

Recruiting解题报告

福州一中 卓亮

April 22, 2012

Contents

1 题目描述	2
2 解法	2

1 题目描述

有两个软件公司要招聘程序员。一开始，有 n 名程序员。软件公司轮流招聘员工，一轮招收一名未被招聘的程序员。甲公司先，乙公司后。

更进一步，程序员间有朋友关系。每个程序员可能有很多朋友。朋友关系是对称的，如果 a 是 b 的朋友，那么 b 也是 a 的朋友。

两个公司均已调查出程序员间的朋友关系。一个程序员愿意去一家公司，只有当这家公司里有他的朋友。但是当一家公司一个员工也没有的时候除外。在一个员工也没有的情形下，公司可以招聘到任意一名未被招聘的程序员。可能出现在招聘了若干轮之后，一家公司没有可以招聘的人了。在这个情况下，这家公司就停止招聘，而另一家公司可以继续招聘。

所有的程序员并非都一样出色。这 n 个程序员中有3个是天才，因而这两家公司都想招聘到尽量多的天才。公司当然可以一开始就挑一个天才，从而保证本公司至少有一个天才。因而问题是，按照最优策略，哪家公司能招到2个天才。

注意两家公司在每时每刻都有招聘的全部信息：朋友关系，谁是天才，每家公司招聘了谁。¹

2 解法

先抽象出这题的图论模型。

对给定的一张无向图 G ，有3个特殊点。两人一开始有一个空点集。双方轮流行动。第一轮，可选任一未被选的点加入自己的点集。此后每轮，可以不操作，也可以选一未被选的，且与自己的点集相邻的点加入自己的点集。问采取最优决策下，谁能拿到2个特殊点。

首先，容易看出，每个公司选的点集的导出子图是一个联通块。从而，我们看出，一开始这3个特殊点要在同一个联通块。不然的话，甲公司一开始选的联通块至多2个特殊点。如果有2个，乙公司为避免甲公司获胜，完全可以取这个联通块的一个特殊点。这样谁也取不到两个。如果只

¹SGU 530

要1个，那么甲公司一定无法获胜，那么甲公司一定不会采取这种决策，除非所有的联通块都至多一个特殊点。但在这种情形下，乙也无法获胜。因而有可能某个公司取到2个特殊点的情况只有这3个点在同一个联通块。同时这个条件也是充分的。因为否则的话，在某一时刻，有一个特殊点无法到达甲乙两个点集中的任何一个，这与它们同属一个联通块矛盾。

现在先看一个简单的情况。如果甲先选了一个割点。去掉这个点后，图分成若干块。如果3个特殊点分属不同的块，那么显然甲必胜。如果2个特殊点在一块，另一个特殊点在另一块。这个情形下，乙一定选有2个特殊点的块。这样乙才有可能获胜。而且乙一定要把这两个特殊点都拿到，才能获胜。因为甲肯定能拿到在另一个块的特殊点。

我们解决以下的基本问题：给一个联通块和两个特殊点 u, v ，甲已选好一个点 a ，问乙是否有把这两个点都取走的策略。一种直观的感觉是，如果乙选了点 b ，当甲每向 u 走一步时，乙也向 u 走一步；当甲向 v 走一步时，乙也向 v 走一步。那么，只要乙能比甲快一步到 u 和 v ，就能获胜。

如果用 $d(i, j)$ 表示 i 与 j 间的最短路，由此，我们推测，乙获胜，只要 $d(b, u) < d(a, u)$ 且 $d(b, v) < d(a, v)$ 。

我们来推敲这个推测可能错误的情况。一种是占了点的情况。但是距离大的是不可能占到距离小的点的，不然就与最短路的性质矛盾了。另外的可能错误的情况是甲走一步，同时向 u, v 都靠近了。在这种情况下， a 一定不在 u, v 间的最短路上。如果 b 不在 u, v 间的最短路上，那么情况可能难说，但是如果 b 在 u, v 间的最短路上，那么正确性可以断言。

因而，我们得到了乙获胜的条件，存在在 u, v 间最短路上的一点 b 满足 $d(b, u) < d(a, u)$ 且 $d(b, v) < d(a, v)$ 。改写成 $d(u, v) + 2 \leq d(a, u) + d(a, v)$ 。

现就一般情况进行讨论。设甲选取了点 a 。如果乙要获胜，那么他一定盯住两个特殊点，如果甲往这两个特殊点走，乙也相应地走。因而此时的乙必胜的条件是存在两个特殊点 u, v ，使得 $d(u, v) + 2 \leq d(a, u) + d(a, v)$ 。

分析至此，这题的算法就清晰了。预处理出每个特殊点到其他点的最短路。枚举甲第一步选的点。判断此情形下是甲必胜还是乙必胜。若为甲必胜，则返回甲，否则算法继续。若对无论甲第一步取什么点都是乙必

胜，返回乙。