9. Übungsblatt zur Vorlesung
Statistische Methoden der Datenanalyse
Abgabe: 20.12.2018 23:59

WS 2018/2019
Prof. W. Rhode

Zeit	Raum	Abgabe im Moodle; Mails mit Betreff: [SMD1819]
Di. 10-12	CP-03-150	tobias.hoinka@udo.edu, felix.geyer@udo.edu und jan.soedingrekso@udo.edu
Di. 16-18	CP-03-150	simone.mender@udo.edu und alicia.fattorini@udo.edu
Mi. 10-12	CP-03-150	mirco.huennefeld@udo.edu und kevin3.schmidt@udo.edu

Aufgabe 25: *Regularisierte kleinste Quadrate* **7 P.**

Ein Kollege hat für Sie eine Verteilung gemessen. Diese Verteilung wird Teil einer Monte-Carlo-Simulation. Um besser mit der Verteilung arbeiten zu können, suchen Sie nach einer geeigneten Parametrisierung. Sie wissen, dass sich die Verteilung durch ein Polynom sechsten Grades gut beschreiben lässt. Jedoch ist die Messung stark verrauscht und Ihr Kollege war auch nur in der Lage acht Wertepaare (x, y) zu nehmen.

a) Fitten sie mit der Methode der kleinsten Quadrate ein Polynom sechsten Grades an die Daten der Datei *aufg_a.csv*. Geben Sie die resultierenden Koeffizienten an und zeichnen Sie das gefittete Polynom und die Daten in eine Abbildung ein.

b) Fitten sie mit der Methode der kleinsten Quadrate ein Polynom sechsten Grades an die Daten der Datei *aufg_a.csv* und nutzen Sie dabei zusätzlich die Regularisierung über die zweite Ableitung ($\Gamma = \sqrt{\lambda} CA$). Für die Regularisierungsstärke nutzen sie $\lambda \in (0.1, 0.3, 0.7, 3, 10)$. Geben Sie die resultierenden Koeffizienten an und zeichnen Sie das gefittete Polynome und die Daten in eine Abbildung.

Ihr Kollege macht sich die Mühe und fertigt 50 neue Messungen des Spektrums an.

c) Fitten Sie mit der Methode der kleinsten Quadrate ein Polynom sechsten Grades an die Mittelwerte der Daten aus der Datei *aufg_c.csv*. Gewichten Sie die berechneten Mittelwerte mit dem Fehler des Mittelwerts. Nutzen Sie diese Gewichte beim Fitten. Zeichnen Sie das gefittete Polynom und die gemittelten Daten in eine Abbildung ein.

9. Übungsblatt zur Vorlesung
Statistische Methoden der Datenanalyse
Abgabe: 20.12.2018 23:59

WS 2018/2019
Prof. W. Rhode

Aufgabe 26: *Stichprobenvarianz* **7 P.**

Für alle Berechnungen sind $x_1, \dots, x_n$ die Ausprägungen der quadratisch integrierbaren, paarweise unkorrelierten, reellwertige Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ mit der Varianz σ^2 und dem Mittelwert μ.

a) Testen Sie, ob die Formel (arithmetisches Mittel)

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{1}$$

eine erwartungstreue Schätzfunktion für den Mittelwert μ der Grundgesamtheit ist. Falls die Schätzfunktion nicht erwartungstreu ist, suchen Sie nach einer geeigneten Korrektur.

b) Der Standardfehler des arithmetischen Mittels (1) ist definiert als die Wurzel aus der Varianz von $\bar{X}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{E}\left((\bar{X} - \mu)^2\right) = \mathrm{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \tag{2}$$

gilt.
Tipp: Schauen Sie sich Rechenregeln für das Rechnen mit Varianzen an.

c) Testen Sie, ob die Formel

$$S_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 \tag{3}$$

eine erwartungstreue Schätzfunktion für die Varianz σ^2 der Grundgesamtheit ist. Falls die Schätzfunktion nicht erwartungstreu ist, suchen Sie nach einer geeigneten Korrektur.

d) Meist ist die Varianz σ^2 der Grundgesamtheit unbekannt und es wird der Schätzer (1) für μ genutzt und (3) wird zu:

$$S_1'^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2 . \tag{4}$$

Testen Sie, ob (4) eine erwartungstreue Schätzfunktion für die Varianz σ^2 der Grundgesamtheit ist. Falls die Schätzfunktion nicht erwartungstreu ist, suchen Sie nach einer geeigneten Korrektur.
Tipp: Erweitern Sie den Summanden mit $-\mu + \mu$ und nutzen Sie die gebene Relation (2).

Aufgabe 27: *Maximum-Likelihood* **6 P.**

Eine Zufallsvariable x soll einer Gleichverteilung

$$f(x) = \begin{cases} 1/b & 0 \leq x \leq b \\ 0 & x < 0 \quad \text{oder} \quad x > b \end{cases}$$

folgen.

a) Bestimmen Sie einen Schätzer für den Parameter b mit der Maximum Likelihood Methode aus einer Stichprobe $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

b) Ist diese Schätzung erwartungstreu? Wenn nein, wie kann das in diesem Fall korrigiert werden?