School of Computation, Information and Technology
Technische Universität München

Lehrstuhl für
Rechnerarchitektur & Parallele Systeme
Prof. Dr. Martin Schulz
Dominic Prinz
Jakob Schäffeler

Lehrstuhl für
Design Automation
Prof. Dr.-Ing. Robert Wille
Stefan Engels

Einführung in die Rechnerarchitektur

Wintersemester 2024/2025

Übungsblatt 1: Zahlensysteme 21.10.2024 – 25.10.2024

1 Zahlensysteme

In der Informatik werden Zahlen in der Regel im sog. Stellenwertsystem dargestellt. Der Wert einer Zahl hängt dabei von der Position der Ziffern ab:

$$W = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot B^i, \tag{1}$$

wobei B die Basis, n die Anzahl der Stellen und a_i die i-te Ziffer aus dem Ziffernbereich von 0 bis $B - 1$ ist. Im Alltag ist die Basis meist 10 (Dezimalsystem). Weitere häufig verwendete Stellenwertsysteme sind das Dualsystem (Binärsystem, $B = 2$), das Oktalsystem ($B = 8$) und das Hexadezimalsystem ($B = 16$).

a) Überlegen Sie sich einen Algorithmus, der beliebig lange Zahlen vom Dezimalsystem in das Binärsystem umwandelt. Testen Sie den Algorithmus mit den Zahlen: $(42)_{10}$, $(100)_{10}$ und $(1.000)_{10}$.

42 / 2 = 21 0
21 / 2 = 10 1
10 / 2 = 5 0
5 / 2 = 2 1
2 / 2 = 1 0
1 / 2 = 0 1

$(101010)_2$

42
10
2

$2^4 = 16$
$2^5 = 32$
$2^3 = 8$

$2^5 + 2^3 + 2^1$

1 0 1 0 1 0 2^0

b) Überlegen Sie sich einen Algorithmus, der beliebig lange Zahlen vom Binärsystem in das Dezimalsystem umwandelt. Testen Sie den Algorithmus mit den Zahlen: $(1.0101)_2$ und $(1110.0011)_2$.

$$(1.0101) = 1 \cdot 2^4 + \cancel{0 \cdot 2^3} + 1 \cdot 2^2 + \cancel{0 \cdot 2^1} + 1 \cdot 2^0$$
$$= 16 + 4 + 1 = (21)_{10}$$

c) Lösen Sie mit Hilfe von „Tricks“ folgende Umwandlungen:

1.0000.0000

- $(1111.1111)_2 = (?)_{10}$ $\quad 2^8 - 1 = 256 - 1 = (255)_{10}$
- $(1.0000.0000)_2 = (?)_{10}$ $\quad 2^8 = (256)_{10}$
- $(65)_{10} = (?)_2$ $\quad (64)_{10} + (1)_{10} = (100.0000)_2 + (1)_1 = (100.0001)_2$
- $(1.0000.1001.0010)_2 = (4242)_{10}$
$(10.0001.0010.0100)_2 = (?)_{10}$

$(4242)_{10} \cdot 2 = (8484)_{10}$

d) Wandeln Sie die folgenden Zahlen vom Binär- ins Hexadezimalsystem bzw. umgekehrt um:

- $(1111.1111)_2 =$ `0x`? 0xFF
- $(1010.1100.0011)_2 =$ `0x`? AC3
- `0x1234` $= (?)_2$ $(0001.0010.0011.0100)_2$
- `0xC0FFEE` $= (?)_2$ $(1100.0000.1111.1111.1110.1110)_2$

e) (Optional) Schreiben Sie auf die Vorderseite eines Stück Papiers eine Umwandlungsaufgabe (ähnlich zu 1 a-d) und ihre Lösung auf die Rückseite. Tauschen Sie diese Aufgabe mit einem Ihrer Kommilitonen. Überprüfen Sie die Lösung!

2 Arithmetik und negative Zahlen

a) Die vier Grundrechenarten Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division verhalten sich im Binärsystem wie im Dezimalsystem: die einzelnen Ziffern werden stellenweise verarbeitet. Lösen Sie die folgenden Rechenaufgaben (alle Zahlen sind positiv):

- $(10.1010)_2 + (11.0011)_2 = (?)_2$
- $(11.0011)_2 - (10.1010)_2 = (?)_2$
- $(10.1010)_2 \cdot (11)_2 = (?)_2$
- $(01.1100)_2 : (0100)_2 = (?)_2$

10.1010 +
11.0011
1 0 0 0 1 0 0
~~1~~01.1101

11.0011 −
10.1010
1
001001

10.1010 · 11
101010
101010
111.1110

01.1100 : 0100 = 111
−0100
0011
0110
−0100
0010
0100
−0100
000

b) Bisher haben wir lediglich positive Zahlen betrachtet. Wie könnten negative Zahlen im Binärsystem dargestellt werden? Vergleichen Sie anhand der Zahl $-(42)_{10}$ die Vor- und Nachteile der Darstellungsarten. Betrachten Sie dazu 8 binäre Stellen.

$(42)_{10} = 0010.1010$

Art	$(-42)_{10}$	Vorteile / Nachteile
Sign-bit	1010.1010	− Doppelte Null 0000 = +0 1000 = −0 + gut ablesbar − neue Arithmetik
Einerkomplement	1101.0101	− Doppelte Null 0000 = +0 1111 = −0 − neue Arithmetik
Zweierkomplement	1101.0110	+ kein doppelte Null + Arithmetik wiederverwenden − Zahl nicht einfach ablesen

c) Berechnen Sie den Wert des Terms $(0011.0011)_2 - (0010.1010)_2 = (?)_2$ (bekannt aus Aufgabe 2) indem Sie den Subtrahenden negieren und anschließend auf den Minuenden aufaddieren. Verwenden Sie das Zweierkomplement.

* 0010.1010
1-K 1101.0101
2-K 1101.0110

0011.0011 +
1101.0110
1 1 1 1 0 1 1
~~1~~ 0000.1001

d) Lösen Sie die folgenden Aufgaben, indem Sie die Zahlen zuerst ins Binärsystem mit jeweils 5 binären Stellen umwandeln und dann das Ergebnis im Binärsystem ausrechen. Benutzen Sie das Zweierkomplement. *Hinweis: Sie düfen davon ausgehen, dass die Ergebnisse wieder mit 5 binären Stellen darstellbar sind*

- $(-1) - 1$
- $(-2) \cdot (-3)$
- $(-8) : 2$

(−1): 00001
1-Kmp: 11110
2-Kmp: 11111

(−1) − 1 = (−1) + (−1) =
11111 +
11111
1 1 1 1 1
~~1~~.1110

(−2): 00010
1-Kmp: 11101
2-Kmp: 11110

(−3): 00011
1-Kmp: 11100
2-Kmp: 11101

11110 · 11101
11110
11110
11110
00000
11110
00110

(−8) : 2

11000 : 00010 = 01100

01000 : 00010 = 00100
− 10
000
− 000
0000
000
0

11011
$(11100)_2$
$= -4_{10}$

3 Zahlenbereiche

Welcher Zahlenbereich kann mit den folgenden Binärformaten dargestellt werden?

- 8-Bit vorzeichenlos (unsigned char)

0 bis $\underbrace{2^8 - 1}_{255}$

- 8-Bit vorzeichenbehaftet im Zweierkomplement (char)

-2^7 bis $2^7 - 1$ $\qquad -2^{(n-1)}$

- 16-Bit vorzeichenlos (unsigned short)

0 bis $\underbrace{2^{16} - 1}_{65\,535}$

- 32-Bit vorzeichenbehaftet im Zweierkomplement (int)

-2^{31} bis $2^{31} - 1$

4 Binärarithmetik (Hausaufgabe 01)

4.1 Generelles

Es gibt in ERA lediglich sog. *public-tests*, d.h. Sie sehen direkt, ob Ihre Abgabe richtig ist. Sie haben außerdem bis zum zuvor genannten Zeitpunkt unbegrenzt viele Versuche.

4.2 Aufgabe

Bearbeitung und Abgabe auf `https://artemis.in.tum.de/courses/401` bis **Sonntag, den 27.10.2024, 23:59 Uhr**.