## Potensrekkjumetodan

Vit hava sæð, at potensrekkjur hava rættiliga penar eginleikar á teirri konvergensradius. Antin var $\rho = 0$, altso fáa vit einki áhugavert í samband við at loysa differentiallíkningar, ella er ein radius $\rho < \infty$ ella $\rho = \infty$.

Potensrekkjur

Ein rekkja av slagnum $\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ er ein potensrekkja, og har sum ein funktión $f: I \to \mathbb{R}$ kann skrivast sum eina potensrekkju knýta vit framsetanina

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n t^n .$$

Her er natúrligt, at vit ynskja at finna konvergensradius hjá eini potensrekkju og definera sumfunktiónina á $I = ]-\rho, \rho[$.
Bæði differentiabilitet og integrabilitet fylgja natúrligt, minst tó til broytan av indeks.

Setn. 5.20 Fyri $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$, $|t| < \rho$, so er $c_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Altso er

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n , \quad |t| < \rho .$$

Hetta sæst via differentiabilitet

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots ,$$

so at $f(0) = c_0$, $f'(0) = c_1$, $f''(0) = 2 \cdot 1 \cdot c_2$ og soleiðis $f^{(k)}(0) = c_k k!$, $k \in \mathbb{N}$.

Um $f(t) = 0$.

Korollar 5.21 Um $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = 0$, $|t| < \rho$, so er $c_n = 0$ fyri øll $n$.

Vit fara nú at arbeiða við at loysa differentiallíkningar av slagnum

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a_1(t) \frac{dy}{dt} + a_2(t) y = u(t), \qquad (1)$$

har $a_1$ og $a_2$ eru funktiónir av $t$. Metodur frá differentiallíkningar við konstantum koefficientum nytta ikki!

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a_1(t) \frac{dy}{dt} + a_2(t) y = 0 \qquad (2)$$

Svar $y_1$ til homogenu líkningina ger, so at vit kunnu loysa differentiallíkningina fullkomuliga.

Setn. 1.31 Um $y_1$ er loysn til (2) og $y_1(t) \neq 0 \ \forall t \in I$, so fáa vit við

$$A_1(t) = \int a_1(t)\,dt \quad \text{og} \quad \Omega(t) = e^{A_1(t)},$$

at:

(i) $y_2$ er ein loysn

$$y_2(t) = y_1(t) \int \frac{1}{y_1(t)^2\,\Omega(t)}\,dt,$$

sum er lineert óheft frá $y_1$.

(ii) Homogen loysn: $c_1 y_1 + c_2 y_2$, $c_1, c_2$ konstatar.

(iii) Partikuler loysn hjá (1):

$$y_p(t) = y_1(t) \int \frac{1}{y_1(t)^2\,\Omega(t)} \left( \int y_1(t)\,\Omega(t)\,u(t)\,dt \right) dt$$

(iv) Inhomogen loysn: $y(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p$.

Tankin er, at um vit gita eina potensrekkjuloysn, so gevur setningur 1.31 okkum restina.

## Uppskrift til potensrekkjumetodun

1. Gita, at ein potensrekkja $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ er ein loysn.
2. Set $y(t)$ í ta homogenu differentiallíkningina (2) og avger $c_n$, so at vit hava eina loysn. Typiskt rekursivir koefficientar.
3. Avger konvergensradius hjá potensrekkjuni. Her avger $\rho$, nær vit hava eina potensrekkju sum loysn fyri (2).

4(a). Finn eina funktión, sum $y(t)$ svarar til.

4(b). Finn $N \in \mathbb{N}$, so at $|y(t) - S_N(t)| \leq \varepsilon$ í passandi interval.

$$t\,\frac{d^2y}{dt^2} + t\,\frac{dy}{dt} + y = 0$$

1. Vit gita $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ er ein loysn. Nú er

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n t^{n-1} \quad \text{og} \quad y''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) t^{n-2}.$$

2. Nú fáa vit við innsetan, at

$$t\,\frac{d^2y}{dt^2} + t\,\frac{dy}{dt} + y = t\sum_{n=2}^{\infty} c_n\, n(n-1)t^{n-2} + t\sum_{n=1}^{\infty} c_n n\, t^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} c_n\, n(n-1)\, t^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n n\, t^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_{n+1}(n+1)n\, t^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n n\, t^n + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n t^n$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_{n+1}(n+1)n + c_n n + c_n\right) t^n$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_{n+1}(n+1)n + (n+1)c_n\right) t^n$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\left(c_{n+1} n + c_n\right) t^n .$$

Hetta var homogena líkningin, altso loysa vit nær vit fáa null. Venda vit okkum til korollar 5.21, so fáa vit bert null, um

$$c_0 = 0 \quad \text{og} \quad (n+1)\left(c_{n+1} n + c_n\right) = 0 \iff c_{n+1} n + c_n = 0$$

$$\iff \quad c_{n+1} = -\frac{1}{n} c_n \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

Legg til merkis, at vit hava ein ávísan fríheit í val av $c_1$, so at siga fríur parametur.

3. Vit hava við konvergenskriteriið, at

$$\left| \frac{c_{n+1}\, t^{n+1}}{c_n\, t^n} \right| = \left| \frac{-\frac{1}{n} c_n\, t^{n+1}}{c_n\, t^n} \right| = \frac{1}{n} |t| \to 0 \text{ tá } n \to \infty \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

So her er talan um ein konvergensradius $\rho = \infty$.
Vit fáa eina eintýdda loysn við ásetan av byrjunartreytum. Um vit seta

$$\begin{cases} y(0) = a \\ y'(0) = b \end{cases} \implies \begin{cases} c_0 = a \\ c_1 = b , \end{cases}$$

altso verður $c_1$ valt og vit fáa $c_n$, $n \geq 2$, við rekursiva formlinum.

Treytir Lat $y(0) = 0$ og $y'(0) = 1$.

4(a). Vit hava nú $c_0 = 0$ og $c_1 = 1$, meðan:

$$c_2 = -\frac{1}{1} \cdot c_1 = -1 , \quad c_3 = -\frac{1}{2} \cdot c_2 = \frac{1}{2} , \quad c_4 = -\frac{1}{3} c_2 = -\frac{1}{2 \cdot 3} , \quad c_5 = -\frac{1}{4} \cdot c_4 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} .$$

Her fáa vit okkara rekkju $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} t^n$ , $t \in \mathbb{R}$.

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} t^n = t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} t^{n-1} = t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^n$$

$$= t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} = t e^{-t}.$$

$$t \frac{d^2y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} + y = 0 \iff \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + \frac{1}{t} y = 0$$

Nú er $a_1(t) = 1$ og $a_2(t) = \frac{1}{t}$, og tí er $\Omega(t) = e^t$. So kann setningur 1.31 brúkast til at loysa fullkomuliga.

**Ólineerar skipanir** Tá differentiallíkningaskipanir ikki eru lineerar í teirri variablum, so økist kompleksiteturin alsamt. Vit hava sæð skipanir

$$\dot{x} = Ax + u,$$

men her var systemmatrican $A$ eitt úttrykk fyri linearitet, ein lineer avmyndan. Ólineerar skipanir kunnu skrivast

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \end{cases}$$

Altso

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad f(x(t)) = \begin{pmatrix} f_1(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ f_2(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ f_n(x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{pmatrix}$$

og vit skriva

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}).$$

Um hetta var lineert, so var $f(\underline{x}) = \underline{\underline{A}}\, \underline{x}$. Skipanin er autonom, um hon er stýrd av funktiónunum $x_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, t.v.s. ei ávirkan sum $t^2$ ella slíkt.

**Viðgerð** Typiskt tekna fasuplot fyri at síggja rørsluna. Finn stabil punkt:

1. Eitt punkt er stabilt, um allar loysnir nær við stabila punktið altíð vera nær við punktið.
2. Asymptodiskt stabilt punkt, um loysnir enda í punktinum.

1. Loys $\dot{x} = f(x) = 0$, stationer punkt.
2. Kanna, at funktionalmatrican hevur negativ eginvirðir í stationeru punktunum. (Jacobi matrican)