

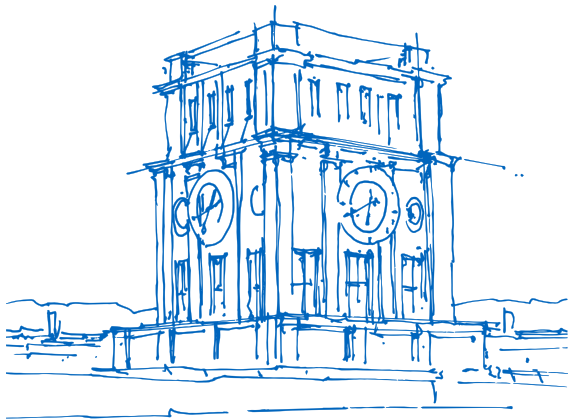
# Übung 12: Optimierung

## Einführung in die Rechnerarchitektur

**Michael Morandell**

School of Computation, Information and Technology  
Technische Universität München

20. – 26. Januar 2025



Montags:

<https://zulip.in.tum.de/#narrow/stream/2668-ERA-Tutorium—Mo-1000-4>



Donnerstags:

<https://zulip.in.tum.de/#narrow/stream/2657-ERA-Tutorium—Do-1200-2>



Website: <https://home.in.tum.de/momi/era/>

Keine Garantie für die Richtigkeit der Tutorfolien.  
Bei Unklarheiten/Unstimmigkeiten haben VL/ZÜ-Folien recht!

- Quiz
- Wiederholung
- Tutorblatt
  - ☐ Sieben-Segment-Anzeige (KV-Maps)
  - ☐ Logik-Hazards
  - ☐ BDD Reduktion
  - ☐ Konstruktion von BDDs

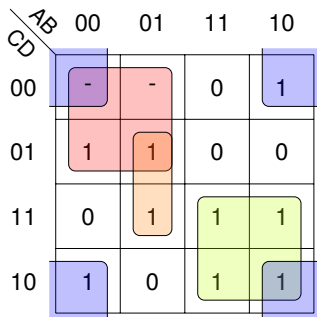
- Realisierung: boolesche Funktion  $\rightarrow$  Schaltung
- naive Synthese (direkte Übertragung der Wahrheitstabelle) nicht skalierbar
- verschiedene Verfahren zur Optimierung und Reduktion von Funktionen auf ihr Minimalpolynom

## Minimalpolynom

Ein Polynom  $p$  ist Minimalpolynom einer booleschen Funktion  $f$ , falls  $\psi(p) \equiv f$  (d.h.  $p$  eine Formel für  $f$  ist) und es keine weitere Vereinfachungen gibt.

# Karnaugh-Veitch-Diagramme<sup>1</sup>

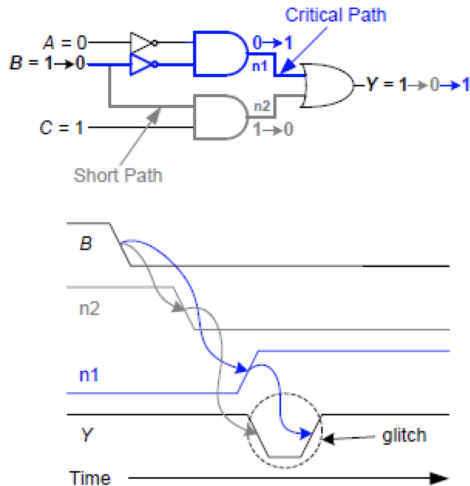
- rechteckiges Schema, in dem alle Literalkombinationen (positiv und negativ) vorkommen
- nebeneinander liegende Zeilen/Spalten dürfen sich immer nur in 1 Bit unterscheiden (Gray-Code)!
- Zusammenfassen von Einsen in  $2^n$ -Blöcken. Don't Care können als 0 oder 1 gewählt werden.
- Jedes maximal große Päckchen steht für einen Primimplikanten der Funktion → alle Päckchen zusammen ergeben ein Minimalpolynom



$$f = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{d} + ac + \bar{a}bd$$

<sup>1</sup>Oft auch als K-Maps bezeichnet

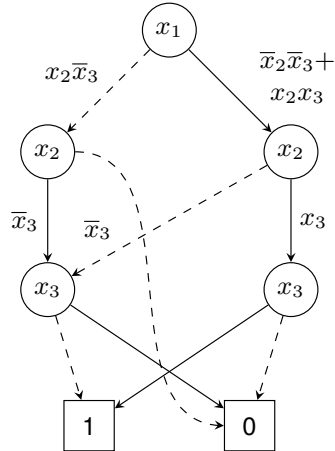
- Änderung eines Eingangs ändert kurzzeitig Ausgang, obwohl nach den Regeln der Booleschen Algebra keine Änderung auftritt
- Kann bei sequenziellen Schaltungen problematisch werden (z.B. Oszillation)
- Beispiel
  - $A=0, B=1, C=1 \rightarrow Y = 1$
  - $A=0, B=0, C=1 \rightarrow Y = 1$



# Binary Decision Diagrams (BDDs)

- Darstellung einer booleschen Funktion als gerichteter azyklischer Graph (DAG)
- Knoten repräsentieren Teilfunktionen, 2 ausgehende Kanten: 0, 1
- Aufbau bspw. mittels Shannon-Zerlegung:  
 $f(x_0, x_1) \rightarrow f_{x_0=0}(x_1), f_{x_0=1}(x_1)$
- ROBDDs sind kanonisch (eindeutig)!

$$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + x_1 x_2 x_3$$

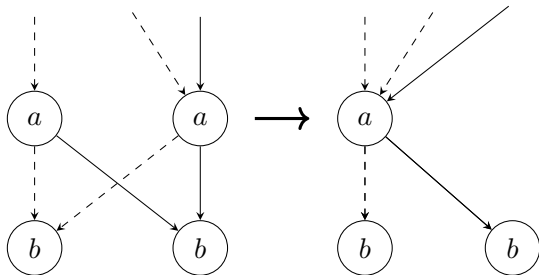


Variablenordnung:  $x_1 \prec x_2 \prec x_3$



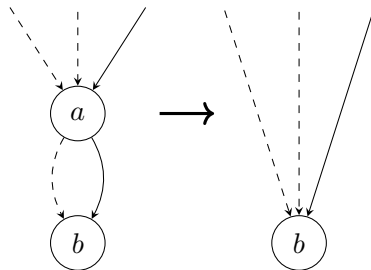
## I-Reduktion

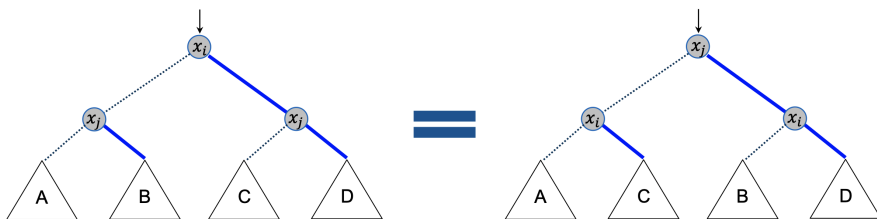
Zusammenführung isomorpher Knoten



## S-Reduktion

Überflüssige Knoten entfernen





- Vertauschen nur durch Ändern der Knotenanzahl und Umordnen der Kanten möglich
- Neue Reduktionsmöglichkeiten durch Vertauschen
- Finden einer guten Variablenordnung NP vollständig → Heuristische Lösungen



<https://tinyurl.com/era-tut>

Ein Teil der Folien stammt aus dem Foliensatz von Niklas Ladurner. Vielen Dank dafür!