🕮 V. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Численные методы решения уравнений с частными производными (уравнений математической физики) являются важным средством практической реализации математических моделей, описывающих различные физические процессы. Они развивались в значительной степени под влиянием запросов прикладных областей механики и физики, и главным критерием качества этих методов является эффективность их использования при решении, прежде всего, прикладных задач.

Из курса математического анализа известно, что число независимых переменных в значительной мере определяет сложность функции. Уже одно это обстоятельство приводит к серьезным осложнениям при решении краевых задач для уравнений с частными производными. Действительно, если область существования решения обыкновенного дифференциального уравнения – интервал, является простым объектом, то уже в двумерном случае область, имеющая криволинейные границы, требует сложного математического аппарата для ее экономичного описания. Еще одна проблема, возникающая при реализации численных методов решения уравнений с частными производными, - необходимость решения многомерных сеточных уравнений. Эта проблема обсуждается в первой лабораторной работе настоящей главы, в которой на примере разностной схемы для двумерного уравнения Пуассона иллюстрируется работа классических итерационных методов. Вторая лабораторная работа предполагает тестирование однопараметрического семейства разностных схем для нестационарной задачи теплопроводности. В третьей лабораторной работе строится семейство разностных схем для гиперболического уравнения первого порядка: уравнения конвективного переноса.

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ СЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ (НА ПРИМЕРЕ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА)

Основная цель. Научиться использовать итерационные методы при решении двумерных уравнений математической физики.

Теория и основные формулы. Пусть

$$\Omega = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$$

-«единичный» квадрат в плоскости (x,y) с границей

$$\partial\Omega = \{x = 0,\ 0 \le y \le 1\} \cup \{x = 1,\ 0 \le y \le 1\} \cup \{0 \le x \le 1,\ y = 0\} \cup \{0 \le x \le 1,\ y = 1\}.$$

В области Ω рассмотрим следующую краевую задачу, которую обычно называют *задача Дирихле для уравнения Пуассона*:

$$-\Delta u(x, y) \equiv -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f(x, y),\ \ (x, y) \in \overset{0}{\Omega} \equiv \Omega \setminus \partial\Omega; \qquad \text{(V.1.1)}$$

$$u(x, y) = 0,\ \ (x, y) \in \partial\Omega. \qquad \text{(V.1.2)}$$

Задача (V.1.1), (V.1.2) обычно используется для описания стационарного теплового поля с источником f(x,y). Оператор Δ, определенный левой частью равенства (V.1.1), называется *оператором Лапласа* [22]. В области Ω рассмотрим равномерную сетку:

$$\Omega^h \equiv \{(x_i, y_j) \mid x_i = (i-1)h,\ y_j = (j-1)h,\ i, j = 1, ..., n;\ h = 1/(n-1)\}.$$

Введем обозначения:

$$\Omega^{h,0} \equiv \Omega^h \cap \overset{0}{\Omega}$$

- внутренняя часть сеточной области Ω^h,

$$\partial\Omega^h \equiv \Omega^h \cap \partial\Omega$$

- граница сеточной области Ω^h,

$$u^h \equiv \{u^h_{i,j}\}^n_{i,j=1}$$

– сеточная функция, определенная в области Ω^h, и приближающая значения $u(x_i,y_j)$- точного решения задачи (V.1.1), (V.1.2) в узлах сетки.

Для функции u^h рассмотрим следующую сеточную задачу (разностную схему, см. [2]):

$$\begin{cases} -\Delta^h u^h_{i,j} \equiv -\left(\dfrac{u^h_{i+1,j} - 2u^h_{i,j} + u^h_{i-1,j}}{h^2} + \dfrac{u^h_{i,j+1} - 2u^h_{i,j} + u^h_{i,j-1}}{h^2} \right) = \\ \qquad = f^h_{i,j},\ (x_i, y_j) \in \Omega^{h,0}, \\ u^h_{i,j} = 0,\ (x_i, y_j) \in \partial\Omega^h. \end{cases} \tag{V.1.3}$$

Здесь $f^h_{i,j} \equiv f(x_i, y_j)$. Из результатов [2] следует, что задача (V.1.3) корректна, т.е. ее решение: а)существует, в)единственно и с)непрерывно зависит от источника f^h. Кроме того, справедлива следующая оценка сходимости приближенного решения u^h к точному решению u дифференциальной задачи (V.1.1), (V.1.2):

$$\max_{(x_i,y_j)\in\Omega^h} \left| u(x_i, y_j) - u^h_{i,j} \right| \le Ch^2. \tag{V.1.4}$$

Наша цель: научиться решать сеточную задачу (V.1.3) (обозначим $\overline{u}^h_{i,j}$ -ее приближенное решение) с точностью не меньшей, чем Ch^2, т.е. с точностью не разрушающей оценку (V.1.4):

$$\max_{(x_i,y_j)\in\Omega^h} \left| \overline{u}^h_{i,j} - u^h_{i,j} \right| \le \delta,\quad \delta \le Ch^2. \tag{V.1.5}$$

На самом деле, желательно, чтобы точность решения задачи (V.1.3) была гораздо выше: $\delta << Ch^2$. В итоге, для приближенного решения $\overline{u}^h_{i,j}$ задачи (V.1.3) будем (в силу (V.1.4) и (V.1.5)) иметь оценку:

$$\max_{(x_i,y_j)\in\Omega^h}\left|u(x_i,y_j)-\overline{u}^h_{i,j}\right|\le Ch^2+\delta\le C_0h^2.$$

Для решения задачи (V.1.3) рассмотрим *двухпараметрическое семейство итерационных методов.* Введем для этого следующие сеточные операторы:

$$\Delta_0^h u^h_{i,j}\equiv\frac{4}{h^2}u^h_{i,j};$$

$$\Delta_1^h u^h_{i,j}\equiv-\frac{1}{h^2}(u^h_{i-1,j}+u^h_{i,j-1});$$

$$\Delta_2^h u^h_{i,j}\equiv-\frac{1}{h^2}(u^h_{i+1,j}+u^h_{i,j+1}),\ \ (x_i,y_j)\in\Omega^{h,0}.$$

Очевидно, что

$$-\Delta^h=\Delta_1^h+\Delta_0^h+\Delta_2^h.$$

Предположим, что в процессе решения задачи (V.1.3) обход сеточной области Ω^h осуществляется в направлении «слева – направо и снизу – вверх», иными словами, если значения $u^h_{i,j}$ вычисляются с использованием оператора двойного цикла, то внутренний цикл должен быть по i=1,2,…,n, а внешний – по j=1,2,…,n. Предлагаемое семейство итерационных методов (в операторной форме) выглядит следующим образом :

$$\begin{cases}(\Delta_0^h+\theta\Delta_1^h)\cdot\dfrac{u^{(k)}-u^{(k-1)}}{\tau}-\Delta^h u^{(k-1)}=f^h,\text{ в области }\Omega^{h,0};\\ u^{(k)}=0,\text{ на }\partial\Omega^h,\ k=1,2,...;\\ u^{(0)}-\text{задано в }\Omega^h.\end{cases}\qquad\text{(V.1.6)}$$

В (V.1.6): «k» -итерационный параметр, а

$$u^{(k)}\equiv\left\{u^{(k)}_{i,j}\right\}_{i,j=1}^n$$

-сеточная функция - решение, найденное на «k-ом» итерационном шаге. Перепишем уравнения (V.1.6) в «поточечной» форме:

$$\begin{cases} u_{i,j}^{(k)} = \dfrac{\theta}{4}\left(u_{i-1,j}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k)}\right) + \dfrac{\tau-\theta}{4}\left(u_{i-1,j}^{(k-1)} + u_{i,j-1}^{(k-1)}\right) + \dfrac{\tau}{4}\left(u_{i+1,j}^{(k-1)} + u_{i,j+1}^{(k-1)}\right) + \\ \qquad\qquad + (1-\tau)u_{i,j}^{(k-1)} + \dfrac{\tau h^2}{4}\cdot f_{i,j}^h; \quad (i,j)\in\Omega^{h,0}; \\ u_{i,j}^{(k)} = 0, (i,j)\in\partial\Omega^h. \end{cases} \qquad \text{(V.1.7)}$$

О свойствах итерационного алгоритма (V.1.7) (или, что то же самое, (V.1.6)) можно судить по следующему утверждению. Предварительно обозначим:

$$\mu \equiv 4\cdot\sin^2\left(\frac{\pi h}{2}\right),\ \ \nu \equiv 4\cdot\cos^2\left(\frac{\pi h}{2}\right).$$

Т е о р е м а V.1.1. Рассмотрим следующие области в параметрической плоскости (θ,τ):

$$\Pi_1 \equiv \left\{(\theta,\tau) \middle| \, 0\le\theta,\ 0<\tau<\theta+\min\left\{\frac{2}{\mu}(2-\theta),\ \frac{(2-\theta)^3}{\theta\mu\nu+2(2-\theta)^2}\right\}\right\};$$

$$\Pi_2 \equiv \left\{(\theta,\tau) \middle| \, 0\le\theta\le 2;\ \theta+\frac{(2-\theta)^3}{\theta\mu\nu+2(2-\theta)^2}\le\tau<\theta+\frac{2}{\nu}(2-\theta)\right\}.$$

Если $(\theta,\tau)\in\Pi_1\bigcup\Pi_2$, то итерационный процесс (V.1.7) (см. также (V.1.6)) сходится, причем имеет место следующая оценка сходимости:

$$\left\|u^h-u^{(k)}\right\|_\infty \le q^k\cdot\left\|u^h-u^{(0)}\right\|_\infty. \qquad \text{(V.1.8)}$$

В (V.1.8):

$$q^2 = 1-\tau\mu\cdot\frac{\mu(\theta-\tau)+2(2-\theta)}{2\mu\theta+(2-\theta)^2},\ \text{при}\ (\theta,\tau)\in\Pi_1; \qquad \text{(V.1.9)}$$

$$q^2 = 1 - \tau\nu \cdot \frac{\nu(\theta - \tau) + 2(2 - \theta)}{2\nu\theta + (2 - \theta)^2}, \text{ в случае } (\theta, \tau) \in \Pi_2. \qquad (V.1.10)$$

■

Так как при численном решении осуществляется конечное число итераций, то важно знать, за сколько итерационных шагов начальная погрешность уменьшается в заданное число раз «m». В силу неравенства (9) это число шагов «k» удовлетворяет оценке:

$$k \geq \frac{\ln(m)}{\ln(1/q)}.$$

Величина $\ln\left(1/q\right)$ называется *скоростью сходимости итерационного процесса;* чем больше эта величина (чем меньше q), тем быстрее сходится итерационный процесс.

Рассмотрим известные итерационные методы и исследуем их скорость сходимости (эти методы можно также найти в монографии [2]).

1. ***Семейство явных методов:*** θ=0.

1.а) *Метод Якоби*: $\theta = 0,\ \tau = 1$. В этом случае пара (0,1) лежит в области Π_2, и в силу формулы (V.1.10) получим:

$$q = \cos(\pi h).$$

Оценим скорость сходимости итераций:

$$\frac{1}{q} \approx 1 + \frac{\pi^2 h^2}{2} \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{q}\right) = O\left(\frac{\pi^2 h^2}{2}\right), \text{ при } h \to 0.$$

1.б) *Явный метод с оптимальным набором параметров. (Чебышёвский итерационный процесс).* Параметры τ_k (k =1,2,…,n) подбираются таким образом, чтобы при заданном числе итераций “n” минимизировать погрешность

$$\left\| u^h - u^{(n)} \right\|_\infty,$$

возникающую на n-ой итерации:

$$\tau_k = \frac{1}{z_k}; \quad z_k = \frac{\nu+\mu}{2} + \frac{\nu-\mu}{2} \cdot \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}, \ \text{k=1,2,…,n.}$$

Величины z_k являются нулями полинома Чебышёва $T_n(x)$ на отрезке $[\mu,\nu]$. Скорость сходимости в этом случае имеет следующую оценку (см.[2]):

$$\ln\left(\frac{1}{q}\right) = O(\pi h), \text{ при } h \to 0.$$

2. *Семейство релаксационных методов:* $\theta = \tau$.

2.а) *Метод Зейделя:* $\theta = 1, \tau = 1$. Очевидно, что пара (1,1) лежит во множестве Π_1. Из (V.1.9) получим:

$$q^2 = \frac{1}{1 + 8\sin^2\left(\pi h/2\right)} \quad ,$$

откуда:

$$\frac{1}{q} = O\left(1 + \pi^2 h^2\right),$$

а значит, скорость итерационного процесса определяется соотношением:

$$\ln\left(\frac{1}{q}\right) = O\left(\pi^2 h^2\right), \text{при } h \to 0.$$

II.б) *Оптимальный метод релаксации:*

$$\theta = \tau = \frac{2}{1+\sqrt{\mu}} \quad .$$

Из (V.1.9) получим:

$$q^2 = \frac{1-\sin\left(\pi h/2\right)}{1+\sin\left(\pi h/2\right)};$$

Оценим скорость сходимости в этом случае:

$$\frac{1}{q} = O(1+\frac{\pi h}{2}), \text{ откуда: } \ln\left(\frac{1}{q}\right) = O\left(\frac{\pi h}{2}\right).$$

Критерием остановки итерационного процесса обычно служит выполнение неравенства

$$\left\| u^{(k)} - u^{(k-1)} \right\|_\infty \le \delta,$$

в котором мы будем полагать

$$\delta = O\left(\frac{1}{(n-1)^3} \right) \qquad \text{(V.1.11)}$$

Тестовые задачи.

1. *Собственные функции сеточного оператора Лапласа* Δ^h:

Параметры «ℓ» и «m» - целые и выбираются в пределах от 1 до n-2. Выбор пары (ℓ,m) определяет выбор тестовой задачи с известным точным решением u^h. Положим в (V.1.3):

$$f^h_{i,j} = \lambda_{\ell,m} \cdot \sin(\pi \ell x_i) \cdot \sin(\pi m y_j); \; i, j = 1, 2, ..., n;$$

где

$$\lambda_{\ell,m} = \frac{4}{h^2} \cdot \left[\sin^2\left(\frac{\pi \ell h}{2} \right) + \sin^2\left(\frac{\pi m h}{2} \right) \right]; \; \ell, m = 1, 2, ..., n-2.$$

Точное решение задачи (V.1.3) (зависит от ℓ и m):

$$u^h_{i,j} = \sin(\pi \ell x_i) \cdot \sin(\pi m y_j); \; i, j = 1, 2, ..., n; \qquad \text{(V.1.12)}$$

2. *Решение дифференциальной задачи* (V.1.1), (V.1.2). Положим в (V.1.1):

$$f(x, y) = 5\pi^2 \cdot \sin(2\pi x) \cdot \sin(\pi y);$$

Точное решение задачи (V.1.1), (V.1.2):

$$u(x, y) = \sin(2\pi x) \cdot \sin(\pi y); \qquad \text{(V.1.13)}$$

В этом случае функция $u(x_i,y_j)$ не является точным решением сеточной задачи (V.1.3), а близко к нему при достаточно малых сеточных шагах «h» (см. оценку (V.1.5)).

Требования к программе. *Программа должна включать:*

1) Итерационный процесс (V.1.7) с возможностью выбора параметров θ и τ.
2) Тестовые задачи (по выбору преподавателя).
3) Возможность выбора числа узлов сетки “n”. Допустим дискретный вариант:

$$n=1+2^{k},\ k=2,3\ldots.$$

4) Вывод итоговой погрешности:

$$\max_{(x_i,y_j)\in\Omega^h}\left|\bar{u}^h_{i,j}-u^h_{i,j}\right|$$

-в случае тестовой задачи №1, и

$$\max_{(x_i,y_j)\in\Omega^h}\left|u(x_i,y_j)-\bar{u}^h_{i,j}\right|$$

-для второй тестовой задачи. Здесь $\bar{u}^h_{i,j}$ -сеточная функция, найденная после остановки итерационного процесса (V.1.7).

5) Ввод числа σ - из критерия остановки итерационного процесса (V.1.11), по умолчанию:

$$\sigma=(N-1)^{-3}$$

6) Вывод числа итераций, потребовавшихся для сходимости метода.
7) *Графика*: Если решается задача №2, то - одновременная отрисовка графиков функции (V.1.13) и кусочно-линейного интерполянта решения $\bar{u}^h_{i,j}$, найденного при помощи итерационного процесса (V.1.7). При решении задачи №1 -одновременная отрисовка графиков функции $\sin(\pi lx)*\sin(\pi my)$ - проинтерполированного естественным образом решения (V.1.12) задачи (V.1.3) и кусочно-линейного интерполянта решения $\bar{u}^h_{i,j}$, найденного при помощи

итерационного процесса (V.1.7). Достаточна 2-мерная графика срезов:

$$\left\{(x,y)\,|\,x=\left[\frac{n}{2}\right],\ y\in[0,1]\right\}\quad \text{и}\quad \left\{(x,y)\,|\,x\in[0,1],\ y=\left[\frac{n}{2}\right]\right\}.$$

8) *Дополнительные возможности программы* (относятся к желательным, но не обязательным): a) отрисовка областей Π_1 и Π_2 изменения параметров (θ,τ) - их конфигурация может изменяться и зависит от n; b) трехмерные графики точного решения и кусочно-линейного интерполянта сеточной функции – итерационного решения.

Задание для работы с программой. Провести численные расчеты с использованием четырех вышеописанных методов, по двум тестовым задачам, варьируя значения параметров n, (ℓ,m) (в рамках полученного задания). В качестве нулевого приближения всюду использовать функцию $u^{(0)}\equiv 0$. Анализируя результаты расчетов, ответить на следующие вопросы.

1. Как влияет изменение числа узлов сетки (параметра n) на скорость сходимости методов?

2. Влияет ли «сложность решения» (параметры “ℓ” и “m” в задаче 1) на сходимость методов?

3. Сравнить между собой эффективность вышеописанных четырех методов.

Основные критерии качества: a) число итераций необходимое для реализации метода; b) погрешности; c) визуальная близость графиков точного и приближенного решений.

Все выводы необходимо аргументировать (проиллюстрировать) результатами численных расчетов и *оформить их в виде Отчета*.

Дополнение к заданию (желательно, но не обязательно). Исследовать области Π_1 и Π_2 из Теоремы V.1.1, а также величины q^2 (из (V.1.9) и (V.1.10)) – это можно сделать как численно, так и аналитически. Цель: найти набор параметров (θ, τ), который задает итерационный метод (V.1.7), сходящийся быстрее, чем метод II.б) – оптимальный метод релаксации. Существует ли такой метод?