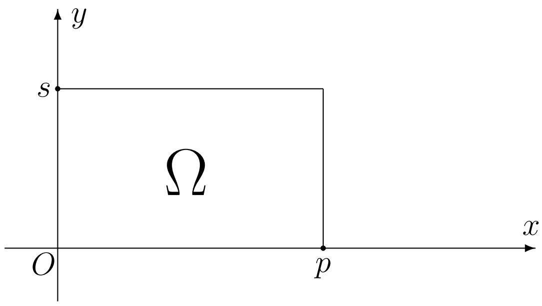
Уравнение Лапласа в прямоугольнике.

Пусть $\Omega = \{(x,y):\ 0 < x < p,\ 0 < y < s\}$ – прямоугольник на плоскости:



Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \\ \alpha_1 u(0,y) - \beta_1 u_x(0,y) = f_1(y),\ 0 < y < s, \\ \alpha_2 u(p,y) + \beta_2 u_x(p,y) = f_2(y),\ 0 < y < s, \\ \alpha_3 u(x,0) - \beta_3 u_y(x,0) = g_1(x),\ 0 < x < p, \\ \alpha_4 u(x,s) + \beta_4 u_y(x,s) = g_2(x),\ 0 < x < p. \end{cases}$$

Рассмотрим две другие задачи.

Задача 1.

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \text{ в } \Omega, \\ \alpha_1 v(0,y) - \beta_1 v_x(0,y) = 0,\ 0 < y < s, \\ \alpha_2 v(p,y) + \beta_2 v_x(p,y) = 0,\ 0 < y < s, \\ \alpha_3 v(x,0) - \beta_3 v_y(x,0) = g_1(x),\ 0 < x < p, \\ \alpha_4 v(x,s) + \beta_4 v_y(x,s) = g_2(x),\ 0 < x < p. \end{cases} \tag{1}$$

Задача 2.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \\ \alpha_1 w(0,y) - \beta_1 w_x(0,y) = f_1(y),\ 0 < y < s, \\ \alpha_2 w(p,y) + \beta_2 w_x(p,y) = f_2(y),\ 0 < y < s, \\ \alpha_3 w(x,0) - \beta_3 w_y(x,0) = 0,\ 0 < x < p, \\ \alpha_4 w(x,s) + \beta_4 w_y(x,s) = 0,\ 0 < x < p. \end{cases} \tag{2}$$

Нетрудно убедиться, что решение исходной задачи является суммой решений задачи 1 и задачи 2:

$$u(x,y) = v(x,y) + w(x,y). \tag{3}$$

Решение задачи 1.

Рассмотрим ассоциированную задачу Штурма – Лиувилля

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x),\ 0 < x < p, \\ \alpha_1 X(0) - \beta_1 X'(0) = 0, \\ \alpha_2 X(p) + \beta_2 X'(p) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Решением этой задачи является набор собственных значений $\{\lambda_n\}$ и собственных функций $\{X_n(x)\}$ $(n = 0,1,2,\ldots)$, взятых по одной для каждого собственного значения и образующих ортогональный базис в $CL_2[0,p]$.

Решение задачи 1 при каждом фиксированном y разложим в ряд Фурье по собственным функциям ассоциированной задачи Штурма – Лиувилля

$$v(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)Y_n(y) \tag{5}$$

и вместо самой функции $v(x,y)$ будем искать ее коэффициенты Фурье $Y_n(y)$. Подставляя ряд Фурье в уравнение Лапласа, находим

$$\Delta v=\sum_{n=1}^{\infty}X_n''(x)Y_n(y)+X_n(x)Y_n''(y)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_nX_n(x)Y_n(y)+X_n(x)Y_n''(y)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(Y_n''(y)+\lambda_nY_n(y))X_n(x))=0.$$

В силу единственности разложения функции в ряд Фурье

$$Y_n''(y)+\lambda_nY_n(y)=0.$$

Подставляя ряд Фурье в два последних краевых условия, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_3Y_n(0)-\beta_3Y_n'(0))X_n(x)=g_1(x),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_4Y_n(s)+\beta_4Y_n'(s))X_n(x)=g_2(x).$$

Отсюда следует, что числа $\alpha_3Y_n(0)-\beta_3Y_n'(0)$ являются коэффициентами Фурье функции $g_1(x)$, а величины $\alpha_4Y_n(s)+\beta_4Y_n'(s)$ есть коэффициенты Фурье функции $g_2(x)$. Обозначим их a_n и b_n:

$$a_n=\frac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^p g_1(x)X_n(x)dx, \tag{6}$$

$$b_n=\frac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^p g_2(x)X_n(x)dx, \tag{7}$$

где

$$\|X_n\|^2=\int_0^p X_n^2(x)dx. \tag{8}$$

Таким образом, для функции $Y_n(x)$ имеем краевую задачу

$$\left\{\begin{array}{l} Y_n''(y)+\lambda_nY_n(y),\ 0<y<s,\\ \alpha_3Y_n(0)-\beta_3Y_n'(0)=a_n,\\ \alpha_4Y_n(s)+\beta_4Y_n'(s)=b_n.\end{array}\right. \tag{9}$$

Подводя итоги, получаем следующую схему решения задачи 1. Сначала решаем ассоциированную задачу Штурма – Лиувилля (4). Вычисляем квадраты норм собственных функций (8) и коэффициенты Фурье c_n, d_n граничных функций по формулам (6) и (7). После этого решаем краевую задачу (9) и выписываем решение по формуле (5).

Решение задачи 2.

Нетрудно видеть, что вторая задача переходит в первую при перестановке переменных x и y местами (и соответствующих переобозначений). Поэтому сразу приводим алгоритм ее решения. Начинаем с ассоциированой задачи Штурма – Лиувилля

$$\begin{cases} Y''(y) = \lambda Y(y),\ 0 < y < s, \\ \alpha_3 Y(0) - \beta_3 Y'(0) = 0, \\ \alpha_4 Y(s) + \beta_4 Y'(s) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

и находим собственные значения $\{\lambda_n\}$ и собственные функции $\{Y_n(x)\}$. Вычисляем квадрат их нормы

$$\|Y_n\|^2 = \int\limits_0^s Y_n^2(y)dy. \tag{11}$$

Находим коэффициенты Фурье граничных функций

$$c_n = \frac{1}{\|Y_n\|^2} \int\limits_0^s f_1(y) Y_n(y) dy, \tag{12}$$

$$d_n = \frac{1}{\|Y_n\|^2} \int\limits_0^s f_2(y) Y_n(y) dy \tag{13}$$

и решаем краевую задачу

$$\begin{cases} X_n''(x) + \lambda_n X_n(x),\ 0 < x < p, \\ \alpha_1 X_n(0) - \beta_1 X_n'(0) = c_n, \\ \alpha_2 X_n(p) + \beta_2 X_n'(p) = d_n. \end{cases} \tag{14}$$

После этого выписываем решение задачи 2:

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) Y_n(y). \tag{15}$$

По окончании решений задач (1) и (2) получаем решение исходной задачи по формуле (3).

Пример.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \\ u(0, y) = 0,\ 0 < y < s, \\ u_x(p, y) = q,\ 0 < y < s, \\ u(x, 0) = 0,\ 0 < x < p, \\ u(x, s) = U,\ 0 < x < p. \end{cases}$$

Выписываем задачу (1)

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \text{ в } \Omega, \\ v(0, y) = 0,\ 0 < y < s, \\ v_x(p, y) = 0,\ 0 < y < s, \\ v(x, 0) = 0,\ 0 < x < p, \\ v(x, s) = U,\ 0 < x < p. \end{cases}$$

Ассоциированнная задача Штурма – Лиувилля

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x),\ 0 < x < p, \\ X(0) = 0, \\ X'(p) = 0. \end{cases}$$

Собственные функции и собственные значения

$$\lambda_n = -\left(\frac{(2n-1)\pi}{2p}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2p} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

квадрат нормы у всех собственных функций $\|X_n\|^2 = \dfrac{p}{2}$.

Так как $g_1(x) = 0$, то все $a_n = 0$. Функция $g_2(x) = U$ и ее коэффициенты Фурье

$$b_n = \frac{2}{p}\int\limits_0^p g_2(x)X_n(x)dx = \frac{2U}{p}\int\limits_0^p \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2p}dx =$$

$$= -\frac{4U}{(2n-1)\pi}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2p}\Big|_0^p = \frac{4U}{(2n-1)\pi}.$$

Далее решаем краевую задачу

$$\begin{cases} Y_n''(y) - \left(\dfrac{(2n-1)\pi}{2p}\right)^2 Y_n(y),\ 0 < y < s, \\ Y_n(0) = 0, \\ Y_n(s) = b_n. \end{cases}$$

Получаем

$$Y_n(y) = \frac{b_n \operatorname{sh}\dfrac{(2n-1)\pi y}{2p}}{\operatorname{sh}\dfrac{(2n-1)\pi s}{2p}}.$$

Учитывая явный вид коэффициентов b_n, находим

$$v(x,y) = \frac{4U}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{(2n-1)\pi x}{2p}\operatorname{sh}\dfrac{(2n-1)\pi y}{2p}}{(2n-1)\operatorname{sh}\dfrac{(2n-1)\pi s}{2p}}$$

Выписываем задачу (2)

$$\begin{cases} \Delta w = 0 \text{ в } \Omega, \\ w(0,y) = 0,\ 0 < y < s, \\ w_x(p,y) = q,\ 0 < y < s, \\ w(x,0) = 0,\ 0 < x < p, \\ w(x,s) = 0,\ 0 < x < p. \end{cases}$$

Решаем ассоциированную задачу Штурма – Лиувилля

$$\begin{cases} Y''(y) = \lambda Y(y),\ 0 < y < s, \\ Y(0) = 0, \\ Y(s) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Собственные значения и собственные функции

$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{s}\right)^2, \quad Y_n(x) = \sin\frac{n\pi y}{s} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

квадрат нормы у всех собственных функций $\|Y_n\|^2 = \dfrac{s}{2}$.

На следующем шаге вычисляем коэффициенты Фурье граничных функций. Так как $f_1(y) = 0$, то все коэффициенты $c_n = 0$. Функция $f_2(y) = q$ и ее коэффициенты Фурье

$$d_n = \frac{2}{s}\int\limits_0^s f_2(y)Y_n(y)dy = \frac{2q}{s}\int\limits_0^s \sin\frac{n\pi y}{s}dy = -\frac{2q}{n\pi}\cos\frac{n\pi y}{s}\Big|_0^s = \frac{2q(1-(-1)^n)}{n\pi}.$$

После этого решаем кравую задачу

$$\begin{cases} X_n''(x) - \left(\dfrac{n\pi}{s}\right)^2 X_n(x),\ 0 < x < p, \\ X_n(0) = 0, \\ X_n'(p) = d_n. \end{cases}$$

Получаем

$$X_n(x) = \frac{d_n s \operatorname{sh}\dfrac{n\pi x}{s}}{\pi n \operatorname{ch}\dfrac{n\pi p}{s}}$$

Учитывая явный вид коэффициентов d_n, находим

$$w(x,y) = \frac{2qs}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-(-1)^n)\operatorname{sh}\dfrac{n\pi x}{s}\sin\dfrac{n\pi y}{s}}{n^2\operatorname{ch}\dfrac{n\pi p}{s}}$$

Складывая решения двух задач, получаем решение исходной задачи

$$u(x,y) = \frac{4U}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{(2n-1)\pi x}{2p}\operatorname{sh}\dfrac{(2n-1)\pi y}{2p}}{(2n-1)\operatorname{sh}\dfrac{(2n-1)\pi s}{2p}} +$$

$$+\frac{2qs}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-(-1)^n)\operatorname{sh}\dfrac{n\pi x}{s}\sin\dfrac{n\pi y}{s}}{n^2\operatorname{ch}\dfrac{n\pi p}{s}}$$