School of Computation, Information and Technology
Technische Universität München

Lehrstuhl für
Rechnerarchitektur & Parallele Systeme
Prof. Dr. Martin Schulz
Dominic Prinz
Jakob Schäffeler

Lehrstuhl für
Design Automation
Prof. Dr.-Ing. Robert Wille
Stefan Engels

Einführung in die Rechnerarchitektur

Wintersemester 2024/2025

Übungsblatt 1: Zahlensysteme 21.10.2024 – 25.10.2024

1 Zahlensysteme

In der Informatik werden Zahlen in der Regel im sog. Stellenwertsystem dargestellt. Der Wert einer Zahl hängt dabei von der Position der Ziffern ab:

$$W = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot B^i, \tag{1}$$

wobei B die Basis, n die Anzahl der Stellen und a_i die i-te Ziffer aus dem Ziffernbereich von 0 bis $B - 1$ ist. Im Alltag ist die Basis meist 10 (Dezimalsystem). Weitere häufig verwendete Stellenwertsysteme sind das Dualsystem (Binärsystem, $B = 2$), das Oktalsystem ($B = 8$) und das Hexadezimalsystem ($B = 16$).

a) Überlegen Sie sich einen Algorithmus, der beliebig lange Zahlen vom Dezimalsystem in das Binärsystem umwandelt. Testen Sie den Algorithmus mit den Zahlen: $(42)_{10}$, $(100)_{10}$ und $(1.000)_{10}$.

42
10
2
0

$2^4 = 16$
$2^5 = 32$
$2^6 = 64$

$2^5 + 2^3 + 2^1$
$2^2 \; 2^1 \; 2^0$
10.1010

42/2	=	21	0
21/2	=	10	1
10/2	=	5	0
5/2	=	2	1
2/2	=	1	0
1/2	=	0	1

10.10 10

$(100)_{10} = (110.0100)_2$

b) Überlegen Sie sich einen Algorithmus, der beliebig lange Zahlen vom Binärsystem in das Dezimalsystem umwandelt. Testen Sie den Algorithmus mit den Zahlen: $(1.0101)_2$ und $(1110.0011)_2$.

$(1.0101)_2 = 1 \cdot 2^0 + \cancel{0 \cdot 2^1} + 1 \cdot 2^2 + \cancel{0 \cdot 2^3} + 1 \cdot 2^4$

$1 + 4 + 16 = (21)_{10}$

c) Lösen Sie mit Hilfe von „Tricks“ folgende Umwandlungen:

- $(1111.1111)_2 = (?)_{10}$ $(1.0000.0000) = 2^8 - 1 = (255)_{10}$
- $(1.0000.0000)_2 = (?)_{10}$ $2^8 = (256)_{10}$
- $(65)_{10} = (?)_2$ $2^6 + 2^0$ $(100.0001)_2$
- $(1.0000.1001.0010)_2 = (4242)_{10}$
  $(10.0001.0010.0100)_2 = (?)_{10}$ $(8484)_{10}$

d) Wandeln Sie die folgenden Zahlen vom Binär- ins Hexadezimalsystem bzw. umgekehrt um:

F F

- $(1111.1111)_2 =$ `0x?` 0xFF
- $(1010.1100.0011)_2 =$ `0x?` AC3
- `0x1234` $= (?)_2$ 0001.0010.0011.0100
- `0xC0FFEE` $= (?)_2$ $(1100.0000.1111.1111.1110.1110)_2$

1	1
1	1
9	9
10	A
15	F

e) (Optional) Schreiben Sie auf die Vorderseite eines Stück Papiers eine Umwandlungsaufgabe (ähnlich zu 1 a-d) und ihre Lösung auf die Rückseite. Tauschen Sie diese Aufgabe mit einem Ihrer Kommilitonen. Überprüfen Sie die Lösung!

2 Arithmetik und negative Zahlen

a) Die vier Grundrechenarten Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division verhalten sich im Binärsystem wie im Dezimalsystem: die einzelnen Ziffern werden stellenweise verarbeitet. Lösen Sie die folgenden Rechenaufgaben (alle Zahlen sind positiv):

- $(10.1010)_2 + (11.0011)_2 = (?)_2$
- $(11.0011)_2 - (10.1010)_2 = (?)_2$
- $(10.1010)_2 \cdot (11)_2 = (?)_2$
- $(01.1100)_2 : (0100)_2 = (?)_2$

```
  10.1010 +
  11.0011
  1    1
---------
 101.1101
```

```
 11.0011 -
 10.1010
  1
--------
 00.1001
```

```
 10.1010 - 11
-------------
 10.1010
  10.1010
-------------
 111.1110
```

```
  01.1100 : 0100 = (111)_2
 -0100
 -----
   0011
    0110
  - 0100
  ------
    0010
     0100
     0100
    -----
      000
```

b) Bisher haben wir lediglich positive Zahlen betrachtet. Wie könnten negative Zahlen im Binärsystem dargestellt werden? Vergleichen Sie anhand der Zahl $-(42)_{10}$ die Vor- und Nachteile der Darstellungsarten. Betrachten Sie dazu 8 binäre Stellen.

$(42)_{10} = 0010.1010$

Art	Beispiel	Vorteile / Nachteile
Vorzeichenbit	1010.1010	+ gut ablesbar / realisierbar − neue Arithmetik − Doppelte Null 0000 = 0 1000 = −0 $-(2)^{(n-1)}-1$ bis $(2)^{(n-1)}-1$
Einerkomplement	1101.0101	− Doppelte 0 0000 = 0, 1111 = −0 − neue Arithmetik
Zweierkomplement	1101.0110	+ 2^{n-1} bis $2^{n-1}-1$ + Arithmetik wiederverwenden − Zahl nicht direkt ablesbar (aber sign bit erkennbar)

c) Berechnen Sie den Wert des Terms $(0011.0011)_2 - (0010.1010)_2 = (?)_2$ (bekannt aus Aufgabe 2) indem Sie den Subtrahenden negieren und anschließend auf den Minuenden aufaddieren. Verwenden Sie das Zweierkomplement.

1 2

2 0010.1010
1-Komp. 1101.0101
2-Komp. $(1101.0110)_2$

0011.0011 +
1101.0110
1 1 1 1 1
~~1~~ 0000 1001

d) Lösen Sie die folgenden Aufgaben, indem Sie die Zahlen zuerst ins Binärsystem mit jeweils 5 binären Stellen umwandeln und dann das Ergebnis im Binärsystem ausrechen. Benutzen Sie das Zweierkomplement. *Hinweis: Sie düfen davon ausgehen, dass die Ergebnisse wieder mit 5 binären Stellen darstellbar sind*

- $(-1) - 1$
- $(-2) \cdot (-3)$
- $(-8) : 2$

(-1): 00001
1 Komp 11110
2 Komp 11111

(-1) − 1 = (-1) + (-1) = 11111 +
11111
1 1 1 1
11 1110

(-2): 00010
11101
11110

(-3): 00011
11100
11101

11110 · 11101
11110
11110
11110
00000
11110
1 1
00110

−8 : 2

11000 : 00010 = 01100

01000 : 00010 = 00100
010
0

11011
$(11100)_2$

$= -4_{10}$

3 Zahlenbereiche

Welcher Zahlenbereich kann mit den folgenden Binärformaten dargestellt werden?

- 8-Bit vorzeichenlos (unsigned char)

0 bis $\underbrace{2^8 - 1}_{255}$

- 8-Bit vorzeichenbehaftet im Zweierkomplement (char)

-2^7 bis $2^7 - 1$

- 16-Bit vorzeichenlos (unsigned short)

0 bis $\underbrace{2^{16} - 1}_{65535}$

- 32-Bit vorzeichenbehaftet im Zweierkomplement (int)

-2^{31} bis $2^{31} - 1$

4 Binärarithmetik (Hausaufgabe 01)

4.1 Generelles

Es gibt in ERA lediglich sog. *public-tests*, d.h. Sie sehen direkt, ob Ihre Abgabe richtig ist. Sie haben außerdem bis zum zuvor genannten Zeitpunkt unbegrenzt viele Versuche.

4.2 Aufgabe

Bearbeitung und Abgabe auf `https://artemis.in.tum.de/courses/401` bis **Sonntag, den 27.10.2024, 23:59 Uhr**.