СХЕМА С ВЕСАМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Основная цель. Знакомство с простейшими численными методами для решения одномерных (по пространственной переменной) задач теплопроводности и диффузии.

Теория и основные формулы. Рассмотрим следующую задачу: найти функцию u(x,t), удовлетворяющую *дифференциальному уравнению*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t);\ 0 < x < 1;\quad t>0; \tag{V.2.1}$$

а также *начальному*:

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \le x \le 1 \tag{V.2.2}$$

и *краевым* (или *граничным*) условиям:

$$u(0,t) = \psi_0(t), \qquad u(1,t) = \psi_1(t), \qquad t \ge 0. \tag{V.2.3}$$

Здесь функции $f(x,t), \varphi(x), \psi_0(t), \psi_1(t)$ - считаются известными, параметр $\varepsilon \in (0,1]$ также задан. Задача (V.2.1)-(V.2.3) используется в качестве математической модели различных физических процессов; в частности она может описывать изменение температуры в однородном, теплоизолированном с боков и достаточно тонком стержне, при условии, что на его концах задан температурный режим ψ_0, ψ_1; известны тепловые источники f(x,t) и начальное распределение температуры $\varphi(x)$. Задача (V.2.1)-(V.2.3), при определенных условиях может описывать процесс распространения примеси в какой-либо среде под воздействием механизма диффузии. При определенных условиях на данные (функции $f, \varphi, \psi_0, \psi_1$) задача (V.2.1)-(V.2.3) оказывается *корректной*, т. е. ее решение: а) существует, б) единственно, в) непрерывно зависит от данных задачи. Эти вопросы обсуждаются, например, в [22]. Мы же, априори предполагая корректность задачи (V.2.1)-(V.2.3), обсудим простейшие методы ее численного решения.

Рассмотрим на отрезке [0, 1] равномерную сетку:

$$x_i \equiv (i-1)\cdot h,\ \ h \equiv 1/(n-1),\ \ i = 1,2,...,n.$$

Будем считать, что по переменной «t» («временная» переменная) также задана равномерная сетка с шагом «τ»:

$$t_m \equiv m\cdot\tau,\quad m = 0,\ 1,\ \dots\ .$$

Приближенные значения искомой функции $u(x_i, t_m)$ в узлах двумерной сетки

$$\left\{(x_i, t_m)\middle|\ i = 1,2,...,n;\ m = 0,1,...\right\}$$

обозначим символом u_i^m. Для аппроксимации задачи (V.2.1)-(V.2.3) воспользуемся *схемой с весами* (см. [2, 17]):

$$\begin{aligned} \frac{u_i^m - u_i^{m-1}}{\tau} &= \theta\cdot\left[\varepsilon\cdot\frac{u_{i+1}^m - 2u_i^m + u_{i-1}^m}{h^2} + f_i^m\right] + \\ &+ (1-\theta)\cdot\left[\varepsilon\cdot\frac{u_{i+1}^{m-1} - 2u_i^{m-1} + u_{i-1}^{m-1}}{h^2} + f_i^{m-1}\right],\ i = 2,3...,n-1;\ m = 1,2,... \end{aligned} \tag{V.2.4}$$

$$u_i^0 = \varphi(x_i),\ i = 1,2,...,n; \tag{V.2.5}$$

$$u_1^m = \psi_0(t_m),\ \ u_N^m = \psi_1(t_m),\ \ m=0,\ 1,\ 2,\ \dots\ . \tag{V.2.6}$$

Здесь: система (V.2.4) аппроксимирует уравнение (V.2.1) во внутренних узлах сетки, а уравнения (V.2.5) и (V.2.6) являются дискретными аналогами уравнений (V.2.2) и (V.2.3), соответственно. Параметр θ («вес») лежит в пределах:

$$0 \le \theta \le 1 \tag{V.2.7}$$

и выбирается по нашему усмотрению; от этого выбора зависят свойства схемы (V.2.4)-(V.2.6).

Для реализации схемы (V.2.4)-(V.2.6) ее удобно переписать в следующем виде (для простоты считаем, что f(x,t)=0):

$$-Au_{i-1}^{m}+Bu_{i}^{m}-Cu_{i+1}^{m}=A^{0}u_{i-1}^{m-1}+B^{0}u_{i}^{m-1}+C^{0}u_{i+1}^{m-1},\ i=2,3,...,n-1; \quad \text{(V.2.8)}$$

$$u_{1}^{m}=\psi_{0}(t_{m}),\ u_{n}^{m}=\psi_{1}(t_{m}),\ m=1,2,...; \quad \text{(V.2.9)}$$

$$u_{i}^{0}=\varphi(x_{i}),\ i=1,2,...,n. \quad \text{(V.2.10)}$$

задача (V.2.8)-(V.2.10) решается «пошагово» (послойно по t), причем на каждом временном слое t_m система уравнений (V.2.8), (V.2.9) решается *методом прогонки.* В (V.2.8) приняты обозначения:

$$\begin{cases} A=C=\theta K,\ B=1+A+C; \\ A^{0}=C^{0}=(1-\theta)K,\ B^{0}=1-A^{0}-C^{0}; \\ K=\dfrac{\varepsilon\tau}{h^{2}}. \end{cases} \quad \text{(V.2.11)}$$

Величина “K” называется *разностным числом Куранта.* Следующее утверждение содержит некоторые свойства схемы (V.2.8)-(V.2.11). Его аналогом является *Принцип максимума*, доказанный в [2, 17].

Т е о р е м а V.2.1. Предположим, что коэффициенты схемы (V.2.8) удовлетворяют следующим условиям:

1. $A\ge 0,\ C\ge 0,\ B>A+C;$
2. $A^{0}\ge 0,\ C^{0}\ge 0,\ B^{0}\ge 0,\ B\ge A+C+(A^{0}+B^{0}+C^{0}).$

Тогда задача (V.2.8)-(V.2.11) корректна, причем, для ее решения u_i^m и для решения u(x,t) задачи (V.2.1)-(V.2.3) справедлива оценка сходимости:

$$\max_{1\le i\le n}\left|u_{i}^{m}-u(x_{i},t_{m})\right|\le C_{m}t_{m}\left(\left|\frac{\varepsilon h^{2}}{12}+\varepsilon^{2}\tau\left(\theta-\frac{1}{2}\right)\right|+\tau^{2}+\varepsilon h^{4}\right). \quad \text{(V.2.12)}$$

■

Заметим, что условие 1. Теоремы V.2.1 гарантирует корректность метода прогонки для задачи (V.2.8), (V.2.9).

О п р е д е л е н и е V.2.1. Разностная схема (V.2.8)-(V.2.10) называется *монотонной,* если для нее выполнены условия 1 и 2 Теоремы V.2.1 ■

Рассмотрим следующие варианты выбора параметра θ. Превые три можно считать классическими: они хорошо известны по литературе (см., например, [2, 17]).

1. $\theta = 0$. *Явная схема:* она не требует прогонки для решения системы (V.2.8)-(V.2.9) на каждом шаге по времени.
2. $\theta = \frac{1}{2}$. *Схема Кранка-Николсона.*
3. $\theta = 1$. *Схема с опережением* или *Чисто неявная схема.*

Анализируя оценку (V.2.12), можно прийти к выводу: сходимость схемы будет иметь второй порядок «по времени» в случае схемы Кранка-Николсона, но будет ли она всегда монотонна? Попытка создать всегда (для любого K>0) монотонную схему второго порядка аппроксимации по времени дает следующий вариант:

4. $\theta = \max\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2K}\right)$. *Схема с минимальной вязкостью.*

Будем рассматривать ещё две схемы:

5. $\theta = \max\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{3}{4K}\right)$. *Схема, сохраняющая монотонность.*
6. $\theta = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{6K}\right)$. . *Схема наивысшего порядка сходимости.*

Анализируя формулы (V.2.11) и условия Теоремы V.2.1, можно доказать следующее утверждение.

Т е о р е м а V.2.2. Если выполнено условие:

$$\max\left(0{,}1-\frac{1}{2K}\right)\le\theta\le 1, \qquad (V.2.13)$$

то схема (V.2.8)-(V.2.11) является монотонной в смысле определения V.2.1

■

Тестовые задачи.

1. Трансформация «k»-й гармоники ряда Фурье.

Полагаем в (V.2.1)-(V.2.3):

$$f(x,t)\equiv 0;\ \varphi(x)=\sin(\pi kx)+x\psi_1+(1-x)\psi_0;$$

$$\psi_0(t)\equiv\psi_0=\mathrm{const};\ \psi_1(t)\equiv\psi_1=\mathrm{const};$$

$k=1,2,3,\ldots$-параметр задачи.

Решение задачи (V.2.1)-(V.2.3) в этом случае будет иметь вид:

$$u(x,t)=\sin(\pi kx)\cdot\exp(-(\pi k)^2\varepsilon t)+x\psi_1+(1-x)\psi_0.$$

2. Колебательный (при x=0) температурный режим (Вариант I).

Пусть $k=1,2,3,\ldots$-параметр задачи. Введём обозначения:

$$\gamma\equiv\sqrt{\frac{\pi k}{2\varepsilon}};\qquad v_1(x)\equiv\frac{\cos\gamma x\cdot\mathrm{ch}\gamma(2-x)-\cos\gamma(2-x)\cdot\mathrm{ch}\gamma x}{\mathrm{ch}2\gamma-\cos2\gamma};$$

$$v_2(x)=\frac{\sin\gamma x\cdot\mathrm{sh}\gamma(2-x)-\sin\gamma(2-x)\cdot\mathrm{sh}\gamma x}{\mathrm{ch}2\gamma-\cos2\gamma}.$$

В этом случае в (V.2.1)-(V.2.3) полагаем:

$$f(x,t)\equiv 0;$$
$$\varphi(x)\equiv v_1(x);$$
$$\psi_0(t)\equiv\cos(\pi kt),\ \psi_1(t)\equiv 0.$$

Решение задачи (V.2.1)-(V.2.3) имеет вид:

$$u(x,t)=v_1(x)\cos(\pi kt)+v_2(x)\sin(\pi kt).$$

3. Колебательный (при x=0) температурный режим (Вариант II).

Используя обозначения задачи 2, положим в (V.2.1)-(V.2.3):

$$f(x,t) \equiv 0;$$
$$\varphi(x) \equiv -v_2(x);$$
$$\psi_0(t) \equiv \sin(\pi k t),\ \ \psi_1(t) \equiv 0.$$

Для этих данных решение задачи (V.2.1)-(V.2.3) таково:

$$u(x,t) = v_1(x)\sin(\pi k t) - v_2(x)\cos(\pi k t).$$

4. Разрывный (в начальный момент времени) профиль температуры.

Рассмотрим вспомогательную задачу Коши:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\ \ -\infty < x < +\infty, t>0; \qquad \text{(V.2.14)}$$

$$v(x,0) = \begin{cases} T_1,\ x < 1/2; \\ \dfrac{T_1 + T_2}{2},\ x = 1/2; \\ T_2,\ x > 1/2. \end{cases} \qquad \text{(V.2.15)}$$

Решение этой задачи имеет вид:

$$v(x,t) = \frac{T_2 + T_1}{2} + \frac{T_2 - T_1}{2} \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{2x-1}{4\sqrt{\varepsilon t}}\right), \qquad \text{(V.2.16)}$$

где функция erf(z) известна в статистике как *интеграл ошибок* и определяется формулой

$$\operatorname{erf}(z) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^z e^{-s^2} ds \qquad \text{(V.2.17)}$$

Перейдем от задачи (V.2.14), (V.2.15) к задаче (V.2.1)-(V.2.3) на отрезке [0,1], спроецировав на него функцию (V.2.16). Положим в (V.2.1)-(V.2.3):

$$f(x,t) \equiv 0;$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} T_1, \text{ при } 0 \le x < 1/2; \\ \dfrac{T_1 + T_2}{2}, \text{ при } x = 1/2; \\ T_2, \text{ при } 1/2 < x \le 1. \end{cases}$$

$$\psi_0(t) = v(0,t), \ \psi_1(t) = v(1,t)$$

Решение задачи (V.2.1)-(V.2.3), очевидно, определяется формулой (V.2.16). Для вычисления функции (V.2.17) воспользуемся следующим рациональным представлением (см. [23]): положим для $z \ge 0$

$$\mathrm{erf}(z)=1- (a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + a_4 s^4 + a_5 s^5) \exp(-z^2) + \delta ,$$

где:

$$s = \frac{1}{1 + p \cdot z}$$

$$p=0.3275911, \ a_1=0.254829592, \ a_2=-0.284496736,$$

$$a_3=1.421413741, \ a_4=-1.453152027, \ a_5=1.061405429.$$

При $z<0$ воспользуемся нечетностью функции $\mathrm{erf}(z)$:

$$\mathrm{erf}(z)=-\mathrm{erf}(-z).$$

Известно (см. [23]), что погрешность “δ” удовлетворяет оценке:

$$|\delta| < 1{,}5 \cdot 10^{-7}.$$

Параметрами этой задачи, помимо ε, являются величины T_1 и T_2.

Требования к программе. *Программа должна включать:*

1) Разностную схему (семейство схем) (V.2.8)–(V.2.11) с возможностью выбора параметра «θ». Необходимо предусмотреть возможность

реализации схем 1–5. Решение задачи осуществлять пошагово: m = 1,2,…

2) Одну из тестовых задач 1–4 (по усмотрению преподавателя) с возможностью выбора соответствующих параметров.

3) Выбор числа узлов сетки «n» по формуле: $n = 1 + 2^k$, k = 2,3,4,…

4) Выбор числа куранта «К»: достаточен дискретный набор К = 0.1, 0.5, 0.8, 1, 5, 10, 20, 50. Шаг по времени «τ» затем определяется по формуле (см. (V.2.11)): $\tau = K \cdot h^2 / \varepsilon$. Вывод «$\tau$».

5) Выбор параметра «ε» по формуле: $\varepsilon = 2^{-k}$, k =-2,-1,0,1,2,…

6) Вывод относительной погрешности по формуле (m =1,2,…):

$$\mathrm{Err}(u^m) \equiv \frac{\max\limits_{1\le i\le n} \left| u(x_i, t_m) - u_i^m \right|}{\max\limits_{1\le i\le n} \left| u(x_i, t_m) \right|} \cdot 100 \text{ (в \%)} \qquad \text{(V.2.18)}$$

7) Графику: на каждом шаге по времени должны отрисовываться графики точного решения тестовой задачи и численного решения, проинтерполированного кусочно-линейным сплайном; отрисовка узлов сетки $\{x_i\}_{i=1}^{n}$. .

8) Должна быть предусмотрена возможность возврата в начальное состояние (t = 0) с любого временного шага t_m.

Задание для работы с программой.

1. Пользуясь условиями (V.2.13) *найти условия на число Куранта «К»,* гарантирующие монотонность схем 1-5.

   Провести численные расчеты, варьируя значения всех параметров.

   Анализируя результаты расчетов, ответить на следующие вопросы.

2. Гарантирует ли выполнение условий, найденных в п.1.

   а) качественное соответствие решений (точного и приближенного), б)«количественное» их совпадение (ошибка (V.2.18)). Влечет ли нарушение этих условий ухудшение (разрушение) численного решения?

3. Сравнить между собой схемы 1-5, используя в качестве критериев:

   а) величину погрешности (V.2.18),

   б) визуальное соответствие графиков точного и приближенного решений.

4. Для каждой схемы 1-5 найти, если это возможно, значения параметров h и K, гарантирующее близость точного и приближенного решений с погрешностью (V.2.18)$\leq$ 5%.

Ответы аргументировать результатами численных экспериментов и *оформить в виде Отчета*.