u. 12. 1. Differentiallikningin $t\frac{d^2y}{dt^2}+2y=t^2$ er givin.

(i) Avger eina partikulera loysn $y_p(t)$ við at gita eitt polynom á passandi stigi.

Lat $y(t)=b_2t^2+b_1t+b_0$.

$$\frac{dy}{dt}=2b_2t+t \quad \text{og} \quad \frac{d^2y}{dt^2}=2b_2.$$

Nú hava vit, at

$$t\frac{d^2y}{dt^2}+2y = t(2b_2)+2(b_2t^2+b_1t+b_0) = 2b_2t^2+(2b_2+2b_1)t+2b_0.$$

Lat nú $b_2=\frac{1}{2}$, $b_1=-\frac{1}{2}$ og $b_0=0$, so er $y(t)=\frac{1}{2}(t^2-t)$ ein loysn.

(ii) Skriva a_{n+1} sum funktión av a_n, $n\in\mathbb{N}$, so at $\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n$ er ein loysn til homogenu líkningina, og avger ρ.

Lat $y(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n$ og ρ konvergensradius. So er

$$t\frac{d^2y}{dt^2}+2y = t\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nt^{n-2}+2\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n$$
$$=2a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left((n+1)n\,a_{n+1}+2a_n\right)t^n, \quad |t|<\rho.$$

Nú er y ein loysn, um $a_0=0$ og

$$(n+1)n\,a_{n+1}+2a_n=0$$
$$\iff \quad a_{n+1}=\frac{-2}{n^2+n}a_n.$$

Við kvotientkriteriið er

$$\left|\frac{a_{n+1}t^{n+1}}{a_nt^n}\right|=\frac{2}{n^2+n}|t|\to 0 \quad \text{tá} \quad n\to\infty \quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

So y er konvergent fyri øll t, altso er konvergensradius $\rho=\infty$.

2. Vit hava $t\dfrac{d^2y}{dt^2} - y = 0.$

(i) Vís, at um $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ er ein loysn, so er

$$-c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_{n+1}(n+1)n - c_n\right) t^n = 0.$$

Um y er ein loysn, so seta vit í líkningina og fáa, at

$$t \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n t^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} ((n+1)n\, c_{n+1} - c_n) t^n = 0.$$

(ii) Vís, at um y er ein loysn, so er

$$c_0 = 0 \quad \text{og} \quad c_{n+1} = \frac{1}{(n+1)n} c_n, \quad n \geq 1.$$

Set fyri, at y er ein loysn, so er givið úr (i) og S.21, at

$$(n+1)n\, c_{n+1} - c_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \quad c_{n+1} = \frac{c_n}{(n+1)n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Men so er $c_0 = 0$, annars er y ei ein loysn.

(iii) Ein loysn er $y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(n-1)!} t^n$. Finn konvergensradius hjá røkkjuni.

Við kvotientkriteriið fáa vit, at

$$\left| \frac{1}{(n+1)!\, n!} t^{n+1} \cdot \frac{n!(n-1)!}{t^n} \right| = \frac{1}{(n+1)n} |t| \to 0 \text{ tá } n \to \infty \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Altso er $\rho = \infty$.

(iv) Lat $S_N(t) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!(n-1)!} t^n$. Brúka, at $(N+1+n)! \geq (N+1)!$ og $(n+N)! \geq n!N!$, og at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$, til at finna N so at $|y(t) - S_N(t)| \leq 10^{-4}$ $\forall t \in [0,1]$.

$$|y(t) - S_N(t)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n!(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(N+1+n)!\,(N+n)!} \leq \frac{1}{(N+1)!\,N!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{e}{(N+1)!\,N!}, \quad t \in [0,1].$$

Vit fáa, at $(N+1)!N! = 86400 \geq \frac{e}{10^{-4}}$ tá $N=5$, so $|y(t) - S_N(t)| \leq 10^{-4}$ tá $N \geq 5$ fyri øll $t \in [0,1]$.

3. Vit hava $\frac{dy}{dt} - \frac{1}{t} y = \sin(t)$, $t > 0$.

Finn koefficientarnar, so at $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ er ein loysn. Fyri hvørji t er loysnin galdandi?

$$\frac{dy}{dt} - \frac{1}{t} y = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n t^{n-1} - \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = -\frac{c_0}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) c_n t^{n-1}$$

$$= -\frac{c_0}{t} + \sum_{n=0}^{\infty} n c_{n+1} t^n \quad , \ |t| < \rho.$$

Legg til merkis, at

$$\frac{dy}{dt} - \frac{1}{t} y = \sin(t) \Leftrightarrow t \frac{dy}{dt} - y = t \sin(t) \quad , \quad t > 0.$$

Vit hava

$$t \frac{dy}{dt} - y = -c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) c_n t^n.$$

Vit hava

$$\sin(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} t^{2n-1} \quad , \forall t \in \mathbb{R}.$$

Per korollar 5.21 er $c_0 = 0$ og $c_{2n+1} = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Vit fáa, at

$$c_{2n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n-1)!} \quad , \quad n \in \mathbb{N}.$$

Fyri $c_1 \in \mathbb{R}$ er

$$y(t) = c_1 t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n-1)!} t^{2n} ,$$

ein loysn hjá $\frac{dy}{dt} - \frac{1}{t} = \sin(t)$ á $]0, \rho[$.

$$\left| \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!} t^{2n+2} \cdot \frac{(2n-1)(2n-1)!}{(-1)^{n-1} t^{2n}} \right| = \frac{2n-1}{(2n+1)^2 \, 2n} t^2 \to 0,$$

tá $n \to \infty$ fyri øll $t \in \mathbb{R}$. Konvergensradius $\rho = \infty$, so loysnin er galdandi á $]0, \infty[$.

4. Vit hava $t \frac{d^2 y}{dt^2} - (t+1) \frac{dy}{dt} + y = 0$, og vit seta fyri at $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ er ein loysn.

(i) Vís, at $c_0 = c_1$, og at $c_{n+1} = \frac{c_n}{n+1}$ fyri $n = 2, 3, \ldots$

$$t\,\frac{d^2y}{dt^2} - (t+1)\,\frac{dy}{dt} + y = t\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\,c_n t^{n-2} - (t-1)\sum_{n=1}^{\infty} n\,c_n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

$$= c_0 - c_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big((n+1)n\,c_{n+1} - n c_n - (n+1)\,c_{n+1} + c_n\Big)t^n$$

$$= c_0 - c_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big((1-n)\,c_n + (n+1)(n-1)\,c_{n+1}\Big)t^n\,, \quad |t| < \rho.$$

Per 5.21 er $c_0 = c_1$ og $c_{n+1} = \dfrac{c_n}{n+1}$, $n \geq 2$.

(ii) Set fyri, at fyri y_1 hava vit $y_1(0) = y_1''(0) = 1$. Finn c_n og y_1 og ρ.

$$y_1(0) = c_0 \quad \text{og} \quad y_1''(0) = 2c_2,$$

So vit fáa við givnu treytum, at $c_0 = c_1 = 1$ og $c_2 = \frac{1}{2}$.
Nú er

$$c_{n+1} = \frac{c_n}{n+1} \implies c_{2+1} = \frac{c_2}{2+1} = \frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{3!}\,.$$

Greitt er, at $c_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!}$ og $c_n = \dfrac{1}{n!}$ fyri $n \in \mathbb{N}_0$.

$$y_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n = e^t\,, \quad \text{fyri } t \in \mathbb{R}, \text{ so } \rho = \infty.$$

(iii) Nýt setning 1.31 at finna y_2, sum er óheft av y_1.

Vit stytta fyrst ígjøgnum og fáa

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{t+1}{t}\,\frac{dy}{dt} + \frac{y}{t} = 0\,, \qquad t > 0.$$

$\Omega(t) = e^{\int -\frac{t+1}{t}\,dt} = e^{-t-\ln(t)}$, so við 1.31(i) fáa vit, at

$$y_2(t) = y_1(t)\int \frac{1}{y_1(t)^2\,\Omega(t)}\,dt = e^t\int\frac{1}{(e^t)^2\,e^{-t-\ln(t)}}\,dt$$

$$= e^t\int\frac{1}{e^{t-\ln(t)}}\,dt = e^t\int e^{\ln(t)-t}\,dt$$

$$= e^t\int t\,e^{-t}\,dt = -e^t(t+1)\,e^{-t} = -(t+1)\,, \quad t > 0.$$

Tað er eygdsæð, at y_2 er loysn til upprunu líkningini á $\mathbb{R}$.

(iv) Finn eina loysn til

$$t \frac{d^2y}{dt^2} - (t+1)\frac{dy}{dt} + y = t^2 e^t.$$

Partikuler loysn fæst við 1.31 (iii).

$$y_p(t) = e^t \int \frac{1}{(e^t)^2 e^{-t-\ln(t)}} \left(\int e^t e^{-t-\ln(t)}\, t\, e^t \, dt \right) dt$$

$$= e^t \int t e^{-t} \left(\int e^t \, dt \right) dt$$

$$= e^t \int t e^{-t} e^t \, dt$$

$$= e^t \int t \, dt$$

$$= \frac{1}{2} t^2 e^t \quad , \quad t > 0,$$

men er loysn á $\mathbb{R}$.

(v) Finn fullkomuligu loysnina til $t \frac{d^2y}{dt^2} - (t+1)\frac{dy}{dt} + y = t^2 e^t.$

Per 1.31 fáa vit

$$y(t) = k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t) + y_p(t)$$

$$= k_1 e^t - k_2(t+1) + \frac{1}{2} t^2 e^t \quad , \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$