מור מלכה 311142905
שני כבורי 205487846

# למידה חישובית - תרגיל 5:

(1) $L(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$

.a

$f(x,y) = e^{xy}$

$2x^2 + y = 72 \rightarrow g(x,y) = 2x^2 + y^2 - 72 = 0$

$L(x,y) = e^{xy} + \lambda(2x^2 + y - 72) = e^{xy} + \lambda \cdot 2x^2 + \lambda y^2 - 72\lambda$

$\frac{\partial}{\partial x} L(x,y) = e^{xy} \cdot y + 4\lambda x = 0$

$\frac{\partial}{\partial y} L(x,y) = e^{xy} \cdot x + 2\lambda y = 0$

$\frac{\partial}{\partial \lambda} L(x,y) = 2x^2 + y^2 - 72$

$\Downarrow$

$-\frac{e^{xy} \cdot y}{4x} = \lambda \qquad -\frac{e^{xy} \cdot x}{2y} = \lambda \rightarrow -\frac{e^{xy} \cdot y}{4x} = -\frac{e^{xy} \cdot x}{2y}$

$2y^2 = 4x^2$

$2x^2 + 2x^2 - 72 = 0 \leftarrow y^2 = 2x^2$

$4x^2 = 72$

$x^2 = 18$

$x = \pm\sqrt{18} \longrightarrow y = \pm 2\sqrt{18} = \pm 6$

$\Downarrow$

$max = e^{\sqrt{18} \cdot 6} \qquad min = e^{-\sqrt{18} \cdot 6}$

$f(\sqrt{18}, 6) = e^{6\sqrt{18}}$

$f(-\sqrt{18}, 6) = e^{-6\sqrt{18}}$

$f(\sqrt{18}, -6) = e^{-6\sqrt{18}}$

$f(-\sqrt{18}, -6) = e^{6\sqrt{18}}$

2/0

.b ①

$f(x,y) = x^2 + y^2$

$g(x,y) = y - \cos 2x = 0$

$\Downarrow$

$L(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda(y - \cos 2x) = x^2 + y^2 + \lambda \cdot y - \lambda \cdot \cos 2x$

$\frac{\partial}{\partial x} = 2x + \lambda \cdot (-2\sin x) = 2x - 2\lambda \sin 2x = 0$

$\frac{\partial}{\partial y} = 2y + \lambda = 0$

$\frac{\partial}{\partial \lambda} = y - \cos 2x = 0$

$\Downarrow$

$\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sin 2x} = \lambda \qquad -2y = \lambda \rightarrow \qquad \frac{x}{\sin 2x} = -2y$

$-\frac{x}{2\sin 2x} - \cos 2x = 0 \qquad \leftarrow \qquad y = -\frac{x}{2\sin 2x}$

$-x - \cos 2x \cdot 2\sin 2x = 0$

$x = -2\cos 2x \sin 2x = -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 4x = -\sin 4x$

$\Downarrow$

$x = -\sin 4x$

$x_1 = 0.619 \qquad y_1 = 0.326 \qquad \lambda_1 = 0.653 \qquad f(x,y) = 0.489$

$x_2 = -0.619 \qquad y_2 = 0.326 \qquad \lambda_2 = 0.653 \qquad f(x,y) = 0.489$

$x_3 = 0 \qquad y_3 = 1 \qquad \lambda_3 = 2 \qquad f(x,y) = 1$

$\Downarrow$

min = 0.489 max = 1

② 

**a.** $K_1(x,y) = \phi_1(x) \cdot \phi_1(y)$

$K_2(x,y) = \phi_2(x) \cdot \phi_2(y)$

$K = 7K_1 + 3K_2$

$$K(x,y) = 7K_1(x,y) + 3K_2(x,y) = 7\phi_1(x)\cdot\phi_1(y) + 3\phi_2(x)\cdot\phi_2(y)$$

נגדיר הפונקציה: $\phi(z) = [\sqrt{7}\,\phi_1(z), \sqrt{3}\,\phi_2(z)]$

$$K(x,y) = \phi(x)\cdot\phi(y) = [\sqrt{7}\,\phi_1(x), \sqrt{3}\,\phi_2(x)] \cdot [\sqrt{7}\,\phi_1(y), \sqrt{3}\,\phi_2(y)]$$

$$= 7\phi_1(x)\phi_1(y) + 3\phi_2(x)\phi_2(y)$$

$$= 7K_1(x,y) + 3K_2(x,y)$$

ולכן $K$ היא פונקצית kernel עם $\phi = [\sqrt{7}\,\phi_1, \sqrt{3}\,\phi_2]$

$\phi(z) = [\sqrt{7}\,\phi_1(z_1), \dots, \sqrt{7}\,\phi_1(z_n), \sqrt{3}\,\phi_2(z_1), \dots, \sqrt{3}\,\phi_2(z_m)]$

**b.** $K_1(x,y) = \phi_1(x)\cdot\phi_1(y)$ $\quad \phi_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad m > n$

$K_2(x,y) = \phi_2(x)\cdot\phi_2(y)$

$K = 7K_1 + 3K_2$

הוכחנו בסעיף א' ש $K$ היא פונקצית Kernel עם מיפוי $\phi = [\sqrt{7}\,\phi_1, \sqrt{3}\,\phi_2]$.

נניח, יהיה ש ב- $\mathbb{R}^m$ ה- data מופרד לינארית ע"י הוקטור $w = [w_1, \dots, w_m]$.

פונקצית המיפוי $\phi$ מעבירה אותנו למימד גבוה יותר מ- $m$.

נגדיר וקטור $w' = [w_1, w_2, \dots, w_m, 0, \dots, 0]$. נשים לב ש

מכפלה פנימית של וקטור עם $w$ או מכפלה פנימית של

וקטור עם $w'$ יתנו את אותה התוצאה, ובפרט

$w' = \frac{1}{\sqrt{7}}[w_1, \dots, w_m, 0, 0, \dots, 0]$ יתנו את אותה התוצאה

עם פונקצית ה-kernel $K$ (מכפילים ב $\sqrt{7}$ ומחלקים ב- $\sqrt{7}$).

ולכן $K$ היא פונקצית kernel עם מיפוי $\phi$ ווקטור

משקלים $w' = \frac{1}{\sqrt{7}}[w_1, \dots, w_m, 0, \dots, 0]$

**c.** $K(x,y) = (\alpha (x,y)+\beta)^d$ ②

$$= [\alpha (x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n) + \beta]^d$$

$$= (\alpha x_1y_1 + \alpha x_2y_2 + \dots + \alpha x_ny_n + \beta)^d$$

לפי הבינום של ניוטון נקבל כי סכום [illegible] החזקות במשוואה הוא $d$.

יש $n+1$ מחוברים ולכן השאלה השקולה היא, כמה פתרונות טבעיים יש למשוואה

$$z_1 + z_2 + \dots + z_{n+1} = d$$

ולכן נקבל: $\binom{n+1+d-1}{d} = \binom{n+d}{n}$

מימד המיפוי

**d.** $S = \{1, 2, \dots, N\}$

$f(x,y) = \min(x,y)$

עבור $x \in S$ נגדיר פונקצית מיפוי $\phi$:

$$\phi(x) = [a_1, \dots, a_x, \dots, a_N,\ a_1, \dots, a_x, \dots, a_N,\ a_1, \dots, a_x, \dots, a_N,\ a_1, \dots, a_x, \dots, a_N,\ a_1, \dots, a_x, \dots, a_N]$$

וקטור שמורכב מ-5 פעמים הוקטור $\{a_1, \dots, a_x, \dots, a_N\}$

נגדיר את $a_i$ באוסף הכולל

$$a_i = \begin{cases} 0 & \text{אם } i > x \\ 1 & \text{אחרת} \end{cases}$$

יהיו $x, y \in S$. נניח בה"כ כי $y \le x$, אז:

$$\phi(x) \cdot \phi(y) = \left[\sum_{i=1}^{y} 1 \cdot 1 + \underbrace{\sum_{i=y+1}^{x} 1 \cdot 0}_{0} + \underbrace{\sum_{i=x+1}^{N} 0 \cdot 0}_{0}\right] \cdot 5$$

$$= 5 \sum_{i=1}^{y} 1 = 5 \cdot y = 5 \cdot \min\{x, y\}$$

5/6

**e.** $S=\{1,2,\dots,N\}$ ②

$f(x,y)=\max\{x,y\}$

נניח בשלילה כי $f$ היא פונקציה kernel. אז קיימת מטריצת גראם חיובית שלם קבוצה סופית של $S$ המטריצה
חיובית
ריבועית, ובפרט עבור $S'=\{1,2\}$

נניח כי $x=1$, $y=2$, אז לפי ההגדרה מתקיים
כי קיימת מטריצת גראם אשר מוגדרת כך:

$$G=\begin{bmatrix}\max(1,1) & \max(1,2)\\ \max(1,2) & \max(2,2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}$$

נחפש ערכים עצמיים עבור $G$:

$$G-\lambda I=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & 2-\lambda\end{bmatrix}$$

$$\det\begin{bmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & 2-\lambda\end{bmatrix}=(1-\lambda)(2-\lambda)-2\cdot 2=(1-\lambda)(2-\lambda)-4$$

$$(1-\lambda)(2-\lambda)-4=0\rightarrow 2-\lambda-2\lambda+\lambda^2-4=0\rightarrow\lambda^2-3\lambda-2=0$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda_1=\frac{3+\sqrt{17}}{2}>0\qquad\lambda_2=\frac{3-\sqrt{17}}{2}<0$$

$$\Downarrow$$

המטריצה $G$ לא ריבועית חיובית - סתירה להנחה
ולכן ההפך הוא הנכון.
$f$ לא פונקציית kernel.

**a.** $\Phi(x) = (x_1^3, x_2^3, \sqrt{3}\, x_1^2 x_2, \sqrt{3}\, x_1 x_2^2, 2\sqrt{3}\, x_1^2, 2\sqrt{3}\, x_2^2,$ 3
$2\sqrt{6}\, x_1 x_2, 4\sqrt{3}\, x_1, 4\sqrt{3}\, x_2, 8)$

$$\begin{aligned}
\Phi(x,y) = {} & x_1^3 y_1^3 + x_2^3 y_2^3 + \\
& + 3x_1^2 x_2 y_1^2 y_2 + 3x_1 x_2^2 y_1 y_2^2 \\
& + 12 x_1^2 y_1^2 + 12 x_2^2 y_2^2 \\
& + 24 x_1 x_2 y_1 y_2 \\
& + 48 x_1 y_1 + 48 x_2 y_2 \\
& + 64 \\
= {} & (x_1 y_1 + x_2 y_2)^3 + 12(x_1^2 y_1^2 + 2x_1 y_1 x_2 y_2 + x_2^2 y_2^2) \\
& + 48(x_1 y_1 + x_2 y_2) + 64 \\
= {} & (x \cdot y)^3 + 12(x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 + 48(x \cdot y) + 64 \\
= {} & (x \cdot y)^3 + 12(x \cdot y)^2 + 48(x \cdot y) + 64
\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$= (x \cdot y + 4)^3 \longrightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} K = (x \cdot y + 4)^3 \\ K = K_1 = (x \cdot y + 4)^3 \end{array}$$

**b.** $\Phi(x) = (\sqrt{10}\, x_1^2, \sqrt{10}\, x_2^2, \sqrt{20}\, x_1 x_2, \sqrt{8}\, x_1, \sqrt{8}\, x_2, \sqrt{2})$

$$\begin{aligned}
\Phi(x,y) = {} & 10 x_1^2 y_1^2 + 10 x_2^2 y_2^2 + 20 x_1 y_1 x_2 y_2 \\
& + 8 x_1 y_1 + 8 x_2 y_2 + 2 \\
= {} & 10 (x_1^2 y_1^2 + 2 x_1 y_1 x_2 y_2 + x_2^2 y_2^2) \\
& + 8 (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \tfrac{1}{4}) \\
= {} & 10 \cdot (x \cdot y)^2 + 8 (x \cdot y + \tfrac{1}{4})
\end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$\alpha = 10 \qquad \beta = 8$

$K = 10 K_1 + 8 K_2$

$K = 10 (x \cdot y)^2 + 8 (x \cdot y + \frac{1}{4})$