1. Übungsblatt zur Vorlesung
Statistische Methoden der Datenanalyse
Abgabe: 25.10.2018 23:59

WS 2018/2019
Prof. W. Rhode

Zeit	Raum	Abgabe im Moodle; Mails mit Betreff: [SMD1819]
Di. 10-12	CP-03-150	tobias.hoinka@udo.edu, felix.geyer@udo.edu und jan.soedingrekso@udo.edu
Di. 16-18	CP-03-150	simone.mender@udo.edu und alicia.fattorini@udo.edu
Mi. 10-12	CP-03-150	mirco.huennefeld@udo.edu und kevin3.schmidt@udo.edu

Aufgabe 1: *Numerische Stabilität* — 3 P.

Betrachten Sie die Funktionen

a) $f(x) = (x^3 + 1/3) - (x^3 - 1/3)$ und

b) $g(x) = ((3 + x^3/3) - (3 - x^3/3))/x^3$.

Bestimmen Sie empirisch, für welche Bereiche von x (grob) das numerische Ergebnis

- vom algebraischen um nicht mehr als 1 % abweicht,
- gleich Null ist.

c) Stellen Sie das Ergebnis in geeigneter Form graphisch dar (d. h. z. B. logarithmische x-Skala)!

Aufgabe 2: $\mathrm{e}^-\mathrm{e}^+ \to \gamma\gamma$ — 7 P.

Ein Term des differentiellen Wirkungsquerschnitts für die Reaktion $\mathrm{e}^-\mathrm{e}^+ \to \gamma\gamma$ ist gegeben durch

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\alpha^2}{s}\left(\frac{2 + \sin^2(\theta)}{1 - \beta^2\cos^2(\theta)}\right) \quad .$$

mit

$$s = (2E_\mathrm{e})^2 \quad (E_\mathrm{e} \text{ ist die Energie des } \mathrm{e}^- \text{ oder } \mathrm{e}^+ \text{ im Schwerpunktsystem}),$$
$$\beta = \sqrt{1 - \gamma^{-2}}$$
$$\gamma = \frac{E_\mathrm{e}}{m_\mathrm{e}} \quad (m_\mathrm{e} = 511\,\mathrm{keV})$$

und der Feinstrukturkonstante α.

a) Ist diese Gleichung für $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}$ numerisch stabil? In welchem Bereich von θ ist die Gleichung für $E_\mathrm{e} = 50\,\mathrm{GeV}$ numerisch instabil?

b) Beheben Sie die Stabilitätsprobleme durch eine geeignete analytische Umformung. (Hinweis: Nutzen Sie $1 - \beta^2 = {}^1/_{\gamma^2}$ und $1 = \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)$)

c) Zeigen Sie, dass Sie die Stabilitätsprobleme behoben haben, indem Sie beide Gleichungen in den kritischen Intervallen darstellen.

d) Berechnen Sie die Konditionszahl. Wie hängt diese von θ ab?

e) Stellen Sie den Verlauf der Konditionszahl als Funktion von θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) grafisch dar. In welchem Bereich ist das Problem gut, in welchem schlecht konditioniert?

Aufgabe 3: *Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung* **6 P.**

Die Wahrscheinlichkeitsdichte des Betrags der Geschwindigkeit v der Moleküle in einem idealen Gas bei der absoluten Temperatur T ist

$$f(v) = N \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_\mathrm{B}T}\right) \cdot 4\pi v^2,$$

dabei ist m die Molekülmasse, k_B die Boltzmannkonstante und N die Normalisierungskonstante.

Zur Beantwortung der Fragen müssen Sie zuerst N bestimmen! Drücken Sie die Ergebnisse als Funktion von m und T aus, sowie die anderen Ergebnisse als Funktion von v_m.

Hinweis zu c): Eine analytische Lösung ist hier nicht möglich, benutzen Sie ein numerisches Verfahren.

Wie groß sind

a) die wahrscheinlichste Geschwindigkeit v_m,

b) der Mittelwert der Geschwindigkeit $\langle v \rangle$,

c) der Median der Geschwindigkeit $v_{0,5}$,

d) die volle Breite auf halber Höhe der Verteilung (v_FWHM) und

e) die Standardabweichung der Geschwindigkeit σ_v.

Aufgabe 4: *Würfel* 4 P.

Nutzen Sie für diese Aufgabe die Schreibweise für Wahrscheinlichkeiten aus der Vorlesung (z.B. $P(W_{\text{rot}} + W_{\text{blau}} = 42) = \dots$, $P(W_{\text{rot}} + W_{\text{blau}} = 42 \mid W_{\text{rot}} = 4) = \dots$).
Sie würfeln mit zwei Würfeln, einem roten und einem blauen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

a) die Summe der Punkte 9 ergibt,

b) die Summe der Punkte 9 oder mehr ergibt,

c) ein Würfel 4, der andere 5 Punkte zeigt,

d) der rote Würfel 4, der blaue 5 Punkte zeigt?

Sie werfen die Würfel so, dass der blaue Würfel hinter einen Gegenstand rollt, so dass Sie ihn zunächst nicht sehen können. Der rote Würfel zeigt eine 4. Nachdem Sie das gesehen haben, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

e) die Summe der Punkte 9 ergibt,

f) die Summe der Punkte 9 oder mehr ergibt,

g) der rote Würfel 4, der blaue 5 Punkte zeigt?