

2.1 Formulation vers l'apprentissage ANN

Notre problème consiste à trouver une fonction pricing $f(.)$. Cette fonction peut être trouvée en utilisant un réseau de neurones avec au moins un hidden Layer, comme le MLP. Ceci résulte du théorème universel d'approximation (la fonction f étant supposée continue).

Les paramètres économiques qui servent au calcul de f sont :

- S_t : prix de l'actif sous-jacent
- K : prix d'exercice (Strike)
- $T-t$: temps d'expiration
- La volatilité et le taux d'intérêt ne seront pas pris en compte dans le modèle MLP car il s'agit d'une approche non paramétrée. En effet, ces paramètres seront calculés implicitement par optimisation au sein du modèle.

En notant C_t le prix de notre option estimé par le modèle MLP, on peut donc écrire :

$$C_t = f(S_t, K, T - t) \quad (*)$$

La formule de Black and Scholes nous donne le prix de l'option C_t sous la forme

$$C_t = S_t N(d_1) - K \exp(-rT) N(d_2)$$

Cette formule montre que le prix d'une option est homogène d'ordre 1 en S_t et en K .

Alors, il en sera de même pour $f(.)$ dans le modèle MLP.

En divisant (*) par K , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{C_t}{K} &= f\left(\frac{S_t}{K}, 1, T - t\right) \\ &= f\left(\frac{S_t}{K}, T - t\right) \end{aligned}$$

On a donc réduit notre problème à une fonction de pricing de deux variables, à savoir $\frac{S_t}{K}$ et $T - t$

2.2 Modèle de volatilité implicite

1. On prend par exemple une durée de 6 ou 2 mois, on évalue alors l'écart type correspondant aux prix de l'option comme étant la volatilité. La trajectoire du cours de marché alors correspondante à cette volatilité. Si on a 3 ans, on aura ainsi 6 trajectoires.

2. Pour générer des proxis de la volatilité implicite, il convient de prendre des durées pas trop longues. Pour chaque trajectoire à disposition, on évalue la volatilité de chaque trajectoire comme étant :

$$\sigma = \text{ecart type sur 60 jours} / \sqrt{60}$$

3. Solution 1 : prendre la moyenne des volatilités

Solution 2 : prendre juste la volatilité correspondant à la trajectoire la plus récente

4. Pour générer le prix de calls, il suffit d'utiliser la formule de Black and Scholes avec la volatilité implicite précédemment évaluée.

5. Voir le fichier jupynb joint.