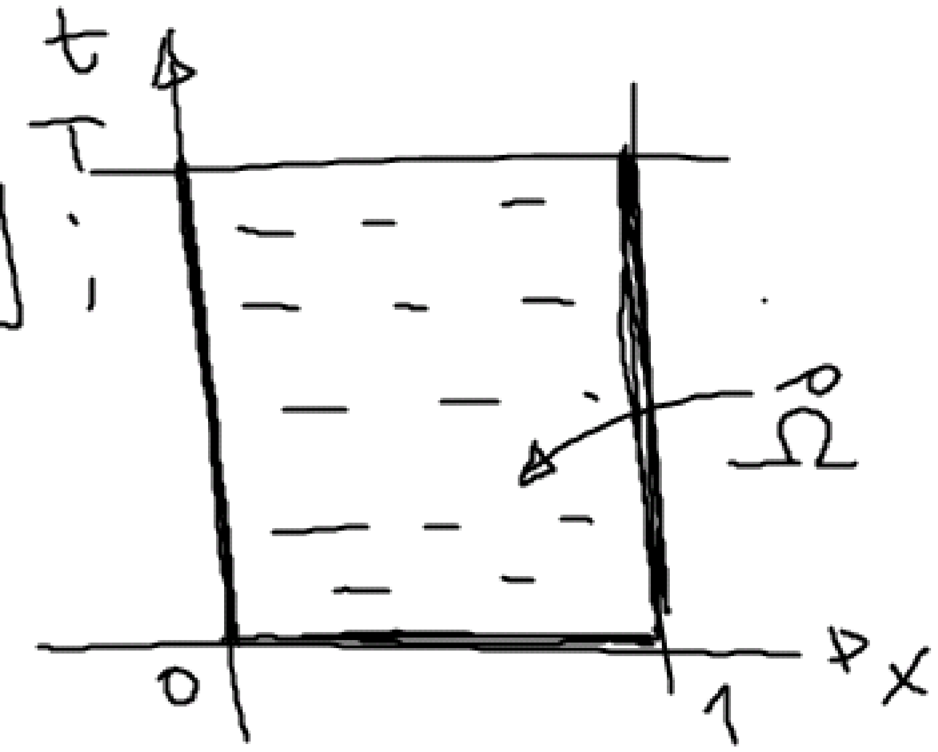
Разностные схемы для ур-ия теплопроводности.

$$
(1)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x)\dfrac{\partial u}{\partial x} - b(x)\cdot u + f(x,t); \quad x \in (0,1); \quad t \in (0,T) \\[2ex]
\left.\begin{aligned}
\zeta_0 u(0,t) - \eta_0 \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \varphi_0(t) \\
\zeta_1 u(1,t) + \eta_1 \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t) = \varphi_1(t)
\end{aligned}\right\} \quad t \in (0,T]; \\[2ex]
u(x,0) = \psi(x), \quad x \in [0,1].
\end{cases}
$$



Смешанная задача для ур-ия нестац. диффузии-конвекции

$\varepsilon > 0$; $b(x) \geqslant 0$; $\zeta_0 + \eta_0 > 0$; $\zeta_1 + \eta_1 > 0$; $\zeta_0, \zeta_1, \eta_0, \eta_1 \geqslant 0$;

1) $\eta_0 = \eta_1 = 0 \Rightarrow$ краевые усл-ия Дирихле;

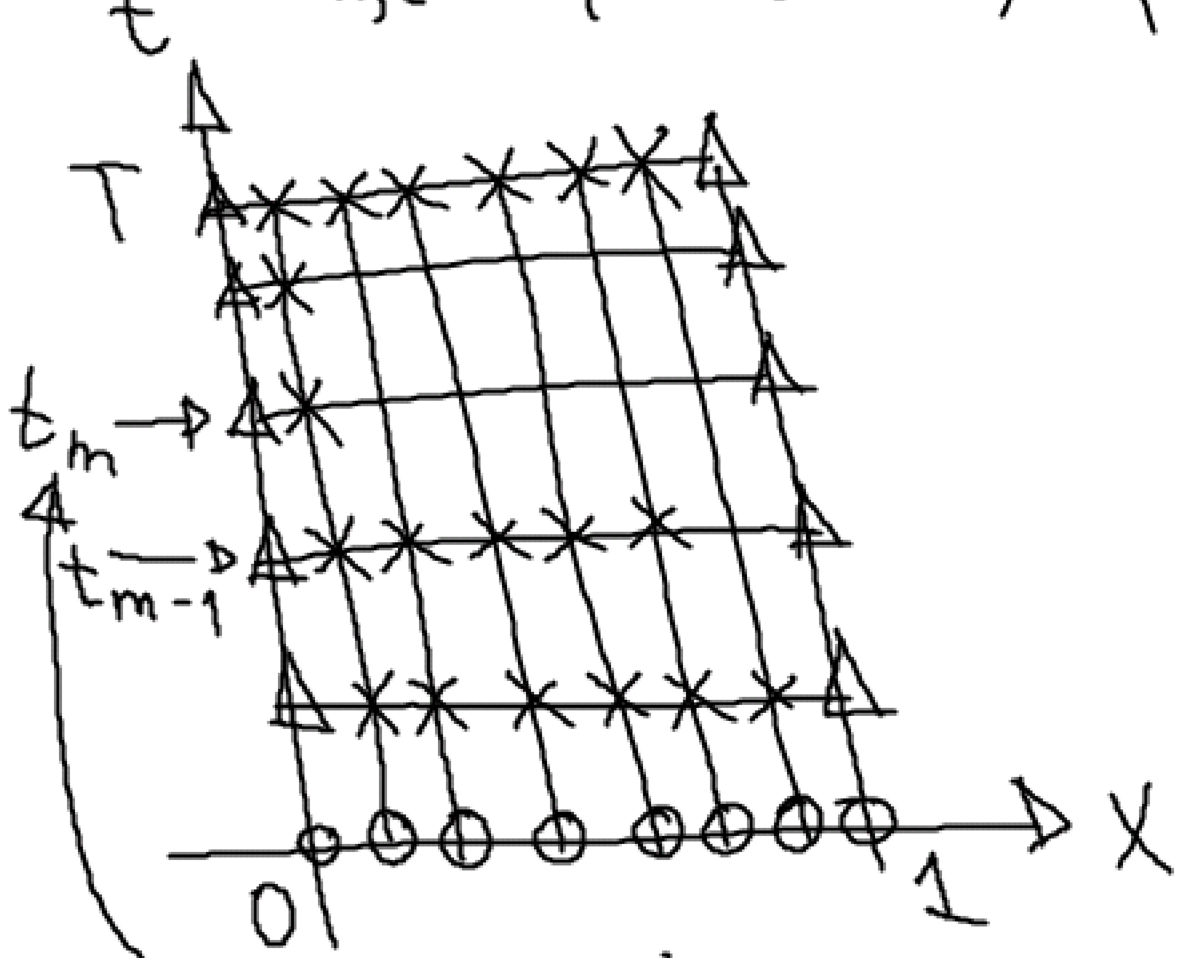
2) $\zeta_0 = \zeta_1 = 0 \Rightarrow$ —"—"— Неймана;

3) в общем случае – 3 краевая задача;

$$
(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t); & x \in (0,1);\ t \in (0,T); \\ u(0,t) = \varphi_0(t);\quad u(1,t) = \varphi_1(t); & t \in (0,T]; \\ u(x,0) = \psi(x), & x \in [0,1]. \end{cases}
$$

$$
\Omega = [0,1] \times [0,T];
$$

$$
\omega_{h,\tau} \equiv \left\{ (x_i, t_m) \;\middle|\; x_i = \frac{i-1}{N-1};\ i = \overline{1,N};\ h \equiv \frac{1}{N-1};\ t_m = \tau \cdot m,\ m = \overline{0,M};\ \tau \equiv \frac{T}{M} \right\}
$$



m - временной слой.

× - внутренние узлы сетки;

Δ - "краевые" узлы;

o - "начальные" узлы.

$$(3)\quad \frac{u(x,t_m)-u(x,t_{m-1})}{\tau} = \frac{\varepsilon}{\tau}\int_{t_{m-1}}^{t_m}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dt + \frac{1}{\tau}\int_{t_{m-1}}^{t_m} f(x,t)\,dt \simeq$$

$$= \varepsilon\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\tau}\int_{t_{m-1}}^{t_m} u(x,t)\,dt\right) + \left(\frac{1}{\tau}\int_{t_{m-1}}^{t_m} f(x,t)\,dt\right);$$

$$(4)\quad \frac{1}{\tau}\int_{t_{m-1}}^{t_m} u(x,t)\,dt \approx \theta\cdot u(x,t_m) + (1-\theta)\cdot u(x,t_{m-1});\quad \theta\in[0,1];$$

$$(3),(4) \Rightarrow \frac{u(x,t_m)-u(x,t_{m-1})}{\tau} \approx \varepsilon\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\theta\cdot u(x,t_m)+(1-\theta)\cdot u(x,t_{m-1})\right]+$$

$$+\left[\theta f(x,t_m)+(1-\theta) f(x,t_{m-1})\right];\quad (5)$$

$$(6)\quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x_i) \approx \frac{V(x_{i+1})-2V(x_i)+V(x_{i-1})}{h^2} \equiv D_x^+ D_x^- V_i;$$

$$(5),(6) \Rightarrow \frac{u(x_i,t_m)-u(x_i,t_{m-1})}{\tau} \approx \varepsilon D_x^+ D_x^- \left[\theta u(x_i,t_m)+(1-\theta)u(x_i,t_{m-1})\right]$$

$$(7) \qquad + \left[\theta f(x_i,t_m)+(1-\theta) f(x_i,t_{m-1})\right];$$

$$\bar{u}_i^m \approx u(x_i,t_m); \quad (x_i,t_m)\in\omega_{h,\tau};$$

$$(7) \Rightarrow \frac{\bar{u}_i^m-\bar{u}_i^{m-1}}{\tau} = \varepsilon D_x^+ D_x^- \left[\theta \bar{u}_i^m+(1-\theta)\bar{u}_i^{m-1}\right] + \qquad \lambda = 2\theta-1$$

в узлах (X); $\qquad + \left[\theta f_i^m + (1-\theta) f_i^{m-1}\right];$

$$D_t^- \bar{u}_i^m \equiv \frac{\bar{u}_i^m-\bar{u}_i^{m-1}}{\tau}; \quad \frac{1+\lambda}{2} \quad \frac{1-\lambda}{2} \quad \lambda\in[-1,1]$$

$$(8) \begin{cases} D_t^- \bar{u}_i^m = \varepsilon D_x^+ D_x^- \left[\theta \bar{u}_i^m+(1-\theta)\bar{u}_i^{m-1}\right] + \left[\theta f_i^m+(1-\theta) f_i^{m-1}\right]; \text{ в } (X) \\ \bar{u}_1^m = \varphi_0(t_m), \ \bar{u}_N^m = \varphi_1(t_m) \text{ в } (\Delta) \ (m=\overline{1,M}) \\ \bar{u}_i^0 = \psi(x_i) \text{ в } (0) \ (i=\overline{1,N}); \quad \theta\in[0,1]. \end{cases}$$

$$\mathcal{L}^{\theta}_{h,\tau}\bar{u}^m_i \equiv \begin{cases} D^-_t \bar{u}^m_i - \varepsilon D^+_x D^-_x\left[\theta \bar{u}^m_i + (1-\theta)\bar{u}^{m-1}_i\right], \text{ в тчк. } (x); \\ \bar{u}^m_i, \text{ в тчк. } (\Delta) \text{ и } (0). \end{cases}$$

$$F^{\theta}_{h,\tau} = \begin{cases} \theta f^m_i + (1-\theta) f^{m-1}_i, \text{ в тчк. } (x); \\ \varphi_0(t_m) \text{ и } \varphi_1(t_m), \text{ в тчк. } (\Delta); \\ \psi(x_i), \text{ в тчк. } (0). \end{cases}$$

(9) $$\boxed{\mathcal{L}^{\theta}_{h,\tau}\bar{u} = F^{\theta}_{h,\tau} \text{ на } \omega_{h,\tau};}$$

Оценим: $\left\| \mathcal{L}^{\theta}_{h,\tau}(u)^{h,\tau} - F^{\theta}_{h,\tau} \right\|_{\infty}$ – погрешность аппроксимации на решении "u" задачи (2).

Будем считать, что $f(x,t) \equiv 0$ в (2);

В точках (Δ) и (0) невязка равна нулю, т.к. краевые и начальные условия принимаются точно.

$\Downarrow$

$$\Downarrow \quad \left\| \mathcal{L}^{\theta}_{h,\tau}(u)^{h,\tau} - F^{\theta}_{h,\tau} \right\|_{\infty} = \max_{(x)} \left| D_t^- u_i^m - \varepsilon D_x^+ D_x^- \left[\theta u_i^m + (1-\theta) u_i^{m-1} \right] \right| .$$

(10) $$u^m = u^{m-1/2} + \frac{\tau}{2} u_t^{m-1/2} + \frac{\tau^2}{8} \cancel{u_{tt}^{m-1/2}} + \frac{\tau^3}{48} u_{ttt}^{m-\theta_1} ;$$

(11) $$u^{m-1} = u^{m-1/2} - \frac{\tau}{2} u_t^{m-1/2} + \frac{\tau^2}{8} \cancel{u_{tt}^{m-1/2}} - \frac{\tau^3}{48} u_{ttt}^{m-\theta_2} ;$$

(12) $$D_t^- u_i^m = \frac{u_i^m - u_i^{m-1}}{\tau} = u_t + \tau^2 K_i^m ; \quad |K_i^m| \le K \ (\forall m,i)$$

(13) $$\theta u_i^m + (1-\theta) u_i^{m-1} = u_i^{m-1/2} + \tau\left(\theta - \frac{1}{2}\right) u_t^{m-1/2} + \tau^2 L_i^m ; \quad |L_i^m| \le L \ (\forall m,i)$$

(14) $$V_{i+1} - V_i = h\cancel{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_i} + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_i + \cancel{\frac{h^3}{6}\left(\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}\right)_i} + \frac{h^4}{24}\left(\frac{\partial^4 V}{\partial x^4}\right)_i + \cancel{\frac{h^5}{120}\left(\frac{\partial^5 V}{\partial x^5}\right)_i} + \frac{h^6}{720}\left(\frac{\partial^6 V}{\partial x^6}\right)_{i+\theta_1}$$

(15) $$V_{i-1} - V_i = -h\cancel{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_i} + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_i - \cancel{\frac{h^3}{6}\left(\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}\right)_i} + \frac{h^4}{24}\left(\frac{\partial^4 V}{\partial x^4}\right)_i - \cancel{\frac{h^5}{120}\left(\frac{\partial^5 V}{\partial x^5}\right)_i} + \frac{h^6}{720}\left(\frac{\partial^6 V}{\partial x^6}\right)_{i-\theta_2} ;$$

$$(16)\quad D_x^+ D_x^- v_i = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_i + \frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}\right)_i + h^4 \cdot M_i^m; \quad |M_i^m| \le M. \quad (\forall m, i)$$

$$D_t^- u_i^m - \varepsilon D_x^+ D_x^- \left[\theta u_i^m + (1-\theta) u_i^{m-1}\right] = u_t + \tau^2 K_i^m -$$

$$-\varepsilon D_x^+ D_x^- \left[\underline{u_i^{m-1/2}} + \tau\left(\theta - \tfrac{1}{2}\right) u_t^{m-1/2} + \tau^2 L_i^m\right] =$$

$$= \underline{\underline{u_t}} + \tau^2 K_i^m - \varepsilon\Big\{\underline{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^{m-1/2}} + \underbrace{\frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_i^{m-1/2}} + h^4 M_i^m +$$

$$+ \tau\left(\theta - \tfrac{1}{2}\right) \cdot \left[\underbrace{\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}} + \frac{h^2}{12} \cdot \frac{\partial^5 u}{\partial t \partial x^4} + h^4 M_i^m\right] + h^4 \cdot M_i^m\Big\} =$$

$$\boxed{u_t = \varepsilon u_{xx}}$$

$$= \underbrace{u_t - \varepsilon u_{xx}}_{=0} - \varepsilon\left\{\left[\frac{h^2}{12} + \varepsilon\tau\left(\theta - \tfrac{1}{2}\right)\right] \cdot \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_i^{m-1/2}\right\} + O\left(\tau^2 + \varepsilon h^4\right);$$

$$\varepsilon \tau h^2 \le \tau^2 + \varepsilon^2 h^4$$

$$D_t^- u_i^{m-1/2} - \varepsilon D_x^+ D_x^- \left[\theta u_i^m + (1-\theta) u_i^{m-1}\right] = -\varepsilon\left[\frac{h^2}{12} + \varepsilon\tau\left(\theta - \frac{1}{2}\right)\right] \cdot \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_i^{m-1/2} + O\left(\tau^2 + \varepsilon h^4\right). \tag{17}$$

<u>Теорема</u> (об оценке погрешности аппроксимации).

Пусть $u(x,t)$ – решение задачи (2) (при $f(x,t) \equiv 0$), причём $u \in C^{t,x}_{3,6}(\Omega)$. Тогда имеет место следующая оценка погрешности аппроксимации для семейства схем (7)((8)):

$$\left\| \mathcal{L}^\theta_{h,\tau}(u)^{h,\tau} - F^\theta_{h,\tau} \right\|_\infty \le C\left[\left|\frac{\varepsilon h^2}{12} + \varepsilon^2\tau\left(\theta - \frac{1}{2}\right)\right| + \tau^2 + \varepsilon h^4\right]$$

Докажем оценку сходимости.

Точное решение (2): $u(x,t)$ — является решением задачи:

$$(17) \Rightarrow \quad D_t^- u_i^{m-1/2} - \varepsilon D_x^+ D_x^- \left[\theta u_i^m + (1-\theta) u_i^{m-1}\right] = \varphi_i^m \; ; \text{ в } (X)$$

и соответствующим краевым и начальным условиям в точках (Δ) и (0). Здесь: $\varphi_i^m = -\varepsilon\left[\frac{h^2}{12} + \varepsilon\tau\left(\theta - \frac{1}{2}\right)\right]\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_i^{m-1/2} + O(\tau^2 + \varepsilon h^4)$;

Приближенное решение $\bar{u}_i^m$ — является решением задачи:

$$D_t^- \bar{u}_i^{m-1/2} - \varepsilon D_x^+ D_x^- \left[\theta \bar{u}_i^m + (1-\theta)\bar{u}_i^{m-1}\right] = 0 \text{ в } (X)$$

и тем же краевым и начальным условиям, что и точное решение $u(x,t)$.

$$w_i^m \equiv u_i^m - \bar{u}_i^m \; ; \forall i, \overline{m} \, ;$$

Таким образом, w_i^m - является решением задачи;

(18) $$\begin{cases} D_t^- w_i^{m-1/2} - \varepsilon D_x^+ D_x^- \left[\theta w_i^m + (1-\theta) w_i^{m-1}\right] = \varphi_i^m, \text{ в } (x); \\ w_i^m = 0 \text{ в тчк. } (0) \text{ и } (\Delta); \end{cases}$$

$$\frac{w_i^m - w_i^{m-1}}{\tau} - \varepsilon\theta \frac{w_{i+1}^m - 2w_i^m + w_{i-1}^m}{h^2} - \varepsilon(1-\theta)\cdot \frac{w_{i+1}^{m-1} - 2w_i^{m-1} + w_{i-1}^{m-1}}{h^2} = \varphi_i^m;$$

$$-\frac{\varepsilon\theta\tau}{h^2} w_{i-1}^m + \left(1 + \frac{2\varepsilon\theta\tau}{h^2}\right) w_i^m - \frac{\varepsilon\theta\tau}{h^2}\cdot w_{i+1}^m = \frac{\varepsilon(1-\theta)\tau}{h^2} w_{i-1}^{m-1} +$$

$$+\left(1 - \frac{2\varepsilon(1-\theta)\tau}{h^2}\right)\cdot w_i^{m-1} + \frac{\varepsilon(1-\theta)\tau}{h^2} w_{i+1}^{m-1} + \tau\varphi_i^m;$$

$K \equiv \frac{\varepsilon\tau}{h^2}$ - число Куранта;

(19) $$\begin{cases} -\theta K w_{i-1}^m + (1+2\theta K) w_i^m - \theta K w_{i+1}^m = (1-\theta) K w_{i-1}^{m-1} + [1-2(1-\theta)K]\cdot w_i^{m-1} + \\ \qquad + (1-\theta) K w_{i+1}^{m-1} + \varphi_i^m \tau \text{ в тчк. } (x) \\ w_i^m = 0 \text{ в тчк. } (0) \text{ и } (\Delta). \end{cases}$$

$$\begin{cases} M v_i \equiv -\theta K v_{i-1} + (1+2\theta K) v_i - \theta K v_{i+1};\ i=\overline{2,n-1} \\ M v_i \equiv v_i,\ i = 1 \vee n \end{cases}$$

$$\begin{cases} N v_i \equiv (1-\theta) K v_{i-1} + [1-2(1-\theta)K] v_i + (1-\theta) v_{i+1};\\ \qquad i=\overline{2,n-1}, \\ N v_i \equiv 0,\ i = 1 \vee n; \end{cases}$$

(19)

$\Downarrow$

$$(20)\ \begin{cases} M w_i^m = N w_i^{m-1} + \varphi_i^m \cdot \tau;\ \text{в тчк. } (X); \\ M w_i^m = 0;\ \text{в тчк. } (\Delta) \text{ и } (0). \end{cases}$$

Опер. M является M-оператором:

1) $l(\xi,\eta) \le 0;\ \xi \ne \eta;\ (-\theta K \le 0)$

2) $S(\xi) \equiv \sum\limits_{\eta\in\omega_h} l(\xi,\eta) \ge 0\ \ \big(S(\xi) = -\theta K + (1+2\theta k) - \theta k = 1\big)$

По теореме об оценке решения ур-ия с оператором монотонного вида:

$$\mathcal{M} v_i = F_i \quad (i=\overline{1,n});$$

$$\mathcal{M} \beta_i \geq \alpha > 0 \quad (i=\overline{1,n});$$

$$\Downarrow$$

$$\|v\|_\infty \leq \frac{\|\beta\|_\infty}{\alpha} \cdot \|F\|_\infty;$$

$$\Downarrow$$

В нашем случае: $\beta_i \equiv 1 \ (i=\overline{1,n})$; $\alpha = 1$;

$$\|v\|_\infty \leq \|F\|_\infty;$$

$$(20) \Downarrow$$

$$(21) \qquad \boxed{\|w^m\|_\infty \leq \|N w^{m-1}\|_\infty + \tau \|\Phi^m\|_\infty; \ m \geq 1;}$$

Оценим норму оператора N:

$$\underline{|N v_i|} = \left|(1-\theta)K v_{i-1} + [1-2(1-\theta)K] v_i + (1-\theta)K v_{i+1}\right| \leqslant$$

$$\leqslant (1-\theta)K \cdot |v_{i-1}| + |1-2(1-\theta)K| \cdot |v_i| + (1-\theta)K \cdot |v_{i+1}| \leqslant$$

Предположим: $\boxed{1-2(1-\theta)K \geqslant 0}$

$$\leqslant \{(1-\theta)K + [1-2(1-\theta)K] + (1-\theta)K\} \cdot \|v\|_\infty = \underline{\|v\|_\infty}.$$

$$\Rightarrow \boxed{\|Nv\|_\infty \leqslant \|v\|_\infty;}$$

$$\Downarrow$$

(21)

(22) $\Rightarrow$

$$\boxed{\|w^m\|_\infty \leqslant \|w^{m-1}\|_\infty + \tau \|\Phi^m\|_\infty; \quad m \geqslant 1;}$$

$$\Downarrow$$

$$\|w^m\|_\infty \leqslant \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\|w^0\|_\infty}} + \tau \sum_{k=1}^{m} \|\Phi^k\|_\infty;$$

$$\|w^m\|_\infty \le \tau \sum_{k=1}^{m} \|\Phi^m\|_\infty \le (\tau \cdot m) \cdot \max_{1\le k\le M} \|\Phi^k\|_\infty$$

$$\le (\tau \cdot M) \cdot \max_{1\le k\le M} \|\Phi^k\|_\infty = T \cdot \max_{1\le k\le M} \|\Phi^k\|_\infty$$

$$\Downarrow$$

$$(23)\quad \begin{cases} \|(u)^m - \overline{u}^m\|_\infty \le T \cdot \max\limits_{1\le k\le m} \|\Phi^k\|_\infty \le \\ \le T \cdot C \left[\left| \dfrac{\varepsilon h^2}{12} + \varepsilon^2 \tau \left(\theta - \dfrac{1}{2}\right) \right| + \tau^2 + \varepsilon h^4 \right]; \end{cases}$$

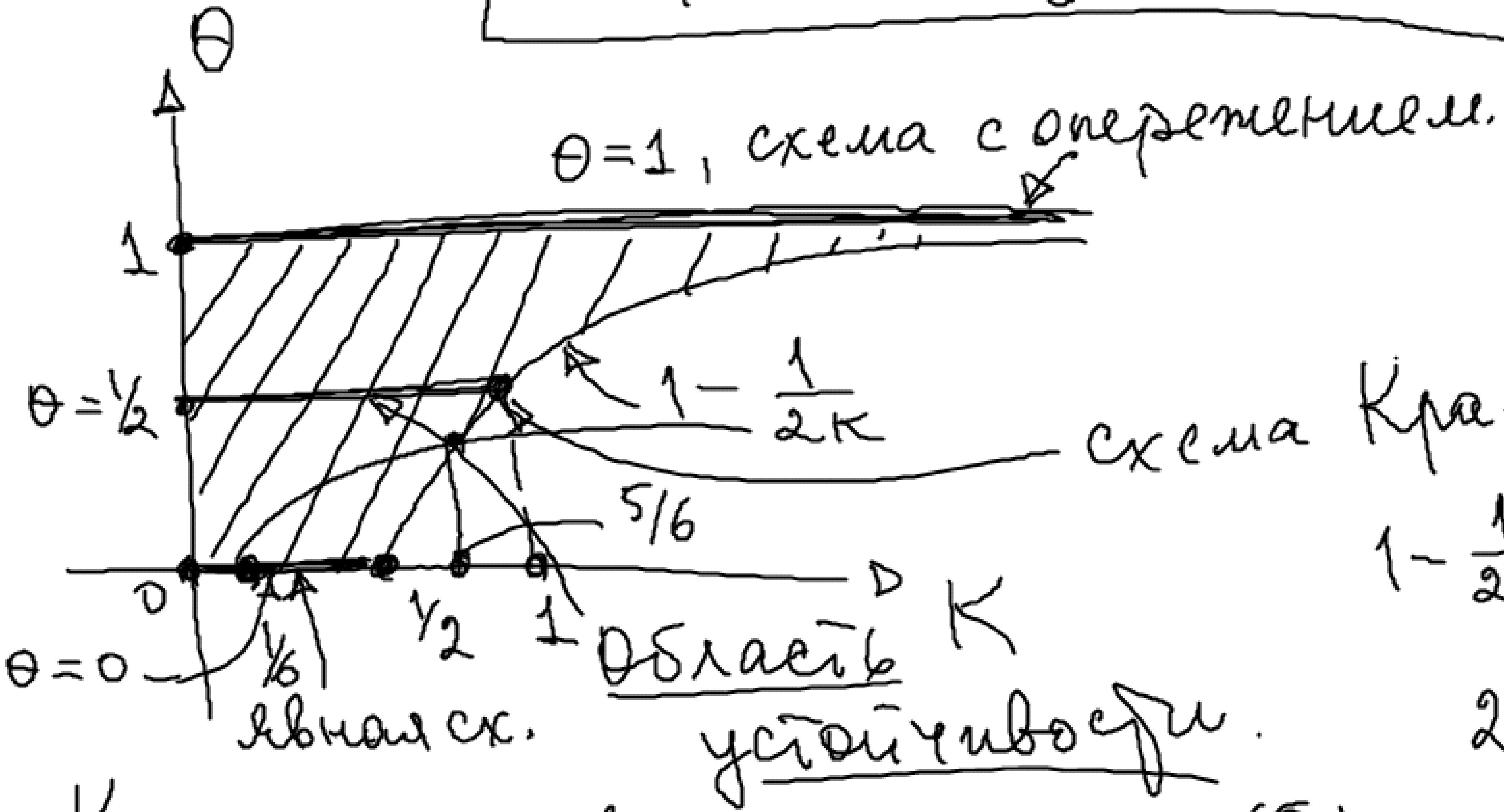
Доказана оценка сходимости приближ. решения к точному для семейства схем (8), при условии:

$$(24)\quad \boxed{1 - 2(1-\theta)K \ge 0} + \boxed{0 \le \theta \le 1}$$

$$\Downarrow$$

$$1 - \theta \le \frac{1}{2K} \Rightarrow \theta \ge 1 - \frac{1}{2K}; \Rightarrow \max\left(0, 1 - \frac{1}{2K}\right) \le \theta \le 1;$$

$$\boxed{\max\left\{0,\ 1-\frac{1}{2K}\right\} \le \theta \le 1.}$$



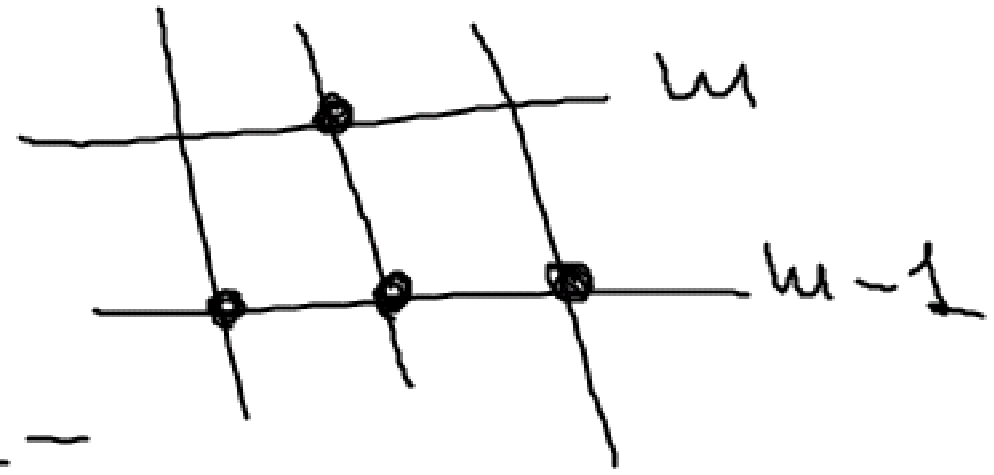
$$1-\frac{1}{2K} = \theta = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{6K}\right)$$

$$2-\frac{1}{K} = 1-\frac{1}{6K} \Rightarrow 1 = \frac{1}{K}\left(1-\frac{1}{6}\right)$$

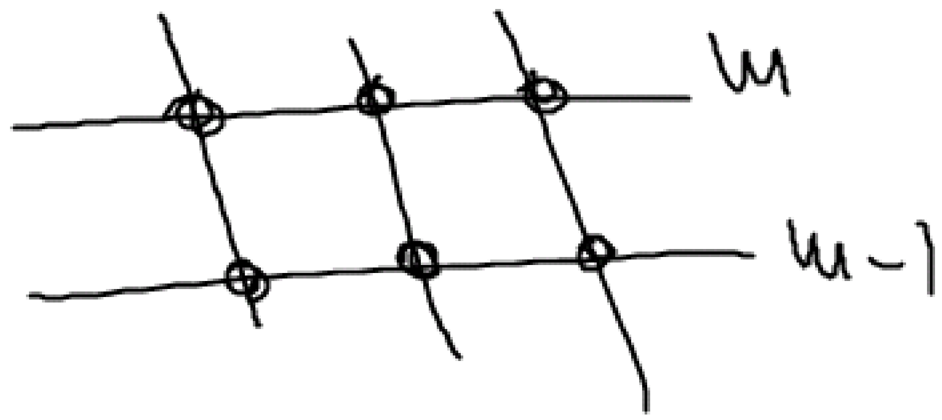
$$K = \frac{5}{6}$$

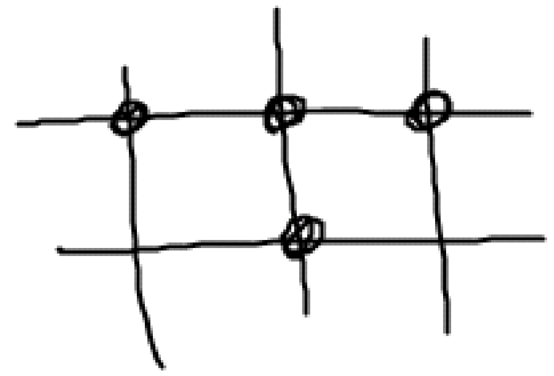
Классические варианты схем (8):

1) $\theta = 0$ Явная схема:



2) $\theta = 1/2$ схема Кранка-Николсона:



3) $\theta = 1$ Схема с опережением: 

---

1) Явная схема: $\|(u)^m - \bar{u}^m\|_\infty \le C(\tau + h^2)$;

$K \le 1/2$ — условие устойчивости.

2) Кранк-Николсон: $\|(u)^m - \bar{u}^m\|_\infty \le C(\tau^2 + h^2)$;

$K \le 1$ — условие устойчивости.

3) Схема с опережением: K — произвольно;

$\|(u)^m - \bar{u}^m\|_\infty \le C(\tau + h^2)$;

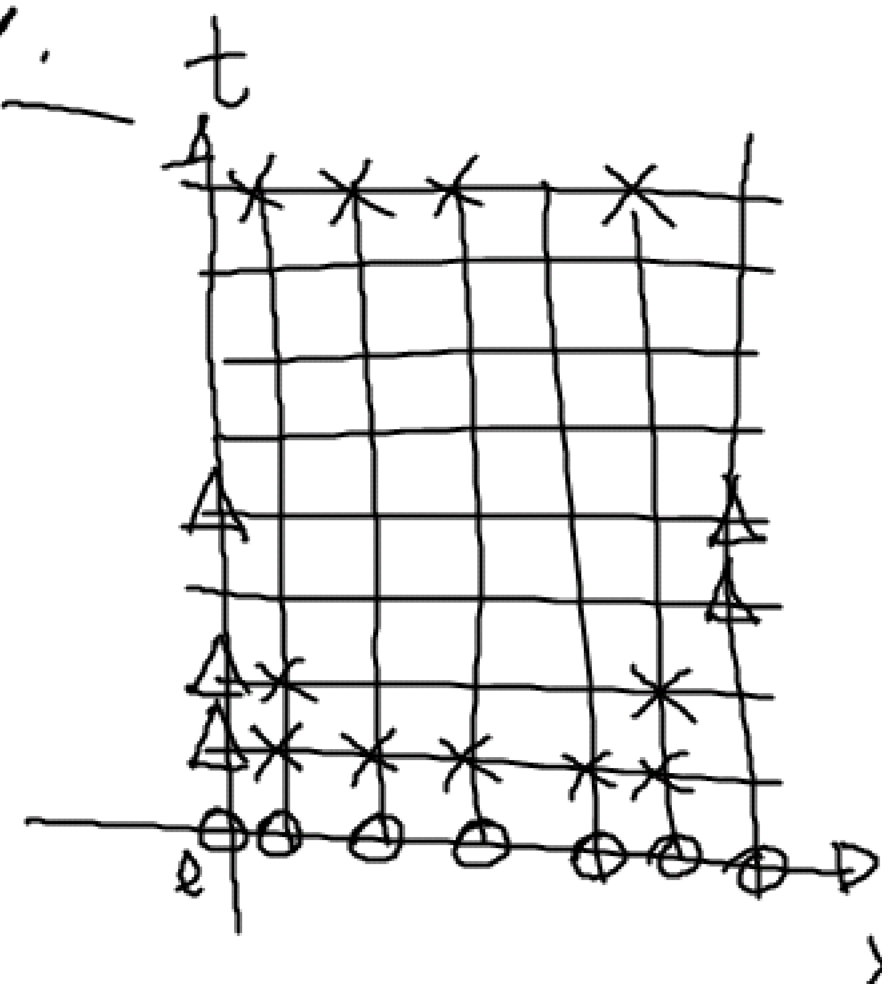
4) Схема max порядка сходимости: положим: $\frac{h^2}{12} + \varepsilon\tau\left(\theta - \frac{1}{2}\right) = 0$

$\|(u)^m - \bar{u}^m\|_\infty \le C(\tau^2 + \varepsilon h^4)$. $K \le \frac{5}{6}$ — усл. устойч.

$$\theta = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\varepsilon\tau} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{6K}\right);$$

Устойчивость эволюционных разностных схем.

Устойчивость по Нейману.



$$(1)\ \begin{cases} \mathcal{L}_{h,\tau}\bar{u}_i^m = F_i^m & (\text{в } (x)); \\ \bar{u}_{i_k}^m = \varphi_{i_k}^m & (\text{в тчк. } (\Delta)); \quad k = 1 \vee n; \\ \bar{u}_i^0 = \psi_i^0 & (\text{в тчк. } (0)); \end{cases}$$

Опред. 1. (1) устойчива, если $\exists \tau_0, h_0 > 0$; $\exists c_1, c_2, c_3 > 0$ – не зависят от τ и h: $\forall\ 0 < \tau \leq \tau_0$; $0 < h \leq h_0 \Rightarrow$

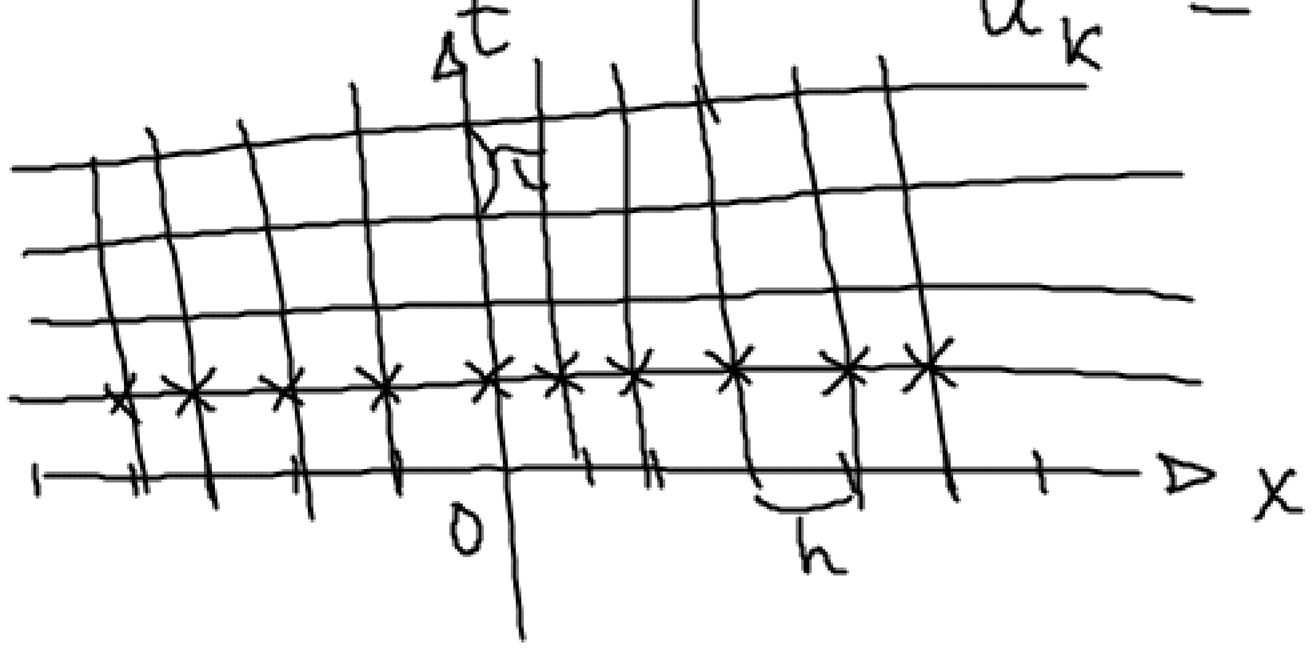
$$\max_{\omega_{h,\tau}} |\bar{u}_i^m| \leq c_1 \cdot \max_{(x)} |F_i^m| + c_2 \cdot \max_{(\Delta),k} |\varphi_k^m| + c_3 \max_{(0)} |\psi_i^0|;$$

(2) $\nearrow$

$\oplus$

Рассмотрим сеточную задачу Коши:

$$(3)\quad \begin{cases} \mathcal{L}_{h,\tau}\,\bar{u}_k^m = 0; & k\in\mathbb{Z};\ m>0; \\ \bar{u}_k^0=\varphi_k, & k\in\mathbb{Z}; \end{cases}$$



Предполагается: $|\varphi_k|\le C\ (\forall k)$

Ищется ограниченное решение: $|\bar{u}_k^m|\le M\ (\forall k,m)$

Предположим, что (3) устойчива в смысле Опр. 1:

$$(2)\Rightarrow(4)\quad \boxed{\max_{k,m}|\bar{u}_k^m| \le C\cdot\max_k|\varphi_k|;}\quad \forall\{\varphi_k\}\text{ — сеточных ф-ций.}$$

Положим: $\varphi_k = e^{ik\varphi}$ $(k\in\mathbb{Z};\ \varphi\in\mathbb{R};\ i=\sqrt{-1})$

$$(4)\Rightarrow(5)\quad \boxed{\max_{k,m}|\bar{u}_k^m|\le C},\ \text{где}\ \bar{u}_k^m\big|_{m=0} = e^{ik\varphi};$$

Предположим, что решение задачи (3) можно найти в виде: $\bar{u}_k^m = \lambda^m e^{ik\varphi}$, с некоторым $\lambda = \lambda(\tau, h)$;

$$\Downarrow (5)$$

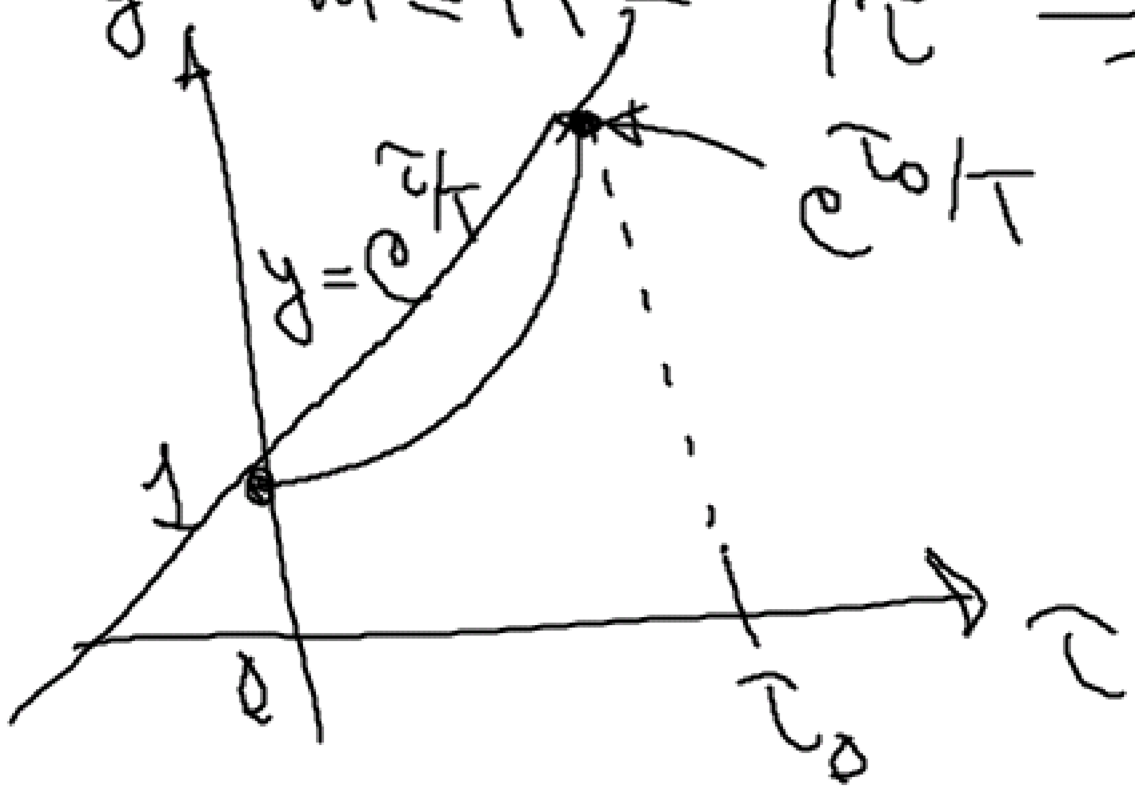
$$\forall m = 0,1,\dots,M; \quad \boxed{|\lambda|^m = |\lambda(\tau,h)|^m \leqslant C} \quad (\forall \tau \in (0,\tau_0]; \ \forall h \in (0,h_0]);$$

$$\Downarrow$$

считаем, что $C > 1$;

$$|\lambda| \leqslant C^{\frac{1}{m}} \Longleftrightarrow \boxed{|\lambda| \leqslant C^{\tau/T}, \ \tau \in (0,\tau_0]} \quad (6)$$

$$m \leqslant M = T/\tau \Rightarrow \frac{1}{m} \geqslant \frac{\tau}{T}$$



$$y = \frac{-\tau+\tau_0}{\tau_0}\cdot 1 + \frac{\tau}{\tau_0} C^{\frac{\tau_0}{T}} = 1 + \frac{\tau}{\tau_0}\left(C^{\tau_0/T} - 1\right);$$

$$(6) \Rightarrow \quad |\lambda| \le e^{\tau/\tau_0} \le 1 + \frac{\tau}{\tau_0}\left(e^{\tau_0/T} - 1\right) = 1 + \tau \cdot c_0;$$

$$c_0 \equiv \frac{e^{\tau_0/T} - 1}{\tau_0};$$

Теорема (фон Неймана):

Предположим, что задача (3) устойчива в смысле Опред. 1; пусть $\overline{u}_k^m = \lambda^m e^{ik\varphi}$ – её решение при $\varphi_k = e^{ik\varphi}$. Тогда $\exists\, \tau_0 > 0;\ c_0 > 0$ такие, что:

$$|\lambda| \le 1 + \tau c_0 \quad (\forall \tau \in (0, \tau_0]);$$

(λ – вообще говоря, является ф-ей от τ и h; c_0 – не зависит от τ и h). $\oplus$

Исследуем необход. условие устойчивости для семейства схем (8) – для ур-ия теплопроводности:

$$(7)\quad -\theta K\bar{u}^m_{k-1}+(1+2\theta K)\bar{u}^m_k-\theta K\bar{u}^m_{k+1}=(1-\theta)K\bar{u}^{m-1}_{k-1}+$$

$$+\left[1-2(1-\theta)K\right]\cdot\bar{u}^{m-1}_k+(1-\theta)K\bar{u}^{m-1}_{k+1};$$

Ищем решение (7) в виде: $\bar{u}^m_k=\lambda^m\cdot e^{ik\varphi}$;

$$-\theta K\lambda^m e^{-i\varphi}+(1+2\theta K)\lambda^m-\theta K\lambda^m e^{i\varphi}=(1-\theta)K\lambda^{m-1}\cdot e^{-i\varphi}+$$

$$+\left[1-2(1-\theta)K\right]\cdot\lambda^{m-1}+(1-\theta)Ke^{i\varphi}\lambda^{m-1}.$$

$$\left[(1+2\theta K)-\theta K\left(e^{-i\varphi}+e^{i\varphi}\right)\right]\cdot\lambda=\left[1-2(1-\theta)K\right]+(1-\theta)K\left(e^{-i\varphi}+e^{i\varphi}\right);$$

$$e^{-i\varphi}+e^{i\varphi}=2\cos\varphi$$

$$\lambda = \frac{1-2(1-\theta)K\cdot(1-\cos\varphi)}{1+2\theta K\cdot(1-\cos\varphi)} = \frac{1-4(1-\theta)K\cdot\sin^2\varphi/2}{1+4\theta K\cdot\sin^2\varphi/2};$$

$1-\cos\varphi = 2\sin^2(\varphi/2)$; $\lambda = \lambda(\tau, h)$; $K = \frac{\varepsilon\tau}{h^2}$;

Предположим, что $K \equiv const$ (хотя τ и h могут меняться). Поэтому λ — не зависит от τ и h. $\Rightarrow$

неравенство $|\lambda| \leq 1 + C_0\cdot\tau$ Теоремы Неймана превращается в нер-во $|\lambda| \leq 1$;

$$-1 \leq \frac{1-4(1-\theta)K\cdot\sin^2\varphi/2}{1+4\theta K\cdot\sin^2\varphi/2} \leq 1$$

Правое нер-во выполнено!

$$-1-4\theta K\cdot\sin^2\varphi/2 \le 1-4(1-\theta)K\cdot\sin^2\varphi/2$$ ← левое нер-во.

$$4(1-2\theta)K\sin^2\varphi/2 \le 2$$

$$2(1-2\theta)K \le \frac{1}{\sin^2\varphi/2} \quad (\forall\varphi\in\mathbb{R})$$

$$\Updownarrow$$

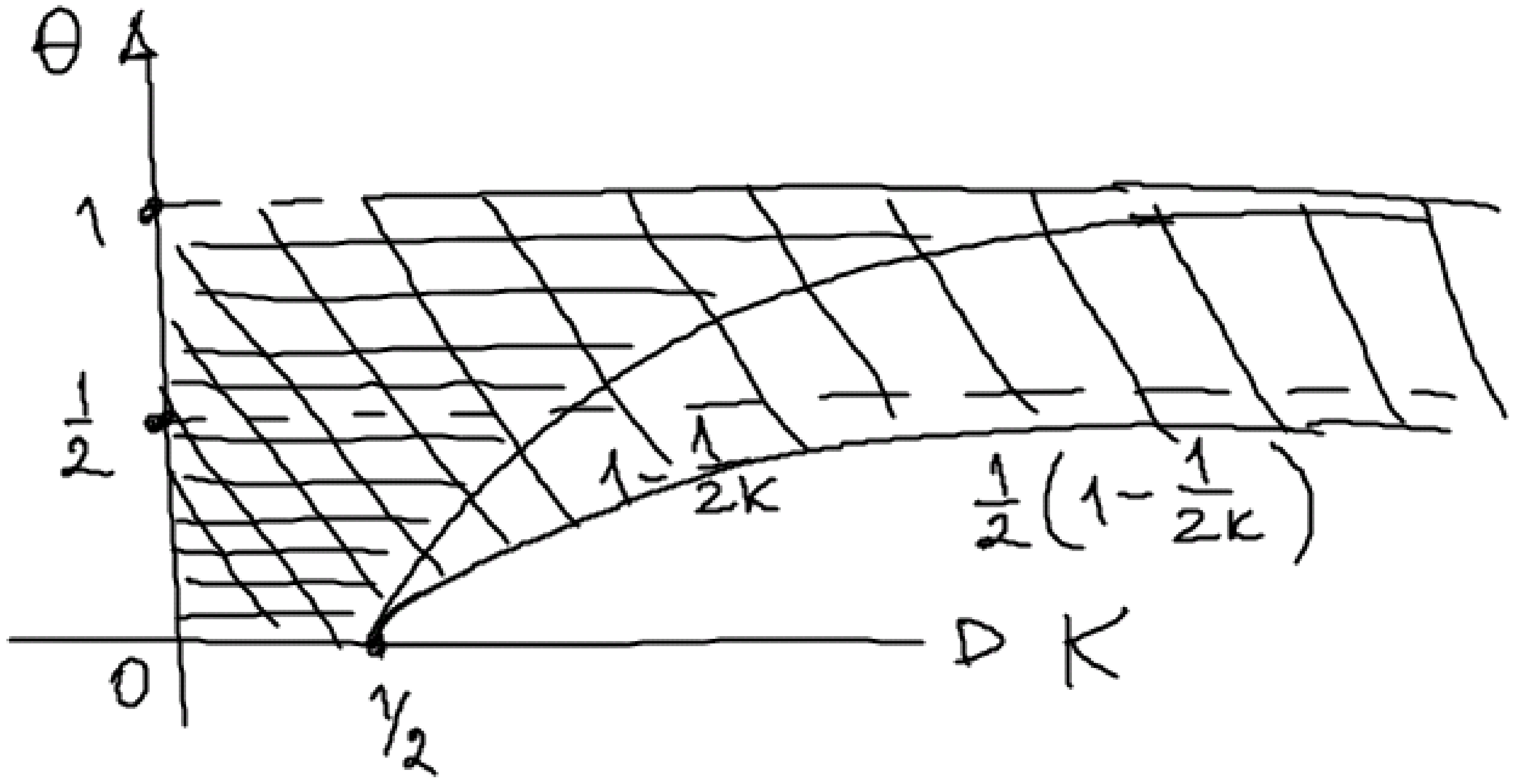
$$2(1-2\theta)K \le 1 \iff \boxed{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2K}\right)\le\theta}$$ ← условие устойчивости по Нейману.

<u>Достаточное условие устойчивости:</u>

$$\max\left\{0,\,1-\frac{1}{2K}\right\}\le\theta\le 1;$$

<u>Необходимое условие устойчивости (по Нейману):</u>

$$\max\left\{0,\,\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2K}\right)\right\}\le\theta\le 1;$$



$\Rightarrow$ Схема Кранка-Николсона $\left(\theta=\frac{1}{2}\right)$ удовлетворяет необходимым условиям устойчивости!