

Федеральное агентство по образованию  
Санкт-Петербургский государственный  
электротехнический университет "ЛЭТИ"

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА К КУРСОВОЙ РАБОТЕ  
по дисциплине "Информатика"

ВАРИАНТ N23

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата

# Содержание

1. Цель и тема курсовой работы
2. Задание на курсовую работу
3. Введение
4. Исследование функции
5. Исследование кубического сплайна
6. Задача оптимального распределения неоднородных ресурсов
7. Список литературы

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата													
Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата						Вариант N23							
					Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата								
					Разраб.	Рахманов М. А.								Пояснительная записка к Курсовой работе по дисциплине "Информатика"	Лит.	Лист	Листов
					Пров.	Прокшин А. И.										2	??
Н. контр.																	
Утв.																	

**Цель курсовой работы:** уметь применять персональный компьютер и математические пакеты прикладных программ в инженерной деятельности.

**Тема курсовой работы:** решение математических задач с использованием математического пакета "Scilab"или "Reduce-algebra".

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата						Лист
										3
					Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Вариант N23

## 2. Задание на курсовую работу

1. Даны функции  $f(x) = \sqrt{3}\sin(x) + \cos(x)$ ,  $g(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{3}) - 1$

а) Решить уравнение  $f(x)=g(x)$ .

б) Исследовать функцию  $h(x) = f(x) - g(x)$  на промежутке  $[0; \frac{5\pi}{6}]$

2. Найти коэффициенты кубического сплайна, интерполирующего данные, представленные в векторах:

$$V_x = [0, 1.25, 2, 2.625, 4.25] \quad V_y = [4, 3.925, 4.675, 4.8, 4.956]$$

Построить на графике функции  $f(x)$ , полученную после нахождения коэффициентов кубического сплайна.

Представить графическое изображение результатов интерполяции исходных данных различными методами с использованием встроенных функций

```
splin(x,y,"natural"), splin(x,y,"clamped"), splin(x,y,"not_a_knot"), splin(x,y, "fast"),
splin(x,y,"monotone"), interp(xx,x,y,d)
```

3. Решить задачу оптимального распределения неоднородных ресурсов. Требуется решить следующую задачу оптимального распределения неоднородных ресурсов. Пусть в распоряжении завода железобетонных изделий (ЖБИ) имеется  $m$  видов сырья (песок, щебень, цемент) в объемах  $a_i$ . Требуется произвести продукцию  $n$  видов. Дана технологическая норма  $c_{ij}$  потребления отдельного  $i$ -го вида сырья для изготовления единицы продукции каждого  $j$ -го вида. Известна прибыль  $\pi_j$  получаемая от выпуска единицы продукции  $j$ -го вида. Требуется определить, какую продукцию и в каком количестве должен производить завод ЖБИ, чтобы получить максимальную прибыль.

Таблица 1. 23

Используемые ресурсы $a_i$	Изготавливаемые изделия				Наличие ресурсов, $a_i$
	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_4$	
Песок	8	5	8	7	20
Щебень	6	6	6	5	10
Цемент	9	6	4	9	35
Прибыль, $P_j$	44	54	40	30	

3. Введение

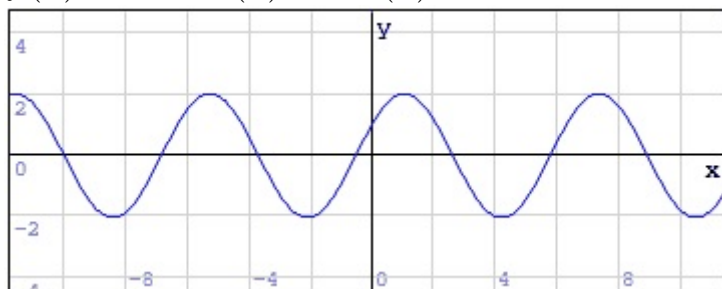
В современном мире технологии неудержимо летят вперед, с каждым годом электронно вычислительная техника становится мощнее, компактнее и сложнее, а людям приходится решать все более сложные задачи. С этим людям стали помогать математические пакеты и системы компьютерной алгебры, которые во много раз сокращают время на решение сложнейших задач, с бесчисленным количеством чисел, сейчас такие программы доступны каждому хоть и не все они бесплатные.

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	Вариант N23					Лист
										5
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						

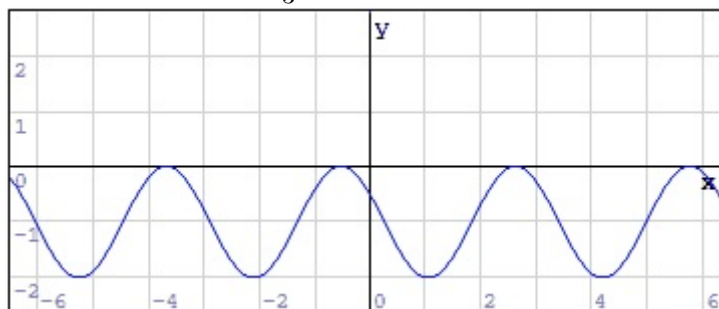
## 4. Исследование функции

1. Даны функции:

$$f(x) = \sqrt{3}\sin(x) + \cos(x)$$



$$g(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{3}) - 1$$



а) Решить уравнение  $f(x) = g(x)$ .

б) Исследовать функцию  $h(x) = f(x) - g(x)$  на промежутке  $[0; \frac{5\pi}{6}]$

**Решение уравнения.**

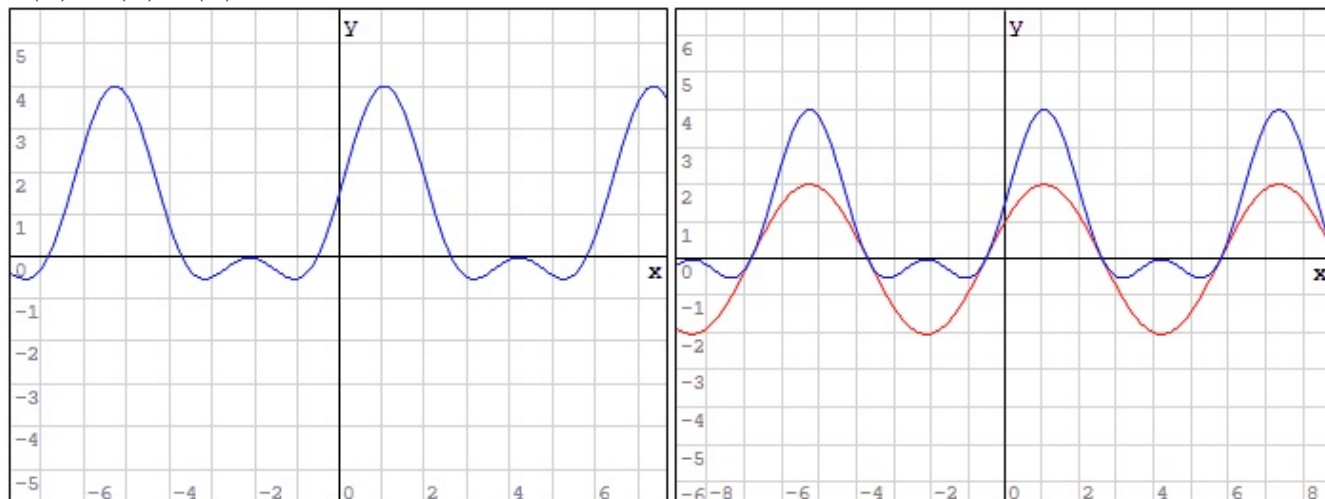
$$f(x) = g(x) \Rightarrow f(x) - g(x) = 0$$

$$\text{solve}(f(x) - g(x), x) = \begin{bmatrix} -19.3732 \\ -16.2316 \\ -13.09 \\ -9.9484 \\ -6.8068 \\ -3.6652 \\ -0.5236 \\ 2.618 \\ 5.7596 \\ 8.9012 \\ 12.0428 \\ 15.1844 \\ 18.326 \end{bmatrix}$$

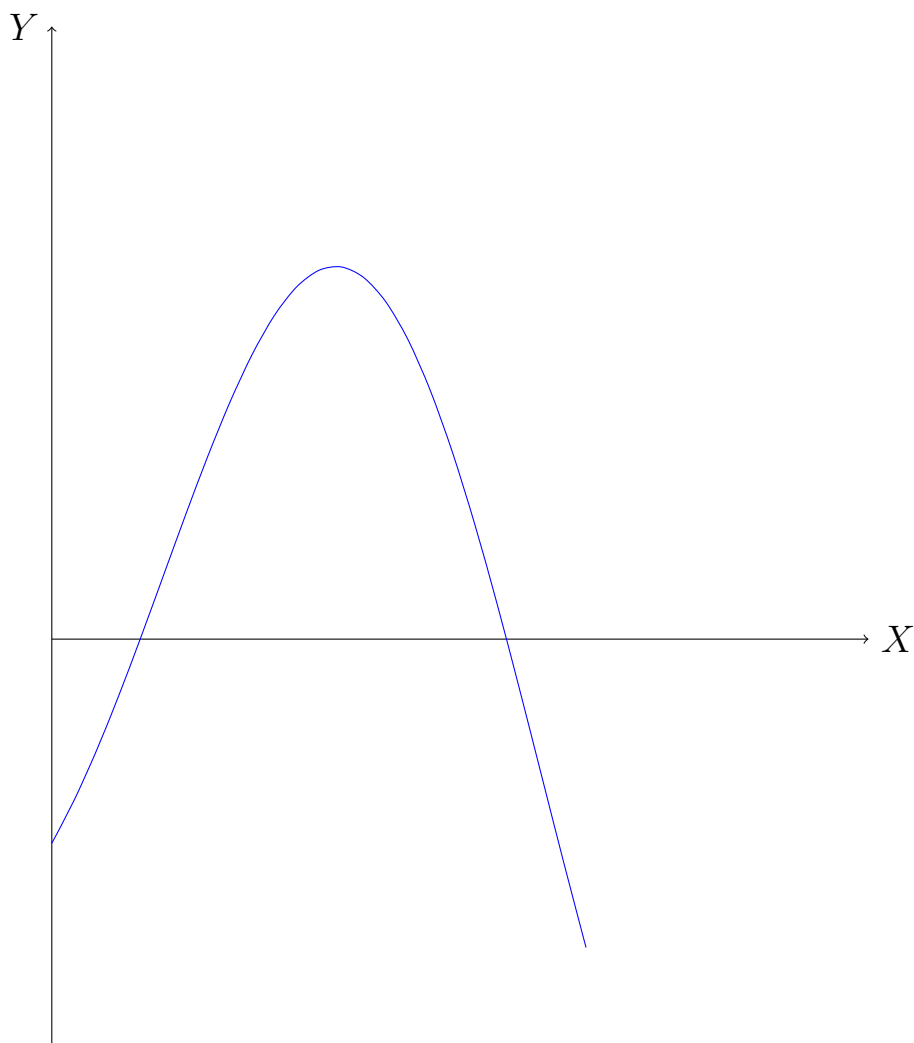
					Решение уравнения.				
					$f(x)=g(x)= f(x)-g(x)=0$				
					$\text{solve}\left(f\left(x\right)-g\left(x\right), x\right)=$				
					$\begin{bmatrix} -19.3732 \\ -16.2316 \\ -13.09 \\ -9.9484 \\ -6.8068 \\ -3.6652 \\ -0.5236 \\ 2.618 \\ 5.7596 \\ 8.9012 \\ 12.0428 \\ 15.1844 \\ 18.326 \end{bmatrix}$				

Рассмотрим функцию  $h(x)=f(x)-g(x)$

$$h(x)=f(x)-g(x)$$



Функция  $f(x)=g(x)=f(x)-g(x)=0$  на промежутке  $x=0$  до  $x=\frac{5\pi}{6}$



Инов. № подл.	Подп. и дата
Взам. инв. №	Инов. № дубл.
Подп. и дата	
Инов. № подл.	

Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата
-----	------	----------	-------	------

Вариант N23

Лист

7

Найдем корни и пересечения с осями.

Область определения функции задана и равна от  $x = 0$  до  $x = \frac{5\pi}{6}$

Так как функция  $h(x)$  является функцией общего вида то и на области определения она также обладает общим видом если брать функцию  $h(x)$  полностью то она периодична так как повторяется при каждом изменении  $x$  на  $6 * \frac{5\pi}{6}$  но так как область определения составляет  $1/6$  от периода повтора функция не повторяется в области определения что означает у нее отсутствует периодичность

1. Найдем пересечение с осью X:

$$x := \frac{5 \cdot \pi}{6} = 2.618$$

$$(\sqrt{3} \cdot \sin(x) + \cos(x)) - \left( \cos\left(2 \cdot x + \frac{\pi}{3}\right) - 1 \right) = 0$$

2. Найдем пересечение с осью  $Y$ :

$x := 0$

$$(\sqrt{3} \cdot \sin(x) + \cos(x)) - \left( \cos\left(2 \cdot x + \frac{\pi}{3}\right) - 1 \right) = 1.5$$

3. Найдем экстремуму в пределах области определения:

$$\frac{d^1}{dx^1}h(x) \rightarrow 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + 2 \cdot x\right) - \sin(x) + \sqrt{3} \cdot \cos(x)$$

$$\text{extr} := \text{root}\left(\frac{d^1}{dx^1}h(x), x, 0, 5 \cdot \frac{\pi}{6}\right)$$

extr = 1.047

$$h(\text{extr}) = 4$$

#### 4. Функция не имеет разрывов

5. Так как функция является изначально синусоидальной асимптот не имеет

6.Имеет выпуклость  $(0;2618)$  и вогнутость  $(2.618; \frac{5\pi}{6})$

7. Точек перегибов не имеет

Изн.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	<p>Вариант N23</p>



## 5. Исследование кубического сплайна.

Найти коэффициенты кубического сплайна, интерполирующего данные, представленные в векторах:

$$V_x = [0, 1.25, 2, 2.625, 4.25] \quad V_y = [4, 3.925, 4.675, 4.8, 4.956]$$

Построить на графике функции  $f(x)$ , полученную после нахождения коэффициентов кубического сплайна.

Оценить погрешность интерполяции в точке  $x=3.1$ . Вычислить значение функции в точке  $x=2.1$

Представить графическое изображение результатов интерполяции исходных данных различными методами с использованием встроенных функций `splin(x,y,“natural”)`, `splin(x,y,“clamped”)`, `splin(x,y,“not_a_knot”)`, `splin(x,y, “fast”)`, `splin(x,y,“monotone”)`, `interp(xx,x,y,d)`

[illegible]

## Нахождение коэффициентов кубического сплайна.

Найдем уравнение сплайна проходящего через пять точек  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$ ,  $(x_4, y_4)$ . Для того чтобы потенциальная энергия изогнутой металлической линейки (сплайна) принимала минимальное значение, производная четвертого порядка должна быть равна нулю, значит мы можем представить сплайн полиномом третьей степени на каждом отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$

$$F_i(x) = A_{i0} + A_{i1}x + A_{i2}x^2 + A_{i3}x^3, x \in [x_i, x_{i+1}]$$

По такому же принципу составляем 8 уравнений, по два на каждый участок кривой.

$$y_1 := A_{10} + A_{11} \cdot X_1 + A_{12} \cdot X_1^2 + A_{13} \cdot X_1^3$$

$$y_2 := A_{10} + A_{11} \cdot X_2 + A_{12} \cdot X_2^2 + A_{13} \cdot X_2^3$$

$$y_2 := A_{20} + A_{21} \cdot X_2 + A_{22} \cdot X_2^2 + A_{23} \cdot X_2^3$$

$$y_3 := A_{20} + A_{21} \cdot X_3 + A_{22} \cdot X_3^2 + A_{23} \cdot X_3^3$$

$$y_3 := A_{30} + A_{31} \cdot X_3 + A_{32} \cdot X_3^2 + A_{33} \cdot X_3^3$$

$$y_4 := A_{30} + A_{31} \cdot X_4 + A_{32} \cdot X_4^2 + A_{33} \cdot X_4^3$$

$$y_4 := A_{40} + A_{41} \cdot X_4 + A_{42} \cdot X_4^2 + A_{43} \cdot X_4^3$$

$$y_5 := A_{40} + A_{41} \cdot X_5 + A_{42} \cdot X_5^2 + A_{43} \cdot X_5^3$$

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	Инв. № подл.	Подп. и дата	Инв. № дубл.	Подп. и дата	$y3 := A_{30} + A_{31} \cdot X3 + A_{32} \cdot X3^2 + A_{33} \cdot X3^3$ $y4 := A_{30} + A_{31} \cdot X4 + A_{32} \cdot X4^2 + A_{33} \cdot X4^3$ $y4 := A_{40} + A_{41} \cdot X4 + A_{42} \cdot X4^2 + A_{43} \cdot X4^3$ $y5 := A_{40} + A_{41} \cdot X5 + A_{42} \cdot X5^2 + A_{43} \cdot X5^3$
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Вариант N23				Лист
									10

Для того что бы не было излома сплайна, добавляем три уровня с производными певого порядка, по одному на каждое соединение.

$$\begin{aligned} A_{11} + 2 \cdot A_{12} \cdot X_2 + 3 \cdot A_{13} \cdot X_2^2 &:= A_{21} + 2 \cdot A_{22} \cdot X_2 + 3 \cdot A_{23} \cdot X_2^2 \\ A_{21} + 2 \cdot A_{22} \cdot X_3 + 3 \cdot A_{23} \cdot X_3^2 &:= A_{31} + 2 \cdot A_{32} \cdot X_3 + 3 \cdot A_{33} \cdot X_3^2 \\ A_{31} + 2 \cdot A_{32} \cdot X_4 + 3 \cdot A_{33} \cdot X_4^2 &:= A_{41} + 2 \cdot A_{42} \cdot X_4 + 3 \cdot A_{43} \cdot X_4^2 \end{aligned}$$

Для получения одинакового изгиба с каждой стороны стыков, добавляем три уровня с производными второго порядка.

$$\begin{aligned} 2 \cdot A_{12} + 6 \cdot A_{13} \cdot X_2 &:= 2 \cdot A_{22} + 6 \cdot A_{23} \cdot X_2 \\ 2 \cdot A_{22} + 6 \cdot A_{23} \cdot X_3 &:= 2 \cdot A_{32} + 6 \cdot A_{33} \cdot X_3 \\ 2 \cdot A_{32} + 6 \cdot A_{33} \cdot X_4 &:= 2 \cdot A_{42} + 6 \cdot A_{43} \cdot X_4 \end{aligned}$$

Добавим уровнения отвечающие за положение концов сплайна, в нашем случае они оставлены свободно.

$$\begin{aligned} 2 \cdot A_{12} + 6 \cdot A_{13} \cdot X_1 &:= 0 \\ 2 \cdot A_{42} + 6 \cdot A_{43} \cdot X_5 &:= -0 \end{aligned}$$

[illegible]

Таким образом были найдены 16 уравнений из которых можно составить матрицу размерностью 16x16. С ее помощью, решая матричное уравнение, находим коэффициенты кубического сплайна.

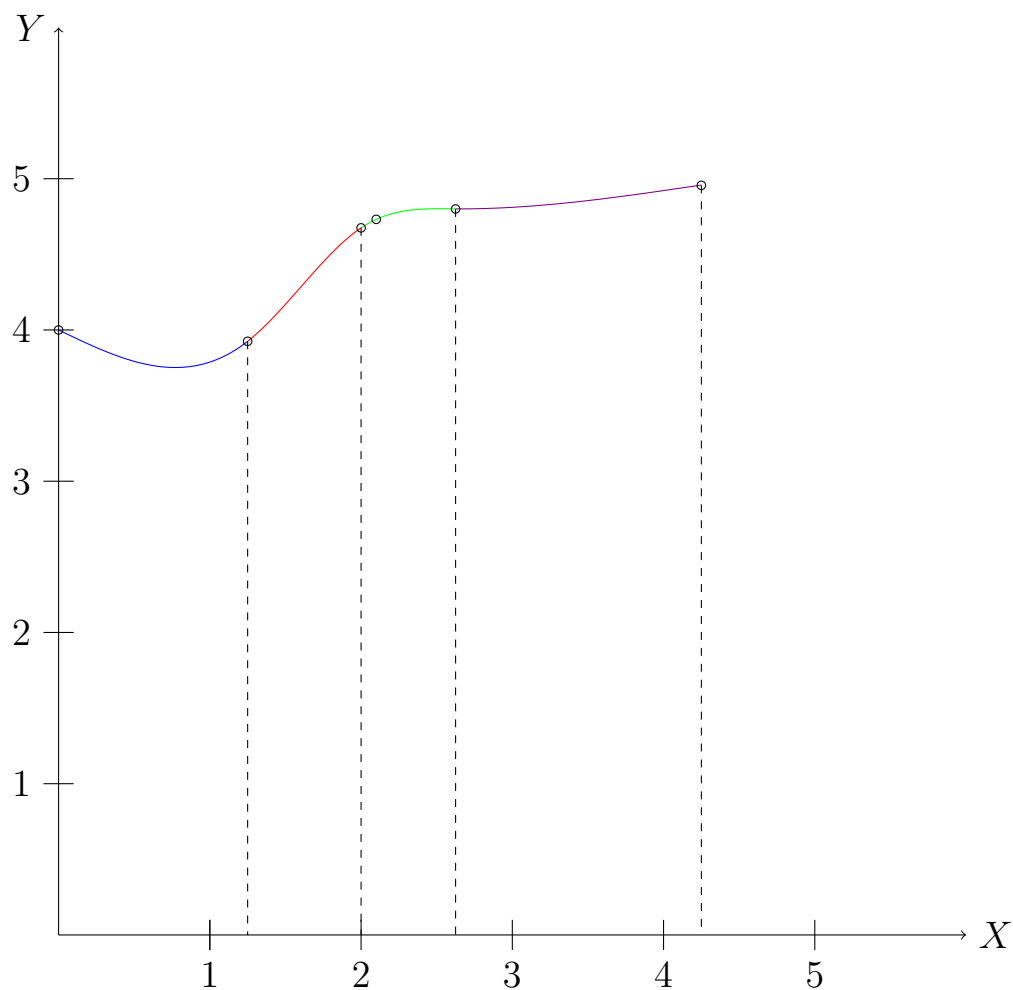
$$\begin{bmatrix} 1 & X_1 & X_1^2 & X_1^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & X_2 & X_2^2 & X_2^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \cdot X_2 & 3 \cdot X_2^2 & 0 & -1 & -2 \cdot X_2 & -3 \cdot X_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \cdot X_2 & 0 & 0 & -2 & -6 \cdot X_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & X_2 & X_2^2 & X_2^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & X_3 & X_3^2 & X_3^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \cdot X_3 & 3 \cdot X_3^2 & 0 & -1 & -2 \cdot X_3 & -3 \cdot X_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \cdot X_3 & 0 & 0 & -2 & -6 \cdot X_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & X_3 & X_3^2 & X_3^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & X_4 & X_4^2 & X_4^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \cdot X_4 & 3 \cdot X_4^2 & 0 & -1 & -2 \cdot X_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \cdot X_4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & X_4 & X_4^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & X_5 & X_5^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \cdot X_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \cdot X_5 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ 0 \\ 0 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ 0 \\ 0 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ 0 \\ 0 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -0.4827 \\ 0 \\ 0.2705 \\ 6.4252 \\ -6.3031 \\ 4.6563 \\ -0.9711 \\ -6.7365 \\ 13.4393 \\ -5.2149 \\ 0.6741 \\ 5.8017 \\ -0.89 \\ 0.2439 \\ -0.0191 \end{bmatrix}$$

Получаем окончательное уравнение сплайна.

$$\begin{aligned} F1 &:= 0.2705 \cdot x^3 + 0 - 0.4827 \cdot x + 4 \\ F2 &:= -0.9711 \cdot x^3 + 4.6563 \cdot x^2 - 6.3031 \cdot x + 6.4252 \\ F3 &:= 0.6741 \cdot x^3 - 5.2149 \cdot x^2 + 13.4393 \cdot x - 6.7365 \\ F4 &:= -0.0191 \cdot x^3 + 0.2439 \cdot x^2 - 0.89 \cdot x + 5.8017 \end{aligned}$$

Инов. № подл.	Подп. и дата	Инов. № дубл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата

построение кубического сплайна.



Инв. № подл.	Подп. и дата	Инв. № дубл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.



## Оценка погрешности интерполяции эрмитовыми кубическими сплайнами

Для того что бы найти погрешность данным способом нам нужно получить четвертую производную функции:

$$F'1 := \frac{Y2 - Y1}{X2 - X1} = -0.06 \quad F'3 := \frac{Y4 - Y3}{X4 - X3} = 0.2$$

$$F'2 := \frac{Y3 - Y2}{X3 - X2} = 1 \quad F'4 := \frac{Y5 - Y4}{X5 - X4} = 0.096$$

$$F''1 := \frac{F'2 - F'1}{X2 - X1 - X3 - X2} = -0.53$$

$$F''2 := \frac{F'3 - F'2}{X3 - X2 - X4 - X3} = 0.2065$$

$$F''3 := \frac{F'4 - F'3}{X4 - X3 - X5 - X4} = 0.0166$$

$$F'''1 := \frac{F''2 - F''1}{X2 - X1 - X3 - X2 - (X3 - X2 - X4 - X3)} = 0.3928$$

$$F'''2 := \frac{F''3 - F''2}{X3 - X2 - X4 - X3 - (X4 - X3 - X5 - X4)} = -0.0799$$

$$F'''' := \frac{F'''2 - F'''1}{X2 - X1 - X3 - X2 - (X3 - X2 - X4 - X3) - (X3 - X2 - X4 - X3 - (X4 - X3 - X5 - X4))} = 0.9454$$

После этого подставляем в формулу получившуюся производную, и вычисляем  $h$  подставляем заданую точку 3.1 и ближайшую к ней то есть 4.25

$$Pog := \frac{1}{384} \cdot (3.1 - 4.25)^4 \cdot F'''' = 0.0043$$

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата	Вариант N23					Лист
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						15

## 6. Задача оптимального распределения неоднородных ресурсов.

Требуется решить следующую задачу оптимального распределения неоднородных ресурсов. Пусть в распоряжении завода железобетонных изделий (ЖБИ) имеется  $m$  видов сырья (песок, щебень, цемент) в объемах  $a_i$ . Требуется произвести продукцию  $n$  видов. Дана технологическая норма  $c_{ij}$  потребления отдельного  $i$ -го вида сырья для изготовления единицы продукции каждого  $j$ -го вида. Известна прибыль  $p_j$  получаема от выпуска единицы продукции  $j$ -го вида. Требуется определить, какую продукцию и в каком количестве должен производить завод ЖБИ, чтобы получить максимальную прибыль.

Исходные данные:

Таблица 1. 23

Используемые ресурсы $a_i$	Изготавливаемые изделия				Наличие ресурсов, $a_i$
	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_4$	
Песок	8	5	8	7	20
Щебень	6	6	6	5	10
Цемент	9	6	4	9	35
Прибыль, $P_j$	44	54	40	30	

Так как данная задача является целочисленной задачей линейного программирования, стандартная функция мат. пакета «SciLab» для решения задач линейного программирования `karmarkar` не даст верного решения, так как не учитывает целочисленное ограничение

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	<div style="text-align: right; font-size: 1.2em; font-weight: bold;">Вариант N23</div>					Лист
										16
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						



Для решения задачи воспользуемся пакетом `lpsolve`:

$[x,f] = lp\_solve(F, a, b, e, vlb, [], xint), :$

$a$  – матрица значений технологической норм

$B$  – вектор ограничений на объем используемого сырья

$F$  – вектор значений целевой функции - прибыли

$e$  – вектор, определяющий оператор отношения для ограничений ( $\leq = \geq$ )

$vlb$  – вектор, задающий нижнюю границу переменных

$xint$  – вектор, задающий целочисленное ограничение на переменные

$c = [8,5,8,7;6,6,6,5;9,6,4,9];$

$a = [20,10,35]';$

$b = [44,54,40,30];$

$e = [-1,-1,-1];$

$vlb = [0,0,0];$

$xint = [1,2,3,4];$

$[x,f] = linpro(c,A,b,e,vlb,[],xint)$

$x = [0;0;0;2]$

$f = 60.$

Таким образом, искомым целочисленным решением доставляющим максимум целевой функции является вектор  $[0;1;2;0]$ , а значением целевой функции, отвечающему этому вектору  $= 60$ . Следовательно что бы получить максимальную прибыль равной 60 условных единиц, заводу нужно произвести изделие  $I_4$  в размере двух штук.

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата	Вариант N23					Лист
										17
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						

6. Вывод

Были изучены возможности разных математических программ, получино умение выбирать для работы программу наиболее эффективную для решения поставленной задачи. Были решены задачи по изучению функции, построению сплайна и нахождению его погрешности, решению задачи с целочисленным программированием.

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	Вариант N23					Лист
										18
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						

## 8. Список литературы

1. Ю.С. Завьялов. Методы сплайн-функций. М.Наука, 1980.
2. Introduction in SciLab
3. [https://ru.wikipedia.org/wiki/Интерполяционный\\_многочлен\\_Лагранжа](https://ru.wikipedia.org/wiki/Интерполяционный_многочлен_Лагранжа)
4. <http://lpsolve.sourceforge.net/5.1/Scilab.htm>
5. smath studio User's manual

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	<div>Вариант N23</div>					Лист
										19
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						