и ε ■

Известно, что монотонность разностной схемы гарантирует однозначную разрешимость соответствующей задачи (IV.1.6) (это доказано, например, в [17]), кроме того, для такой разностной схемы обеспечено выполнение достаточных условий корректности и устойчивости монотонной прогонки.

Предположим, что $u_\varepsilon(x)$ - решение дифференциальной задачи (IV.1), в обозначения включена зависимость от параметра $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, пусть $u_\varepsilon^h \equiv \{u_{\varepsilon,i}^h\}_{i=1}^n$ - сеточная функция являющаяся решением некоторой разностной задачи, аппроксимирующей задачу (IV.1), например задачи (IV.1.1), (IV.1.2); (IV.1.1), (IV.1.3) или (IV.1.4), (IV.1.5). Для произвольной сеточной функции $v^h \equiv \{v_i^h\}_{i=1}^n$ введем «сильную» сеточную норму по формуле:

$$\left\|v^h\right\|_\infty \equiv \max_{1 \leq i \leq n}\left|v_i^h\right|,$$

напомним также, что $(u)^h$ - проекция непрерывной функции $u(x)$ на сетку.

О п р е д е л е н и е IV.1.2 (см. [16]). Решение u_ε^h разностной (дискретной) задачи сходится к решению $u_\varepsilon(x)$ дифференциальной задачи с порядком $p > 0$, если найдется такая константа $C > 0$, возможно зависящая от ε, но не зависящая от h («классическая» сходимость), что:

$$\left\|(u_\varepsilon)^h - u_\varepsilon^h\right\| \leq C \cdot h^p.$$

Если константа «C» в последней оценке не зависит от h и от ε, то говорят о "равномерной по ε" сходимости с порядком «p» ■

Из литературы известно (например, [16]), что разностные схемы 1) - 4) не обладают равномерной по ε сходимостью. Тем не менее, порядки классической сходимости для этих схем следующие: для схемы 2) – первый, для схем 1), 3), 4) - второй.

Схемы 5) (Ильина А.М.) и 6) (El_Mistikawy & Werle) обе обладают вторым порядком классической сходимости, кроме того, первая из этих схем гарантирует первый порядок равномерной по ε сходимости, а вторая схема - второй порядок равномерной по ε сходимости.

Все схемы, за исключением схемы с центральной разностью 1), являются монотонными в смысле Определения IV.1.1, схема 1) гарантирует монотонность только в случае выполнения ограничения на выбор параметров h и ε:

$$h \cdot \left\| (a)^h \right\|_\infty < 2\varepsilon,$$

поэтому эту схему обычно классифицируют как *условно-монотонную*.

Тестовые задачи.

Задача 1. «Уравнение с постоянными коэффициентами», считаем, что коэффициенты уравнения в (IV.1) постоянные:

$$a(x) \equiv a,\ b(x) \equiv b \ge 0,\ f(x) \equiv f,$$

тогда решение задачи (IV.1) можно выписать в явном виде, сделаем это, вводя обозначение для следующей функции:

$$E(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x < 50, \\ 0, & x \ge 50. \end{cases} \qquad \text{(IV.1.7)}$$

и рассматривая три различных случая:

a) $b \ne 0$;

$$s_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4\varepsilon b}}{2\varepsilon},\ \ s_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4\varepsilon b}}{2\varepsilon},$$

$$t_{01} = \zeta_0 + \varepsilon\eta_0 s_1,\ \ t_{02} = \zeta_0 + \varepsilon\eta_0 s_2,$$

$$t_{11} = \zeta_1 - \varepsilon\eta_1 s_1,\ \ t_{12} = \zeta_1 - \varepsilon\eta_1 s_2,$$

$$d = t_{01} \cdot t_{12} \cdot E(s_2) - t_{02} \cdot t_{11} \cdot E(s_1),$$

$$z_0(x) = \frac{t_{12} \cdot E(s_1 \cdot x + s_2) - t_{11} \cdot E(s_2 \cdot x + s_1)}{d},$$

$$z_1(x) = \frac{t_{01} \cdot E(s_2 \cdot x) - t_{02} \cdot E(s_1 \cdot x)}{d},$$

Точное решение:

$$u(x) = \left(\phi_0 + \frac{f \cdot \zeta_0}{b}\right) \cdot z_0(x) + \left(\phi_1 + \frac{f \cdot \zeta_1}{b}\right) \cdot z_1(x) - \frac{f}{b}.$$

b) $b = 0,\ a \neq 0;$

Точное решение:

$$u(x) = \left(\phi_0 + \frac{\varepsilon \cdot f \cdot \eta_0}{a}\right) \cdot z_0(x) + \left(\phi_1 - \frac{f \cdot (\zeta_1 + \varepsilon\eta_1)}{a}\right) \cdot z_1(x) + \frac{f \cdot x}{a}.$$

c) $b = 0,\ a = 0;$

$$d = \zeta_0 \cdot \zeta_1 + \varepsilon \cdot (\zeta_0 \cdot \eta_1 + \zeta_1 \cdot \eta_0),$$

$$z_0(x) = \frac{\zeta_1 \cdot (1 - x) + \varepsilon \cdot \eta_1}{d},\ z_1(x) = \frac{\zeta_0 \cdot x + \varepsilon \cdot \eta_0}{d},$$

Точное решение:

$$u(x) = \phi_0 \cdot z_0(x) + \left(\phi_1 - \frac{f \cdot (\zeta_1 + 2\varepsilon\eta_1)}{2\varepsilon}\right) \cdot z_1(x) + \frac{f \cdot x^2}{2\varepsilon}.$$

Задача 2.

Положим в (IV.1):

$$a(x) = \frac{2 \cdot \varepsilon}{1 + x} - \frac{2}{(1 + x)^2},\ b(x) = 0,\ \ f(x) = \frac{1 - 2 \cdot x}{(1 + x)^2} \cdot [\varepsilon \cdot (1 + x) - 1] - \varepsilon,$$

$$\zeta_0 = \zeta_1 = 1,\ \eta_0 = \eta_1 = 0,\ \phi_0 = 0.5 \cdot e^{-\frac{1}{\varepsilon}},\ \phi_1 = 0.$$

Точное решение:

$$u(x) = \frac{x \cdot (1 - x)}{2} + \frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - e^{-\frac{2}{\varepsilon \cdot (1 + x)}}}{2(1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}})}.$$

Задача 3.

Положим в (IV.1):

$$a(x)=3\cdot(1+x)^2-\frac{2\cdot\varepsilon}{1+x},\ b(x)=0,\ f(x)=\frac{3\cdot\varepsilon}{2\cdot(1+x)^2}-\frac{3\cdot(1+x)}{2},$$
$$\zeta_0=\zeta_1=1,\ \eta_0=\frac{1}{3},\ \eta_1=0,\ \phi_0=\frac{\varepsilon}{6}-\frac{1}{1-e^{-7/\varepsilon}},\ \phi_1=1-\frac{\ln 2}{2}.$$

Точное решение :

$$u(x)=\frac{1-e^{\frac{1-(1+x)^3}{\varepsilon}}}{1-e^{-7/\varepsilon}}-\frac{\ln(1+x)}{2}.$$

Задача 4.

Положим в (IV.1):

$$a(x)=\frac{2}{(1+x)^2},\ b(x)=\frac{4}{(1+x)^3},\ f(x)=\left[\frac{1-2x}{1+x}-\varepsilon-\frac{e^{-1/\varepsilon}}{1-e^{-1/\varepsilon}}\right]\cdot\frac{2}{(1+x)^3},$$
$$\zeta_0=2,\ \zeta_1=2,\ \eta_0=1,\ \eta_1=4,\ \phi_0=-\left(1+\varepsilon+\frac{1}{1-e^{-1/\varepsilon}}\right),\ \phi_1=1+\varepsilon+\frac{e^{-1/\varepsilon}}{1-e^{-1/\varepsilon}}.$$

Точное решение:

$$u(x)=\frac{x}{1+x}+\frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon}}-e^{-\frac{2\cdot x}{\varepsilon\cdot(1+x)}}}{2(1-e^{-\frac{1}{\varepsilon}})}.$$

Задача 5.

Положим в (IV.1):

$$a(x)=\frac{2\cdot\varepsilon}{1+x}+\frac{2}{(1+x)^2},\ b(x)=0,\ f(x)=\frac{4}{(1+x)^4},$$
$$\zeta_0=\zeta_1=1,\ \eta_0=\eta_1=0,\ \phi_0=-1,\ \phi_1=1.$$

Точное решение:

$$u(x) = \frac{2x}{1+x} + \frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - e^{-\frac{2\cdot x}{\varepsilon\cdot(1+x)}}}{(1-e^{-\frac{1}{\varepsilon}})}.$$

Задача 6.

Положим в (IV.1):

$$a(x) = 0,\ b(x) = (1+x)^2,$$
$$\zeta_0 = \zeta_1 = 1,\ \eta_0 = \eta_1 = 0,\ \phi_0 = \phi_1 = 0.$$

Точное решение:

$$u(x) = \frac{E\left(x/\sqrt{\varepsilon}\right) + E\left((1-x)/\sqrt{\varepsilon}\right)}{1 + E\left(1/\sqrt{\varepsilon}\right)} - [\cos(\pi x)]^2,$$

где функция E(x) определена формулой (IV.1.7), а правая часть f(x) в уравнении (IV.1) определяется после подстановки решения u(x) в левую часть этого уравнения.

Требования к программе. *Программа должна включать:*

1) Разностную схему (IV.1.1), (IV.1.2), или (IV.1.1), (IV.1.3), с возможностью выбора параметров γ_i $(i = 2,3...,n\text{-}1)$, или при их фиксированных значениях, или схему (IV.1.4), (IV.1.5) (по усмотрению преподавателя).
2) Тестовые задачи (по выбору преподавателя).
3) Вывод относительных погрешностей по формуле:

$$Err \equiv \frac{\max\limits_{1\le i\le n}\left|u(x_i) - u_i^h\right|}{\max\limits_{1\le i\le n}\left|u(x_i)\right|}\cdot 100(\%).$$

4) Возможность выбора числа узлов сетки «n», а также параметра «ε» (если он есть по условию тестовой задачи).

5) Графика: одновременная отрисовка точного и приближенных решений (проинтерполированных кусочно-линейным сплайном).

Задание для работы с программой. В процессе работы с программой и при *написании Отчета* необходимо ответить на следующие вопросы:

1. Как ведут себя решения дифференциальных задач при ε стремящемся к нулю?

2. Как влияет увеличение параметра n (при фиксированном ε) на точность разностных схем? Сопоставить численные результаты с теоретическими оценками сходимости.

3. Влияет ли уменьшение параметра ε (при фиксированном n) на точность разностных схем (по каждой схеме отдельно)?

4. Сравнить точность разностных схем между собой и сопоставить экспериментально полученные результаты с теорией.

6. Исследовать монотонность используемых разностных схем. Проявляется ли наличие или отсутствие свойства монотонности в работе разностной схемы?

7. Задача 1 предполагает возможность выбора постоянных коэффициентов в уравнении и граничных условиях. При работе с этой задачей необходимо рассмотреть различные варианты пограничных слоев:

а) пограничный слой у левой границы ($a > 0$, $b \geq 0$),

б) пограничный слой у правой границы ($a < 0$, $b \geq 0$),

в) пограничные слои у обеих границ ($a = 0$, $b > 0$).