3. Übungsblatt zur Vorlesung **WS 2018/2019**
Statistische Methoden der Datenanalyse **Prof. W. Rhode**
Abgabe: 08.11.2018 23:59

Zeit	Raum	Abgabe im Moodle; Mails mit Betreff: [SMD1819]
Di. 10-12	CP-03-150	tobias.hoinka@udo.edu, felix.geyer@udo.edu und jan.soedingrekso@udo.edu
Di. 16-18	CP-03-150	simone.mender@udo.edu und alicia.fattorini@udo.edu
Mi. 10-12	CP-03-150	mirco.huennefeld@udo.edu und kevin3.schmidt@udo.edu

Aufgabe 8: *Erzeugung der Planck-Verteilung mittels importance sampling* **12 P.**

Für die Simulation eines Schwarzen Körpers sollen Photonen erzeugt werden, deren Frequenzen x der Verteilung

$$f(x) = N\frac{x^3}{e^x - 1}$$

folgen, wobei N die Normierungskonstante ist. Das Integral der Planck-Verteilung $\int\limits_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1} = \frac{\pi^4}{15}$ kann als gegeben angenommen werden und muss nicht neu berechnet werden.

a) Erzeugen Sie zunächst 10^5 Zufallszahlen gemäß der Verteilung $f(x)$ indem Sie die Rückweisungsmethode verwenden. Die obere Grenze für x als cutoff soll auf $x_\text{cut} = 20$ gesetzt werden. Als obere Grenze für y soll das Maximum y_max der Verteilung gewählt werden.

b) Erzeugen Sie nun abermals 10^5 Zufallszahlen gemäß der Verteilung $f(x)$ mit Hilfe der Rückweisungsmethode. Dieses Mal soll die Fläche aus welcher die Zufallszahlen gezogen werden jedoch sinnvoll eingegrenzt werden. Die Fläche wird durch eine gestückelte Majorante beschrieben. Erläutern Sie, warum mit dieser gestückelten Majorantenfunktion die Transformationsmethode (inversion sampling) durchführbar ist.

Für die gestückelte Majorantenfunktion wird für $x < x_s$ wie in Aufgabenteil a) eine konstante Funktion $f(x) = y_\text{max}$ angenommen. Bei größeren $x \geq x_s$ wird ein exponentieller Abfall angenommen. Wegen des x^3 Terms wird im Zähler ein etwas flacherer Abfall von $\exp(x^{0.9})$ gewählt. Der Schnittpunkt der beiden Majoranten wird durch x_s beschrieben.

$$g(x) = \begin{cases} y_\text{max} & x \leq x_s \\ 200Nx^{-0.1}\exp(-x^{0.9}) & x > x_s \end{cases}$$

Der Vorfaktor $200Nx^{-0.1}$ ermöglicht ein analytisches Integrieren.

c) Vergleichen Sie nun die Anzahl der verworfenen Zufallszahlen und die Laufzeiten der beiden Methoden und stellen Sie die resultierenden Histogramme aus beiden Methoden, sowie die Theoriekurve graphisch dar.

Tipp: Sowohl das Maximum der Planck-Verteilung als auch der Schnittpunkt der beiden Majoranten ist nicht analytisch bestimmbar. Diese Punkte sollten zu Beginn des Programms einmal mit einer Routine zur Nullstellensuche (`scipy.optimize.brentq`) bestimmt werden.

Aufgabe 9: *Metropolis-Hastings-Algorithmus* **8 P.**

a) Zeigen Sie analytisch, dass der Metropolis-Hastings-Algorithmus für eine gaußförmige Schrittvorschlags-PDF in den Metropolis-Algorithmus übergeht.

b) Implementieren Sie den Metropolis-Algorithmus mit einer gleichverteilten Schrittvorschlags-PDF im Intervall $(x_i - s, x_i + s)$ wobei x_i die aktuelle Position ist und s die Schrittweite ist.

c) Erzeugen Sie mit ihrer implementierten `sample`-Methode 10^5 Zufallszahlen aus der Planck-Verteilung. Achten Sie darauf, dass die Planck-Verteilung im Intervall $(0; \infty)$ definiert ist. Nutzen Sie `x_0 = 30` als Startwert und `step_size = 2` als Schrittweite. Vergleichen Sie die erzeugten Zufallszahlen mit der zugrundeliegenden Verteilung.

d) Erzeugen Sie einen sogenannten „Trace Plot“, indem Sie die erzeugten Zufallszahlen gegen die Iteration, in der sie erzeugt wurden, auftragen. Interpretieren Sie das Ergebnis.