301.

(i) Find samtlige reelle løsninger til differentialligningen $y''(t)+5y'(t)-6y(t)=0$.
(ii) Find samtlige reelle løsninger til differentialligningen $y''(t)+5y'(t)-6y(t)=t$.

(i) Karakterlíkningin er givin við

$$\lambda^2+5\lambda-6=0.$$

$$\lambda=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot1\cdot(-6)}}{2\cdot1}=\frac{-5\pm7}{2}=\begin{cases}1\\-6\end{cases}$$

Loysnirnar eru c_1e^t og c_2e^{-6t}, har $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
Fullkomuliga reella loysnin er $y(t)=c_1e^t+c_2e^{-6t}$.

(ii) Talan er um inhomogenu líkningina hoyrandi til (i), har $u(t)=t$. Per setning 1.20 er fullkomuliga loysnin

$$y=y_0+y_{Hom}$$

Við vegleiðingini á s.14 gera vit eitt boð uppá partikuleru loysnina y_0.
Tað sæst, at $u(t)$ er eitt polynom á stignum $k=1$. Okkara git verður tískil eitt polynom á stignum $n+k=2+1=3$.

$$y_0(t)=at^3+bt^2+ct+d \quad , \quad a,b,c,d\in\mathbb{R}.$$

Vit seta y_0 í $D_2(y)$ í okkara differentiallíkning $D_2(y)=u$.

$$y_0''+5y_0'-6y_0=6at+2b+5(3at^2+2bt+c)-6(at^3+bt^2+ct+d)$$

$$=\underbrace{-6at^3}_{=0}+\underbrace{(15a-6b)}_{=0}t^2+\underbrace{(6a+10b-6c)}_{=1}t+\underbrace{(2b+5c-6d)}_{=0}$$

Um hetta skal vera javnt við $u(t)=t$, so skal $a=0$, $b=0$ og $c=-\frac{1}{6}$.
Út frá hesum loysa vit d í síðsta liðinum at vera $d=-\frac{5}{36}$.

Nú er $y_0(t)=-\frac{1}{6}t-\frac{1}{36}$ og fullkomuliga reella loysnin hjá inhomogenu differentiallíkningini er

$$y(t)=c_1e^t+c_2e^{-6t}-\frac{1}{6}t-\frac{5}{36}\quad , \quad \text{har } c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

306.

(i) Find alle komplekse løsninger til differentialligningen

$$y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0.$$

(ii) Find nu alle reelle løsninger til differentialligningen.

(i) Karakterlíkningin er givin við

$$
\begin{aligned}
& \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (\lambda^2)^2 + 2\cdot\lambda^2\cdot 1 + 1^2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (\lambda^2 + 1)^2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \lambda^2 + 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \lambda = \pm i
\end{aligned}
$$

Báðar røturnar hava multiplicitetin 2. Per setning 1.15 er fullkomuliga loysnin givin við linearkombinatión av loysnunum

$$c_1 e^{it}, \quad c_2 t e^{it}, \quad c_3 e^{-it}, \quad c_4 t e^{-it}, \quad \text{har } c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{C}.$$

Tvs. fullkomuliga kompleksa loysnin skrivast tískil

$$y(t) = c_1 e^{it} + c_2 t e^{it} + c_3 e^{-it} + c_4 t e^{-it}, \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{C}.$$

(ii) Reellu loysnirnar fáast umvegis loysnirnar í (i) og setning 1.15(ii).

Við $\lambda = a \pm i\omega$, har $a = 0$ og $\omega = 1$ fáa vit

$$k_1 \cos(t), \quad k_2 \sin(t), \quad k_3 t\cos(t), \quad k_4 t \sin(t), \quad \text{har } k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}.$$

Fullkomuliga reella loysnin skrivast tískil

$$y(t) = k_1 \cos(t) + k_2 \sin(t) + k_3 t\cos(t) + k_4 t\sin(t), \quad k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}.$$

312. Hevur $\frac{dy}{dt} - 2y = e^{2t}$ eina loysn $y(t) = Ce^{2t}$?

Við innsetan av $y(t)$ í diff. likn. fáa vit

$$2Ce^{2t} - 2Ce^{2t} = 0 \neq e^{2t}.$$

Diff. likn. hevur onga loysn av slagnum $y(t) = Ce^{2t}$, har C er ein konstantur, tí $e^{2t} \neq 0$!

317.

(i) Bestem den fuldstændige reelle løsning til differentialligningen

$$\frac{d^4y}{dt^4} + 10\frac{d^2y}{dt^2} + 169y = 0.$$

(ii) Vis at differentialligningen har netop én partikulær løsning $y = f(t)$ for hvilken $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ og $f(t) \to 0$ for $t \to \infty$.

(i) Vit loysa karakterlikningina

$$\lambda^4 + 10\lambda^2 + 169 = 0 \quad , \quad \lambda^2 = \eta$$

$$\eta^2 + 10\eta + 169 = 0 \iff \eta = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 169}}{2} = -5 \pm 12i$$

$$\lambda = \pm\sqrt{-5 \pm 12i} = \pm(2 \pm 3i)$$

Við setn. 1.15

$$y(t) = c_1 e^{2t}\cos(3t) + c_2 e^{2t}\sin(3t) + c_3 e^{-2t}\cos(3t) + c_4 e^{-2t}\sin(3t), \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

(ii) Liðirnir eru lineert óheftir, so um $f(t) \to 0$ tá $t \to \infty$ skulu $c_1 = c_2 = 0$, tí $e^{2t} \to \infty$ og $e^{-2t} \to 0$ tá $t \to \infty$. Um $f(0) = 0$, so skal $c_3 = 0$. At enda brúka vit $f'(0) = 1$ at avgera c_4.

$$f'(t) = -2c_4 e^{-2t}\sin(3t) + c_4 e^{-2t} \cdot \cos(3t) \cdot 3$$

$$c_4 \cdot \cos(0) \cdot 3 = 1 \iff c_4 = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \quad f(t) = \frac{1}{3} e^{-2t}\sin(3t)$$

309.

Find ved anvendelse af gættemetoden én løsning til hver af de to ligninger

(i) $\ddot{y}+5\dot{y}-6y=\cos 2t$.

(ii) $\ddot{y}+5\dot{y}-6y=\sin 2t$.

(iii) Hvordan kan man finde samtlige løsninger til (i) og (ii)?

(iv) Gør rede for hvordan man kan finde samtlige løsninger til ligningen

$$\ddot{y}+5\dot{y}-6y=17\cos 2t-121\sin 2t.$$

(i) Vit gita $y(t) = A\cos 2t + B\sin 2t$. Bæði y' og y'' eru at finna í dømi 1.21. Við at seta inn hava vit

$$-4A\cos(2t) - 4B\sin(2t) + 5\left(-2A\sin(2t) + 2B\cos(2t)\right) - 6\left(A\cos(2t) + B\sin(2t)\right) = \cos(2t).$$

Faktorisera og savna

$$(-10A + 10B)\cos(2t) + (-10A - 10B)\sin(2t) = \cos(2t)$$

Nú skulu vit hava

$$\begin{cases} -10A + 10B = 1 \\ -10A - 10B = 0 \iff -10A = 10B \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} B = \frac{1}{20} \\ A = -\frac{1}{20} \end{matrix}$$

Loysnin er

$$y(t) = -\frac{1}{20}\cos 2t + \frac{1}{20}\sin 2t.$$

(ii) Úr (i) hava vit

$$(-10A + 10B)\cos(2t) + (-10A - 10B)\sin(2t) = \sin(2t).$$

Vit loysa

$$\begin{cases} -10A + 10B = 0 \iff 10A = 10B \\ -10A - 10B = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} A = -\frac{1}{20} \\ B = -\frac{1}{20} \end{matrix}$$

Loysnin er

$$y(t) = -\frac{1}{20}\cos 2t - \frac{1}{20}\sin 2t.$$

(iii) Vit mangla bert y_{Hom}, so vit loysa $y'' + 5y' - 6y = 0$ við $P(\lambda)$.

$$\lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0 \iff \lambda = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4\cdot(-6)}}{2} = \frac{-5 \pm 7}{2} = \begin{cases} 1 \\ -6 \end{cases}$$

Allar loysnirnar eru tiskil per setning 1.20

$$\begin{cases} y_1(t) = -\frac{1}{20}\cos 2t + \frac{1}{20}\sin 2t + k_1 e^{t} + k_2 e^{-6t} \\ y_2(t) = -\frac{1}{20}\cos 2t - \frac{1}{20}\sin 2t + k_1 e^{t} + k_2 e^{-6t} \end{cases}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

(iv) Lat $u_1 = \cos(2t)$ og $u_2 = \sin(2t)$, so er y_1 allar loysnir hjá $D_n(y) = u_1$ og y_2 allar loysnir hjá $D_n(y) = u_2$. Per setning 1.22 (Superposition), so er $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ allar loysnir til $D_n(y) = c_1 u_1 + c_2 u_2$.

Set $c_1 = 17$ og $c_2 = -121$ so fylgir niðurstøðan.