SMD-Abgabe

1. Übungsblatt

Lars Kolk
lars.kolk@tu-dortmund.de

Julia Sobolewski
julia.sobolewski@tu-dortmund.de

Jannine Salewski
jannine.salewski@tu-dortmund.de

Abgabe: 25.10.2018

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabe 1

1.1 Teilaufgaben a und b)

Für die Funktionen

$$f(x) = \left(x^3 + \frac{1}{3}\right) - \left(x^3 - \frac{1}{3}\right) \tag{1}$$

$$g(x) = \frac{(3 + x^3) - (3 - x^3)}{x^3} \tag{2}$$

sollte empirisch ein Bereich bestimmt werden, in denen sie um nicht mehr als 1% abweichen. Dazu wurde die Funktion "check" in Aufgabe01.py geschrieben. Diese nimmt, unter Anderem, einen Anfangs- und Grenzwert und überprüft, ab welchem x die Funktionen um 1% abweichen. Dabei ergaben sich folgende Ausgaben:

Ausgabe des Programms: für (1)

Fuer ein x von 0 bis 180000 mit 0 Dezimalstellen ergeben sich folgende Abweichungen:
x=41286 f(x)=0.65625, Fehler : 1.5625%

Zusaetzlich ergibt sich als Nullstelle:
x=165141f(x)=0.0, Fehler : 100.0%

Ausgabe des Programms: für (2)

Fuer ein x von 1 bis 0 mit 8 Dezimalstellen ergeben sich folgende Abweichungen:
x=4.013000000002709e-05 f(x)=0.6734243528892833, Fehler : 1.0136529333924837 %

Zusaetzlich ergibt sich als Nullstelle:
x=8.730000000012339e-06f(x)=0.0, Fehler : 100.0 %

Die zu untersuchenden Bereiche wurden bewusst so gewählt.

- der Term $x^3 \pm \frac{1}{3}$ lässt Abweichungen bei großen x vermuten, da dies bei großen x Rundungsfehler erzeugt. →große ganzzahlige x überprüfen.
- der Term $\frac{1}{x^3}$ lässt Abweichungen nahe 0 vermuten, da so durch kleine Zahlen dividiert wird und dies numerisch nicht stabil ist →kleine x mit möglichst vielen Dezimalstellen überprüfen.

Daher weist (1) für den Bereich von $0 < |x| < 41000$ eine Abweichung von $< 1\%$ auf. (2) ist dagegen für den Bereich von $5 \cdot 10^{-5} < |x| < \infty$ genau.
Wobei strenggenommen ∞ nicht die obere Grenze ist, da es irgendwann zu "NaN"-Fehlern kommt.

1.2 Teilaufgabe c

Die Plots sind in Abbildung 1 und 2 dargestellt. Diese bestätigen die erwartete Tendenz, die in 1 erläutert wurde, wobei die Abweichung für (2) in 2 unter 10% schlecht zu erkennen sind.

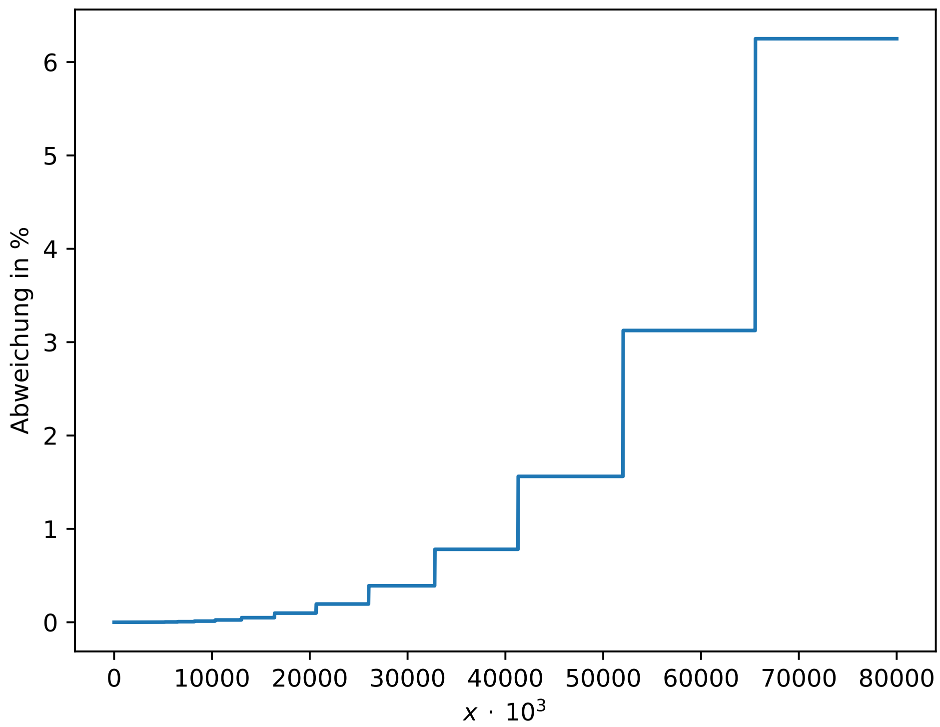

Abbildung 1: Halblogarithmische Darstellung der Abweichung der Funktion (1)

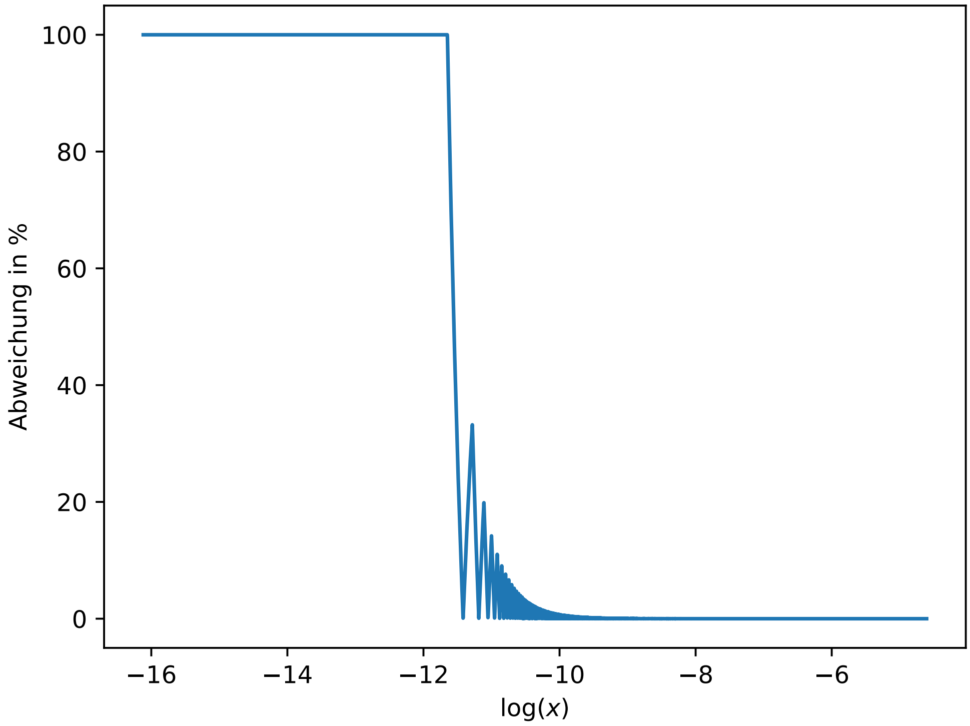

Abbildung 2: Darstellung der Abweichung der Funktion (2)

2 Aufgabe 2

2.1 Teilaufgabe a

Die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\alpha^2}{s} \cdot \left(\frac{2 + \sin^2\theta}{1 - \beta^2 \cdot \cos^2\theta} \right) \tag{3}$$

mit

$$\begin{aligned} s &= (2E_e)^2 \\ \beta &= \sqrt{1 - \gamma^{-2}} \\ \gamma &= \frac{E_e}{m_e} \\ m_e &= 511\,\mathrm{keV} \end{aligned}$$

ist numerisch nicht stabil. Dies lässt sich mit der Folge der vielen Operationen begründen. Außerdem lässt sich in der ausgeschriebenden Form

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E_e^2} \cdot \left(\frac{2 + \sin^2\theta}{1 - \left(1 - \frac{m_e}{E_2}\right) \cdot \cos^2\theta} \right) \tag{4}$$

sehen, dass die Gleichung für den Fall $\theta = n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{Z}$ besonders instabil ist , da $\cos^2 \pm\pi = 1$ gilt und somit im Nenner zwei gleichgroße Zahlen voneinander subtrahiert werden. Zusätzlich findet im Fall $E_e = 50\,\mathrm{GeV}$ eine Division durch eine kleine Zahl statt $\left(\frac{m_e}{E_2}^2 \ll 1\right)$, womit die Gleichung numerisch instabil ist.

2.2 Teilaufgabe b

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} &= \frac{\alpha^2}{s} \cdot \left(\frac{2 + \sin^2\theta}{1 - \beta^2 \cdot \cos^2\theta} \right) && (5)\\
&= \frac{\alpha^2}{s} \cdot \left(\frac{2 + \sin^2\theta}{1 - \beta^2 + \beta^2 \cdot \sin^2\theta} \right) && (6)\\
&= \frac{\alpha^2}{s} \cdot \left(\frac{2 + \sin^2\theta}{\gamma^{-2} + (1 - \gamma^{-2}) \cdot \sin^2\theta} \right) && (7)\\
&= \frac{\alpha^2}{s} \cdot \left(\frac{2 + \sin^2\theta}{\gamma^{-2} \cdot (1 - \sin^2\theta) + \sin^2\theta} \right) && (8)\\
&= \frac{\alpha^2}{s} \cdot \left(\frac{2 + \sin^2\theta}{\gamma^{-2} \cdot \cos^2\theta + \sin^2\theta} \right) && (9)\\
& && (10)
\end{aligned}$$

Das Ergebnis ist numerisch stabiler, da die Substraktion zwei gleich großer Zahlen im Nenner aufgrund der Addition von zwei quadratischen Funktionen nicht mehr auftreten kann.

2.3 Teilaufgabe c

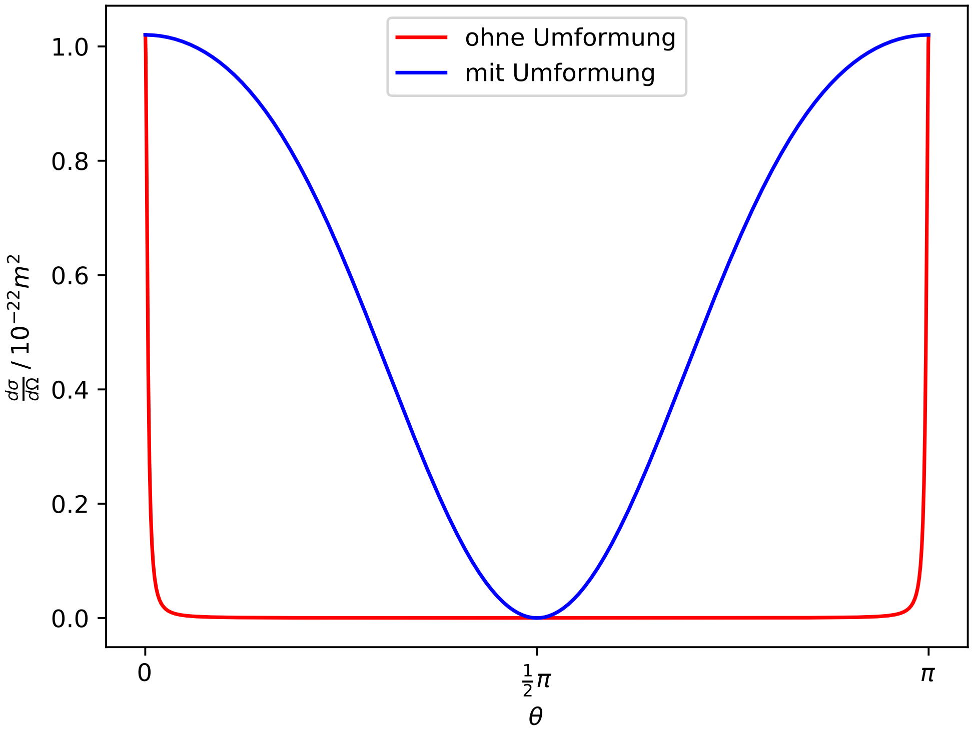

Abbildung 3: Darstellung des differentiellen Wirkungsquerschnitts, mit und ohne die Umformung aus 2.2

Wie in 3 zu sehen ist, hebt sich die Kurve, die mit der Gleichung aus (9) berechnet wurde, deutlich von der anderen ab. Statt einem Plateau ist nun eine (grob) parabelförmige Funktion zu sehen, woraus sich schließen lässt, dass dass die neue Funktion (9) numerisch stabiler ist.

2.4 Teilaufgabe d

Die Konditionszahl ist definiert durch

$$k = \left| \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x \right| \tag{11}$$

$$f(\theta) = \frac{\alpha^2}{s} \cdot \left(\frac{2 + \sin^2\theta}{1 - \beta^2 \cdot \cos^2\theta} \right) \tag{12}$$

$$f'(\theta) = -\frac{a^2}{s} \cdot \frac{\cos\theta \sin\theta \cdot \left(3b^2 - 1\right)}{(b^2 \cos^2\theta - 1)^2} \tag{13}$$

$$\rightarrow k = \frac{|\left(3b^2 - 1\right)\theta \cdot \sin(2\theta)|}{|(\sin^2\theta + 2) \cdot (\beta^2 \cdot \cos^2\theta - 1)|} \, | \tag{14}$$

2.5 Teilaufgabe d

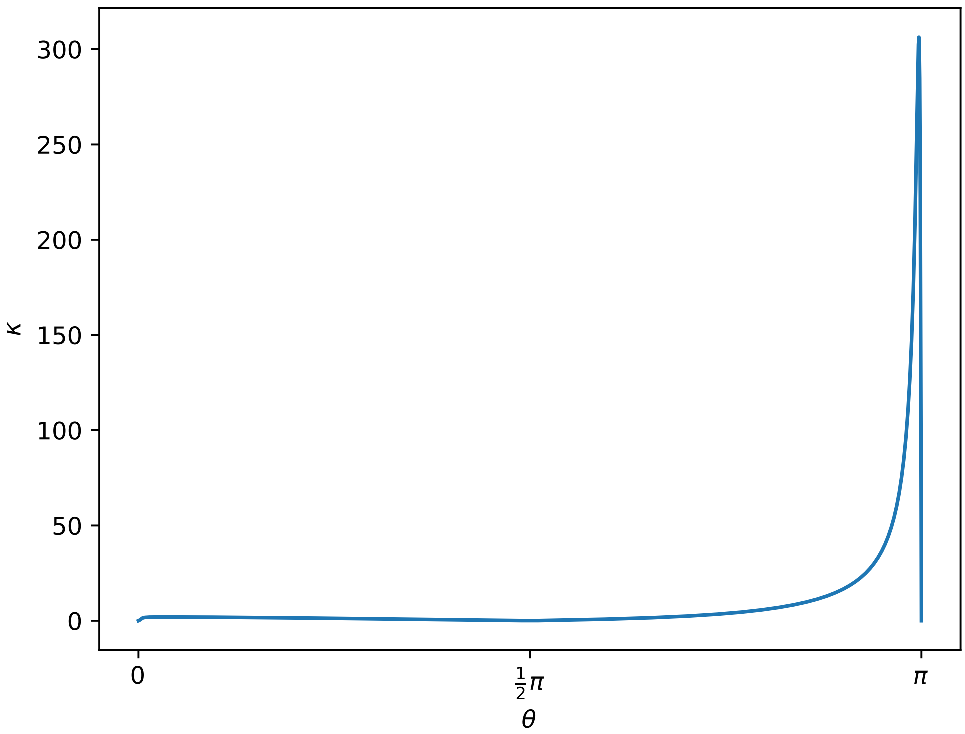

Abbildung 4: Darstellung der Konditionszahl k aus 2.4

Wie in Abbildung 4 zu sehen ist, ist das Problem gut für $0 < x < \pi$ konditioniert.