一类倒向随机微分方程 L^p $(p \geq 1)$ 解的存在惟一性及生成元的表示定理

姓名: 肖 立 顺

导师: 范 胜 君

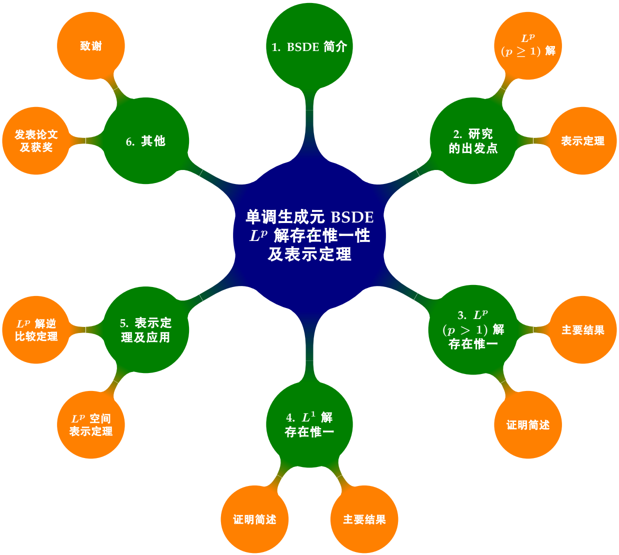
专业: 应用数学

方向: 随机分析

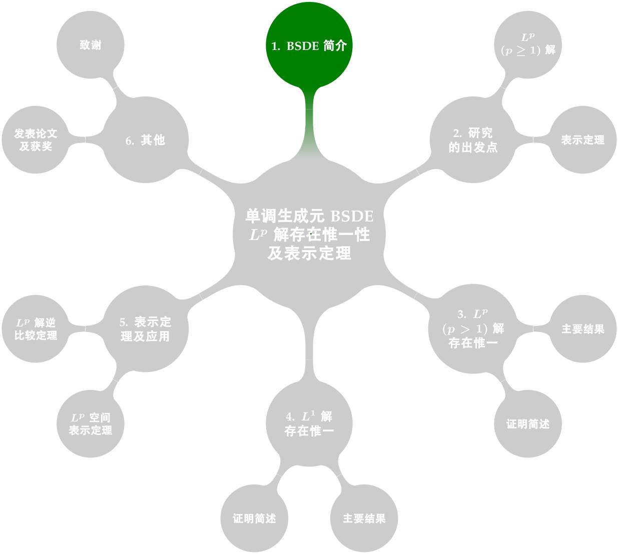
2010 级硕士学位论文答辩

2013-05-21

内容提纲


单调生成元 BSDE
L^p 解存在惟一性
及表示定理
1. BSDE 简介
2. 研究的出发点
L^p $(p \geq 1)$ 解
表示定理
3. L^p $(p > 1)$ 解存在惟一
主要结果
证明简述
4. L^1 解存在惟一
证明简述
主要结果
5. 表示定理及应用
L^p 解逆比较定理
L^p 空间表示定理
6. 其他
发表论文及获奖
致谢

倒向随机微分方程 (BSDE) 简介



倒向随机微分方程 (BSDE) 简介

线性的倒向随机微分方程 (BSDE) 由 [Bismut(1973)] 提出;
[Pardoux-Peng(1990)] 提出非线性 BSDE 如下:

$$y_t = \xi + \int_t^T g(s, y_s, z_s)\, \mathrm{d}s - \int_t^T z_s\, \mathrm{d}B_s, \quad t \in [0, T]. \tag{1}$$

T	终端时间, $0 \leq T \leq +\infty$
ξ	终端条件, 可测随机变量
g	生成元, $g(\omega, t, y, z) : \Omega \times [0, T] \times \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k\times d} \to \mathbf{R}^k$
(ξ, T, g)	BSDE 的参数
$(y_t, z_t)_{t\in[0,T]}$	BSDE 的适应解

倒向随机微分方程 (BSDE) 简介

线性的倒向随机微分方程 (BSDE) 由 [Bismut(1973)] 提出;
[Pardoux-Peng(1990)] 提出非线性 BSDE 如下:

$$y_t = \xi + \int_t^T g(s, y_s, z_s)\,\mathrm{d}s - \int_t^T z_s\,\mathrm{d}B_s, \quad t \in [0, T]. \tag{1}$$

T	终端时间, $0 \le T \le +\infty$
ξ	终端条件, 可测随机变量
g	生成元, $g(\omega, t, y, z) : \Omega \times [0, T] \times \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k\times d} \to \mathbf{R}^k$
(ξ, T, g)	BSDE 的参数
$(y_t, z_t)_{t\in[0,T]}$	BSDE 的适应解

倒向随机微分方程 (BSDE) 简介

线性的倒向随机微分方程 (BSDE) 由 [Bismut(1973)] 提出;
[Pardoux-Peng(1990)] 提出非线性 BSDE 如下:

$$y_t = \xi + \int_t^T g(s, y_s, z_s)\, \mathrm{d}s - \int_t^T z_s\, \mathrm{d}B_s, \quad t \in [0, T]. \tag{1}$$

T	终端时间, $0 \le T \le +\infty$
ξ	终端条件, 可测随机变量
g	生成元, $g(\omega, t, y, z) : \Omega \times [0, T] \times \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k\times d} \to \mathbf{R}^k$
(ξ, T, g)	BSDE 的参数
$(y_t, z_t)_{t\in[0,T]}$	BSDE 的适应解

倒向随机微分方程 (BSDE) 简介

线性的倒向随机微分方程 (BSDE) 由 [Bismut(1973)] 提出;
[Pardoux-Peng(1990)] 提出非线性 BSDE 如下:

$$y_t = \xi + \int_t^T g(s, y_s, z_s)\,\mathrm{d}s - \int_t^T z_s\,\mathrm{d}B_s, \quad t \in [0, T]. \tag{1}$$

T	终端时间, $0 \le T \le +\infty$
ξ	终端条件, 可测随机变量
g	生成元, $g(\omega, t, y, z) : \Omega \times [0, T] \times \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k\times d} \to \mathbf{R}^k$
(ξ, T, g)	BSDE 的参数
$(y_t, z_t)_{t\in[0,T]}$	BSDE 的适应解

倒向随机微分方程 (BSDE) 简介

线性的倒向随机微分方程 (BSDE) 由 [Bismut(1973)] 提出;
[Pardoux-Peng(1990)] 提出非线性 BSDE 如下:

$$y_t = \xi + \int_t^T g(s, y_s, z_s)\,\mathrm{d}s - \int_t^T z_s\,\mathrm{d}B_s, \quad t \in [0, T]. \tag{1}$$

T	终端时间, $0 \le T \le +\infty$
ξ	终端条件, 可测随机变量
g	生成元, $g(\omega, t, y, z) : \Omega \times [0, T] \times \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k\times d} \to \mathbf{R}^k$
(ξ, T, g)	BSDE 的参数
$(y_t, z_t)_{t\in[0,T]}$	BSDE 的适应解

倒向随机微分方程 (BSDE) 简介

线性的倒向随机微分方程 (BSDE) 由 [Bismut(1973)] 提出;
[Pardoux-Peng(1990)] 提出非线性 BSDE 如下:

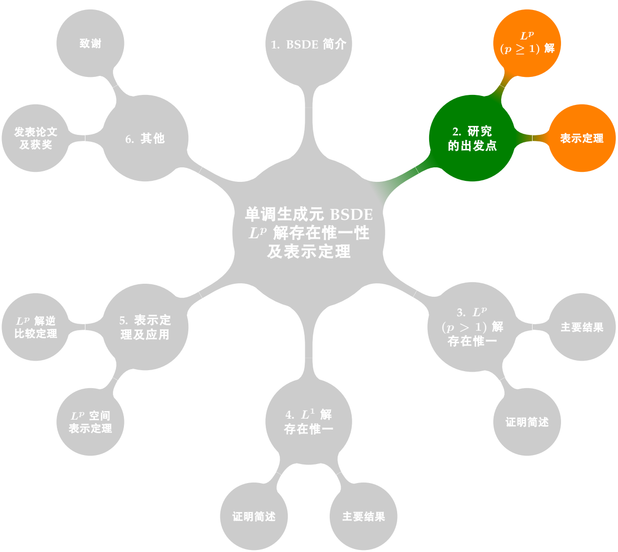
$$y_t = \xi + \int_t^T g(s, y_s, z_s)\,\mathrm{d}s - \int_t^T z_s\,\mathrm{d}B_s, \quad t \in [0, T]. \tag{1}$$

T	终端时间, $0 \le T \le +\infty$
ξ	终端条件, 可测随机变量
g	生成元, $g(\omega, t, y, z) : \Omega \times [0, T] \times \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k\times d} \to \mathbf{R}^k$
(ξ, T, g)	BSDE 的参数
$(y_t, z_t)_{t\in[0,T]}$	BSDE 的适应解

倒向随机微分方程 (BSDE) 简介

- [Duffie-Epstein(1992)], 效用函数理论;
- [Peng(1991)], 反应扩散方程和 Navier-Stokes 方程;
- [El Karoui-Peng-Quenez(1997b)], 派生证券 (如期权期货等);
- [Peng(1997)], g-期望和条件 g-期望, 金融风险度量;
- 反射倒向随机微分方程 (RBSDE), 正倒向随机微分方程 (FBSDE), 倒向重随机微分方程 (BDSDE), 以及带跳的、超前的 BSDE;
- 解的性质: [Peng(1992)] 提出 BSDE 解的比较定理;
- [Briand-Coquet-Hu-Mémin-Peng(2000)] 提出解的逆比较定理, 生成元表示定理;
- …… ……

研究的出发点

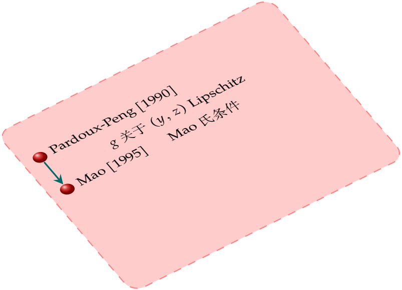

单调生成元 BSDE
L^p 解存在惟一性
及表示定理
1. BSDE 简介
2. 研究的出发点
L^p $(p \geq 1)$ 解
表示定理
3. L^p $(p>1)$ 解存在惟一
主要结果
证明简述
4. L^1 解存在惟一
证明简述
主要结果
5. 表示定理及应用
L^p 解逆比较定理
L^p 空间表示定理
6. 其他
发表论文及获奖
致谢

L^p ($p \geq 1$) 解的存在惟一性

- Pardoux-Peng [1990]
  g 关于 (y,z) Lipschitz

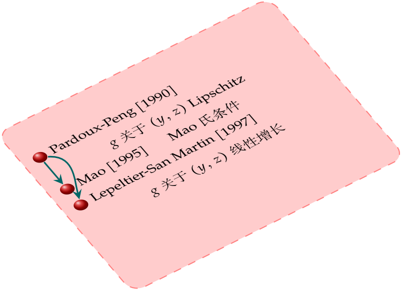
L^p $(p \geq 1)$ 解的存在惟一性

已有结果 ⟶ 进行推广



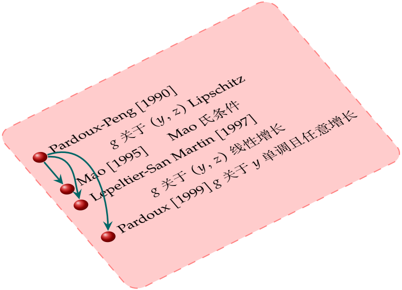
L^p $(p \geq 1)$ 解的存在惟一性

已有结果 $\longrightarrow$ 进行推广



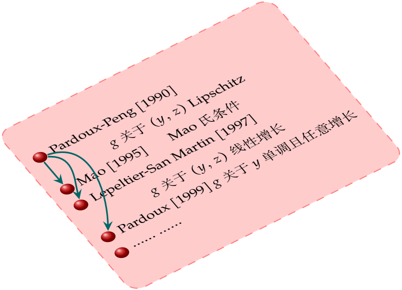
L^p ($p \geq 1$) 解的存在惟一性

已有结果 ⟶ 进行推广



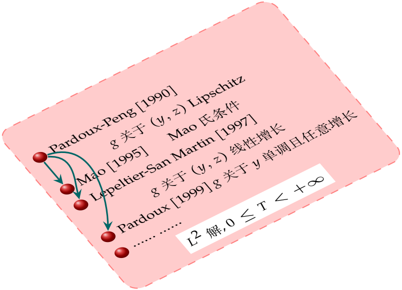
L^p ($p \geq 1$) 解的存在惟一性

已有结果 $\longrightarrow$ 进行推广



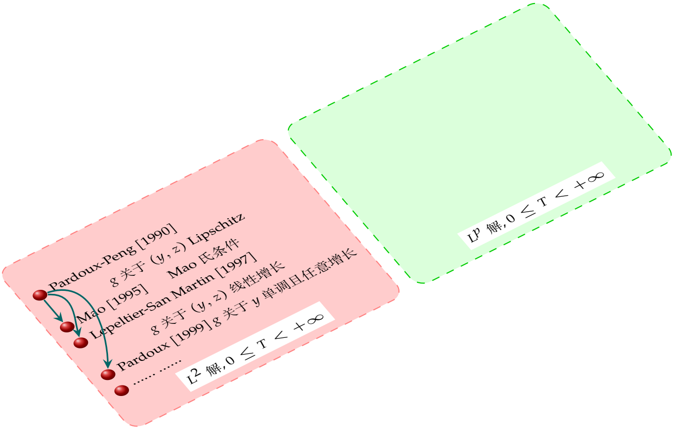
L^p $(p \geq 1)$ 解的存在惟一性

已有结果 $\longrightarrow$ 进行推广



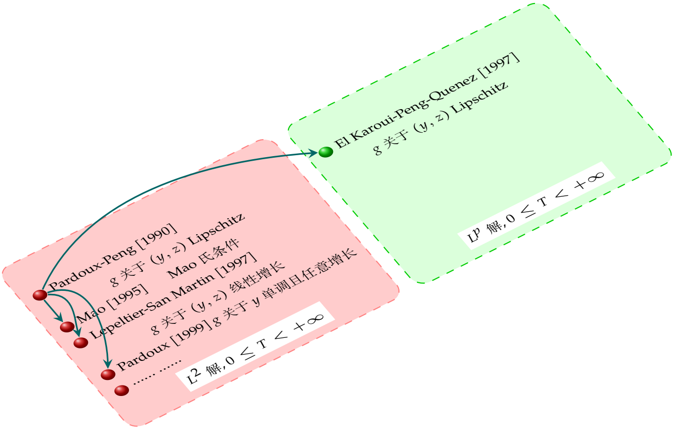
L^p $(p \geq 1)$ 解的存在惟一性

已有结果 $\longrightarrow$ 进行推广



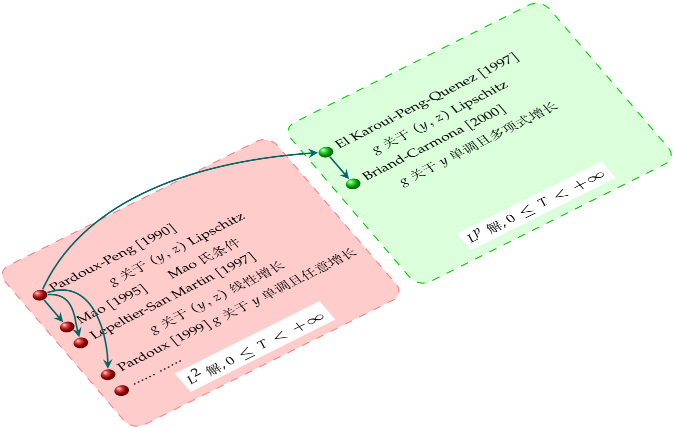
L^p ($p \geq 1$) 解的存在惟一性

已有结果 ⟶ 进行推广



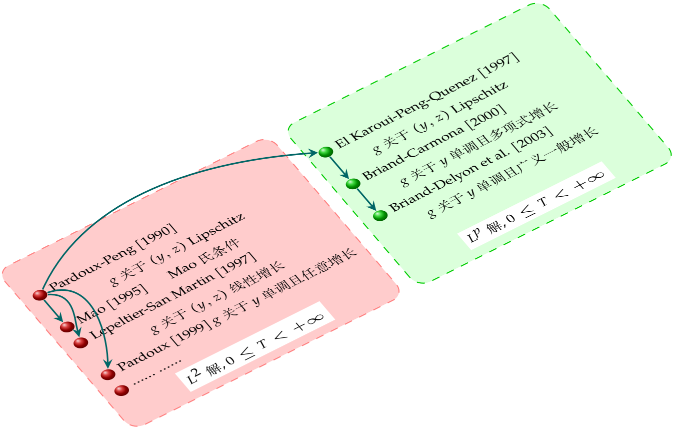
L^p $(p \geq 1)$ 解的存在惟一性

已有结果 ⟶ 进行推广



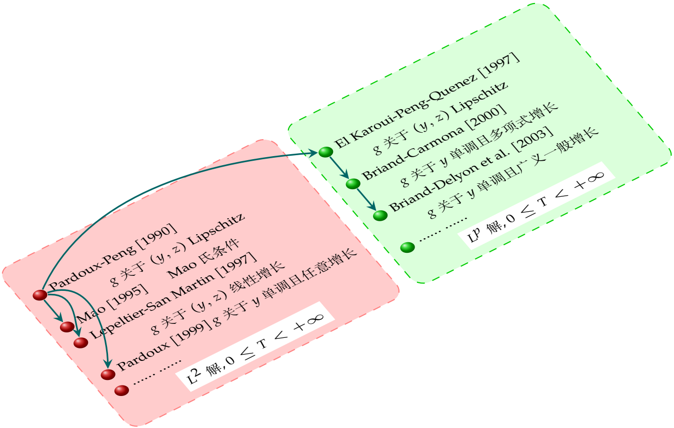
L^p ($p \geq 1$) 解的存在惟一性

已有结果 ⟶ 进行推广



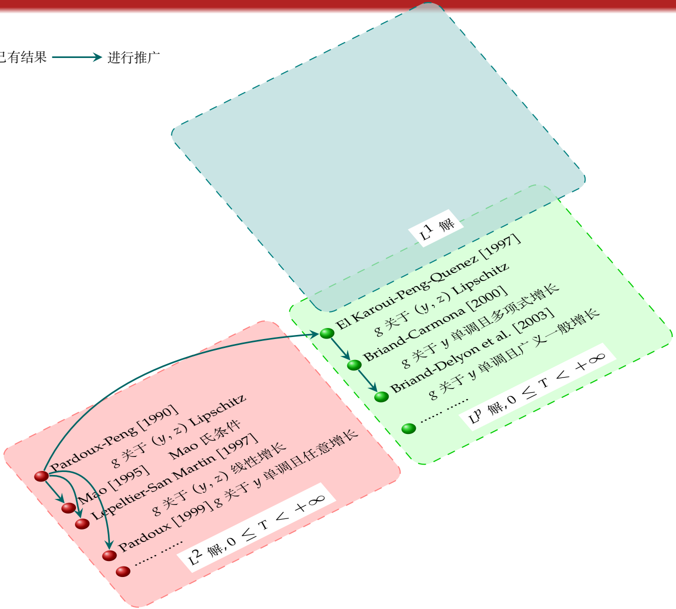
L^p ($p \geq 1$) 解的存在惟一性

已有结果 $\longrightarrow$ 进行推广

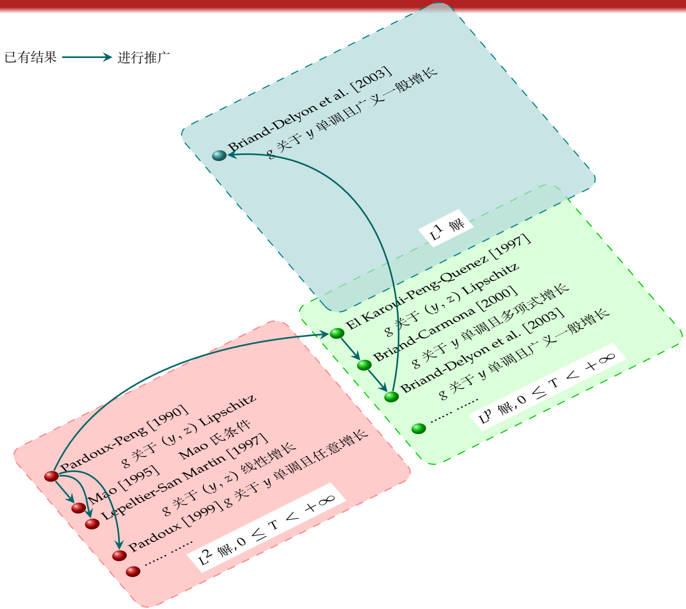


L^p $(p \geq 1)$ 解的存在惟一性

已有结果 ⟶ 进行推广

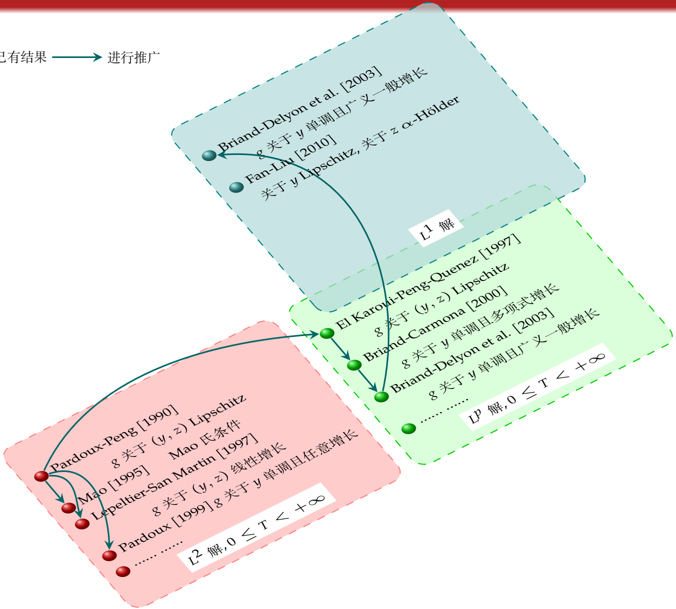


L^p $(p \geq 1)$ 解的存在惟一性



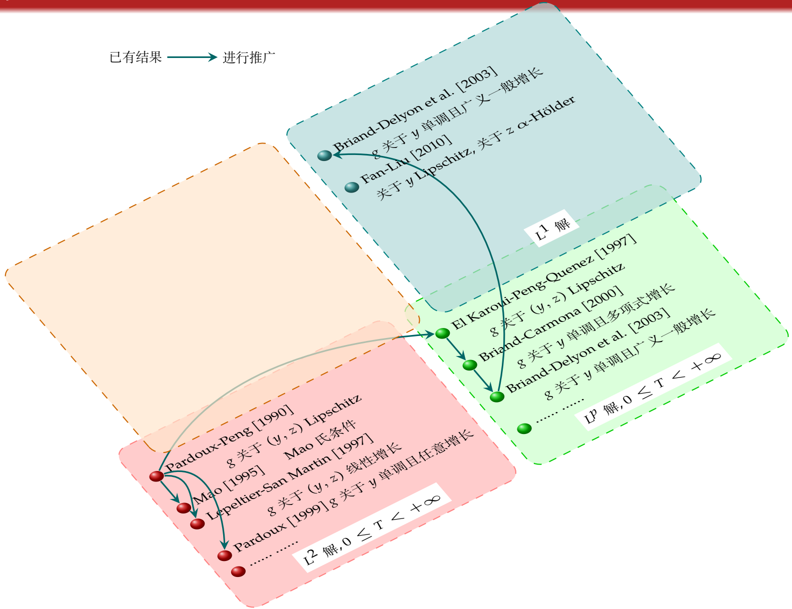
L^p $(p \geq 1)$ 解的存在惟一性

已有结果 ⟶ 进行推广

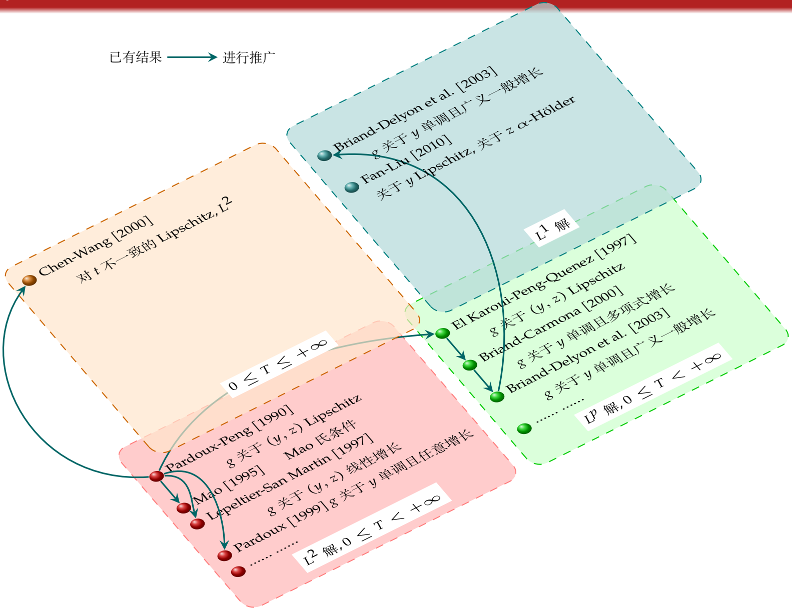


L^p $(p \geq 1)$ 解的存在惟一性

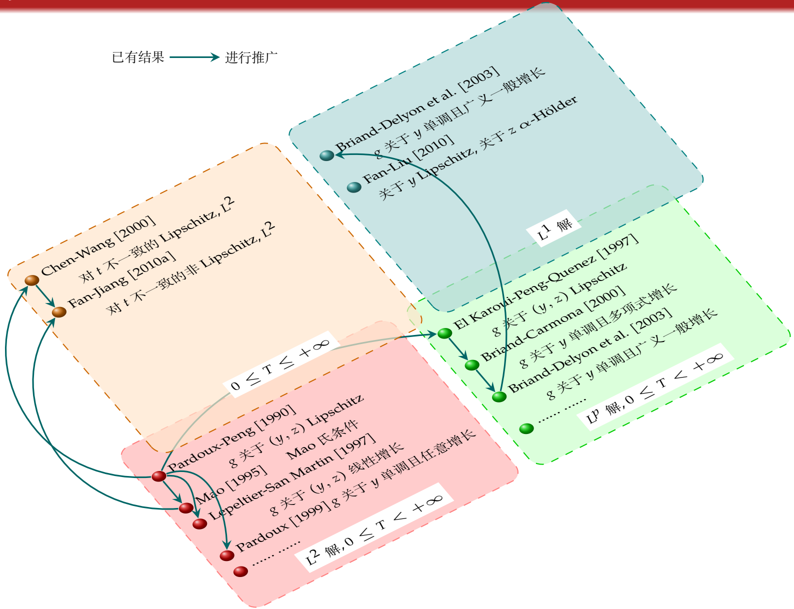
已有结果 ⟶ 进行推广



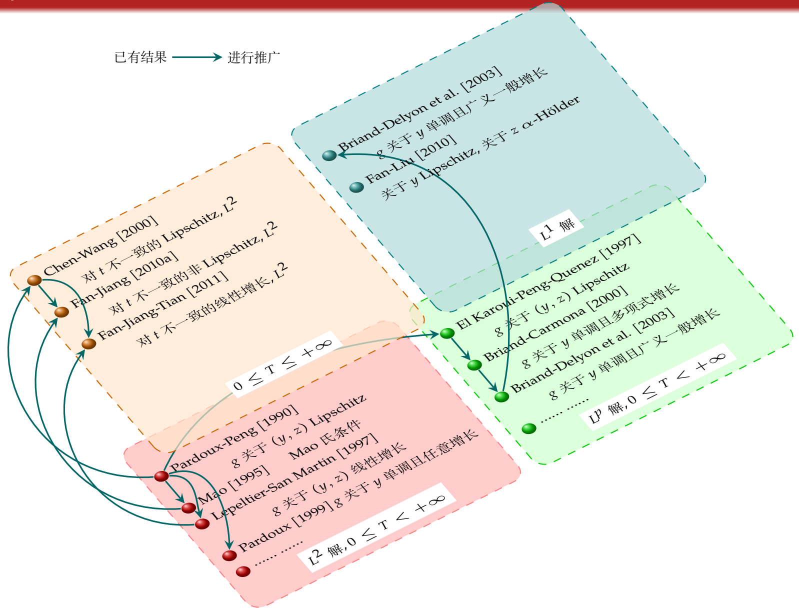
L^p $(p \geq 1)$ 解的存在惟一性



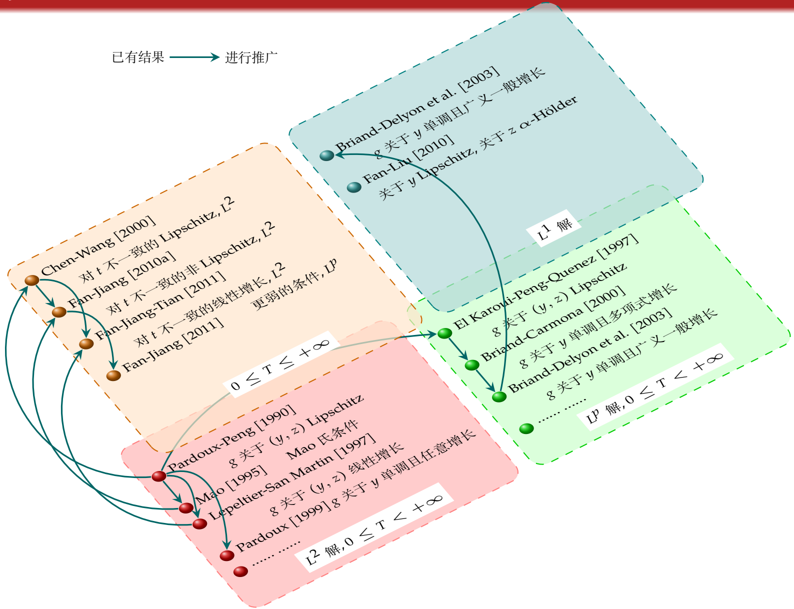
L^p $(p \geq 1)$ 解的存在惟一性



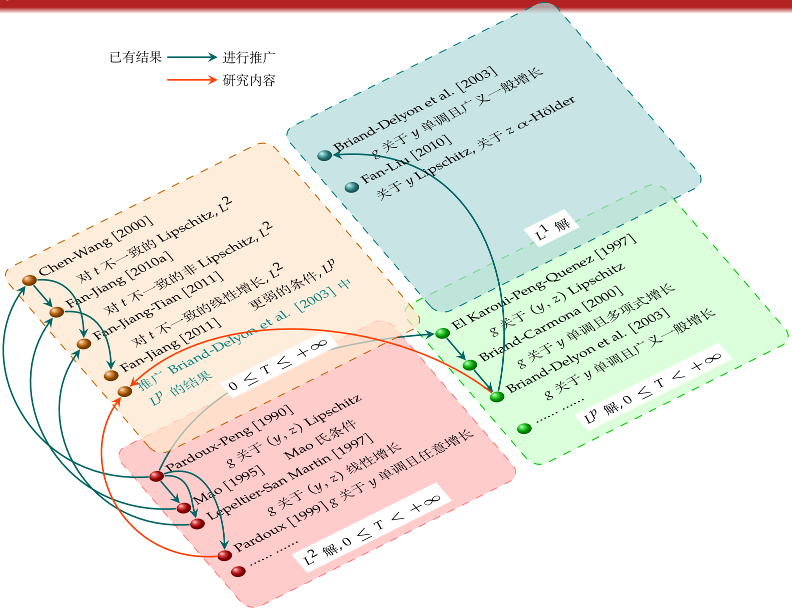
L^p $(p \geq 1)$ 解的存在惟一性



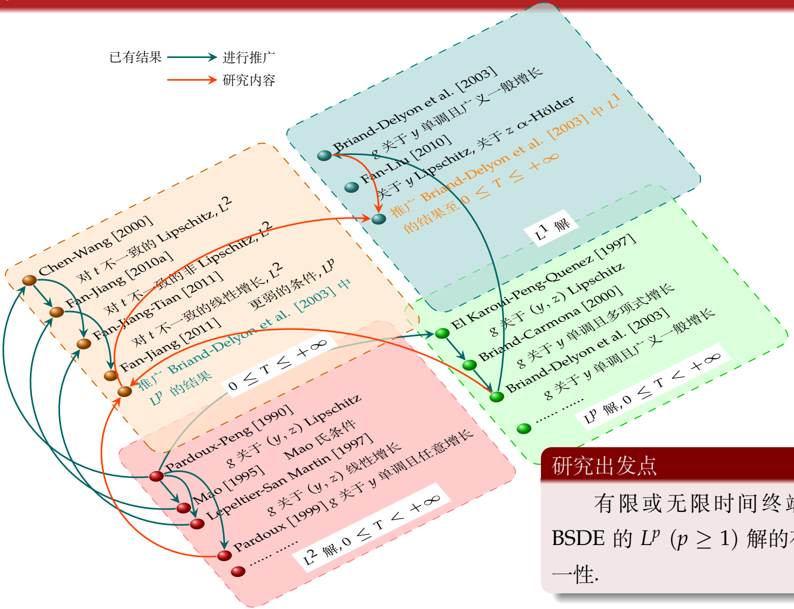
L^p ($p \geq 1$) 解的存在惟一性



L^p $(p \geq 1)$ 解的存在惟一性



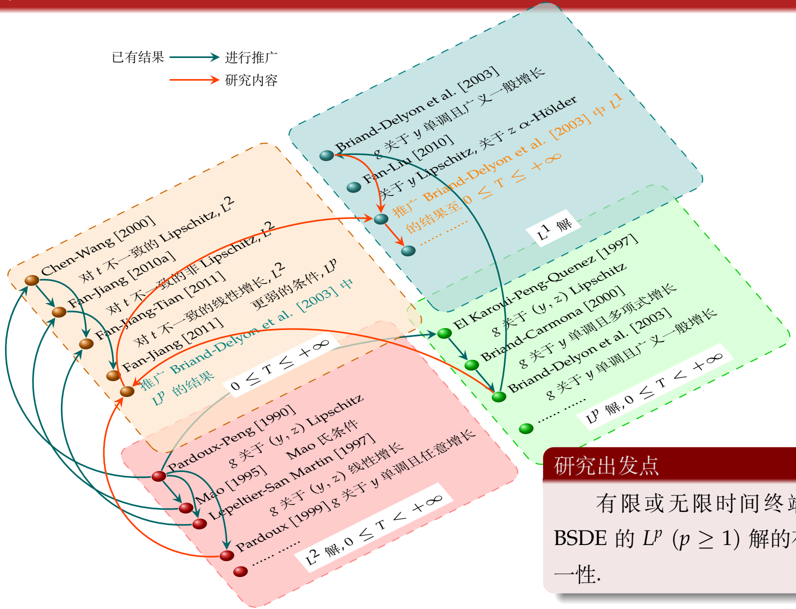
L^p ($p \geq 1$) 解的存在惟一性



研究出发点

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p ($p \geq 1$) 解的存在惟一性.

L^p $(p \geq 1)$ 解的存在惟一性



研究出发点

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p \geq 1)$ 解的存在惟一性.

生成元表示定理

生成元表示定理

- Briand-Coquet et al. [2000], 在经典 Lipschitz 条件及两个附加条件下得到表示定理

生成元表示定理

- Briand-Coquet et al. [2000], 在经典 Lipschitz 条件及两个附加条件下得到表示定理
- Jiang [2005a,b,c],Jiang [2006], Jiang [2008], 去掉了两个附加条件

已有结果 ⟶ 进行推广

生成元表示定理

- Briand-Coquet et al. [2000], 在经典 Lipschitz 条件及两个附加条件下得到表示定理
- Jiang [2005a,b,c],Jiang [2006], Jiang [2008], 去掉了两个附加条件
- 贾广岩 [2008] 弱化 Jiang [2008] 中的 Lipschitz 条件为线性增长, 在解不惟一的情况下得到生成元的不变表示定理

已有结果 $\longrightarrow$ 进行推广

生成元表示定理

- Briand-Coquet et al. [2000], 在经典 Lipschitz 条件及两个附加条件下得到表示定理
- Jiang [2005a,b,c],Jiang [2006], Jiang [2008], 去掉了两个附加条件
- 贾广岩 [2008] 弱化 Jiang [2008] 中的 Lipschitz 条件为线性增长, 在解不惟一的情况下得到生成元的不变表示定理
- Zhang-Fan [2013] 建立有限或无限时间终端 BSDE 生成元表示定理, 其中生成元满足对 t 不一致的线性增长条件

已有结果 $\longrightarrow$ 进行推广

生成元表示定理

- Briand-Coquet et al. [2000], 在经典 Lipschitz 条件及两个附加条件下得到表示定理
- Jiang [2005a,b,c],Jiang [2006], Jiang [2008], 去掉了两个附加条件
- 贾广岩 [2008] 弱化 Jiang [2008] 中的 Lipschitz 条件为线性增长, 在解不惟一的情况下得到生成元的不变表示定理
- Zhang-Fan [2013] 建立有限或无限时间终端 BSDE 生成元表示定理, 其中生成元满足对 t 不一致的线性增长条件

L^2 随机变量空间

已有结果 ⟶ 进行推广

生成元表示定理

- Briand-Coquet et al. [2000], 在经典 Lipschitz 条件及两个附加条件下得到表示定理
- Jiang [2005a,b,c],Jiang [2006], Jiang [2008], 去掉了两个附加条件
- 贾广岩 [2008] 弱化 Jiang [2008] 中的 Lipschitz 条件为线性增长, 在解不惟一的情况下得到生成元的不变表示定理
- Zhang-Fan [2013] 建立有限或无限时间终端 BSDE 生成元表示定理, 其中生成元满足对 t 不一致的线性增长条件
- Fan-Jiang-XU [2011] 在随机过程空间中得到生成元表示定理, 其中生成元关于 y 单调和多项式增长

L^2 随机变量空间

已有结果 $\longrightarrow$ 进行推广

生成元表示定理

- 问题一:
  在 L^p ($p > 1$) 空间中表示定理是否仍然成立?

L^p ($p > 1$) 随机变量空间

- Briand-Coquet et al. [2000], 在经典 Lipschitz 条件及两个附加条件下得到表示定理
- Jiang [2005a,b,c],Jiang [2006], Jiang [2008], 去掉了两个附加条件
- 贾广岩 [2008] 弱化 Jiang [2008] 中的 Lipschitz 条件为线性增长, 在解不惟一的情况下得到生成元的不变表示定理
- Zhang-Fan [2013] 建立有限或无限时间终端 BSDE 生成元表示定理, 其中生成元满足对 t 不一致的线性增长条件
- Fan-Jiang-XU [2011] 在随机过程空间中得到生成元表示定理, 其中生成元关于 y 单调和多项式增长

L^2 随机变量空间

已有结果 $\longrightarrow$ 进行推广

生成元表示定理

- 问题一：
  在 L^p （$p>1$）空间中表示定理是否仍然成立?
- Song-Hu-Chen [2012] 在 L^p （$p>1$）空间中得到表示定理，生成元满足一致 Lipschitz 条件

L^p （$p>1$）随机变量空间

- Briand-Coquet et al. [2000], 在经典 Lipschitz 条件及两个附加条件下得到表示定理
- Jiang [2005a,b,c],Jiang [2006], Jiang [2008], 去掉了两个附加条件
- 贾广岩 [2008] 弱化 Jiang [2008] 中的 Lipschitz 条件为线性增长，在解不惟一的情况下得到生成元的不变表示定理
- Zhang-Fan [2013] 建立有限或无限时间终端 BSDE 生成元表示定理，其中生成元满足对 t 不一致的线性增长条件
- Fan-Jiang-XU [2011] 在随机过程空间中得到生成元表示定理，其中生成元关于 y 单调和多项式增长

L^2 随机变量空间

已有结果 $\longrightarrow$ 进行推广

生成元表示定理

- 问题一：
  在 L^p $(p>1)$ 空间中表示定理是否仍然成立？
- Song-Hu-Chen [2012] 在 L^p $(p>1)$ 空间中得到表示定理，生成元满足一致 Lipschitz 条件
- 问题二：
  终端时间无限，L^p $(p>1)$ 空间中生成元表示定理是否成立？

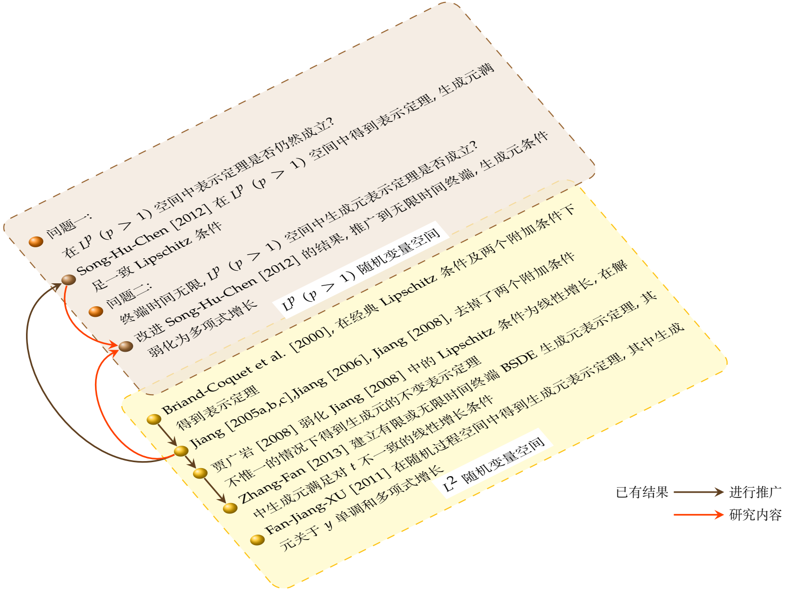
L^p $(p>1)$ 随机变量空间

- Briand-Coquet et al. [2000]，在经典 Lipschitz 条件及两个附加条件下得到表示定理
- Jiang [2005a,b,c],Jiang [2006], Jiang [2008]，去掉了两个附加条件
- 贾广岩 [2008] 弱化 Jiang [2008] 中的 Lipschitz 条件为线性增长，在解不惟一的情况下得到生成元的不变表示定理
- Zhang-Fan [2013] 建立有限或无限时间终端 BSDE 生成元表示定理，其中生成元满足对 t 不一致的线性增长条件
- Fan-Jiang-XU [2011] 在随机过程空间中得到生成元表示定理，其中生成元关于 y 单调和多项式增长

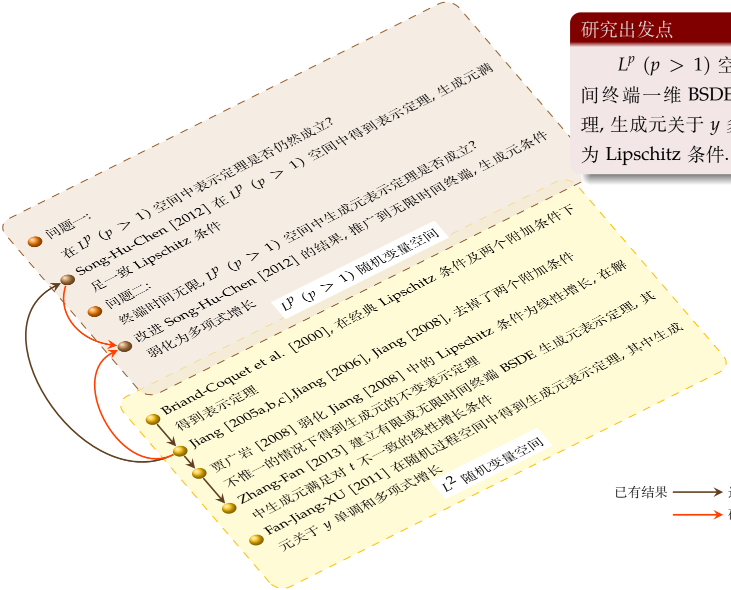
L^2 随机变量空间

已有结果 ⟶ 进行推广

生成元表示定理


问题一:
在 L^p $(p > 1)$ 空间中表示定理是否仍然成立?
Song-Hu-Chen [2012] 在 L^p $(p > 1)$ 空间中得到表示定理, 生成元满足一致 Lipschitz 条件
问题二:
终端时间无限, L^p $(p > 1)$ 空间中生成元表示定理是否成立?
改进 Song-Hu-Chen [2012] 的结果, 推广到无限时间终端, 生成元条件弱化为多项式增长
L^p $(p > 1)$ 随机变量空间
Briand-Coquet et al. [2000], 在经典 Lipschitz 条件及两个附加条件下得到表示定理
Jiang [2005a,b,c],Jiang [2006], Jiang [2008], 去掉了两个附加条件
贾广岩 [2008] 弱化 Jiang [2008] 中的 Lipschitz 条件为线性增长, 在解不惟一的情况下得到生成元的不变表示定理
Zhang-Fan [2013] 建立有限或无限时间终端 BSDE 生成元表示定理, 其中生成元满足对 t 不一致的线性增长条件
Fan-Jiang-XU [2011] 在随机过程空间中得到生成元表示定理, 其中生成元关于 y 单调和多项式增长
L^2 随机变量空间
已有结果
进行推广
研究内容

生成元表示定理



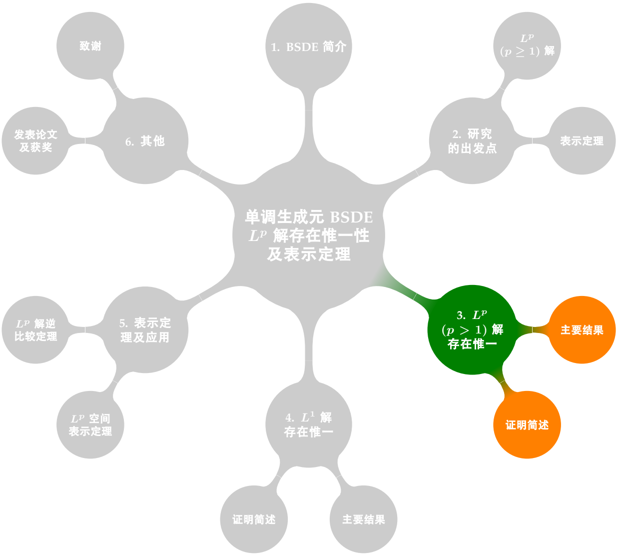
已有结果 ⟶ 进行推广

⟶ 研究内容

研究出发点

L^p $(p>1)$ 空间, 有限或无限时间终端一维 BSDE 的生成元表示定理, 生成元关于 y 多项式增长, 关于 z 为 Lipschitz 条件.

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解的存在惟一性



有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 主要结果

令 $p>1, u(t), v(t):[0,T]\mapsto \mathbf{R}^+$ 满足 $\int_0^T \left(u(t)+v^2(t)\right) \mathrm{d}t < +\infty$.

生成元 g 的主要假设, $0\le T\le +\infty$

- H1 $\mathbf{E}\left[\left(\int_0^T |g(t,0,0)|\,\mathrm{d}t\right)^p\right] < +\infty$;
- H2 $\mathrm{d}\mathbf{P}\times \mathrm{d}t$ – a.e., $\forall z\in \mathbf{R}^{k\times d}$, $y\mapsto g(t,y,z)$ 连续;
- H3 g 关于 y 满足广义一般增长条件:
$$\forall r'\in \mathbf{R}^+,\ \psi_{r'}(t):=\sup_{|y|\le r'} |g(t,y,0)-g(t,0,0)| \in L^1([0,T]\times\Omega);$$
- H4 g 关于 y 满足对 t 不一致的单调条件:
$$\langle y_1-y_2, g(t,y_1,z)-g(t,y_2,z)\rangle \le u(t)|y_1-y_2|^2;$$
- H5 g 关于 z 满足对 t 不一致的 Lipschitz 连续条件:
$$|g(t,y,z_1)-g(t,y,z_2)|\le v(t)|z_1-z_2|.$$

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 主要结果

令 $p>1, u(t), v(t):[0,T]\mapsto \mathbf{R}^+$ 满足 $\int_0^T \big(u(t)+v^2(t)\big)\,\mathrm{d}t<+\infty$.

生成元 g 的主要假设, $0\le T\le +\infty$

- (H1) $\mathbf{E}\Big[\Big(\int_0^T |g(t,0,0)|\,\mathrm{d}t\Big)^p\Big]<+\infty$;
- (H2) $\mathrm{d}\mathbf{P}\times\mathrm{d}t-\text{a.e.}, \forall z\in\mathbf{R}^{k\times d}, y\mapsto g(t,y,z)$ 连续;
- (H3) g 关于 y 满足广义一般增长条件:

$$\forall r'\in\mathbf{R}^+,\ \psi_{r'}(t):=\sup_{|y|\le r'}|g(t,y,0)-g(t,0,0)|\in L^1([0,T]\times\Omega);$$

- (H4) g 关于 y 满足对 t 不一致的单调条件:

$$\langle y_1-y_2, g(t,y_1,z)-g(t,y_2,z)\rangle\le u(t)|y_1-y_2|^2;$$

- (H5) g 关于 z 满足对 t 不一致的 Lipschitz 连续条件:

$$|g(t,y,z_1)-g(t,y,z_2)|\le v(t)|z_1-z_2|.$$

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p > 1)$ 解 --- 主要结果

令 $p > 1, u(t), v(t) : [0, T] \mapsto \mathbf{R}^+$ 满足 $\int_0^T \left(u(t) + v^2(t)\right) \mathrm{d}t < +\infty$.

生成元 g 的主要假设, $0 \le T \le +\infty$

- H1 $\mathbf{E}\left[\left(\int_0^T |g(t,0,0)|\,\mathrm{d}t\right)^p\right] < +\infty$;
- H2 $\mathrm{d}\mathbf{P} \times \mathrm{d}t$ – a.e., $\forall z \in \mathbf{R}^{k\times d}, y \mapsto g(t,y,z)$ 连续;
- H3 g 关于 y 满足广义一般增长条件;
- H4 g 关于 y 满足对 t 不一致的单调条件;
- H5 g 关于 z 满足对 t 不一致的 Lipschitz 连续条件.

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 主要结果

令 $p>1, u(t), v(t):[0,T]\mapsto \mathbf{R}^+$ 满足 $\int_0^T \big(u(t)+v^2(t)\big)\,\mathrm{d}t<+\infty$.

生成元 g 的主要假设, $0\leq T\leq +\infty$

- H1 $\mathbf{E}\Big[\big(\int_0^T |g(t,0,0)|\,\mathrm{d}t\big)^p\Big]<+\infty$;
- H2 $\mathrm{d}\mathbf{P}\times\ \mathrm{d}t-\mathrm{a.e.}, \forall z\in\mathbf{R}^{k\times d}, y\mapsto g(t,y,z)$ 连续;
- H3 g 关于 y 满足广义一般增长条件;
- H4 g 关于 y 满足对 t 不一致的单调条件;
- H5 g 关于 z 满足对 t 不一致的 Lipschitz 连续条件.

定理 2.3. [P8]: L^p $(p>1)$ 解的存在惟一性

如果 $0\leq T\leq+\infty, p>1$ 且 g 满足 (H1)–(H5), 则 $\forall\xi\in L^p(\Omega,\mathcal{F}_T,\mathbf{P};\mathbf{R}^k)$, BSDE (ξ,T,g) 存在惟一解 $(y_t,z_t)_{t\in[0,T]}\in\mathcal{S}^p\times p$.

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 主要结果

令 $p>1, u(t), v(t) : [0,T] \mapsto \mathbf{R}^+$ 满足 $\int_0^T \left(u(t)+v^2(t)\right) \mathrm{d}t < +\infty$.

生成元 g 的主要假设, $0 \le T \le +\infty$

- H1 $\mathbf{E}\Big[\Big(\int_0^T |g(t,0,0)|\,\mathrm{d}t\Big)^p\Big] < +\infty$;
- H2 $\mathrm{d}\mathbf{P} \times \mathrm{d}t - \text{a.e.}, \forall z \in \mathbf{R}^{k\times d}, y \mapsto g(t,y,z)$ 连续;
- H3 g 关于 y 满足广义一般增长条件;
- H4 g 关于 y 满足对 t 不一致的单调条件;
- H5 g 关于 z 满足对 t 不一致的 Lipschitz 连续条件.

定理 2.4.[P9]: L^p $(p>1)$ 解的比较定理, $0 \le T \le +\infty$

BSDE (ξ^i, T, g_i) 存在惟一解 $(y^i_\cdot, z^i_\cdot) \in \mathcal{S}^p \times p$. 如果 $\xi^1 \le \xi^2$, g 满足 (H4) – (H5), 且 $g_1(t, y^2_t, z^2_t) \le g_2(t, y^2_t, z^2_t)$, 则 $\forall t \in [0,T]$, 有 $y^1_t \le y^2_t$.

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 惟一性证明

先验估计的假设: $0 \le T \le +\infty$

(A) $\forall (y,z) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k\times d}$, $\mathbf{E}\left[\left(\int_0^T f_t\,\mathrm{d}t\right)^p\right] < +\infty$

$$\langle y, g(t,y,z)\rangle \le u(t)|y|^2 + v(t)|y||z| + f_t|y|.$$

命题 2.9. [P14]: L^p $(p>1)$ 解的先验估计

令 $0 \le T \le +\infty$, g 满足 (A), $\forall p > 1$, 则 $\exists C_p > 0$ 使得 $\forall\, 0 \le r \le t \le T$,

$$\mathbf{E}\left[\sup_{s\in[t,T]} |y_s|^p \middle| \mathcal{F}_r\right] + \mathbf{E}\left[\left(\int_t^T |z_s|^2\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{p}{2}} \middle| \mathcal{F}_r\right] \le C_p \mathbf{E}\left[|\xi|^p + \left(\int_t^T f_s\,\mathrm{d}s\right)^p \middle| \mathcal{F}_r\right].$$

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 证明困难之处

(H3′) g 关于 y 满足一般增长条件: $|g(t,y,z)| \le |g(t,0,z)| + u(t)\varphi(|y|)$.

$0 \le T < +\infty$		$0 \le T \le +\infty$	
$\|y\|_p^p := \mathbf{E}\left[\int_0^T |y_s|^p \mathrm{d}s\right] < +\infty$		$\|y\|_{\mathcal{S}^p}^p := \mathbf{E}\left[\sup_{s\in[0,T]} |y_s|^p\right] < +\infty$	
$\mathbf{E}\left[\int_0^T \|g(t,0,0)\|^p \mathrm{d}t\right] < +\infty$		$\mathbf{E}\left[\left(\int_0^T \|g(t,0,0)\| \mathrm{d}t\right)^p\right] < +\infty$	
$\int_0^T C\,\mathrm{d}t = CT < +\infty$	✔	$\int_0^T C\,\mathrm{d}t \not< +\infty$	✘
$\|X\|_p \le C\|X\|_{\mathcal{S}^p}$	✔	$\|X\|_p \not\le C\|X\|_{\mathcal{S}^p}$	✘
$\int_0^T v^2(s)\mathrm{d}s < +\infty \Rightarrow \int_0^T v(s)\mathrm{d}s < +\infty$	✔	$\int_0^T v^2(s)\mathrm{d}s < +\infty \nRightarrow \int_0^T v(s)\mathrm{d}s < +\infty$	✘
(H3′) [Pardoux(1999)]	✔	(H3′) 推广到终端时间无限	✘

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p > 1)$ 解 --- 证明困难之处

H3 g 关于 y 满足一般增长条件: $|g(t,y,z)| \le |g(t,0,z)| + u(t)\varphi(|y|)$.

$0 \le T < +\infty$		$0 \le T \le +\infty$	
$\|y\|_p^p := \mathbf{E}\left[\int_0^T \|y_s\|^p \mathrm{d}s\right] < +\infty$		$\|y\|_{\mathcal{S}^p}^p := \mathbf{E}\left[\sup_{s\in[0,T]} \|y_s\|^p\right] < +\infty$	
$\mathbf{E}\left[\int_0^T \|g(t,0,0)\|^p \,\mathrm{d}t\right] < +\infty$		$\mathbf{E}\left[\left(\int_0^T \|g(t,0,0)\| \,\mathrm{d}t\right)^p\right] < +\infty$	
$\int_0^T C\,\mathrm{d}t = CT < +\infty$	✔	$\int_0^T C\,\mathrm{d}t \not< +\infty$	✘
$\|X\|_p \le C\|X\|_{\mathcal{S}^p}$	✔	$\|X\|_p \not\le C\|X\|_{\mathcal{S}^p}$	✘
$\int_0^T v^2(s)\mathrm{d}s < +\infty \Rightarrow \int_0^T v(s)\mathrm{d}s < +\infty$	✔	$\int_0^T v^2(s)\mathrm{d}s < +\infty \not\Rightarrow \int_0^T v(s)\mathrm{d}s < +\infty$	✘
(H3′) [Pardoux(1999)]	✔	(H3′) 推广到终端时间无限	✘

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 证明困难之处

(H3) g 关于 y 满足一般增长条件: $|g(t,y,z)| \le |g(t,0,z)| + u(t)\varphi(|y|)$.

$0 \le T < +\infty$		$0 \le T \le +\infty$	
$\|y\|_p^p := \mathbf{E}\left[\int_0^T \|y_s\|^p ds\right] < +\infty$		$\|y\|_{\mathcal{S}^p}^p := \mathbf{E}\left[\sup_{s\in[0,T]}\|y_s\|^p\right] < +\infty$	
$\mathbf{E}\left[\int_0^T \|g(t,0,0)\|^p\, dt\right] < +\infty$		$\mathbf{E}\left[\left(\int_0^T \|g(t,0,0)\|\, dt\right)^p\right] < +\infty$	
$\int_0^T C\,dt = CT < +\infty$	✔	$\int_0^T C\,dt \not< +\infty$	✘
$\|X\|_p \le C\|X\|_{\mathcal{S}^p}$	✔	$\|X\|_p \not\le C\|X\|_{\mathcal{S}^p}$	✘
$\int_0^T v^2(s)ds < +\infty \Rightarrow \int_0^T v(s)ds < +\infty$	✔	$\int_0^T v^2(s)ds < +\infty \not\Rightarrow \int_0^T v(s)ds < +\infty$	✘
(H3′) [Pardoux(1999)]	✔	(H3′) 推广到终端时间无限	✘

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 证明困难之处

(H3) g 关于 y 满足一般增长条件: $|g(t,y,z)| \le |g(t,0,z)| + u(t)\varphi(|y|)$.

$0 \le T < +\infty$		$0 \le T \le +\infty$	
$\|y\|_p^p := \mathbf{E}\left[\int_0^T \|y_s\|^p ds\right] < +\infty$		$\|y\|_{\mathcal{S}^p}^p := \mathbf{E}\left[\sup_{s\in[0,T]}\|y_s\|^p\right] < +\infty$	
$\mathbf{E}\left[\int_0^T \|g(t,0,0)\|^p\,dt\right] < +\infty$		$\mathbf{E}\left[\left(\int_0^T \|g(t,0,0)\|\,dt\right)^p\right] < +\infty$	
$\int_0^T C\,dt = CT < +\infty$	✔	$\int_0^T C\,dt \nless +\infty$	✘
$\|X\|_p \le C\|X\|_{\mathcal{S}^p}$	✔	$\|X\|_p \nleq C\|X\|_{\mathcal{S}^p}$	✘
$\int_0^T v^2(s)ds < +\infty \Rightarrow \int_0^T v(s)ds < +\infty$	✔	$\int_0^T v^2(s)ds < +\infty \nRightarrow \int_0^T v(s)ds < +\infty$	✘
(H3′) [Pardoux(1999)]	✔	(H3′) 推广到终端时间无限	✘

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 证明困难之处

(H3) g 关于 y 满足一般增长条件: $|g(t,y,z)| \le |g(t,0,z)| + u(t)\varphi(|y|)$.

$0 \le T < +\infty$		$0 \le T \le +\infty$	
$\|y\|_p^p := \mathbf{E}\left[\int_0^T \|y_s\|^p \mathrm{d}s\right] < +\infty$		$\|y\|_{\mathcal{S}^p}^p := \mathbf{E}\left[\sup_{s\in[0,T]}\|y_s\|^p\right] < +\infty$	
$\mathbf{E}\left[\int_0^T \|g(t,0,0)\|^p \,\mathrm{d}t\right] < +\infty$		$\mathbf{E}\left[\left(\int_0^T \|g(t,0,0)\| \,\mathrm{d}t\right)^p\right] < +\infty$	
$\int_0^T C \,\mathrm{d}t = CT < +\infty$	✔	$\int_0^T C \,\mathrm{d}t \nless +\infty$	✘
$\|X\|_p \le C\|X\|_{\mathcal{S}^p}$	✔	$\|X\|_p \nleq C\|X\|_{\mathcal{S}^p}$	✘
$\int_0^T v^2(s)\mathrm{d}s < +\infty \Rightarrow \int_0^T v(s)\mathrm{d}s < +\infty$	✔	$\int_0^T v^2(s)\mathrm{d}s < +\infty \not\Rightarrow \int_0^T v(s)\mathrm{d}s < +\infty$	✘
(H3′) [Pardoux(1999)]	✔	(H3′) 推广到终端时间无限	✘

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 证明困难之处

- (H3') g 关于 y 满足一般增长条件: $|g(t,y,z)| \le |g(t,0,z)| + u(t)\varphi(|y|)$.

$0 \le T < +\infty$		$0 \le T \le +\infty$	
$\|y\|_p^p := \mathbf{E}\left[\int_0^T |y_s|^p \mathrm{d}s\right] < +\infty$		$\|y\|_{\mathcal{S}^p}^p := \mathbf{E}\left[\sup_{s\in[0,T]} |y_s|^p\right] < +\infty$	
$\mathbf{E}\left[\int_0^T |g(t,0,0)|^p \,\mathrm{d}t\right] < +\infty$		$\mathbf{E}\left[\left(\int_0^T |g(t,0,0)|\,\mathrm{d}t\right)^p\right] < +\infty$	
$\int_0^T C\,\mathrm{d}t = CT < +\infty$	✔	$\int_0^T C\,\mathrm{d}t \not< +\infty$	✘
$\|X\|_p \le C\|X\|_{\mathcal{S}^p}$	✔	$\|X\|_p \not\le C\|X\|_{\mathcal{S}^p}$	✘
$\int_0^T v^2(s)\mathrm{d}s < +\infty \Rightarrow \int_0^T v(s)\mathrm{d}s < +\infty$	✔	$\int_0^T v^2(s)\mathrm{d}s < +\infty \not\Rightarrow \int_0^T v(s)\mathrm{d}s < +\infty$	✘
(H3') [Pardoux(1999)]	✔	(H3') 推广到终端时间无限	✘

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 存在性证明

第一步:

假设 g 满足 (H2), (H3′), (H4) 和 (H5), $V \in p$,

$$|\xi| \le K,\ \mathrm{d}\mathbf{P} - \text{a.s.}, \qquad |g(t,0,V_t)| \le Ke^{-t},\ \mathrm{d}\mathbf{P} \times \mathrm{d}t - \text{a.e.}. \tag{2}$$

证明 BSDE (3) 在空间 $\mathcal{S}^2 \times 2$ 中存在解,

$$y_t = \xi + \int_t^T g(s,y_s,V_s)\,\mathrm{d}s - \int_t^T z_s\,\mathrm{d}B_s, \quad t \in [0,T]; \tag{3}$$

- 对 g 与 ρ_n 关于 y 做卷积得到 g_n, 关于 y 局部 Lipschitz 连续;
- 对 g_n 截断得到 $g_{n,q}$, 关于 y 是 Lipschitz 连续;
- BSDE $(\xi, T, g_{n,q})$ 有解 $(y^{n,q}, z^{n,q}) \in \mathcal{S}^2 \times 2$, $(y^n, z^n) \in \mathcal{S}^2 \times 2$;
- 对 BSDE (ξ, T, g_n) 两侧取弱极限.

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p > 1)$ 解 --- 存在性证明

第一步:

假设 g 满足 (H2), (H3′), (H4) 和 (H5), $V \in p$,

$$|\xi| \leq K,\ \mathrm{d}\mathbf{P} - \text{a.s.}, \qquad |g(t, 0, V_t)| \leq Ke^{-t},\ \mathrm{d}\mathbf{P} \times \mathrm{d}t - \text{a.e.}. \tag{2}$$

证明 BSDE (3) 在空间 $\mathcal{S}^2 \times 2$ 中存在解,

$$y_t = \xi + \int_t^T g(s, y_s, V_s)\,\mathrm{d}s - \int_t^T z_s\,\mathrm{d}B_s, \quad t \in [0, T]; \tag{3}$$

- 对 g 与 ρ_n 关于 y 做卷积得到 g_n, 关于 y 局部 Lipschitz 连续;
- 对 g_n 截断得到 $g_{n,q}$, 关于 y 是 Lipschitz 连续;
- BSDE $(\xi, T, g_{n,q})$ 有解 $(y^{n,q}, z^{n,q}) \in \mathcal{S}^2 \times 2$, $(y^n, z^n) \in \mathcal{S}^2 \times 2$;
- 对 BSDE (ξ, T, g_n) 两侧取弱极限.

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 存在性证明

第一步: P16–P22, 共 6 页

假设 g 满足 (H2), (H3′), (H4) 和 (H5), $V \in p$,

$$|\xi| \leq K,\ \mathrm{d}\mathbf{P}-\text{a.s.}, \qquad |g(t,0,V_t)| \leq Ke^{-t},\ \mathrm{d}\mathbf{P}\times\mathrm{d}t-\text{a.e.}. \tag{2}$$

证明 BSDE (3) 在空间 $\mathcal{S}^2 \times 2$ 中存在解,

$$y_t = \xi + \int_t^T g(s,y_s,V_s)\,\mathrm{d}s - \int_t^T z_s\,\mathrm{d}B_s, \quad t\in[0,T]; \tag{3}$$

- 对 g 与 ρ_n 关于 y 做卷积得到 g_n, 关于 y 局部 Lipschitz 连续;
- 对 g_n 截断得到 $g_{n,q}$, 关于 y 是 Lipschitz 连续;
- BSDE $(\xi,T,g_{n,q})$ 有解 $(y^{n,q},z^{n,q})\in\mathcal{S}^2\times 2$, $(y^n,z^n)\in\mathcal{S}^2\times 2$;
- 对 BSDE (ξ,T,g_n) 两侧取弱极限.

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 存在性证明

第二步

通过改进的特殊截断技术, 将假设 (H3′) 弱化为 (H3);

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 存在性证明

第二步

通过改进的特殊截断技术, 将假设 (H3′) 弱化为 (H3);

困难之处: 此时需在 g 不依赖于 z 时进行截断, 且为第三步做铺垫.

$$\pi_u(x) := \frac{ux}{u \vee |x|}, \quad \forall u \in \mathbf{R};$$

$$h_n(t,y,V_t) := \theta_{r'}(y)\big(g(t,y,\pi_{ne^{-t}}(V_t)) - g(t,0,\pi_{ne^{-t}}(V_t))\big)\frac{ne^{-t}}{\psi_{r'+1}(t) \vee (ne^{-t})} + g(t,0,V_t).$$

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p > 1)$ 解 --- 存在性证明

第二步

通过改进的特殊截断技术, 将假设 (H3′) 弱化为 (H3);

第三步

再次使用截断技术, 去掉假设 (2), 同时证明 $\forall V \in p$, BSDE (3) 在假设 (H1) – (H5) 下有 $\mathcal{S}^p \times p$ 解;

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 存在性证明

第二步

通过改进的特殊截断技术, 将假设 (H3′) 弱化为 (H3);

第三步

再次使用截断技术, 去掉假设 (2), 同时证明 $\forall V \in p$, BSDE (3) 在假设 (H1) – (H5) 下有 $\mathcal{S}^p \times p$ 解;

$$\xi^n := \pi_n(\xi), \quad g^n(t,y,V_t) := g(t,y,V_t) - g(t,0,V_t) + \pi_{ne^{-t}}(g(t,0,V_t)).$$

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 存在性证明

第二步

通过改进的特殊截断技术, 将假设 (H3′) 弱化为 (H3);

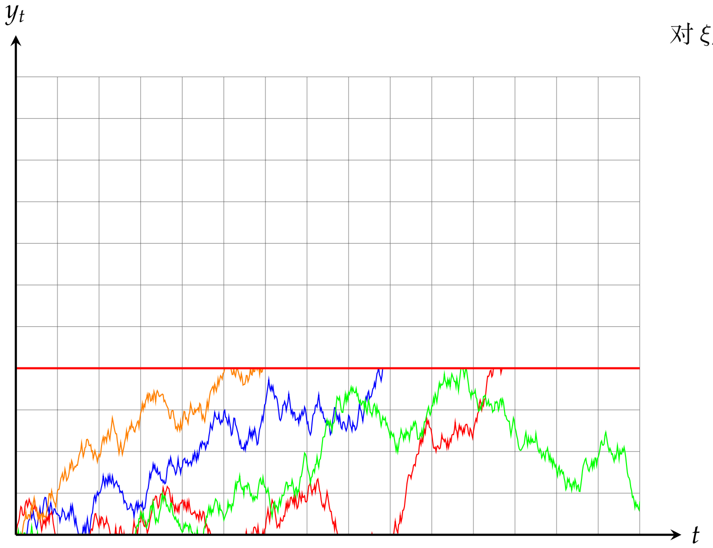
第三步

再次使用截断技术, 去掉假设 (2), 同时证明 $\forall V \in p$, BSDE (3) 在假设 (H1) – (H5) 下有 $\mathcal{S}^p \times p$ 解;

第四步

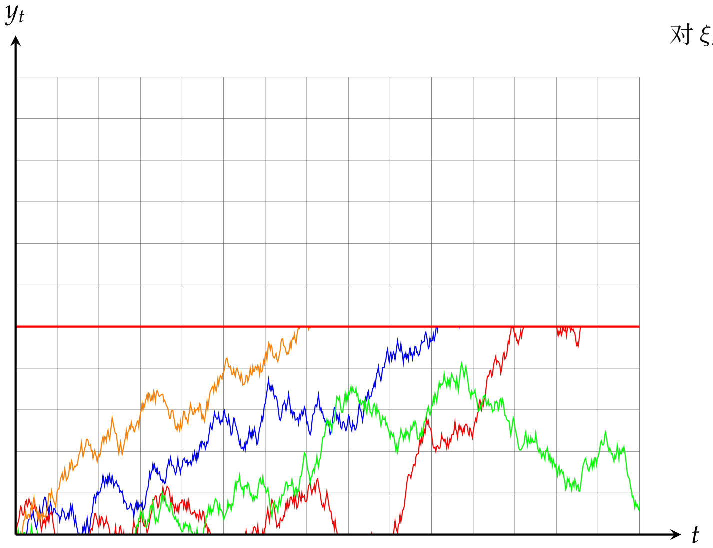
类似于 [Fan-Jiang(2012a)] 通过先验估计, 分区间构建压缩映射, 证明 BSDE (ξ, T, g) 在假设 (H1) – (H5) 下有 $\mathcal{S}^p \times p$ 解.

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 截断技术



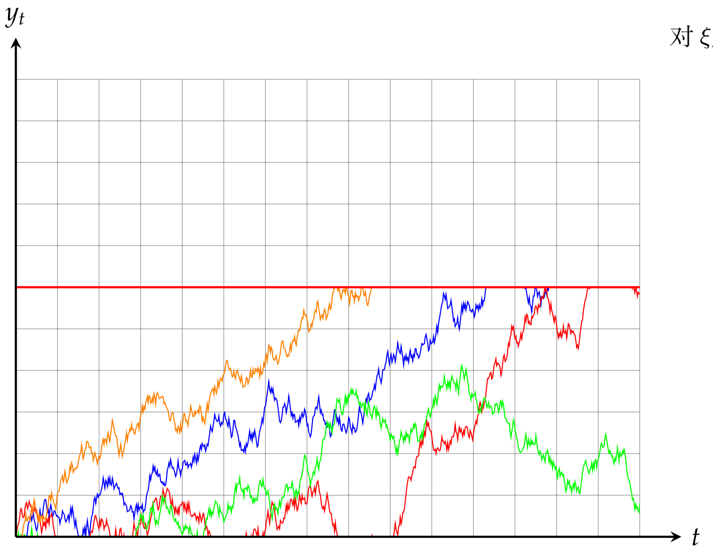
对 ξ, g 截断

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 截断技术



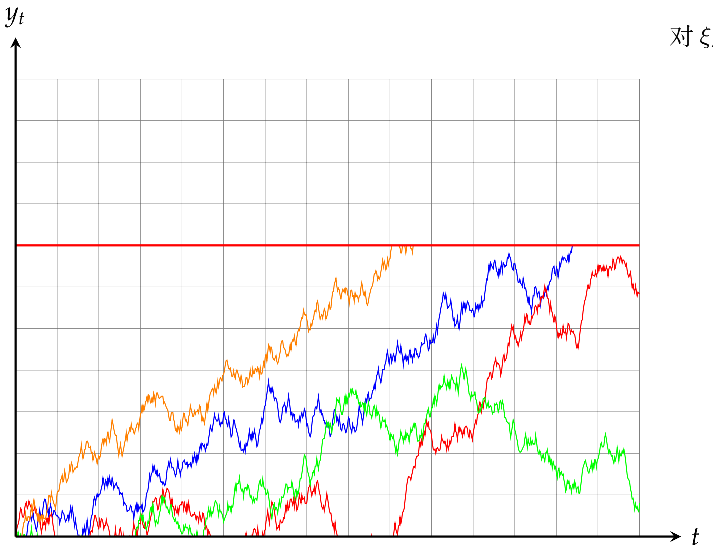
对 ξ, g 截断

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 截断技术



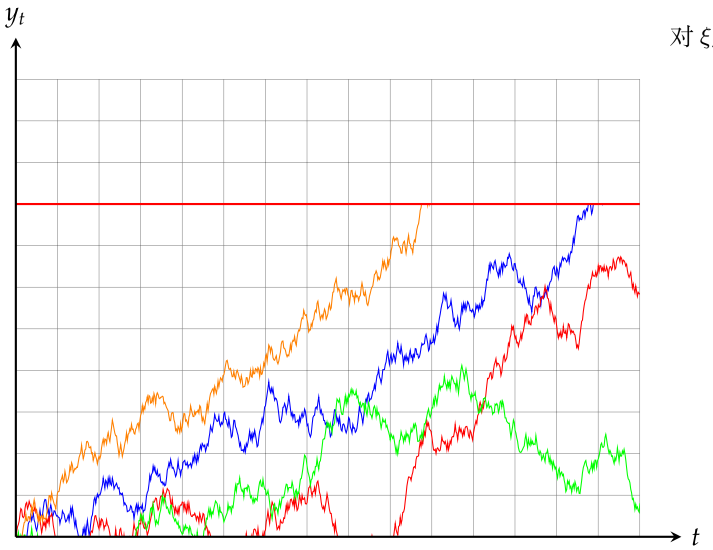
对 ξ, g 截断

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 截断技术



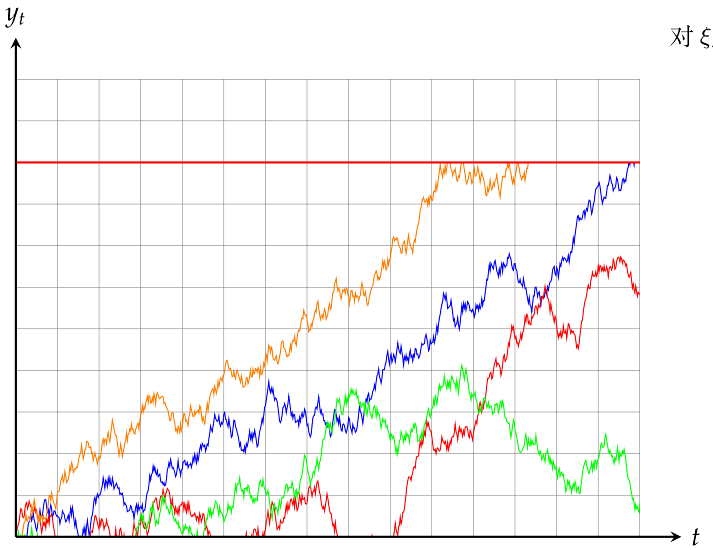
对 ξ, g 截断

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 截断技术



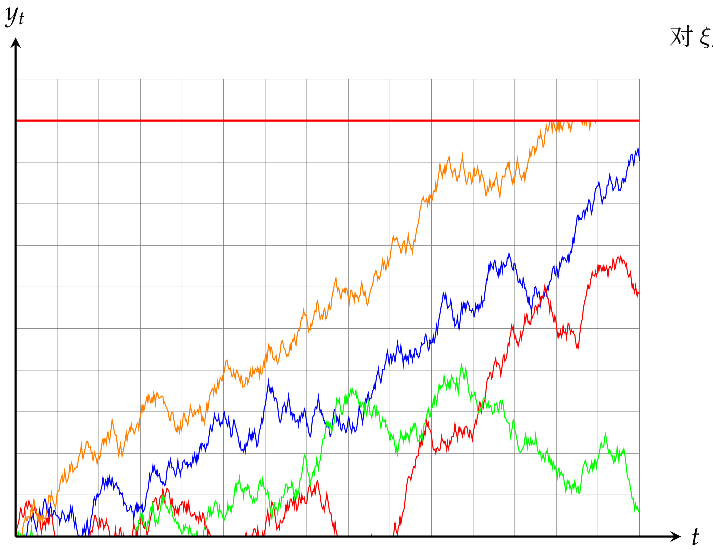
对 ξ, g 截断

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 截断技术



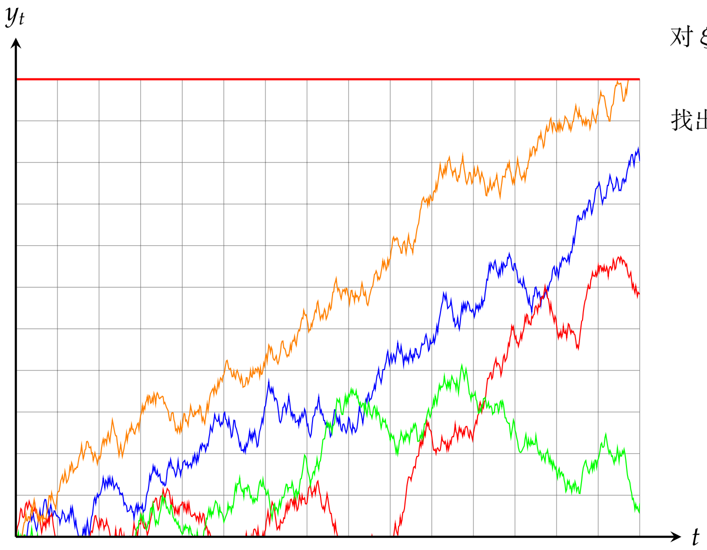
对 ξ, g 截断

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 截断技术



对 ξ, g 截断

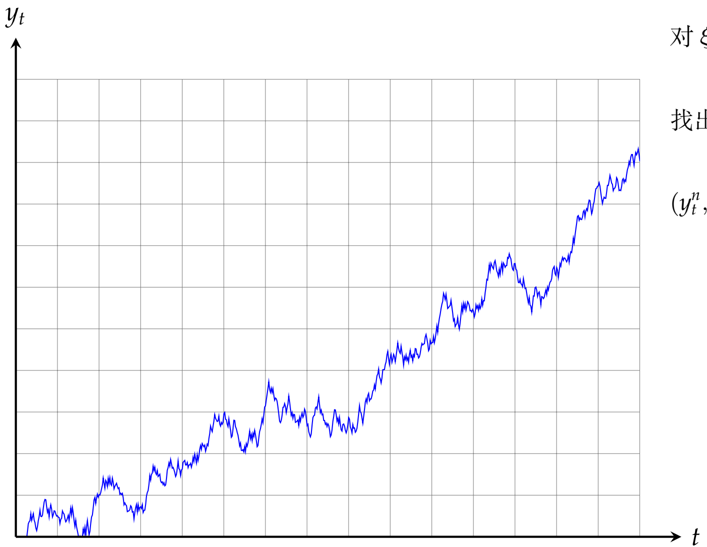
有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 截断技术



对 ξ, g 截断

找出 (y_t^n, z_t^n) 的轨迹

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 截断技术



对 ξ, g 截断

找出 (y_t^n, z_t^n) 的轨迹

(y_t^n, z_t^n) 收敛到 (y_t, z_t)

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p > 1)$ 解 --- 举例

例 2.16. [P29]: 终端时间有限 $0 \leq T < +\infty$, 一维情况

$$g(t,y,z) = |\ln t|(-e^y + |y|) + \frac{1}{\sqrt[4]{t}}|z| + |B_t|.$$

例 2.17. [P30]: 终端时间无限 $0 \leq T \leq +\infty$, 二维情况

$$g(t,y,z) = t^2 e^{-t} \begin{bmatrix} -y_1^3 + y_2 \\ -y_2^5 - y_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \begin{bmatrix} |z_1| \\ |z_2| \end{bmatrix} + \frac{t^2}{t^4+1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

g 满足 (H1) – (H5). BSDE (ξ, T, g) 在空间 $\mathcal{S}^p \times p$ 中有惟一解.

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解 --- 举例

例 2.16. [P29]: 终端时间有限 $0 \le T < +\infty$, 一维情况

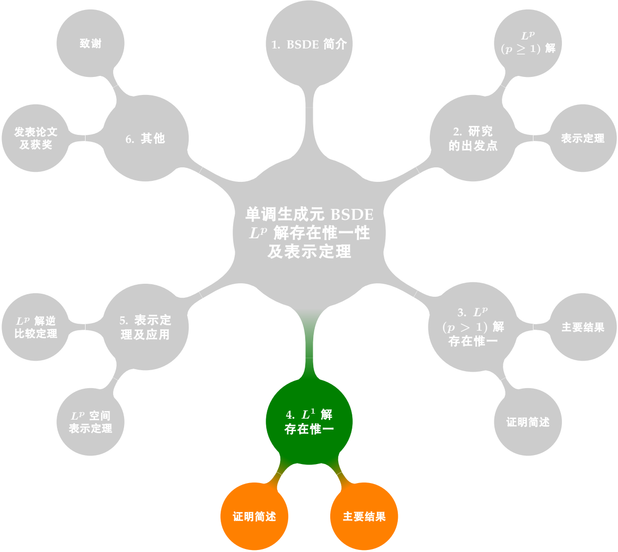
$$g(t,y,z) = |\ln t|(-e^y + |y|) + \frac{1}{\sqrt[4]{t}}|z| + |B_t|.$$

例 2.17. [P30]: 终端时间无限 $0 \le T \le +\infty$, 二维情况

$$g(t,y,z) = t^2 e^{-t} \begin{bmatrix} -y_1^3 + y_2 \\ -y_2^5 - y_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \begin{bmatrix} |z_1| \\ |z_2| \end{bmatrix} + \frac{t^2}{t^4+1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

g 满足 (H1) – (H5). BSDE (ξ, T, g) 在空间 $\mathcal{S}^p \times p$ 中有惟一解.

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^1 解



有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^1 解 --- 主要结果

生成元 g 的假设: $0 \le T \le +\infty$

(H1') $\mathbf{E}\left[\int_0^T |g(t,0,0)|\,\mathrm{d}t\right] < +\infty$;

(H6) $\exists \alpha \in (0,1)$, $\int_0^T \left(\gamma(t)+\gamma^{1/(1-\alpha)}(t)+\gamma^{2/(2-\alpha)}(t)\right)\mathrm{d}t < +\infty$, $\mathbf{E}[\int_0^T g_t \mathrm{d}t] < +\infty$,

$$|g(t,y,z)-g(t,y,0)| \le \gamma(t)(g_t+|y|+|z|)^{\alpha}.$$

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^1 解 --- 主要结果

生成元 g 的假设: $0 \le T \le +\infty$

(H1') $\mathbf{E}\left[\int_0^T |g(t,0,0)|\,\mathrm{d}t\right] < +\infty;$

(H6) $\exists \alpha \in (0,1)$, $\int_0^T \left(\gamma(t)+\gamma^{1/(1-\alpha)}(t)+\gamma^{2/(2-\alpha)}(t)\right)\mathrm{d}t < +\infty$, $\mathbf{E}[\int_0^T g_t \mathrm{d}t] < +\infty$,

$$|g(t,y,z)-g(t,y,0)| \le \gamma(t)(g_t+|y|+|z|)^\alpha.$$

定理 3.1. [P31]: L^1 解的存在惟一性

令 $0 \le T \le +\infty$ 且 g 满足 (H1′), (H2) – (H6), 则 $\forall \xi \in L^1$ 及 $\beta \in (0,1)$, BSDE (ξ, T, g) 存在解 $(y_\cdot, z_\cdot) \in \mathcal{S}^\beta \times \beta$, 且 $(y_\cdot)$ 属于 (D) 类; $\forall \beta \in (\alpha, 1)$, 解惟一.

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^1 解 --- 主要结果

生成元 g 的假设: $0 \le T \le +\infty$

(H1') $\mathbf{E}\left[\int_0^T |g(t,0,0)|\,\mathrm{d}t\right] < +\infty$;

(H6) $\exists \alpha \in (0,1)$, $\int_0^T \left(\gamma(t)+\gamma^{1/(1-\alpha)}(t)+\gamma^{2/(2-\alpha)}(t)\right)\mathrm{d}t < +\infty$, $\mathbf{E}[\int_0^T g_t \mathrm{d}t] < +\infty$,

$$|g(t,y,z)-g(t,y,0)| \le \gamma(t)(g_t+|y|+|z|)^{\alpha}.$$

定理 3.1. [P31]: L^1 解的存在惟一性

令 $0 \le T \le +\infty$ 且 g 满足 (H1′), (H2) – (H6), 则 $\forall \xi \in L^1$ 及 $\beta \in (0,1)$, BSDE (ξ, T, g) 存在解 $(y_\cdot, z_\cdot) \in \mathcal{S}^\beta \times \beta$, 且 $(y_\cdot)$ 属于 (D) 类; $\forall \beta \in (\alpha, 1)$, 解惟一.

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^1 解 --- 主要结果

生成元 g 的假设: $0 \le T \le +\infty$

(H1) $\mathbf{E}\left[\int_0^T |g(t,0,0)|\,\mathrm{d}t\right] < +\infty$;

(H6) $\exists \alpha \in (0,1)$, $\int_0^T \left(\gamma(t)+\gamma^{1/(1-\alpha)}(t)+\gamma^{2/(2-\alpha)}(t)\right)\mathrm{d}t < +\infty$, $\mathbf{E}[\int_0^T g_t \mathrm{d}t] < +\infty$,

$$|g(t,y,z)-g(t,y,0)| \le \gamma(t)(g_t+|y|+|z|)^{\alpha}.$$

受 [Fan-Jiang(2012b)] 及 [Fan-Liu(2010)] 启发.

定理 3.6. [38]: L^1 解的比较定理, $0 \le T \le +\infty$

$\xi^i \in L^1$, $\beta \in (\alpha, 1)$, BSDE (ξ^i, T, g_i) 存在惟一解 $(y^i_\cdot, z^i_\cdot) \in \mathcal{S}^\beta \times \mathcal{B}$, 且 $(y^i_\cdot)$ 属于 (D) 类. 若 $\xi^1 \le \xi^2$, g 满足 (H4) – (H6), 且 $g_1(t, y^2_t, z^2_t) \le g_2(t, y^2_t, z^2_t)$, 则 $\forall t \in [0,T]$, 有 $y^1_t \le y^2_t$.

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^1 解 --- 证明思路

借鉴 [Briand et al.(2003)] 的证明方法.

惟一性

1. 假设存在两对 L^1 解 $(y_t, z_t)_{t\in[0,T]}$ 和 $(y'_t, z'_t)_{t\in[0,T]}$;
2. 作差得 $\hat{y}_\cdot = y_\cdot - y'_\cdot, \hat{z}_\cdot = z_\cdot - z'_\cdot, (\hat{y}_\cdot, \hat{z}_\cdot) \in \mathcal{S}^p \times p$;
3. 利用 L^p 解的先验估计得 $\hat{y}_\cdot = 0, \hat{z}_\cdot = 0$.

存在性

1. g 不依赖于 z 时, 利用截断技术得到 L^1 解的存在性;
2. g 依赖于 z 时, 使用 Picard 迭代分区间构造压缩映射证明 L^1 解的存在性.

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^1 解 --- 证明思路

借鉴 [Briand et al.(2003)] 的证明方法.

惟一性

1. 假设存在两对 L^1 解 $(y_t, z_t)_{t\in[0,T]}$ 和 $(y'_t, z'_t)_{t\in[0,T]}$;
2. 作差得 $\hat{y}_\cdot = y_\cdot - y'_\cdot, \hat{z}_\cdot = z_\cdot - z'_\cdot, (\hat{y}_\cdot, \hat{z}_\cdot) \in \mathcal{S}^p \times p$;
3. 利用 L^p 解的先验估计得 $\hat{y}_\cdot = 0, \hat{z}_\cdot = 0$.

存在性

1. g 不依赖于 z 时, 利用截断技术得到 L^1 解的存在性;
2. g 依赖于 z 时, 使用 Picard 迭代分区间构造压缩映射证明 L^1 解的存在性.

有限或无限时间终端多维 BSDE 的 L^1 解 --- 举例

例 3.4. [P37]: 终端时间有限 $0 \le T < +\infty$, 一维情况

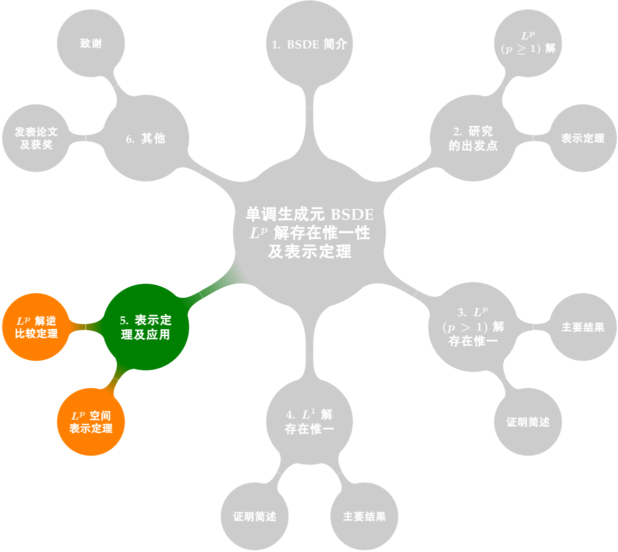
$$g(t,y,z) = \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\left(e^{-y}\mathbf{1}_{y\le 0} + (1-y^2)\mathbf{1}_{y>0}\right) + \frac{t+1}{\sqrt[4]{t}}\left(|z|^2 \wedge \sqrt{|z|}\right) + \frac{1}{1+t^4}.$$

例 3.5. [P38]: 终端时间无限 $0 \le T \le +\infty$, 二维情况

$$g(t,y,z) = \frac{1}{1+t^2}\begin{bmatrix} e^{-y_1} + 3y_2 \\ -e^{y_2} - 3y_1 \end{bmatrix} + e^{-t}\begin{bmatrix} \sin|z_1| \\ \sin|z_2| \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-t}\sin t \\ te^{-t} \end{bmatrix}.$$

g 满足 (H1′), (H2) – (H6). $\forall \beta \in (\alpha, 1)$, BSDE (ξ, T, g) 存在惟一解 $(y_\cdot, z_\cdot) \in \mathcal{S}^\beta \times \beta$.

L^p $(p>1)$ 空间中的表示定理及应用



L^p $(p>1)$ 空间中的表示定理 --- 主要结果

$0 \le T \le +\infty, 1 < p \le 2, \alpha \ge 1, \int_0^T \left(\mu(t) + \nu^2(t)\right) \mathrm{d}t < +\infty.$

生成元 g 的主要假设

- (B1) $\mathbf{E}\left[\left(\int_0^T |g(t,0,0)|\,\mathrm{d}t\right)^p\right] < +\infty;$
- (B2) $\forall z \in \mathbf{R}^d, y \mapsto g(t,y,z)$ 连续;
- (B3) g 关于 y 满足对 t 不一致的单调条件:

$$(y_1 - y_2) \cdot \left(g(t,y_1,z) - g(t,y_2,z)\right) \le \mu(t)|y_1 - y_2|^2;$$

- (B4) g 关于 y 满足对 t 不一致的多项式增长条件:

$$|g(t,y,z)| \le |g(t,0,z)| + \mu(t)|y|^\alpha;$$

- (B5) g 关于 z 满足对 t 不一致的 Lipschitz 条件:

$$|g(t,y,z_1) - g(t,y,z_2)| \le \nu(t)|z_1 - z_2|;$$

L^p $(p>1)$ 空间中的表示定理 --- 主要结果

$$0 \le T \le +\infty, 1 < p \le 2, \alpha \ge 1, \int_0^T \left(\mu(t) + \nu^2(t)\right) \mathrm{d}t < +\infty.$$

生成元 g 的主要假设

- (B1) $\mathbf{E}\left[\left(\int_0^T |g(t,0,0)|\,\mathrm{d}t\right)^p\right] < +\infty$;
- (B2) $\forall z \in \mathbf{R}^d$, $y \mapsto g(t,y,z)$ 连续;
- (B3) g 关于 y 满足对 t 不一致的单调条件;
- (B4) g 关于 y 满足对 t 不一致的多项式增长条件;
- (B5) g 关于 z 满足对 t 不一致的 Lipschitz 条件;
- (B6) 对于 $\mathrm{d}t - \mathrm{a.e.}\ t \in [0,T]$, 有 $\mathbf{E}[|g(t,0,0)|^p] < +\infty$, 且 $\exists k_t > 0, \delta_t > 0$ 使得

$$\mathbf{E}\left[\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon} |g(u,0,0)|\,\mathrm{d}u\right)^{\alpha p}\right] \le k_t, \quad 0 < \varepsilon \le \min\{\delta_t, T-t\}.$$

L^p $(p>1)$ 空间中的表示定理 --- 主要结果

$0 \le T \le +\infty, 1 < p \le 2, \alpha \ge 1, \int_0^T \left(\mu(t) + \nu^2(t)\right) \mathrm{d}t < +\infty.$

生成元 g 的主要假设

- (B1) $\mathbf{E}\left[\left(\int_0^T |g(t,0,0)|\,\mathrm{d}t\right)^p\right] < +\infty;$
- (B2) $\forall z \in \mathbf{R}^d, y \mapsto g(t,y,z)$ 连续;
- (B3) g 关于 y 满足对 t 不一致的单调条件;
- (B4) g 关于 y 满足对 t 不一致的多项式增长条件;
- (B5) g 关于 z 满足对 t 不一致的 Lipschitz 条件;

定理 4.2. [P42]: L^p $(p>1)$ 空间中的表示定理, $0 \le T \le +\infty$

假设 g 满足 (B1) – (B6), 则 $\forall y \in \mathbf{R}, z \in \mathbf{R}^d, 1 \le q < p,$

$$g(t,y,z) = L^q - \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon}\left[y_t(g, t+\varepsilon, y + z\cdot(B_{t+\varepsilon} - B_t)) - y\right], \quad \mathrm{d}t - \text{a.e. } t \in [0,T].$$

L^p $(p>1)$ 空间中的表示定理 --- 简要证明

引理 4.7. [P43]

假设 $0\le T\le +\infty$, $y\in\mathbf{R}$, $z\in\mathbf{R}^d$ 且 g 满足 (B2), (B4) – (B6). 对于 $\mathrm{d}t-\text{a.e.}$ $t\in[0,T]$, $\exists\{\psi^n(t)\}_{n=1}^{\infty}\in L^p(\Omega,\mathcal{F}_t,\mathbf{P})$ 满足 $\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\left[|\psi^n(t)|^p\right]=0$, 且 $\forall n\in\mathbf{N},\widetilde{y}\in\mathbf{R}$ 有

$$\psi^n(t)\le(2^\alpha+2)(|g(t,0,0)+\nu(t)|z|+\mu(t)|y|^\alpha),\quad \mathrm{d}\mathbf{P}-\text{a.s.},$$

$$|g(t,\widetilde{y},z)-g(t,y,z)|\le 2^\alpha n\mu(t)|\widetilde{y}-y|^\alpha+\psi^n(t),\quad \mathrm{d}\mathbf{P}-\text{a.s.}.$$

引理 4.8. [P45]

$\forall p\in(1,2]$, 若 $(\widetilde{y}_s^\varepsilon,\widetilde{z}_s^\varepsilon)_{s\in[t,t+\varepsilon]}$ 为

$$\widetilde{y}_s^\varepsilon=\int_s^{t+\varepsilon}g(u,\widetilde{y}+y+z\cdot(B_u-B_t),\widetilde{z}+z)\,\mathrm{d}u-\int_s^{t+\varepsilon}\widetilde{z}_u^\varepsilon\cdot\mathrm{d}B_u,\quad s\in[t,t+\varepsilon],$$

的解, 则对于 $\mathrm{d}t-\text{a.e.}$ $t\in[0,T]$ 有

$$\lim_{\varepsilon\to0+}\frac{1}{\varepsilon}\mathbf{E}\left[\sup_{s\in[t,t+\varepsilon]}|\widetilde{y}_s^\varepsilon|^{\alpha p}+\left(\int_t^{t+\varepsilon}|\widetilde{z}_s^\varepsilon|^2\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{p}{2}}\right]=0.$$

有限或无限时间终端一维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解的逆比较定理

定理 4.9.[P50]: L^p $(p>1)$ 解的逆比较定理, $0 \le T \le +\infty$

g_i 满足 (B1) – (B6). 如果 $\forall \xi \in L^p$, BSDE (g_i, T, ξ) 的解 $(y_\cdot^i, z_\cdot^i)$ 满足 $\forall t \in [0, T]$,

$$y_t^1 \ge y_t^2, \quad d\mathbf{P} - \text{a.s.},$$

则 $\forall y \in \mathbf{R}, z \in \mathbf{R}^d$ 有,

$$g_1(t, y, z) \ge g_2(t, y, z), \quad d\mathbf{P} \times dt - \text{a.e.}.$$

命题 4.10.[P50]: 等价命题

假定 $0 \le T \le +\infty$, g_i 满足 (B1) – (B6). 则如下两条陈述等价:

1. $\forall \xi \in L^p, t \in [0, T], y_t(g_1, T, \xi) \ge y_t(g_2, T, \xi)$, $d\mathbf{P} - \text{a.s.}$;
2. $\forall t \in [0, T], y \in \mathbf{R}, z \in \mathbf{R}^d, g_1(t, y, z) \ge g_2(t, y, z)$, $d\mathbf{P} \times dt - \text{a.e.}.$

有限或无限时间终端一维 BSDE 的 L^p $(p>1)$ 解的逆比较定理

定理 4.9.[P50]: L^p $(p>1)$ 解的逆比较定理, $0\le T\le+\infty$

g_i 满足 (B1) – (B6). 如果 $\forall\xi\in L^p$, BSDE (g_i,T,ξ) 的解 $(y_\cdot^i,z_\cdot^i)$ 满足 $\forall t\in[0,T]$,

$$y_t^1\ge y_t^2,\quad \mathrm{d}\mathbf{P}-\text{a.s.},$$

则 $\forall y\in\mathbf{R}$, $z\in\mathbf{R}^d$ 有,

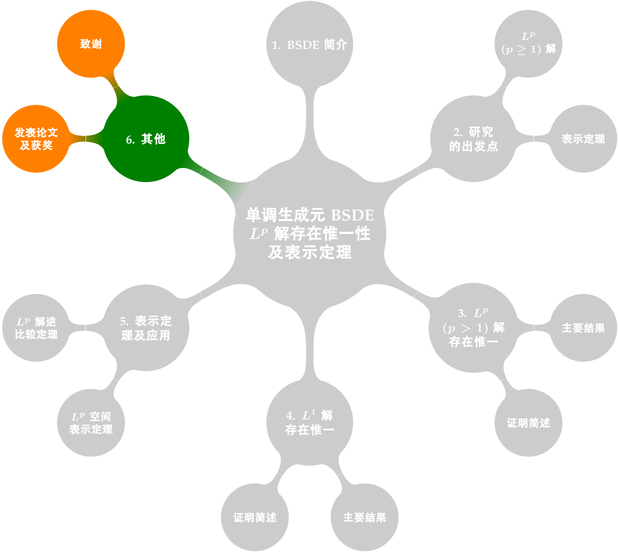
$$g_1(t,y,z)\ge g_2(t,y,z),\quad \mathrm{d}\mathbf{P}\times\mathrm{d}t-\text{a.e.}.$$

命题 4.10.[P50]: 等价命题

假定 $0\le T\le+\infty$, g_i 满足 (B1) – (B6). 则如下两条陈述等价:

1. $\forall\xi\in L^p, t\in[0,T], y_t(g_1,T,\xi)\ge y_t(g_2,T,\xi)$, $\mathrm{d}\mathbf{P}-\text{a.s.}$;
2. $\forall t\in[0,T], y\in\mathbf{R}, z\in\mathbf{R}^d, g_1(t,y,z)\ge g_2(t,y,z)$, $\mathrm{d}\mathbf{P}\times\mathrm{d}t-\text{a.e.}.$

其他


致谢
1. BSDE 简介
L^p $(p \geq 1)$ 解
发表论文
及获奖
6. 其他
2. 研究
的出发点
表示定理
单调生成元 BSDE
L^p 解存在惟一性
及表示定理
L^p 解逆
比较定理
5. 表示定
理及应用
3. L^p
$(p>1)$ 解
存在惟一
主要结果
L^p 空间
表示定理
4. L^1 解
存在惟一
证明简述
证明简述
主要结果

发表论文情况

1. 肖立顺，李慧颖，范胜君．One-dimensional BSDEs with monotonic, Hölder continuous and integrable parameters．华东师范大学学报 (自然科学版), 2012, 1: 130–137.
   江苏省概率统计学会第十次学术年会 (苏州) 做 15 分钟报告.
2. 肖立顺，范胜君，徐娜．随机变量本性上 (下) 确界与范数的关系．烟台大学学报 (自然科学与工程版), 2012, 25(4):217-219.
3. 肖立顺，徐娜，山显雷．房地产行业供需模型及调控模型的研究．数学的实践与认识, 2012, 42(15):148-154.
4. 刘德群，肖立顺，范胜君．An existence and uniqueness result of L^1 solutions to multidimensional BSDEs with a finite and an infinite time interval．应用数学, 2012, 25(4):777-784.
5. 侯杰，肖立顺，范胜君．终端时间可为无限的 BSDE 解的递归迭代序列的收敛性及解的存在唯一性．云南大学学报 (自然科学版), 2012, 34(4):380-384.
6. Lishun XIAO (肖立顺), Shengjun FAN (范胜君), Na XU. L^p $(p \geq 1)$ solutions of multidimensional BSDEs with monotone generators in general time intervals. *Stochastics and Dynamics* (SCI), 2012.04 投稿, 2013.04 回修.

发表论文情况

1. 肖立顺, 李慧颖, 范胜君. One-dimensional BSDEs with monotonic, Hölder continuous and integrable parameters. 华东师范大学学报 (自然科学版), 2012, 1: 130-137.
   江苏省概率统计学会第十次学术年会 (苏州) 做 15 分钟报告.
2. 肖立顺, 范胜君, 徐娜. 随机变量本性上 (下) 确界与范数的关系. 烟台大学学报 (自然科学与工程版), 2012, 25(4):217-219.
3. 肖立顺, 徐娜, 山显雷. 房地产行业供需模型及调控模型的研究. 数学的实践与认识, 2012, 42(15):148-154.
4. 刘德群, 肖立顺, 范胜君. An existence and uniqueness result of L^1 solutions to multidimensional BSDEs with a finite and an infinite time interval. 应用数学, 2012, 25(4):777-784.
5. 侯杰, 肖立顺, 范胜君. 终端时间可为无限的 BSDE 解的递归迭代序列的收敛性及解的存在唯一性. 云南大学学报 (自然科学版), 2012, 34(4):380-384.
6. Lishun XIAO (肖立顺), Shengjun FAN (范胜君), Na XU. L^p $(p \geq 1)$ solutions of multidimensional BSDEs with monotone generators in general time intervals. *Stochastics and Dynamics* (SCI), 2012.04 投稿, 2013.04 回修.

发表论文情况

1. 肖立顺, 李慧颖, 范胜君. One-dimensional BSDEs with monotonic, Hölder continuous and integrable parameters. 华东师范大学学报 (自然科学版), 2012, 1: 130-137.
   江苏省概率统计学会第十次学术年会 (苏州) 做 15 分钟报告.
2. 肖立顺, 范胜君, 徐娜. 随机变量本性上 (下) 确界与范数的关系. 烟台大学学报 (自然科学与工程版), 2012, 25(4):217-219.
3. 肖立顺, 徐娜, 山显雷. 房地产行业供需模型及调控模型的研究. 数学的实践与认识, 2012, 42(15):148-154.
4. 刘德群, 肖立顺, 范胜君. An existence and uniqueness result of L^l solutions to multidimensional BSDEs with a finite and an infinite time interval. 应用数学, 2012, 25(4):777-784.
5. 侯杰, 肖立顺, 范胜君. 终端时间可为无限的 BSDE 解的递归迭代序列的收敛性及解的存在唯一性. 云南大学学报 (自然科学版), 2012, 34(4):380-384.
6. Lishun XIAO (肖立顺), Shengjun FAN (范胜君), Na XU. L^p $(p \geq 1)$ solutions of multidimensional BSDEs with monotone generators in general time intervals. *Stochastics and Dynamics* (SCI), 2012.04 投稿, 2013.04 回修.

获奖情况及参与科研项目

获奖情况

1. 2012 年，研究生国家奖学金；
2. 2010 年 – 2012 年，研究生一等奖学金 (2 次)，研究生特等奖学金 (1 次)；
3. 2011 年，第八届全国研究生数学建模竞赛一等奖；
4. 2011 年，第八届苏北数学建模联赛二等奖；
5. 2011 年，理学院第四届研究生科技创新论坛二等奖.

参与科研项目

1. 终端时间有限或无限的多维倒向随机微分方程 L^p $(p \geq 1)$ 解的存在惟一性
   中央高校基本科研业务费专项资金 (No. 2012LWB57)，2012 年 6 月至 2013 年 5 月，主持人.
2. 生成元 g 关于 y 弱单调且广义一般增长的倒向随机微分方程解的存在唯一性及相关问题研究
   国家自然科学基金青年基金资助 (No. 11101422)，2012 年 1 月至 2014 年 12 月，排名第 4.

获奖情况及参与科研项目

获奖情况

1. 2012 年, 研究生国家奖学金;
2. 2010 年 – 2012 年, 研究生一等奖学金 (2 次), 研究生特等奖学金 (1 次);
3. 2011 年, 第八届全国研究生数学建模竞赛一等奖;
4. 2011 年, 第八届苏北数学建模联赛二等奖;
5. 2011 年, 理学院第四届研究生科技创新论坛二等奖.

参与科研项目

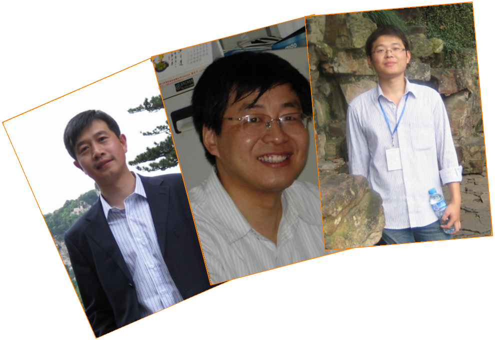
1. 终端时间有限或无限的多维倒向随机微分方程 L^p $(p \geq 1)$ 解的存在惟一性
   中央高校基本科研业务费专项资金 (No. 2012LWB57), 2012 年 6 月至 2013 年 5 月, 主持人.
2. 生成元 g 关于 y 弱单调且广义一般增长的倒向随机微分方程解的存在唯一性及相关问题研究
   国家自然科学基金青年基金资助 (No. 11101422), 2012 年 1 月至 2014 年 12 月, 排名第 4.

致谢

致谢

致谢

致谢



致谢

致谢

致谢

参考文献 I

Bismut, J.-M.
Conjugate convex functions in optimal stochastic control [J].
Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1973, 44(2):384–404.

Briand, P., Carmona, R.
BSDEs with polynomial growth generators [J].
Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, 2000, 13(3):207–238.

Briand, P., Coquet, F., Hu, Y., Mémin, J., Peng, S.
A converse comparison theorem for BSDEs and related properties of g-expectation [J].
Electronic Communications in Probability, 2000, 5:101–117.

Briand, P., Delyon, B., Hu, Y., Pardoux, E., Stoica, L.
L^p solutions of backward stochastic differential equations [J].
Stochastic Processes and Their Applications, 2003, 108(1):109–129.

Briand, P., Lepeltier, J.-P., San Martin, J.
One-dimensional backward stochastic differential equations whose coefficient is monotonic in y and non-Lipschitz in z [J].
Bernoulli, 2007, 13(1):80–91.

Chen, S.
L^p solutions of one-dimensional backward stochastic differential equations with continuous coefficients [J].
Stochastic Analysis and Applications, 2010, 28(5):820–841.

Chen, Z., Wang, B.
Infinite time interval BSDEs and the convergence of g-martingales [J].
Journal of the Australian Mathematical Society (Series A), 2000, 69(2):187–211.

参考文献 II

Duffie, D., Epstein, G. L.
Stochastic differential utility [J].
Econometrica: Journal of the Econometric Society, 1992, 60(2):353-394.

El Karoui, N., Kapondjian, C., Pardoux, E., Peng, S., Quenez, M. C.
Reflected solutions of Backward SDE and related obstacle problems for PDEs [J].
Annals of Probability, 1997a, 25(2):702-737.

El Karoui, N., Peng, S., Quenez, M. C.
Backward stochastic differential equations in finance [J].
Mathematical Finance, 1997b, 7(1):1-71.

Fan, S., Jiang, L.
Finite and infinite time interval BSDEs with non-Lipschitz coefficients [J].
Statistics and Probability Letters, 2010a, 80(11-12):962-968.

Fan, S., Jiang, L.
A representation theorem for generators of BSDEs with continuous linear-growth generators in the space of processes [J].
Journal of Computational and Applied Mathematics, 2010b, 235:686-695.

Fan, S., Jiang, L.
L^p solutions of finite and infinite time interval BSDEs with non-Lipschitz coefficients [J].
Stochastics An International Journal of Probability and Stochastic Processes: formerly Stochastics and Stochastics Reports, 2012a, 84(5):478-506.

参考文献 III

Fan, S., Jiang, L.
A generalized comparison theorem for BSDEs and its applications [J].
Journal of Theoretical Probability, 2012b, 25(1):50-61.

Fan, S., Jiang, L.
L^p $(p>1)$ solutions for one-dimensional BSDEs with linear-growth generators [J].
Journal of Applied Mathematics and Computing, 2012a, 38(1-2):295-304.

Fan, S., Jiang, L.
BSDEs with uniformly continuous generators and integrable parameters (In Chinese) [J].
Sci Sin Math, 2012b, 42(2):119-131.
doi:10.1360/012010-746.

Fan, S., Liu, D.
A class of BSDEs with integrable parameters [J].
Statistics and Probability Letters, 2010, 80(23):2024-2031.

Fan, S., Jiang, L., Tian, D.
One-dimensional BSDEs with finite and infinite time horizons [J].
Stochastic Processes and Their Applications, 2011a, 121(3):427-440.

Fan, S., Jiang, L., Xu, Y.
Representation theorem for generators of BSDEs with monotonic and polynomial-growth generators in the space of processes [J].
Electronic Journal of Probability, 2011b, 16(27):830-844.

参考文献 IV

Jia, G.
Backward stochastic differential equations with a uniformly continuous generator and related g-expectation [J].
Stochastic Processes and Their Applications, 2010, 120(11):2241-2257.

Jiang, L.
Converse comparison theorems for backward stochastic differential equations [J].
Statistics and Probability Letters, 2005a, 71:173-183.

Jiang, L.
Representation theorems for generators of backward stochastic differential equations [J].
Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics, 2005b, 340:161-166.

Jiang, L.
Representation theorems for generators of backward stochastic differential equations and their applications [J].
Stochastic Processes and Their Applications, 2005c, 115(12):1883-1903.

Jiang, L.
Limit theorem and uniqueness theorem for backward stochastic differential equations [J].
Science In China, Series A, 2006, 49(10):1353-1362.

Jiang, L.
Convexity, translation invariance and subadditivity for g-expectations and related risk measures [J].
The Annals of Applied Probability, 2008, 18(1):245-258.

参考文献 V

Lepeltier, J.-P., San Martin, J.
Backward stochastic differential equations with continuous coefficient [J].
Statistics and Probability Letters, 1997, 32(4):425–430.

Mao, X.
Adapted solutions of backward stochastic differential equations with non-Lipschitz coefficients [J].
Stochastic Processes and their Applications, 1995, 58(2):281–292.

Pardoux, E.
BSDEs, weak convergence and homogenization of semilinear PDEs [C].
In Clarke, F., Stern, R., editors, *Nonlinear Analysis, Differential Equations and Control*, pages 503-549. Kluwer Academic, New York, 1999.

Pardoux, E., Peng, S.
Adapted solution of a backward stochastic differential equation [J].
Systems Control Letters, 1990, 14(1):55–61.

Song, L., Hu, F., Chen, Z.
Representation theorems for generators of BSDEs in L^p spaces [J].
Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series, 2012, 28(2):255–264.

Touzi, N.
Optimal stochastic control, stochastic target problems, and backward SDE [M], volume 29 of *Fields Institute Monographs*.
New York: Springer, 2013.

参考文献 VI

Wang, Y., Huang, Z.
Backward stochastic differential equations with non-Lipschitz coefficients [J].
Statistics and Probability Letters, 2009, 79(12):1438-1443.

范胜君.
一类随机动力系统 — 倒向随机微分方程 — 解的存在惟一性及生成元的表示定理 [D].
博士毕业论文，中国矿业大学，2011.

贾广岩.
倒向随机微分方程、g-期望及其相关的半线性偏微分方程 [D].
博士毕业论文，山东大学，2008.

汪嘉冈.
现代概率论基础 [M].
复旦大学出版社，第 2 版，2005.

致谢评委

欢迎各位老师批评指正!