Rekkjurnar hava higartil verið av slagnum Σa_n við tølum.
Áhugamálini

- Konvergens
- Vurdering av sum

Sum so hava vit verið inni yvir, at negativ og kompleks a_n eru møgulig, men í stóran mun eru rekkjurnar positivar.

Funktiónsrekkjur Vit leggja so smátt afturat rekkjurnar við variablar liðir. Hesar vóru kvotientrekkjurnar, har

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x|<1.$$

Talan er um eina einfalda funktiónsrekkju, har $f_n(x) = x^n$. Vit skulu gjarna koma at arbeiða við óendaligar rekkjur av funktiónum, har

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$$

Konvergensur fyri val av $x \in \mathbb{R}/\mathbb{C}$ verður handfarið sum vanligt. Tað er nokk uppá sítt pláss at nevna, at vit meina, tá x er eitt tal sum er valt, so vurderast konvergens fyri rekkjuni, tvs. um $S_N \to S$ tá $N \to \infty$.

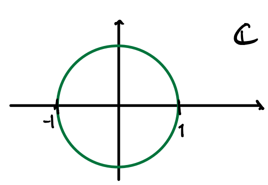
Motivatión Skriva torførar funktiónir sum óendiligar rekkjur av einfaldar funktiónir.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

kompleks (torfør) polynom trig.

Í dag hyggja vit uppá fyrra!

Dømi Setn. 5.2 sigur fyri $|x|<1$ er $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$



Generalisering Ein potensrekkja skrivast $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$

Def. 5.12 Ein funktión $f: I \to \mathbb{R}$, sum kann skrivast

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

fyri passandi c_n, sigst at hava eina potensrekkjuframsetan.

Nær fáa vit slíkt?

Taylor polynom eru gott dømi uppá potensrekkjur.

Lat nú $f: I \to \mathbb{C}$, har $f \in C^\infty(I)$. Vel útviklingspunktið $x_0 \in I$. Fyri $x \in I$ er Taylorpolynomið

$$P_N(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(N)}(x_0)}{N!}(x-x_0)^N.$$

Fyri eitt ξ millum x og x_0 er

$$f(x) = P_N(x) + R_N(x)$$
$$= \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x-x_0)^{N+1}$$

Konvergens $\quad |f(x) - P_N(x)| = |R_N(x)|$, so um $R_N(x) \to 0$ tá $N \to \infty$,

so vil $P_N(x) \to f(x)$, altso er $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

Setn. 5.7 Lat $f: I \to \mathbb{C}$ vera C^∞. Um eitt $C > 0$ finst, so at

$$|f^{(n)}(x)| \leq C \quad \text{fyri øll } x \in I,$$

so er

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad \forall x \in I.$$

Pf. Vit vísa, at $R_N(x) \to 0$ tá $N \to \infty$ undir hesi treyt.

$$|R_N(x)| = \left| \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x-x_0)^{N+1} \right| = \frac{|f^{(N+1)}(\xi)|}{(N+1)!} |x-x_0|^{N+1}$$

$$\leq \frac{C}{(N+1)!} |x-x_0|^{N+1} \qquad \frac{|x-x_0|^{N+1}}{(N+1)!} \to 0 \text{ tá } N \to \infty.$$

$$= C \, \frac{|x-x_0|}{1} \frac{|x-x_0|}{2} \frac{|x-x_0|}{3} \cdots \frac{|x-x_0|}{N+1} \to 0 \text{ tá } N \to \infty.$$

So $R_N(x) \to 0$ tá $N \to \infty$, og tí vil $P_N(x) \to f(x)$ tá $N \to \infty$. $\square$

Dømi 5.8 $\quad f(x) = e^x, \quad x \in (-1, 2).$

$f(x) = f'(x) = f''(x) = \dots = f^n(x)$ so $|f^{(n)}(x)| = e^x \leq e^2, \quad \forall x \in I \ \forall n \in \mathbb{N}.$

Við 5.7 hava vit nú við $x_0 = 0$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \qquad x \in (-1, 2).$$

Fyri val av x_0 vel I stórt nokk. Rekkjuframsetanin er galdandi fyri øll $x \in \mathbb{R}$.

Radius

Konv. 5.13 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ (i) konv. tá $x = 0$. $\rho = 0$

(ii) konv. $\forall x \in \mathbb{R}$. $(x \in \mathbb{C})$. $\rho = \infty$

(iii) $\exists \rho > 0$ har rekkjan er absolut konv. tá $|x| < \rho$. $(x \in \mathbb{C})$

Pf. Set fyri, at $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \to C > 0$ tá $n \to \infty$. Altið konv. fyri $x = 0$.

$a_n = c_n x^n$ og $x \neq 0$:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{c_{n+1} x^{n+1}}{c_n x^n}\right| = \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| |x| \to C|x| \text{ tá } n \to \infty.$$

$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ er konv. um $C|x| < 1 \iff |x| < \frac{1}{C} = \rho$

div. um $C|x| > 1 \iff |x| > \frac{1}{C}$

Um $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \not\to C$, so er rekkjan div. og um $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \to 0$ so er konv. $\forall x \in \mathbb{R}$. $(x \in \mathbb{C})$

Dømi $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Rekkjan er konv. fyri $x = 0$.

Fyri $x \neq 0$, lat $a_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!} x^{2n+3} \cdot \frac{(2n+1)!}{(-1)^n x^{2n+1}}\right| = \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} x^2 = \frac{x^2}{(2n+3)(2n+2)} \to 0 \text{ tá } n \to \infty.$$

So $\rho = \infty$.

Dømi 5.14 Konv. radius fyri $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Lat $a_n = \frac{x^n}{n!}$, so hava vit

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n}\right| = \frac{1}{n+1} |x| \to 0 \quad \text{tá } n \to \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vit hava aftur $\rho = \infty$.

Endamálið Tað minni nakað nógv um "gættemetoden"!

Givið eina differentiallíkning, so kunnu vit innseta eina potensrekkju til at rokna loysnina. Her hugsa vit gjarna at $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ er meiri einfalt enn ein funktiónsforskrift fyri $f(x)$.

Differentiabilitet — Vit mugu fáa greiðu á, hvat differentiatión av eini røkkju merkir. Fyri sovítt riggar alt sum ynskt, tá vit arbeiða inni í konvergensradius.

Setn. 5.17 — Givið $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ við konvergensradius ρ, so er

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad x \in (-\rho, \rho) \qquad \text{og} \qquad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}, \quad x \in (-\rho, \rho)$$

$$= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots \qquad\qquad = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots$$

Generelt:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n\, n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\, x^{n-k}, \quad x \in (-\rho, \rho).$$

Indeks! — Ansi eftir við skift av indeks. Hetta skal bert fara fram um tit differentiera fyrsta liðin burtur.

Dømi — $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R}$. Hava víst at $\rho = \infty$.

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(2n+1)x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

Legg til merkis, at

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$