u9. 1. Skriva f sum f_U og f_L.

(i) $f(t) = t^4 + 2t^3 - t^2 + 1$.

$$f_L(t) = \frac{1}{2}\left(f(t) + f(-t)\right) = \frac{1}{2}\left(t^4 + 2t^3 - t^2 + 1 + t^4 - 2t^3 - t^2 + 1\right)$$
$$= t^4 - t^2 + 1.$$
$$f_U(t) = \frac{1}{2}\left(f(t) - f(-t)\right) = \frac{1}{2}\left(t^4 + 2t^3 - t^2 + 1 - \left(t^4 - 2t^3 - t^2 + 1\right)\right)$$
$$= 2t^3.$$

(ii) $f(t) = \cos(3t) \cdot \sin(t)$.

$$f_L(t) = 0 \quad , \quad f_U(t) = f(t).$$

(iii) $f(t) = |t+1|$.

$$f_L(t) = \frac{1}{2}\left(|t+1| + |-t+1|\right) = \begin{cases} -t & , \quad t \leq -1, \\ 1 & , \quad -1 < t < 1, \\ t & , \quad t \geq 1. \end{cases}$$

$$f_U(t) = \frac{1}{2}\left(|t+1| - |-t+1|\right) = \begin{cases} -1 & , \quad t \leq -1, \\ t & , \quad -1 < t < 1, \\ 1 & , \quad t \geq 1. \end{cases}$$

2. $f(x) = 1$ er 2π-periodisk fyrr øll $x \in \mathbb{R}$.

(i) Finn Fourierkoefficientarnar.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi} \cdot 2\pi = 2.$$

Fyri $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Allir koefficientarnir b_n eru null per 6.3, tí f er ein lika funktión.

(ii) Konvergerar Fourierrekkjan hjá f ímóti f?

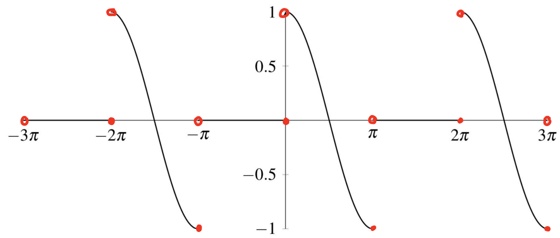
Fourierrekkjan er $$f \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx) = 1.$$

Fourierrekkjan og funktiónin eru eins, so Fourierekkjan konvergera ímóti f fyri øll $x \in \mathbb{R}$.
Her kann eisini sipast til korollar 6.13.

3.

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & , \quad 0 < x \leq \pi \\ 0 & , \quad \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

(i) Tekna grafin.



(ii) Vís, at Fourierrekkjan hjá f er konvergent fyri øll $x \in \mathbb{R}$.

Funktiónin f er 2π-periodisk og $\cos(x)$ er differentiabul við $\cos(x)' = \sin(x)$, sum er kontinuert. Tískil er f eisini stykkivís differentiabul, so per setning 6.12 er Fourierrekkjan hjá f konvergent fyri hvørt $x \in \mathbb{R}$ móti

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

(iii) Hvat konvergerar Fourierrekkjan ímóti fyri $x = 0$?

Av 6.13 (ii) er grensan $\dfrac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \dfrac{1 + 0}{2} = \dfrac{1}{2}$.

(iv) Rokna a_0.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \left[\sin(x)\right]_0^{\pi} = 0.$$

4. $f(t) = t \quad , \quad t \in [-\pi, \pi]$

(i) Vís, at Fourierrekkjan hjá f er $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \sin(nt)$.

Funktiónin er ólíka, so $a_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}_0$.

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(nt)\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin(nt)\, dt$$

$$= \frac{2}{n^2 \pi} \left[\sin(nt) - tn\cos(nt)\right]_0^{\pi} = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}.$$

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \sin(nt).$$

(ii) Skriva summin fyri Fourierrekkjuna fyri hvør $t \in [-\pi,\pi]$.

Við setning 6.12 fáa vit, at Fourierrekkjan konvergerar fyri hvørt $t \in [-\pi,\pi]$, tí tí f er 2π-periodisk og stykkivís differentiabul. Vit fáa, at

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} = \begin{cases} t, & t \in]-\pi,\pi[, \\ 0, & t = \pm\pi. \end{cases}$$

(iii) Finn summin hjá $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ (Sí $t = \frac{\pi}{2}$).

Tá $t = \frac{\pi}{2}$, so er $\sin(kt) = \pm 1$, um $k = 4m+1$ ella $4m+3$, $m \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} t = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k}(-1)^{k+1} \sin(kt) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{4m+2}}{4m+1} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{4m+4}}{4m+3}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}.$$

(iv) Hevur Fourierrekkjan eina konvergenta majorantrekkju?

Tað er eyðsæð, at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ er ein konvergent majorantrekkja. Sí evt. dømi 4.39 og lemma 4.17.

(v) Funktiónin f er differentiabul fyri $t \in]-\pi,\pi[$. Er loyvt at differentiera undir sumteknið í Fourierrekkjuna, sum gevur

$$1 = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos(nt)$$

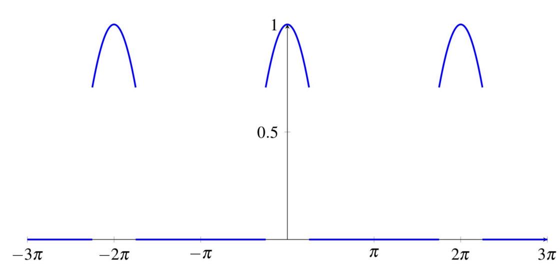
fyri $t \in]-\pi,\pi[$? Samanber við 5.35.

Tað gongur ikki, tí fyri $t=0$ er $\cos(nt) = 1$, so vit fáa eina divergenta rekkju

$$2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cos(nt), \text{ per setning 4.19.}$$

5. $$f(t) = \begin{cases} 0, & -\pi \le t \le -\frac{\pi}{4} \\ \cos(t), & -\frac{\pi}{4} < t < \frac{\pi}{4} \\ 0, & \frac{\pi}{4} \le t \le \pi. \end{cases}$$

(i) Tekna skitsu.



(ii) Finn a_0, a_1 og b_n $\forall n \in \mathbb{N}$.

Funktiónin er lík, so $b_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Vit fáa $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\left[\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}$.

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\cos(t)\sin(t) + t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{4}.$$

(iii) Konvergerar Fourierrekkjan $\forall t \in \mathbb{R}$? Um ja, hvat konvergerar hon ímóti?

Funktiónin er 2π-periodisk og $\frac{d}{dt}\cos(t) = -\sin(t)$, sum er kontinuert. Tískil er f stykkivís differentiabul, so per 6.12 konvergerar Fourierrekkjan fyri øll $t \in \mathbb{R}$ ímóti

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \begin{cases} \cos(t), & -\frac{\pi}{4} < t < \frac{\pi}{4} \\ 0, & -\pi < t < -\frac{\pi}{4} \text{ og } \frac{\pi}{4} < t < \pi \\ \frac{\sqrt{2}}{4}, & t = \pm\frac{\pi}{4}, \pm\pi. \end{cases}$$

(iv) Hevur Fourierrekkjan eina konvergenta majorantrekkju? (setn. 5.33)

Um Fourierrekkjan hjá f hevði konvergenta majorantrekkju, so var sumfunktiónin kontinuert, men tað er hon ikki. Tískil finst eingin konvergent majorantrekkja.