u8. 1. Er $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ konv.? ($\tan x > x$ tá $x \in (0, \frac{\pi}{2})$)

Lat $b_n = \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Vit hava $b_n > \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, og $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ er divergent, so rekkjan er ikki absolut konvergent per 4.20(ii).
Funktiónin $\tan(x)$ er vaksandi á $(0, \frac{\pi}{2})$ umframt at vera positiv. Fyri $x \to 0$ vil $\tan(x) \to 0$, so fylgjan $b_n \to 0$ tá $n \to \infty$. Haraftureat er b_n monotont fallandi og positiv $\forall n \in \mathbb{N}$. Per 4.38 er $\sum (-1)^n \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ tí ein konvergent rekkja, soleiðis er hon altso treytað konvergent.

2. Hvat fyri rekkja hevur eina majorantrekkju? Nær er konvergent majorantrekkja?

(i) $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$, $x \in \mathbb{R}$.

Vit hava $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, men fyri val av k_n finst $x \in \mathbb{R}$, so at $k_n < |x^n|$.
Tískil finst eingin majorant rekkja.

(ii) $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$, $|x| < 1$

Nú er $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergent. Fyri $|x^n|$ við $|x| < 1$ er supremum 1, so at $|x^n| \leq k_n$ $\forall x \in (-1, 1)$ við $k_n = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Majorant rekkjan er $\sum_{n=1}^{\infty} 1$, sum er divergent.

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $|x| < 0{,}99$.

Nú er $\sum_{n=0}^{\infty} 0{,}99^n$ ein konvergent majorant rekkja.

(iv) $\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots$, $x \in \mathbb{R}$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1}$ hevur majorantrekkju $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$. Vit fáa onga konvergenta majorantrekkju, tí $\sup_{x \in \mathbb{R}} \{\sin((2n-1)x)\} = 1$, og $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ er divergent (4.20(i) við $\frac{1}{2}\sum \frac{1}{n}$).

(v) $f(x) = \frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} + \cdots$, $x \in \mathbb{R}$.

Vit hava konvergenta majorantrekkju $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$. Stamfunktiónin hjá f er við 5.34 givin við $g(x)$:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)\, dt = g(x), \quad \text{so} \quad g'(x) = f(x).$$

3. Vís, at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{x^n}{\sqrt{n}}\right)$ er uniformt konvergent á $[-1,1]$.
$(|\sin y| \le |y| \ \forall y \in \mathbb{R})$

Á intervallinum $[-1,1]$ er

$$\left| \frac{1}{n} \sin\left(\frac{x^n}{\sqrt{n}}\right) \right| \le \left| \frac{1}{n} \cdot \frac{x^n}{\sqrt{n}} \right| \le \frac{1}{n^{3/2}}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ er konvergent majorantrekkja hjá $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{x^n}{\sqrt{n}}\right)$ fyri $x \in [-1,1]$.

Funktiónin $\frac{1}{n} \sin\left(\frac{x^n}{\sqrt{n}}\right)$ er kontinuert $\forall n \in \mathbb{N}$ fyri $x \in [-1,1]$ so per 5.33 er rekkjan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{x^n}{\sqrt{n}}\right)$ uniformt konvergent við kontinuerta sumfunktión.

4.(i) Vís, at $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cos(2^n x)$ er konvergent $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\left| \frac{1}{3^n} \cos(2^n x) \right| \le \frac{1}{3^n} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

so $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cos(2^n x)$ hevur konvergenta majorantrekkju $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ fyri øll $x \in \mathbb{R}$. So vit hava uniforman konvergens, tí $\frac{1}{3^n} \cos(2^n x)$ er kontinuert á $\mathbb{R}$ fyri øll $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Definera $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cos(2^n x)$, $x \in \mathbb{R}$.
Vís, at f er kontinuert.

Per 5.33 er f kontinuert, sí (i).

(iii) Vís, at f er differentiabul.

Fyri øll $n \in \mathbb{N}$ er

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3^n} \cos(2^n x) \right) = -\frac{2^n}{3^n} \sin(2^n x).$$

Her er $\left| -\frac{2^n}{3^n} \sin(2^n x) \right| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$, so $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ er ein konvergent majorantrekkja.
Per 5.35 er $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{2^n}{3^n} \sin(2^n x)$ við $x \in \mathbb{R}$.

(iv) Finn $f'(0)$.

$$f'(0) = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{2^n}{3^n} \sin(2^n \cdot 0) = 0.$$

(v) Samanber við dømi 5.26.

Munurin er, at $2 < 3$.

5. Rekkjan $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$ konvergerar ímóti $\ln(x+1)$ $\forall x \in (-1,1]$. Á intervallinum er sumfunktiónin kontinuert og differentiabul. Vís, at eingin konvergent majorantrekkja er á $(-1,1]$.

Set fyri, at $\sum_{n=0}^{\infty} k_n$ er ein konvergent majorantrekkja hjá $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$ á $(-1,1]$. Fyri $x=1$, so er

$$\left| \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} \leq k_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Av tí at $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ er divergent, so er $\sum_{n=0}^{\infty} k_n$ divergent per 4.20(ii). Tískil hevur $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$ onga konvergenta majorantrekkju á $(-1,1]$.

6.(i) Vís, at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$ er konvergent fyri øll $|x|<1$, og at sumfunktiónin f er kontinuert á $(-1,1)$.

Vit hava, at $\left|\frac{x^n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ tá $|x|<1$ og $\frac{x^n}{n^2}$ er kontinuert $\forall n \in \mathbb{N}$, so við 5.33 er $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$ uniformt konvergent, tí $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ er ein konvergent majorantrekkja. Harafturat fylgir, at f er kontinuert á $(-1,1)$.

(ii) Vís, at f er differentiabul á $(-1,1)$.

Vit fáa $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{n^2} x^n\right) = \frac{1}{n} x^{n-1}$. Fyri eitthvørt $r \in [0,1)$ so hevur $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^{n-1}$ eina konvergenta majorantrekkju $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} r^{n-1}$, ella bara $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$, á $(-r,r)$. Per 5.35 er f differentiabul á $(-1,1)$ og at

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^{n-1}, \quad x \in (-1,1).$$

(iii) Finn eina forskrift fyri $f'(x)$.

Í 5. er givið, at $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \ln(x+1)$ fyri $x \in (-1,1)$. Vit fáa sostatt, at

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^{n-1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

$$= -\frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (-x)^{n+1} = -\frac{1}{x} \ln(1-x), \quad x \in (-1,1) \setminus \{0\}.$$

Vit fáa tá $f'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot 0^n = 0$.