SMD-Abgabe

2. Übungsblatt

Lars Kolk
lars.kolk@tu-dortmund.de

Julia Sobolewski
julia.sobolewski@tu-dortmund.de

Jannine Salewski
jannine.salewski@tu-dortmund.de

Abgabe: 1.11.2018

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabe 5

Im folgenden wir U immer als die vorrausgesetzte Gleichverteilung angesehen. Da die Algorithmen effizient sein sollen, wird im folgenden die Methode der Transformierung der Gleichverteilung genutzt.

1.1 a)

Normierung:

$$\int_{x_{\text{min}}}^{x_{\text{max}}} A\mathrm{d}x = A(x_{\text{max}} - x_{\text{min}}) = 1$$
$$=> A = \frac{1}{x_{\text{max}} - x_{\text{min}}}$$

Trasformation:

$$U = \int_{x_{\text{min}}}^{x} \frac{1}{x_{\text{max}} - x_{\text{min}}} \mathrm{d}x'$$
$$= \left[\frac{1}{x_{\text{max}} - x_{\text{min}}} \cdot x'\right]_{x_{\text{min}}}^{x}$$
$$= \frac{x - x_{\text{min}}}{x_{\text{max}} - x_{\text{min}}}$$

Inverse bilden:

$$x(U) = U \cdot (x_{\text{max}} - x_{\text{min}}) + x_{\text{min}}$$

In Abbildung 1 ist die resultierende, normierte Verteilung mit den Parametern

$$x_{\text{min}} = -100$$
$$x_{\text{max}} = 100$$

zu sehen. Für das Histogramm wurden 1 Millionen Zufallswerte genommen.

1.2 b)

Normierung:

$$\int_0^\infty N \exp{(-t/\tau)} \mathrm{d}t = \frac{-N}{\tau} \left[\exp{(-t/\tau)}\right]_0^\infty = \frac{N}{\tau} = 1$$
$$=> N = \tau$$

Transformation:

$$U = \int_0^t \tau \cdot \exp{(-t'/\tau)} \mathrm{d}t' = -\exp{(-t/\tau)} + 1$$

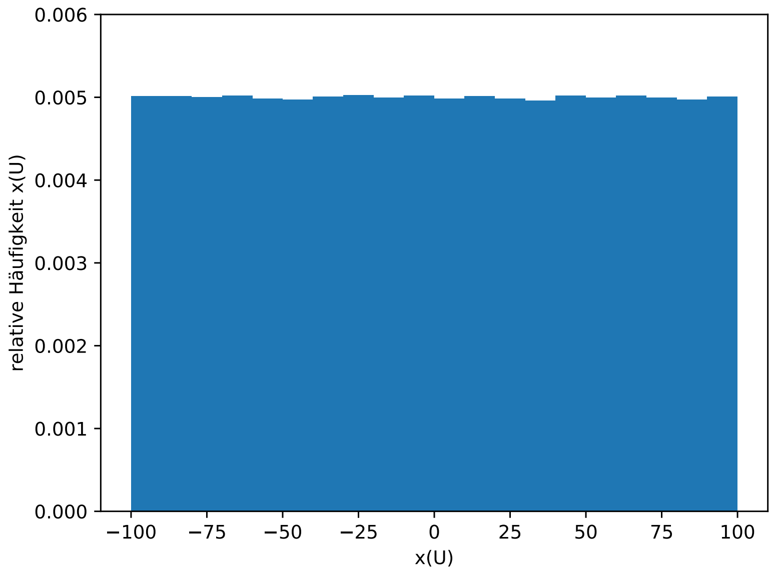

Abbildung 1: Transformierte Verteilung Aufgabenteil a).

Inverse bilden:

$$t(U) = -\tau \ln(1 - U)$$

Das zugehörige Histogramm ist in Abbildung 2 zu sehen, dafür wurde für der Parameter als $\tau = 10$ angenommen und es wurden 10000 Zufallswerte verwendet.

1.3 c)

Normierung:

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} N \cdot x^{-n} \mathrm{d}x = \frac{N}{1-n} \left[x^{1-n}\right]_{x_{\min}}^{x_{\max}} = \frac{N}{1-n} \left(x_{\max}^{1-n} - x_{\min}^{1-n}\right) = 1$$

$$=> N = \frac{1-n}{x_{\max}^{1-n} - x_{\min}^{1-n}}$$

Transformation:

$$\begin{aligned} U &= \int_{x_{\min}}^{x} \frac{1-n}{x_{\max}^{1-n} - x_{\min}^{1-n}} \cdot x'^{-n} \mathrm{d}x' \\ &= \frac{1-n}{x_{\max}^{1-n} - x_{\min}^{1-n}} \left[\frac{1}{1-n} x'^{1-n}\right]_{x_{\min}}^{x} \\ &= \frac{1}{x_{\max}^{1-n} - x_{\min}^{1-n}} \left(x^{1-n} - x_{\min}^{1-n}\right) \end{aligned}$$

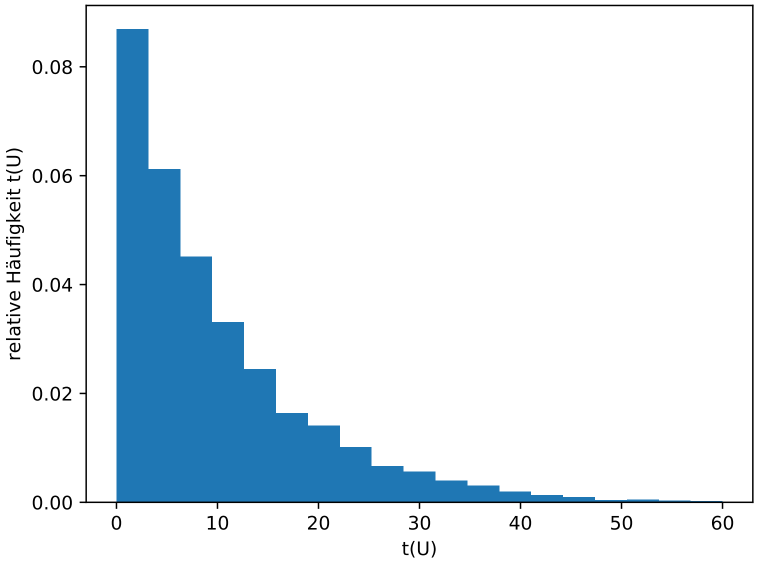

Abbildung 2: Transformierte Verteilung Aufgabenteil b).

Inverse bilden:

$$x(U) = \left[U \cdot \left(x_{\text{max}}^{1-n} - x_{\text{min}}^{1-n}\right) + x_{\text{min}}^{1-n}\right]^{\frac{1}{1-n}}$$

Das zugehörige, normierte Histogramm ist in Abbildung 3 zu sehen. Hierfür wurden folgende Werte angenommen:

$$\begin{aligned} x_{\text{min}} &= 1 \\ x_{\text{max}} &= 10 \\ n &= 2 \end{aligned}$$

1.4 d)

Normierung ist hier nicht mehr notwendig, da die Funktion schon normiert ist. Transformation:

$$\begin{aligned} U &= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + x'^2} \mathrm{d}x' \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\arctan\left(x'\right)\right]_{-\infty}^{x} \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\arctan\left(x\right) + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

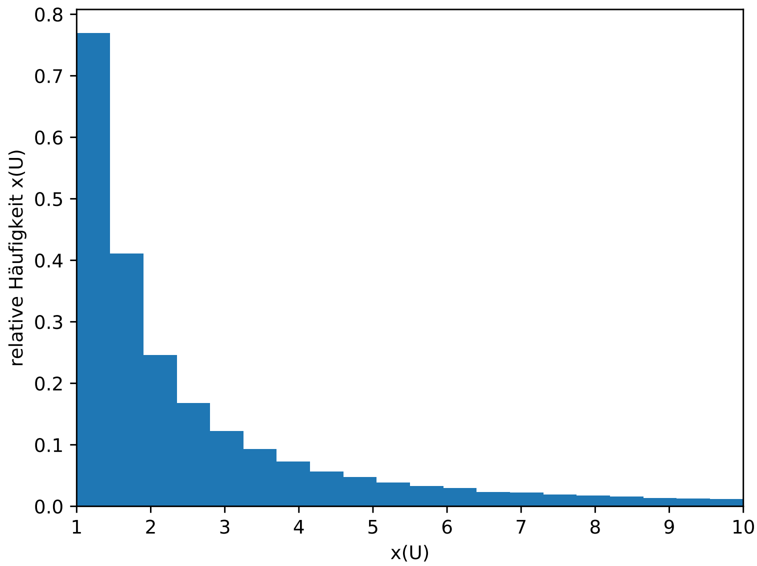

Abbildung 3: Transformierte Verteilung Aufgabenteil c).

Inverse bilden:

$$x(U) = \tan\left(\pi\left(U - \frac{1}{2}\right)\right)$$

Das dazugehörige Histogramm ist in Abbildung 4 zu sehen. Hierbei wurden erneut 1 Millionen Zufallszahlen verwendet.

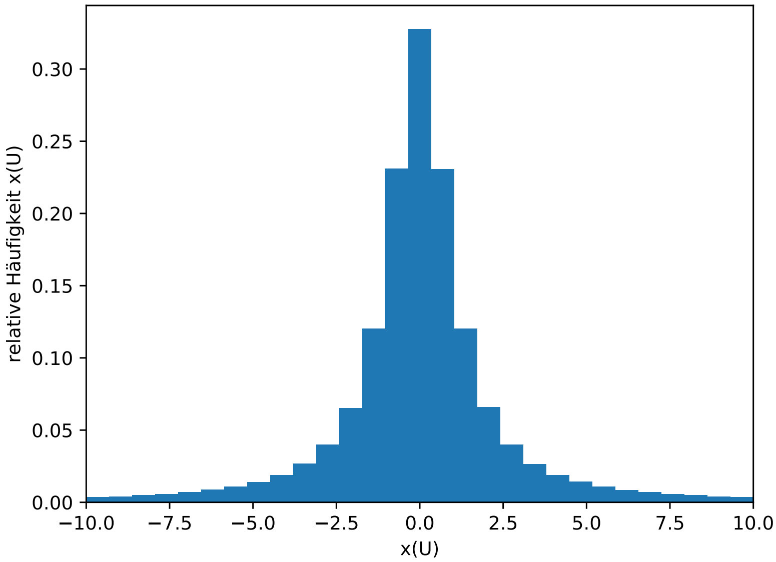

Abbildung 4: Transformierte Verteilung Aufgabenteil d).

2 Aufgabe 6

In dieser Aufgabe wird der Zufallsgenerator

$$x_n = (a \cdot x_{n-1} + b)\% m \rightarrow v_n = \frac{x_n}{m} \tag{1}$$

untersucht.
Für die Teilaufgaben 2.2 und 2.3 werden die Werte $a = 1601$, $b = 3456$ und $m = 10^4$ verwendet.

2.1 Teilaufgabe a)

Für den Zufallszahlengenerator (1) ergeben sich für für ein varaibles, ganzzahliges a, $b = 3$, $m = 1024$ und dem Startwert $x_0 = 0$ die in 5 zu sehenden Periodenlängen.

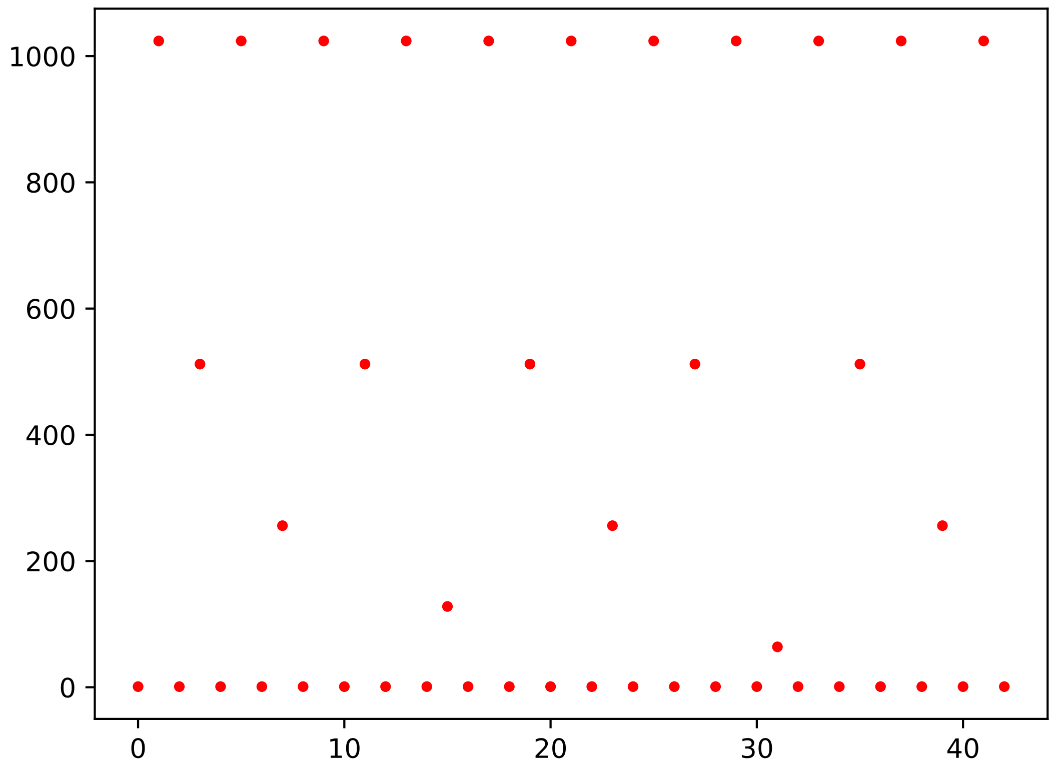

Abbildung 5: Periodenlängen in Abhängigkeit von a

Es ist zu erkennen, dass bei $a = 4 \cdot n + 1$ die maximale Periodenlänge auftritt. Das Ergebnis lässt sich mit den Regeln für gute linear-kongruente Generatoren erklären:

- $b = 3 \neq 0$
- b und m sind Teilerfremd, da die Quersumme von 1024 gleich 7 ist. Daher ist m nicht durch b teilbar.
- Jeder Primfaktor von m teilt $a - 1$, da $1024 = 2^{10}$ und $a - 1 = 4n$ mit $n \in \mathbb{N}$.
- $1024 = 2^{10} = 4^5$, $a - 1 = 4n$ $n \in \mathbb{N}$ $\rightarrow$beide sind durch 4 teilbar.

2.2 Teilaufgabe b)

Für die gegebenen Startwerte ergibt sich folgendes Diagramm:

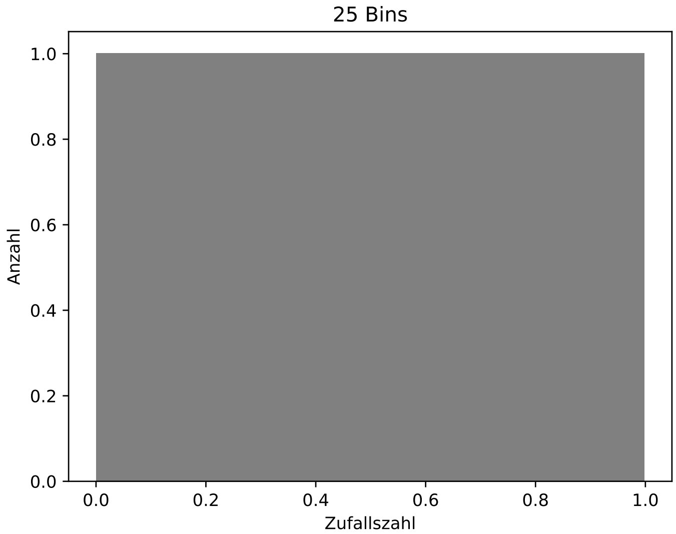

Abbildung 6: Histogramm der Zufallswerte

Das in 6 zu sehende Ergebnis ist für Zufallszahlengeneratoren gut, da keine Zahl (viel) öfter gezogen wird, als eine andere.

2.3 Teilaufgabe c)

Für die gegeben Startwerte ergeben sich folgende Scatter-Plots:

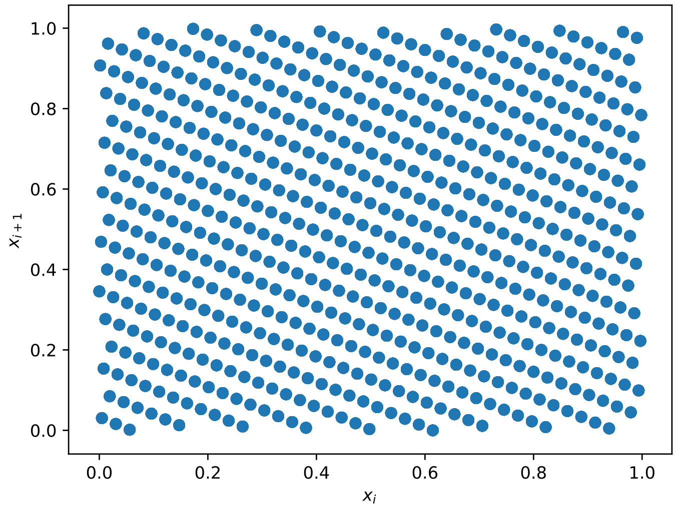

Abbildung 7: 2D-Scatter

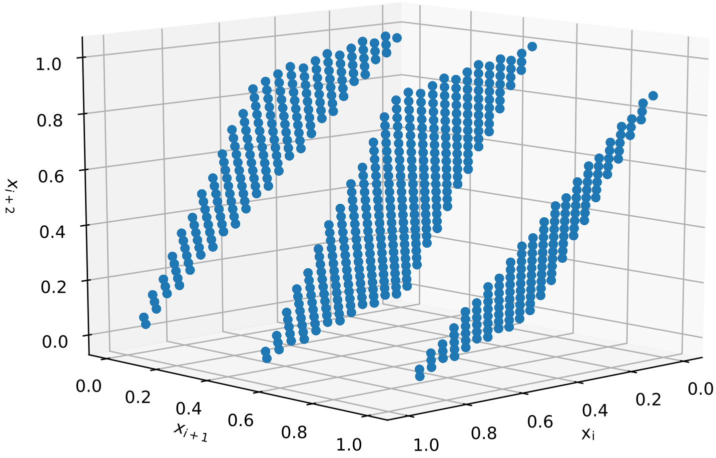

Abbildung 8: 3D-Scatter

Da sich in beiden Plots Regelmäßigkeiten erkennen lassen, handelt es sich um keinen guten Zufallszahlengenerator.

2.4 Teilaufgabe d)

In dieser Teilaufgabe werden die Ergebnisse aus 2.2 und 2.3 mit *numpy.random.uniform(0, 1)* verglichen. Damit die Ergebnisse rekonstruierbar sind, wurde als Seed *np.random.seed(42)* gewählt. Für die Funktion *numpy.random.uniform(0, 1)* ergibt sich folgendes Histogramm:

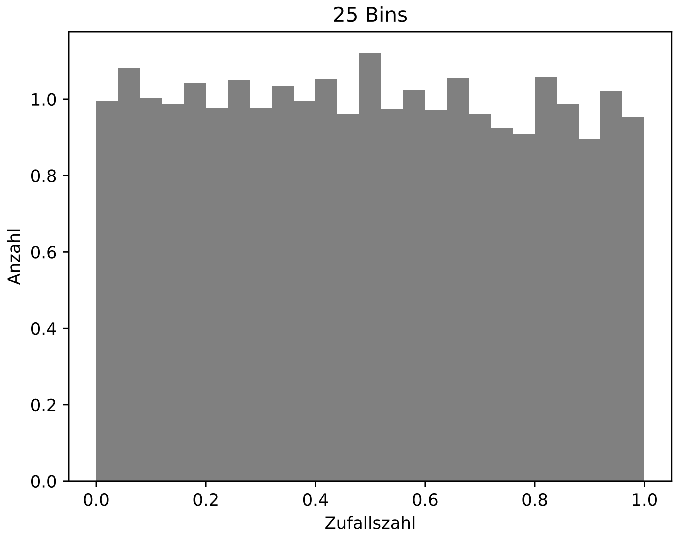

Abbildung 9: Histgrogramm für *numpy.random.uniform(0, 1)*

Im Vergleich mit 6 fällt auf, dass die Zufallszahlen weniger gleichverteilt sind, was den Zufallsgenerator in dieser Hinsicht etwas schlechter macht. Es ergeben sich folgende Scatter-Plots:

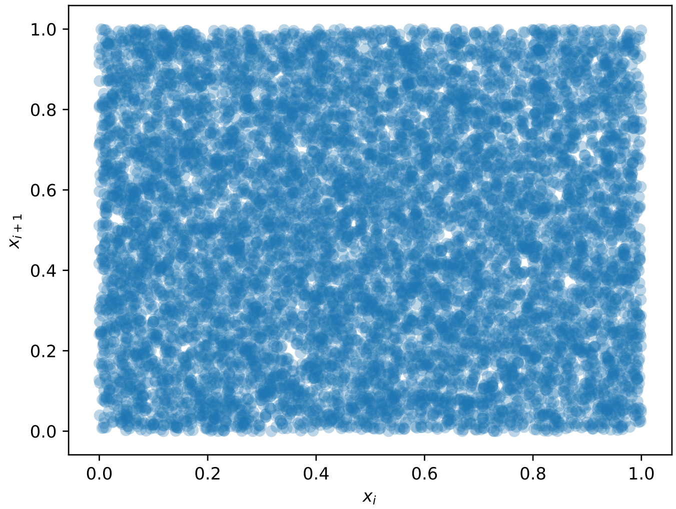

Abbildung 10: 2D-Scatter

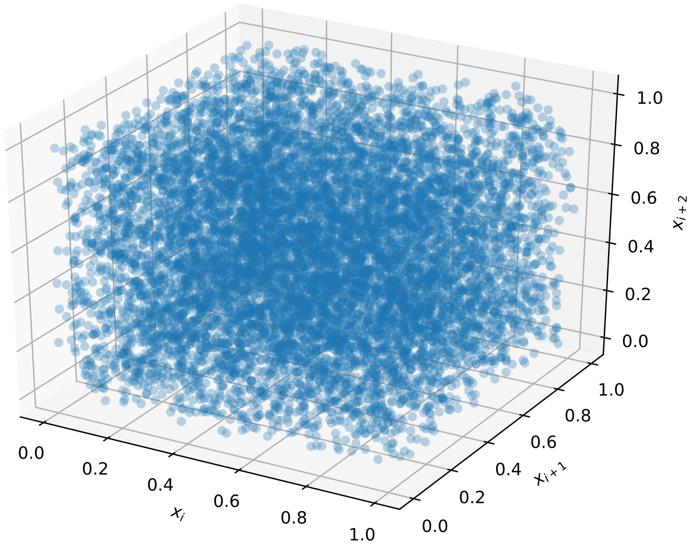

Abbildung 11: 3D-Scatter

Im Vergleich zu 10 und 11 fällt hier jedoch auch, dass die Zufallszahlen hier "zufälliger" verteilt sind und sich kein Gitter erkennen lässt, womit *numpy.random.uniform(0, 1)* in dieser Hinsicht besser ist.

2.5 Teilaufgabe e)

Für ganzzahlige x_0 liefert der Zufallsgenerator den Wert $\frac{1}{2}$ genau 1 mal (pro Periode). Für nicht-ganzzahlige x_0 tritt dieser Wert nicht auf.

3 Aufgabe 7

a) Der Korrelationskoeffizient berechnet sich aus Formel (2) und beträgt $\rho = 0{,}8$.

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(x, y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \tag{2}$$

b) Die 2D-Gaußverteilung sieht wie folgt aus:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y}\right)\right) \overset{!}{=} \text{const.}$$

Durch Umformung erhält man Gleichung 3. Diese ist ist eine Ellipsengleichung.

$$\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} = \text{const.} \tag{3}$$

c) In Abbildung 12 ist die 2D-Gaußverteilung als Heatmap dargestellt. Zusätzlich sind die Ellipse, bei der $f(x, y)$ auf das $^1/\sqrt{e}$-fache seines Maximums abgefallen ist, und die Mittelwerte mit ihren Standardabweichungen eingezeichnet.

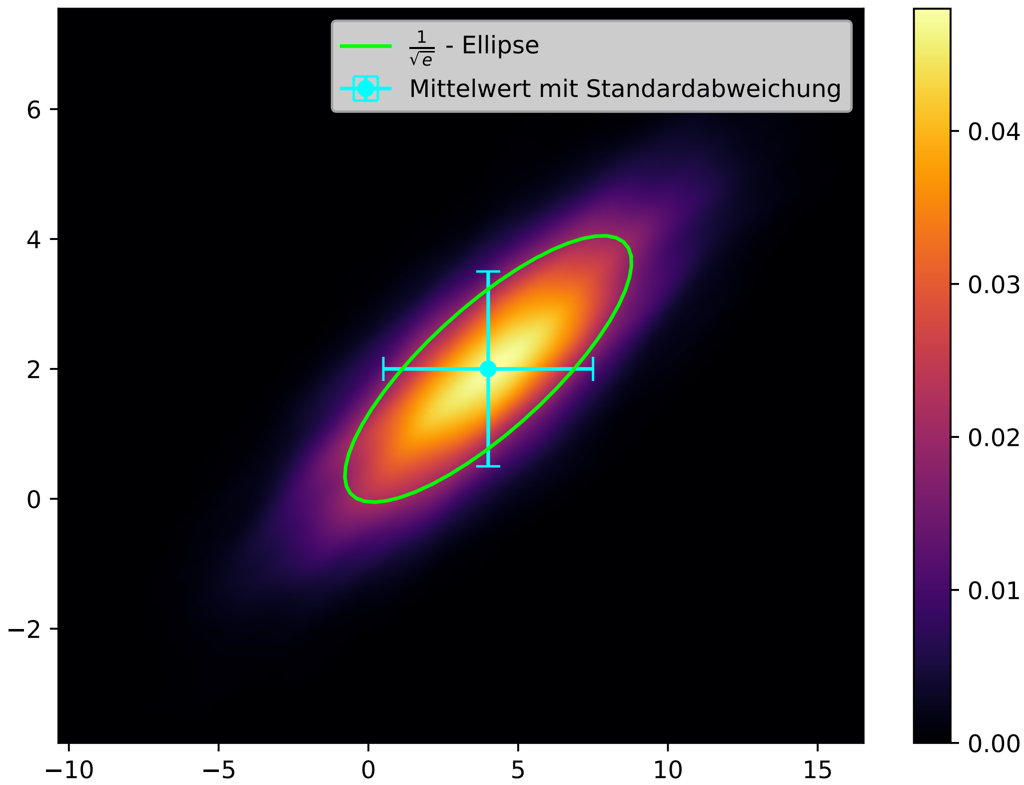

Abbildung 12: 2D-Gaußverteilung