Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Национальный исследовательский университет «МЭИ»

Курсовая работа по дисциплине «Численные методы»

«Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности в прямоугольнике. Построение схем повышенного порядка точности»

Выполнил: Ракипов Динаф
Преподаватель: доц. Амосова О.А
Группа: А-13-17

2019 г.

Оглавление

Постановка задачи ... 3
Задачи ... 3
Аналитическое решение ... 4
Предварительные рассуждения ... 4
Решение задач Штурма-Лиувилля ... 5
Анализ решения ... 5
Тестовые примеры ... 6
Тест №1 ... 6
Тест №2 ... 6
Тест №3 ... 6
Тест №4 ... 7
Тест №5 ... 7
Численный метод решения ... 8
Задача ... 8
Обозначения ... 8
Сетка ... 8
Асимптотическое разложение ... 8
Схема ... 9
Алгоритм ... 9
Приложения ... 10
Литература ... 13

Постановка задачи

Дана начально-краевая задача для уравнения теплопроводности в прямоугольнике:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(x,y,t); 0 < x < a, 0 < y < b, t > 0 \\ u(x,y,0) = \varphi(x,y); 0 < x < a, 0 < y < b \\ u|_{\Gamma} = \mu(t); t \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

Задачи

- найти аналитическое решение задачи 1
- построить тестовые примеры для проверки работы программы, реализующий численный метод решения
- построить схему повышенного порядка точности
- решить задачу методом переменных направлений
- реализовать программный продукт для визуализации решений

Аналитическое решение

Решим следующую задачу:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(x,y,t); 0 < x < a, 0 < y < b, t > 0 \\ u(x,y,0) = \varphi(x,y); 0 < x < a, 0 < y < b \\ u|_\Gamma = \mu(t); t \geq 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Предварительные рассуждения

Перейдем к однородным граничным условиям. Сделаем замену:

$$u = v + \mu(t) \Leftrightarrow v = u - \mu(t)$$

$$u_t = v_t + \mu_t, \Delta u = \Delta v$$

$$f(x,y,t) - \mu_t = \tilde{f}(x,y,t)$$

$$\varphi(x,y) - \mu(0) = \tilde{\varphi}(x,y)$$

Получим следующую систему:

$$\begin{cases} v_t = \Delta v + \tilde{f}(x,y,t); 0 < x < a, 0 < y < b, t > 0 \\ v(x,y,0) = \tilde{\varphi}(x,y); 0 < x < a, 0 < y < b \\ v|_\Gamma = 0; t \geq 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Заметим, что:

$$\tilde{f}(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} X_n(x) Y_k(y) \widetilde{f_{nk}}(t)$$

$$\widetilde{f_{nk}} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \tilde{f}(x,y,t) X_n(x) Y_k(y) dxdy$$

$$\tilde{\varphi}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} X_n(x) Y_k(y) \widetilde{\varphi_{nk}}$$

$$\widetilde{\varphi_{nk}} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \tilde{\varphi}(x,y) X_n(x) Y_k(y) dxdy$$

Решение будем искать в виде двойного ряда:

$$v(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} X_n(x) Y_k(y) T_{nk}(t)$$

Уравнение $v_t = \Delta v + \tilde{f}(x,y,t)$ заведомо выполняется, если равны члены рядов в левой и правой частях с одинаковыми номерами:

$$X_n(x) Y_k(y) T_{nk}'(t) = X_n''(x) Y_k(y) T_{nk}(t) + X_n(x) Y_k''(y) T_{nk}(t) + X_n(x) Y_k(y) \widetilde{f_{nk}}(t)$$

$$\frac{T_{nk}(t) - \widetilde{f_{nk}}(t)}{T_{nk}(t)} = \frac{X_n''(x)}{X_n(x)} + \frac{Y_k''(y)}{Y_k(y)}$$

Так как слева стоит функция, зависящая только от t, а справа только от (x,y), то это возможно только если и левая, и правая части равны константе. Итого $\exists \lambda_{nk}$такая, что:

$$T_{nk}'(t) + \lambda_{nk} T_{nk}(t) = \widetilde{f_{nk}}(t)$$

$$\frac{X_n''(x)}{X_n(x)} + \frac{Y_k''(y)}{Y_k(y)} = \lambda_{nk}$$

Но сумма функций, одна из которых зависит только от x, а вторая — только от y, может быть константой только в том случае, если обе функции константы. Тогда $\exists \mu_n \exists \nu_k$такие, что:

$$X_n''(x) + \mu_n X_n(x) = 0, Y_k''(y) + \nu_k Y_k(y) = 0$$

$$\lambda_{nk} = \mu_n + \nu_k$$

Решение задач Штурма-Лиувилля

Краевые условия дают для функций $X_n(x), Y_k(y)$выполнение равенств:

$$X_n(0) = X_n(a) = 0, Y_k(0) = Y_k(b) = 0$$

Запишем задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} X_n''(x) + \mu_n * X_n(x) = 0 \\ X_n(0) = 0 \\ X_n(a) = 0 \end{cases}, \begin{cases} Y_k''(y) + \nu_k Y_k(y) = 0 \\ Y_k(0) = 0 \\ Y_k(b) = 0 \end{cases}$$

После решений этих задач, получим:

$$\mu_n = \frac{\pi^2 n^2}{a^2} X_n = sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right) \nu_k = \frac{\pi^2 k^2}{b^2} Y_k = sin\left(\frac{\pi k y}{b}\right)$$

В силу отношений $\lambda_{nk} = \mu_n + \nu_k$, для функций T_{nk}и краевого условия по t имеем задачу:

$$\begin{cases} T_{nk}'(t) + \lambda_{nk} T_{nk}(t) = \widetilde{f_{nk}}(t) \\ T_{nk}(0) = \widetilde{\varphi_{nk}} \end{cases}, \lambda_{nk} = \frac{\pi^2 n^2}{a^2} + \frac{\pi^2 k^2}{b^2}$$

Решением этой задачи является:

$$T_{nk}(t) = \left(\widetilde{\varphi_{nk}} + \int_0^t \widetilde{f_{nk}}(\tau) e^{\lambda_{nk}\tau} d\tau\right) e^{-\lambda_{nk} t}$$

Анализ решения

Решение задачи (2):$v(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{ab} X_n(x) Y_k(y) \left(\int_0^a \int_0^b \tilde{\varphi}(x,y) X_n(x) Y_k(y) dxdy + \int_0^t \left[\int_0^a \int_0^b \tilde{f}(x,y,t) X_n(x) Y_k(y) dxdy\right] e^{\lambda_{nk}\tau} d\tau\right) e^{-\lambda_{nk} t}$ (3)

Решение задачи (1):

$$\varphi(x,y) - \mu(0) = \tilde{\varphi}(x,y), f(x,y,t) - \mu_t = \tilde{f}(x,y,t), u = v + \mu(t)$$

$$\lambda_{nk} = \frac{\pi^2 n^2}{a^2} + \frac{\pi^2 k^2}{b^2}$$

Для отладки программы, реализующий численный метод, следует составить тестовые примеры. Для простоты избавимся от двойной суммы в формуле (3). Это можно достичь, используя свойство ортогональности функций задачи Штурма-Лиувилля. Иначе говоря, если в качестве функций взять:

$$\tilde{\varphi}(x,y) = X_1(x) Y_1(y) \tilde{f}(x,y,t) = X_1(x) Y_1(y), \text{то}$$

$$\int_0^a \int_0^b \tilde{\varphi}(x,y) X_n(x) Y_k(y) dxdy = 0 \quad \forall n \forall k, \text{где} n \neq 1 \text{и} k \neq 1$$

$$\int_0^a \int_0^b \tilde{f}(x,y,t) X_n(x) Y_k(y) dxdy = 0 \quad \forall n \forall k, \text{где} n \neq 1 \text{и} k \neq 1$$

Для этого, пусть $\mu(t) = 0$, тогда

$$\varphi(x,y) = X_1(x) Y_1(y) f(x,y,t) = X_1(x) Y_1(y)$$

Так же заметим, что

$$\int_0^a \int_0^b X_n(x)^2 Y_k(y)^2 dxdy = \frac{ab}{4} \quad \forall n \forall k$$

Тестовые примеры

Таким образом, в качестве φ и f можно взять либо 0, либо любую $ConstX_n(x)Y_k(y)$ при фиксированном n и k. Используя это правило построим несколько тестов:

Тест №1

Задача:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u; 0 < x < a, 0 < y < b, t > 0 \\ u(x, y, 0) = X_1(x)Y_1(y); 0 < x < a, 0 < y < b \\ u|_\Gamma = 0; t \geq 0 \end{cases} \quad (4)$$

Решение:

$$u(x, y, t) = X_1(x)Y_1(y)e^{[-\lambda_{11}t]} \quad , \lambda_{11} = \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2}$$

Тест №2

Задача:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + X_1(x)Y_1(y); 0 < x < a, 0 < y < b, t > 0 \\ u(x, y, 0) = 0; 0 < x < a, 0 < y < b \\ u|_\Gamma = 0; t \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

Решение:

$$u(x, y, t) = \int_0^t e^{\lambda_{11}\tau}\, d\tau X_1(x)Y_1(y)e^{[-\lambda_{11}t]} \quad , \lambda_{11} = \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2}$$

Тест №3

Задача:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + tX_1(x)Y_1(y); 0 < x < a, 0 < y < b, t > 0 \\ u(x, y, 0) = 0; 0 < x < a, 0 < y < b \\ u|_\Gamma = 0; t \geq 0 \end{cases} \quad (6)$$

Решение:

$$u(x, y, t) = \int_0^t \tau\, e^{\lambda_{11}\tau} d\tau X_1(x)Y_1(y)e^{[-\lambda_{11}t]} \quad , \lambda_{11} = \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2}$$

Тест №4

Задача:

$$\begin{cases} u_t = \varDelta u + t sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) sin\left(\frac{\pi y}{b}\right); 0 < x < a, 0 < y < b, t > 0 \\ u(x,y,0) = sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) sin\left(\frac{\pi y}{b}\right); 0 < x < a, 0 < y < b \\ u|_{\Gamma} = 0; t \geq 0 \end{cases} \quad (7)$$

Решение:

$$u(x,y,t) = \int_0^t \tau\, e^{\lambda_{11}\tau} d\tau sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{[-\lambda_{11}t]} + sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{[-\lambda_{21}t]} \quad, \lambda_{11} = \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2}, \lambda_{21} = \frac{4\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2}$$

Тест №5

Задача:

$$\begin{cases} u_t = \varDelta u + t sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) + 2; 0 < x < a, 0 < y < b, t > 0 \\ u(x,y,0) = sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) sin\left(\frac{\pi y}{b}\right); 0 < x < a, 0 < y < b \\ u|_{\Gamma} = 2t; t \geq 0 \end{cases} \quad (8)$$

Решение:

$$u(x,y,t) = \int_0^t \tau\, e^{\lambda_{11}\tau} d\tau sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{[-\lambda_{11}t]} + sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{[-\lambda_{21}t]} + 2t \quad, \lambda_{11} = \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2}, \lambda_{21} = \frac{4\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2}$$

строго говоря этот тест не следует из общего решения

Численный метод решения

Задача

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(x,y,t); 0 < x < a, 0 < y < b, t > 0 \\ u(x,y,0) = \varphi(x,y); 0 < x < a, 0 < y < b \\ u|_{\Gamma} = \mu(t); t \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

Обозначения

$$\Delta_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}, \Lambda_\alpha u = \frac{u_{(i-1)} - 2u_i + u_{(i+1)}}{h_\alpha^2}$$

Сетка

Введем сетку на плоскости XY:

$$w_{(h_1)} = \left\{x_i = ih_1, 0 \leq i \leq N_1, h_1 = \frac{a}{N_1}\right\}, w_{(h_2)} = \left\{y_j = jh_2, 0 \leq j \leq N_2, h_2 = \frac{b}{N_2}\right\}$$

$$G_{(h_1 h_2)} = w(h_1) \times w(h_2)$$

А также временную сетку:

$$w_\tau = \left\{t_k = k\tau, 0 \leq k \leq N_3, \tau = \frac{T}{N_3}\right\}, \text{ где T – граница по времени}$$

Решение задачи будем искать на разностной сетке:

$$\Omega = G_{(h_1 h_2)} \times w_\tau$$

Асимптотическое разложение

Для построения разностной схемы повышенного порядка необходимо воспользоваться асимптотическим разложением:

$$\Lambda_x u = \Delta_x u + \frac{h_1^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O(h_1^4), \quad (8)$$

Аналогично запишем разложение для y:

$$\Lambda_x u = \Delta_y u + \frac{h_2^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + O(h_2^4)$$

В дальнейшем будет рассматривать только разложение по x, а по y будем действовать аналогично. Уравнение из краевой задачи продифференцируем дважды по x:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x,y,t)$$

$$\Delta_x \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Delta_x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \Delta_x f(x,y,t)$$

$$\Delta_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \Delta_x \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \Delta_x f(x,y,t) = \Delta_x \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - f(x,y,t)\right)$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \Delta_x \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_y u - f(x,y,t)\right)$$

Подставим в ***7***:

$$\Lambda_x u = \Delta_x u + \frac{h_1^2}{12}\Delta_x \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_y u - f(x,y,t)\right) + O(h_1^4)$$

$$\Lambda_x u = \Delta_x u + \frac{h_1^2}{12}\Delta_x \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_y u - f(x,y,t)\right) + O(h_1^4)$$

$$\Delta_x u = \Lambda_x u - \frac{h_1^2}{12}\Delta_x\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{h_1^2}{12}\Delta_x\Delta_y u + \frac{h_1^2}{12}\Delta_x f(x,y,t) + O(h_1^4)$$

$$(\Delta_x u)^{\left(k+\frac{1}{2}\right)} = 0.5(\Lambda_x u)^{(k+1)} + 0.5(\Lambda_x u)^{(k)} - \frac{h_1^2}{12}\Lambda_x\left(\frac{u^{(k+1)}-u^{(k)}}{\tau}\right) + \frac{h_1^2}{12}\Lambda_x\Lambda_y u + \frac{h_1^2}{12}\Lambda_x f(x,y,t) + O(h_1^4) + O(\tau^2)$$

Схема

Аналогично поступаем и с y. Затем получим:

$$(\Delta u)^{\left(k+\frac{1}{2}\right)} = 0.5(\Lambda u)^{(k+1)} + 0.5(\Lambda u)^{(k)} - \frac{h_1^2}{12}\Lambda_x\left(\frac{u^{(k+1)}-u^{(k)}}{\tau}\right) - \frac{h_2^2}{12}\Lambda_y\left(\frac{u^{(k+1)}-u^{(k)}}{\tau}\right) + \frac{h_1^2}{12}\Lambda_x\Lambda_y u^{(k)} + \frac{h_2^2}{12}\Lambda_y\Lambda_x u^{(k)} + \frac{h_1^2}{12}\Lambda_x f(x,y,t)^{(k+1/2)} + \frac{h_2^2}{12}\Lambda_y f(x,y,t)^{(k+1/2)}$$

Получим схему:

$$\frac{u^{(k+1)}-u^{(k)}}{\tau} = (\Delta u)^{\left(k+\frac{1}{2}\right)} + f^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\frac{u^{(k+1)}-u^{(k)}}{\tau} = \sigma_1\Lambda_x u^{(k+1)} + (1-\sigma_1)\Lambda_x u^{(k)} + \sigma_2\Lambda_y u^{(k+1)} + (1-\sigma_2)\Lambda_y u^{(k)} + \tau R u^{(k)} + \varphi$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{h_1^2}{6\tau}\right)\sigma_2 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{h_2^2}{6\tau}\right)$$

$$Ru = (1-\sigma_1-\sigma_2)\Lambda_x\Lambda_y u$$

$$\varphi = \left(f + \frac{h_1^2}{12}\Lambda_x f + \frac{h_2^2}{12}\Lambda_y f\right)^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}$$

С точностью аппроксимации
$O(h_1^4 + h_2^4 + \tau^2)$

Такие схемы называются экономичными разностными схемами, сочетающие свойства как явных, так и неявных схем. Таким образом, построенная схема является безусловно устойчивой.

Алгоритм

Введем промежуточный временной слой $k+\frac{1}{2}$. Реализуем метод переменных направлений повышенного порядка точности. Для перехода на следующий временной слой используем следующий алгоритм:

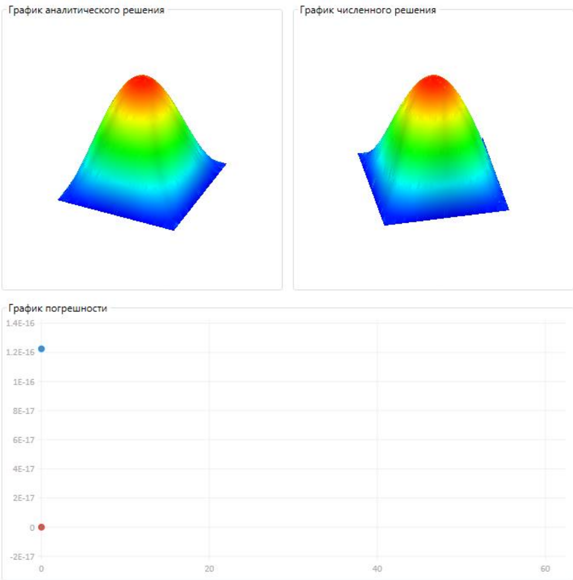
$$\frac{u^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}-u^{(k)}}{\tau} = \sigma_1\Lambda_x u^{\left(k+\frac{1}{2}\right)} + F\left[u^{(k)}\right], \frac{u^{(k+1)}-u^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}}{\tau} = \Lambda_y u^{(k+1/2)}$$

$$F\left[u^{(k)}\right] = (1-\sigma_1)\Lambda_x u^{(k)} + (1-\sigma_2)\Lambda_y u^{(k)} + (1-\sigma_1)(1-\sigma_2)\Lambda_x\Lambda_y u^{(k)} + \varphi$$

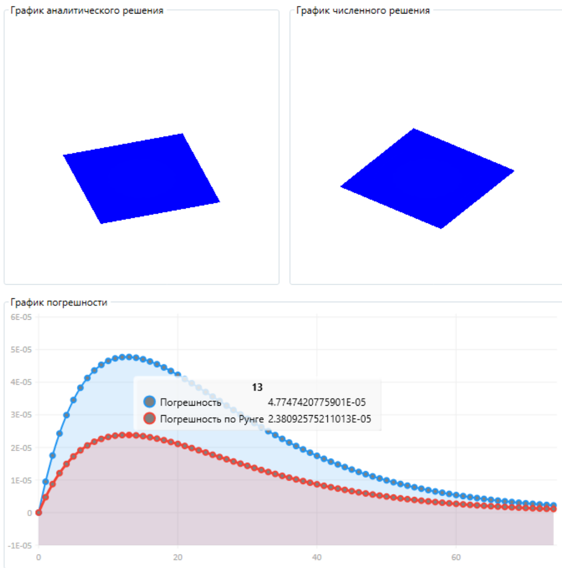
$$\varphi = \left(f + \frac{h_1^2}{12}\Lambda_x f + \frac{h_2^2}{12}\Lambda_y f\right)^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}$$

Расписав данную схему, получим трехдиагональную систему уравнений. Для ее решения будем использовать метод прогонки.

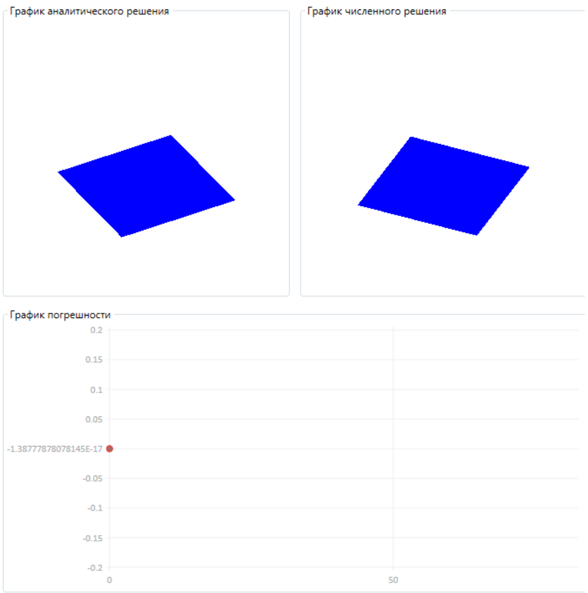
Приложения



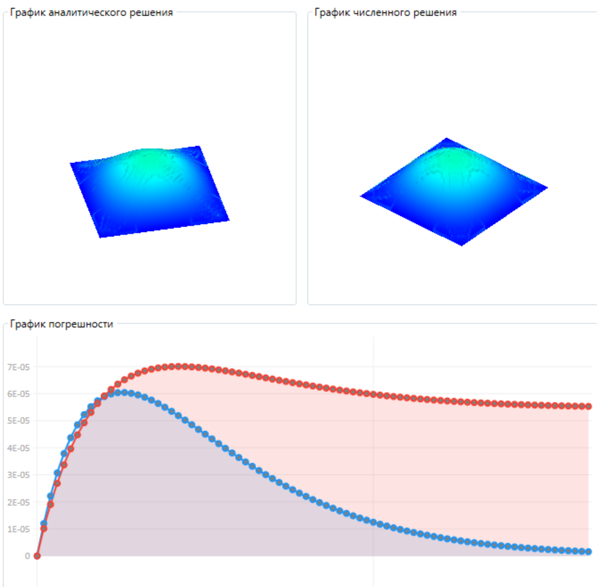
Тест №1. В нулевой момент времени.



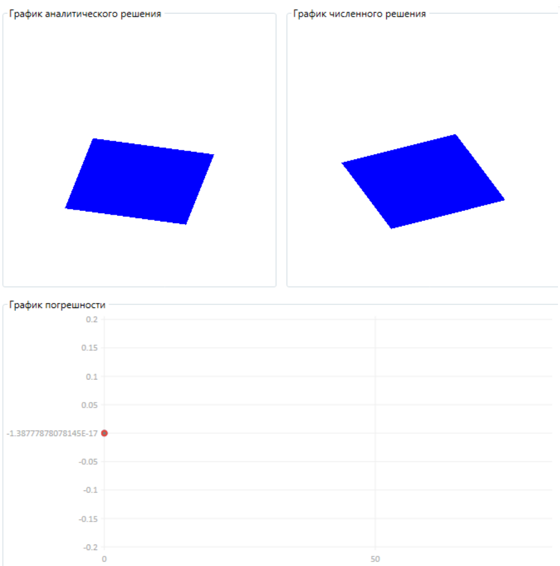
Тест №1. Моделирование процесса. Остывание.



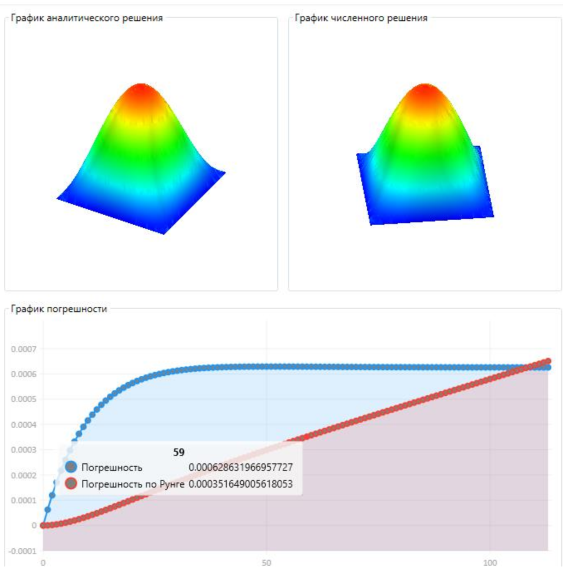
Тест №2. Пластина в нулевой момент времени



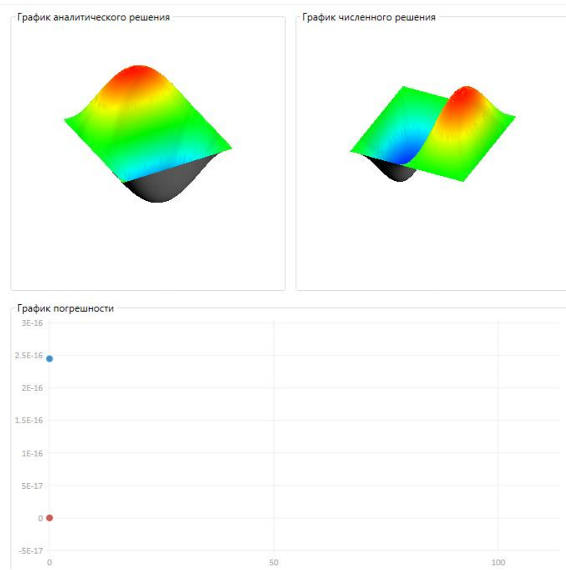
Тест №2. Моделирование процесса



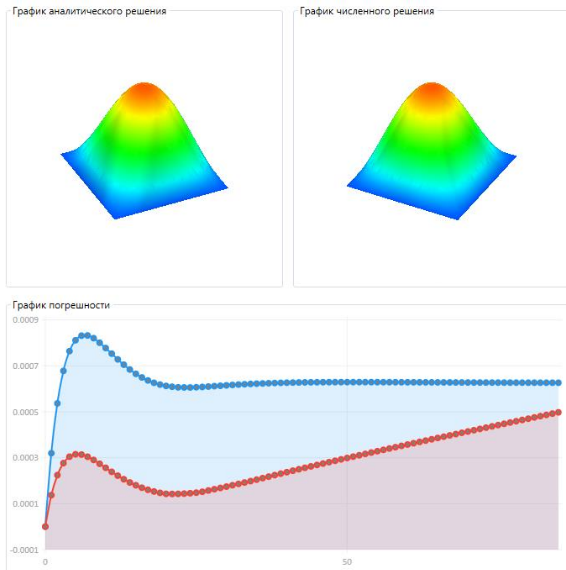
Тест №3



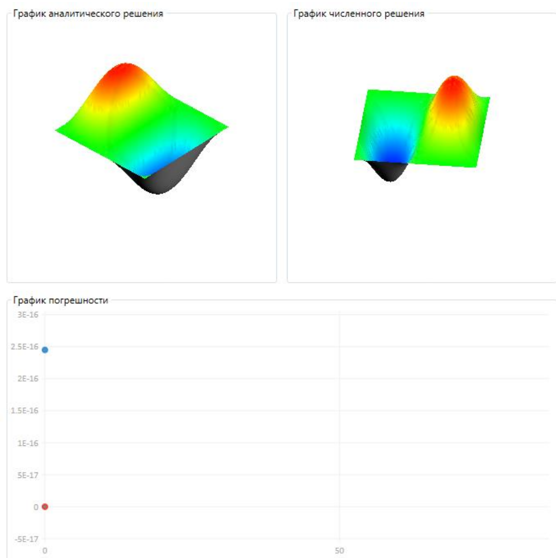
Тест №3



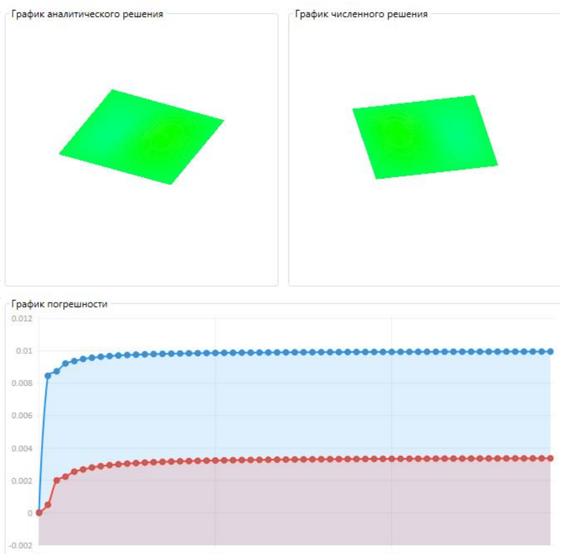
Тест №4



Тест №4



Тест №5



Тест №5

Литература

1. А. А. Самарский, “Схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения теплопроводности”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **3**:5 (1963), 812–840; *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, **3**:5 (1963), 1107–1146

2. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров