

## 感知器学习算法研究

刘建伟, 申芳林, 罗雄麟

(中国石油大学(北京)自动化研究所, 北京 102249)

**摘 要:** 介绍感知器学习算法及其变种, 给出各种感知器算法的伪代码, 指出各种算法的优点。给出感知器算法在线性可分和线性不可分情况下的误差界定理, 讨论各种感知器学习算法的误差界理论, 给出各种算法的误差界。介绍感知器学习算法在在线优化场景、强化学习场景和赌博机算法中的应用, 并对未解决的问题进行讨论。

**关键词:** 感知器; 错误界; 赌博机算法; 强化学习

## Reserch on Perceptron Learning Algorithm

LIU Jian-wei, SHEN Fang-lin, LUO Xiong-lin

(Research Institute of Automation, China University of Petroleum, Beijing 102249)

**【Abstract】** This paper introduces some perceptron algorithms and their variations, gives various pseudo-codes, pionts out advantage among algorithms. It gives mistake bound's theorems of perceptrons algorithm in linearly separable and unlinearly separable situation. It studies their mistake bounds and works out their bounds. It shows their various applications in the online optimization, reinforcement learning and bandit algorithm, and discusses the open problems.

**【Key words】** perceptron; mistake bound; bandit algorithm; reinforcement learning

感知器算法<sup>[1]</sup>由 Rosenblatt 提出,其主要功能是通过设计分类器来判别样本所属的类别;通过对训练样本集的学习,从而得到判别函数权值的解,产生线性可分的样本判别函数。该算法属于非参数算法,优点是不需要对各类样本的统计性质作任何假设,属于确定性方法。

### 1 感知器的主要算法

#### 1.1 感知器算法

感知器算法是非常好的二分类在线算法。该算法求取一个分离超平面,超平面由  $w \in R^n$  参数化并用来预测。对于一个样本  $x$ ,感知器算法通过计算  $\hat{y} = \langle w, x \rangle$  预测样本的标签。最终的预测标签通过计算  $\text{sign}(\hat{y})$  来实现。算法仅在预测错误时修正权值  $w$ 。如果正确的标签是  $y=1$ ,那么权值修正为  $w+x$ ;如果  $y=-1$ ,权值变为  $w-x$ ,可以总结为  $w \leftarrow w+yx$ ;需要注意的是在预测后,尽管算法不能保证修正后的预测准则会正确分类目前的样本,但在目前样本上的分离超平面的间隔会增加,即算法是保守的不是主动的,感知器算法伪代码如下:

```
Initialize:
  Set  $w_1=0$ 
For:  $i=1, 2, \dots, m$ 
  Get a new instance  $x_i$ 
  Predict  $\hat{y}_i = \langle w_i, x_i \rangle$ 
  Get a new label  $y_i$ 
  Compute  $L=L(w_i, (x_i, y_i))$ 
Update:
  If  $L=0$ ,  $w_{i+1}=w_i$ 
  If  $L=1$ ,  $w_{i+1}=w_i+y_i x_i$ 
Output:  $h(x)=\langle w_m, x \rangle$ 
支持向量机(SVM)也是使用超平面来分类的,但 SVM 中
```

的超平面要求每类数据与超平面距离最近的向量与超平面之间的间隔最大,而感知器不需要间隔最大化。

#### 1.2 平均感知器

平均感知器<sup>[2]</sup>(Averaged Perceptron, AP)算法和感知器算法的训练方法一样。不同的是每次训练样本  $x_i$  后,保留先前训练权值  $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ ,训练结束后平均所有权值即

$$w = \sum_{i=1}^n w_i / n$$

最终用平均权值作为最终判别准则的权值。平均感知器算法伪代码如下:

```
Initialization:  $(w_1, w_2, \dots, w_n)=0$ 
For  $i=1, 2, \dots, n$ 
  Receive  $x_i \in R^d$ ,  $y_i \in \{+1, -1\}$ 
  Predict:  $\hat{y}_i = \text{sign}(w_i \cdot x_i)$ 
  Receive correct label:  $y_i \in \{+1, -1\}$ 
  Update  $w_{i+1} = w_i + y_i x_i$ 
Output  $w = \sum_{i=1}^n w_i / n$ 
```

参数平均化可以克服由于学习速率过大所引起的训练过程中出现的震荡现象。

#### 1.3 信任权感知器

信任权(Confidence Weighted, CW)学习<sup>[3]</sup>是一种新的在线学习算法,它使每个学习参数有个信任度。较小信任度的参数得到更大的更频繁的修正。参数信任权用参数向量的高斯分布表示。每训练一次样本就修正一次参数信任权使样本

**作者简介:** 刘建伟(1966—),男,副研究员、博士,主研方向:机器学习;申芳林,硕士;罗雄麟,教授、博士生导师

**收稿日期:** 2009-08-12 **E-mail:** shenfanglein@hotmail.com

正确分类的概率在某个特定信任域内。信任权的算法伪代码如下：

```

Input: confidence parameter  $\phi = \Phi^{-1}(\eta)$ 
Initial variance parameter  $\alpha > 0$ 
Initialize:  $u_i = 0, \Sigma_i = \alpha I$ 
For  $i = 1, 2, \dots$ , do
    Receive  $x_i \in \mathbb{R}^d, y_i \in \{+1, -1\}$ 
    Set optimal value of the Lagrange multiplier  $a_i$ 
     $u_{i+1} = u_i + a_i y_i \Sigma_i x_i$ 
     $\Sigma_{i+1} = \Sigma_i^{-1} + 2a_i \phi \text{diag}(x_i)$ 
end for

```

信任权学习保证了权值  $w \sim N(u, \Sigma)$  分布，根据  $w \cdot x$  预测的符号来预测  $x$  的类，关于参数向量的多变量高斯分布可以转化为关于间隔为  $M$  的单变量分布，其中  $M \sim N(y_i(u \cdot x_i), x_i^T \Sigma x_i)$ 。每次训练，算法都调整权的分布以确保算法正确预测的概率不小于超参数  $\eta$ ， $Pr\{y_i(w \cdot x_i) \geq 0\} \geq \eta$  其中， $\eta \in [0, 1]$ 。然后通过目标函数：

$$(u_{i+1}, \Sigma_{i+1}) = \min_{D_{KL}} (N(u, \Sigma) \| N(u_i, \Sigma_i))$$

$$\text{s.t. } Pr[y_i(w \cdot x_i) \geq 0] \geq \eta$$

得到  $u, \Sigma$  修正准则：

$$u_{i+1} = u_i + a_i y_i \Sigma_i x_i, \quad \Sigma_{i+1} = \Sigma_i^{-1} + 2a_i \phi \text{diag}(x_i)$$

进而得到最终的判别准则，其中， $D_{KL}$  代表离差。

这种新的在线感知器学习算法不但提高了分类准确性，而且加快了学习速度。

#### 1.4 表决感知器

表决感知器(Voted Perceptron, VP)算法<sup>[4]</sup>是基于感知器算法的在线错误驱动二分类算法，训练算法和感知器算法的训练算法基本一样，与感知器训练算法不同的是表决感知器存储和使用了所有的预测向量，这些向量是在每次预测错误后产生的。对于这样的向量，计算出在下次错误发生前的迭代数目，把迭代的数目作为预测向量的权值。通过计算每个向量的二类预测的权值，然后通过表决权值联合所有的预测向量来得到最终的判别准则。

在样本的预测上采用以下准则：

$$s = \sum_{i=1}^k c_i \text{sign}(v_i \cdot x), \quad \hat{y} = \text{sign}(s)$$

表决感知器能克服训练过程中出现的震荡现象；尽管不能保证收敛性，但在训练时间上比 SVM 优越，而且它可以有效的对高维数据实现分类。表决感知器算法伪代码如下：

```

Training
Input: a labeled training set  $(x_m, y_m)$ 
Number of epochs T
Output:  $(v_k, c_k)$ 

Initialize:  $k=0, v_1=0, c_1=0$ .
Repeat T times:
For  $i=1, 2, \dots, m$ 
    Compute prediction:  $\hat{y} = \text{sign}(v_k \cdot x_i)$ 
    If  $\hat{y} \neq y_i$ , then  $c_k = c_k + 1$ 
    Else  $v_{k+1} := v_k + y_i x_i$ ;
         $c_{k+1} := 1$ 
     $k := k + 1$ 

```

#### 1.5 被动主动感知器

被动主动(Passive Aggressive, PA)算法<sup>[5]</sup>的训练和一般的

在线训练算法一样，不同的是修正权值加了主动参数  $w_{i+1} = w_i + \tau_i y_i x_i$ ，预测正确时不需要修正权值，这时算法处于被动状态；当预测错误时，算法主动修正权值，这时候算法处于主动状态。因此，它被称为被动主动算法。针对样本的线性可分和线性不可分的情况，在原来目标函数：

$$w_{i+1} = \arg \min_{w \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|w - w_i\|^2$$

$$\text{s.t. } l(w_i(x_i, y_i)) = 0$$

的基础上，对目标函数修正 2 次，加入松弛变量  $\xi$  得到 PA-I：

$$w_{i+1} = \arg \min_{w \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|w - w_i\|^2 + C\xi$$

$$\text{s.t. } l(w_i(x_i, y_i)) \leq \xi, \xi \geq 0$$

加入松弛变量  $\xi^2$  得到 PA-II：

$$w_{i+1} = \arg \min_{w \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|w - w_i\|^2 + C\xi^2$$

$$\text{s.t. } l(w_i(x_i, y_i)) \leq \xi$$

根据 3 个目标函数得到权值修正时 3 个不同的主动参数：

$$\tau_i = \frac{l_i}{\|x_i\|^2} \quad (1)$$

$$\tau_i = \min \left\{ C, \frac{l_i}{\|x_i\|^2} \right\} \quad (2)$$

$$\tau_i = \frac{l_i}{\|x_i\|^2 + \frac{1}{2C}} \quad (3)$$

算法的伪代码如下：

```

Input: aggressiveness parameter  $C > 0$ 
Initialize:  $w_1 = (0, \dots, 0)$ 
For  $t = 1, 2, \dots$ 

```

```

    Receive Instance:  $x_t \in \mathbb{R}^n$ 
    Predict:  $\hat{y}_t = \text{sign}(w_t \cdot x_t)$ 
    Receive correct label:  $y_t \in \{-1, +1\}$ 
    Suffer loss:  $l_t = \max\{0, 1 - y_t(w_t \cdot x_t)\}$ 
    Update:  $w_{t+1} = w_t + \tau_t y_t x_t$ 

```

该算法能减少错误分类数目，而且适用不可分的数据。

#### 1.6 权表决算法

权表决(Weight Majority, WM)算法<sup>[6]</sup>的训练算法和一般感知器算法的训练算法一样，不同的是它有多多个分类器，也叫预测子，每个分类器也叫专家。每个分类器有一个权  $w_1, w_2, \dots, w_n$ ，初始值为 1；对样本  $x_i$  训练输出时，输出专家预测所得权重之和最高的预测值，即如果

$$\sum_{i: x_i=1} w_i \geq \sum_{i: x_i=0} w_i$$

就输出 1，否则输出为 0。得到真实值  $l$  后，通过对权值乘以 1/2 来惩罚预测错误的专家，即如果  $x_i \neq l$ ，则  $w_i \leftarrow w_i / 2$ ；如果  $x_i = l$ ，则  $w_i$  不变。表决算法简单易于实施，且错误界小。

#### 1.7 Winnow 算法

Winnow 算法是一种典型的线性分类器，样本一般表示为布尔权重，对每个类别通过训练得到权重向量  $w = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ ，对于样本  $x_i$ ，如果  $\sum_{i=1}^n w_i \cdot x_i > \theta$  ( $\theta$  为阈值)，则将样本分类为该类别。

训练过程是错误驱动的，对于下面的 2 种错误情形，权重的更新策略不同：

(1)若  $\sum_{i=1}^n w_i \cdot x_i > \theta$  , 表示当前分类器预测训练样本属于该类, 如果实际上样本不属于该类, 则要降低分类器的权重, 即对于  $i=1,2,\dots,n$  , 若  $x_i \neq 0$  , 则  $w_i := 0$  。

(2)若  $\sum_{i=1}^n w_i \cdot x_i < \theta$  , 表示当前分类器预测训练样本不属于该类, 如果实际上样本属于该类, 要提高分类器的权重, 即对于  $i=1,2,\dots,n$  , 若  $x_i \neq 0$  , 则  $w_i := \alpha w_i, \alpha > 1$  。

该算法计算简便、训练速度快、算法比较稳定。

## 2 错误界

Novikoff 和 Block 提出并证明了将感知器应用到一系列样本后, 如果样本是线性可分的, 那么感知器算法产生的错误分类样本数目将会是有界的。

**定理 1** 假定  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$  是输入样本, 定义  $R = \max_i \|x_i\|$  。令  $u \in R^n$  为任意的向量, 而且  $\|u\|=1, y_i(u \cdot x_i) \geq \gamma$  。那么用感知器算法进行分类时随着训练过程的进行, 感知器分类的最大错误数为  $(R/\gamma)^2$  。

Freund 和 Schapire 给出了样本线性不可分下的理论分析, 得出以下定理。

**定理 2**  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$  为输入样本, 令  $u$  为任意向量而且  $\|u\|=1$  和  $\gamma > 0$  , 定义样本的偏差为  $d_i = \max\{0, \gamma - y_i(u \cdot x_i)\}$  和  $D = \sqrt{\sum_{i=1}^m d_i^2}$  。那么用感知器算法进行分类时随着训练过程的进行, 感知器分类的最大错误数为  $\left(\frac{R+D}{\gamma}\right)^2$  。

目前大量结果的证明都是依据着 Novikoff 和 Block 的结果, 其意义就是错误界不依赖样本的维数。Koby Crammer 根据平方铰链损失得到 PA 的错误上界, Freund 和 Schapire 给出了表决感知器样本线性可分(VP-I)和线性不可分(VP-II)的错误上界, Michael Collins 给出了样本线性可分且间隔为  $\delta$  的错误上界(AP)。Avrim Blum 证出了权重表决算法和 Winnow 上界。用  $E$  表示误差界, 则每个算法的误差界如下:

$$E_{PA-I} = \max \left\{ R^2, \frac{1}{C} \left( \|u\|^2 + 2C \sum_{i=1}^T l_i^* \right) \right\}$$

$$E_{PA-II} = R \left( \|u\| + \sqrt{\sum_{i=1}^T (l_i^*)^2} \right)^2$$

$$E_{VP-I} = \left( \frac{R}{r} \right)^2, \quad E_{VP-II} = \left( \frac{R+D}{r} \right)^2, \quad E_{AP} = \frac{R^2}{\delta^2}$$

$$E_{Winnow} = 2 + 3r(1 + \lg n), \quad E_{WM} = 2.41(m + \lg n)$$

## 3 感知器算法的应用

目前感知器算法主要应用于在线优化场景、强化学习场景和赌博机算法等领域里。

### 3.1 在线优化场景

在线优化分为在线约束优化和无约束优化, 在线约束优化的前提就是所有点要满足约束条件的情况下, 每次输入一个值, 得到一个最优目标函数值, 直到优化结束。而无约束优化没有约束条件就可以直接优化。

以对目标函数求最大值为例:  $\max f(x)$  , 约束函数为  $s.t. b(x) \geq 0$  ; 选定合适的目标函数初始值, 而且在约束优化过程中所有样本要满足约束条件  $b(x) \geq 0$  ; 每次输入一个样本得到一个目标函数值, 当这个目标函数值比前一个目标函

数值大时, 权值不变; 当比前一个值小时, 修正权值, 直到优化结束得到最大值。

### 3.2 强化学习场景

强化学习是一种以环境反馈作为输入的机器学习方法, 是从环境状态到决策映射的学习, 以使决策从环境中获得的累积奖赏值最大; 与监督学习不同的是强化学习并不需要输入和输出的类别值, 而是在选择决策后得到奖赏和环境的新状态, 但没说明哪个决策会获得最多的奖赏; 另外与半监督不同的就是学习算法的评价和学习是同时进行的。

假定存在一个决策集  $A$  、一个环境状态集  $S$  和一个奖赏集  $R$  , 每采取一个决策  $a_t$  , 得到一个新的  $s_{t+1} \in S, r_{t+1} \in R$  , 利用感知器每次输入一个样本的优点, 先选择一个输入样本  $x_t$  (反映环境的状态), 得到输出(决策), 这个学习算法的决策作用于环境, 那么得到新的环境状态  $s_t$  和奖赏  $r_t$  , 同时修正环境到决策间的输入函数:  $r_t > 0$  时保持不变;  $r_t < 0$  修正, 最后输入新的环境状态样本, 得到新的输出, 直到迭代结束得到最大的奖赏。

### 3.3 赌博机算法

赌博机算法是强化学习的一种, 它分为冒险和收益 2 个过程, 与监督相比, 赌博机的不同之处就是只告诉预测的正确与否, 而没有告诉目标类的类别。学习过程分为  $1, 2, \dots, T$  轮, 在第  $t$  轮学习时, 算法收到一个样本向量  $x_t$  ,  $x_t$  可能属于  $K = \{1, 2, \dots, k\}$  类, 用感知器预测出  $x_t$  的类标签, 假定标签为  $\hat{y}_t$  。也可以依某个概率来猜测  $x_t$  的类标签  $\hat{y}_t$  , 同时返回真实类标签  $y_t$  和得到奖赏, 当  $\hat{y}_t = y_t$  , 预测正确, 得到奖赏, 则  $W_{t+1} = W_t$  ; 当  $\hat{y}_t \neq y_t$  , 预测错误, 那么  $W_{t+1} = W_t + U_t$  , 直到预测结束同时得到最大的奖赏。

## 4 结束语

由上文的分析可知, 传统的感知器算法主要注重样本训练, 而在新样本的预测上基本用训练得到的判别准则来预测。未解决的问题包括: (1)感知器算法应用到单类预测、多类多标签、多类单标签预测和结构输出等方面。(2)目前的错误界是基于大样本的情况, 然而现实生活中的样本基本上都是小样本。(3)对基于感知器类排序算法、多示例样本及多类多标签感知器算法的错误上下界的研究。研究新的感知器算法以解决这些问题是感知器学习算法的主要发展方向。

## 参考文献

- [1] 边肇祺, 张学工. 模式识别[M]. 北京: 清华大学出版社, 1999.
- [2] Collins M. Discriminative Training Methods for Hidden Markov Models: Theory and Experiments with Perceptron Algorithms[C]// Proc. of EMNLP'02. Philadelphia, USA: [s. n.], 2002.
- [3] Littleatone N, Warmuth M. The Weighted Majority Algorithm[J]. Information and Computation, 1994, 108(2): 212-261.
- [4] Freund Y, Schapire F. Large Margin Classification Using the Perceptron Algorithm[J]. Machine Learning, 1999, 37(3): 277-296.
- [5] Crammer K, Dekel O, Singer Y. Online Passive Aggressive Algorithms[J]. Machine Learning Research, 2006, 7(8): 551-585.
- [6] Dredze M, Crammer K, Ereira F. Confidence Weighted Linear Classification[C]//Proc. of ICML'08. Helsinki, Finland: [s. n.], 2008.

编辑 顾姣健