Vector spaces — Generel vektor rúm kunnu fyri sovítt vera n-dimensionel, ella evt. óendeligt dimensionel. Tað kann blíva nakað abstrakt í geometriskan forstand, men ein dimensión er hóast alt ein variabul. Vit kunnu typiskt ímynda okkum ein variabul afturat til okkara system uttan at hesin er rúmligur (spatial).

Linear space — Eitt lineert rúm við dimensiónini n skriva vit $\mathcal{L}_n$. Lutirnir eru vektorar, so sum $\underline{u}$ og $\underline{v}$. Addition og skalar multiplikatión er ein treyt, so at

$$\underline{w} = s\underline{u} + t\underline{v} \quad , \quad s,t \in \mathbb{R}.$$

Altso rúmið hevur linearitets eginleikan.

Dømi — Lat $\mathcal{M}_{2\times2}$ vera lineera rúmið av 2×2 matricur. Vit hava standardbasan

$$\left(\underset{\underline{e}_1}{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}}, \underset{\underline{e}_2}{\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}}, \underset{\underline{e}_3}{\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}}, \underset{\underline{e}_4}{\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}} \right)$$

So rúmið er $\mathcal{M}_{2\times2}$ er 4-dimensionelt og lineert, tí $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ við $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ kann skrivast

$$a\,\underline{e}_1 + b\,\underline{e}_2 + c\,\underline{e}_3 + d\,\underline{e}_4 .$$

Altso matricurnar hava linearitets eginleikan.

Dømi 14.3 — $\mathcal{V}_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ har $\underline{w} \in \mathcal{V}_2$ hava $w_2 \geq 0$ er ikki eitt lineert rúm. Kanna stabilitet:

$$0 \cdot \underline{e}_1 + (-1)\,\underline{e}_2 = \begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix} \notin \mathcal{V}_2 .$$

Her er $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ í $\mathcal{V}_2$, men linearkombinatiónin er ikki.

Lin. indep. — Vektorar eru lineert óheftir, um

$$s_1\underline{v}_1 + s_2\underline{v}_2 + \cdots + s_n\underline{v}_n = 0 \iff s_1 = s_2 = \cdots = s_n = 0 .$$

Vit fáa bert 0, um skalararnir eru 0. Eingir vektorar cancellera hvønn annan.

Í $\mathcal{L}_n$ gera n óheftir vektorar ein basis, meðan $r<n$ óheftir útspenna eitt undirrúm í $\mathcal{L}_n$. Í $\mathcal{L}_n$ eru $n+1$ vektorar altíð lineert heftir.

Dømi 14.6 — Lat $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$, $\underline{v}_3 = \begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}$, $\underline{v}_4 = \begin{bmatrix}0\\0\\-3\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Vektorarnir eru lineert heftir,

tí her eru 4, og $\mathbb{R}^3$ er 3-dim. $\quad \underline{v}_3 = -\underline{v}_1 + 2\underline{v}_2 + \underline{v}_4 .$

Linear maps — Ein lineer avmyndan $f: \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m$ er ein funktión, sum hevur tilhoyrandi koefficientmatrix $\underline{\underline{A}}$, sum er $m \times n$. Hetta svarar til m líkningar og n variablar frá $\underline{v} \in \mathcal{L}_n$. Soleiðis enda vit við $\underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \underline{w} \in \mathcal{L}_m$.

Dømi 14.7 — Lat $\underline{\underline{A}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ vera givin við $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Vektorar í $\mathbb{R}^2$ enda sostatt í $\mathbb{R}^3$: $\underline{e}_1 \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\underline{e}_2 \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, meðan

$$\underline{\underline{A}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Inner product — Vit generalisera prikproduktið til eitt innara produkt. Lat $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathcal{L}_n$ og $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Innara produktið hjá $\underline{u}$ og $\underline{v}$ skrivast $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$, sum gevur eitt talvirði. Eginleikar / treytir hjá innara produkt.

1. $\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle \geq 0$ og $\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle = 0 \iff \underline{v} = 0$ Positivitetur
2. $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \overline{\langle \underline{w}, \underline{v} \rangle} = \langle \underline{w}, \underline{v} \rangle$ yvir reel vektorrúm er symmetri
3. $\langle \underline{u} + \underline{v}, \underline{w} \rangle = \langle \underline{u}, \underline{w} \rangle + \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$ linearitetur
4. $\langle \alpha \underline{v}, \underline{w} \rangle = \alpha \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$

Yvir $\mathbb{R}^n$ er $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n$ tvs. prikproduktið.

Innara produktið definerar ein norm á $\mathcal{L}_n$, har $\|v\| = \sqrt{\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle}$.
Normurin ger at vit kunnu rokna frástøðu, og avstandsmátið verður vanliga nevnt metrikkur.
Vit definera, at $\underline{v} \perp \underline{w} \iff \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = 0$, so at hugtakið ONB er meiningsfult.

C.S. $\quad \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle \leq \|\underline{v}\| \, \|w\|$

$\Delta \quad \|\underline{v} + w\| \leq \|\underline{v}\| + \|w\|$

Ortogonal projektión av $\underline{v}$ á $\operatorname{span}\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_k\}$ í $\mathcal{L}_n$ er

$$P\underline{v} = \langle \underline{v}, \underline{u}_1 \rangle \underline{u}_1 + \cdots + \langle \underline{v}, u_k \rangle u_k$$

Function spaces

Generel vektor rúm umboða eisini funktións rúm. Heilt yvirordnað eru funktiónir, sum avmynda úr U til V skrivað sum ein mongd $F(U,V)$.

Vit sóu í dømi 14.7 eina lineera avmyndan, $\underline{\underline{A}}$, og hendan svarar til koordinatmatricuna hjá eini funktión $f \in F(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.

Við $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ er talan um allar funktiónir úr $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$, og vit definera undirrúmini

$$F(\mathbb{R},\mathbb{R}) \supseteq C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \supseteq C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \supseteq \cdots \supseteq C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

at vera kontinuertar funktiónir, differentiablar funktiónir við kontinuertar avleiddar funktiónir, heilt upp til óendaligt differentiablar funktiónir.

Umframt tað er $P^n(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subseteq P(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subseteq C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ polynom á n'ta stigi og øll polynom óendaliga ofta differentiabul.

Dømi

Fyri at vera eitt vektor rúm, so skulu rúmini omanfyri uppfylla krøvini í definitión 11.1 í eNotu 11. Vit nýtast bert at kanna $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ fyri allar eginleikarnar, og síðani kanna restina fyri stabilitet sum undir rúm.

Tað er skjótt at vátta 1-8. Harafturat er $\alpha f + g \in F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ fyri $\alpha \in \mathbb{R}$ og $f, g \in F(\mathbb{R},\mathbb{R})$, so $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ er eitt vektor rúm.

Vit hava nú, at fyri $\alpha \in \mathbb{R}$ og $f, g \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ er

$$\alpha f + g \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

Skalering av einari kontinuerta funktión er kontinuert og addítión av kontinuertum er kontinuert. Tískil er $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ eitt undir rúm og eitt vektor rúm í sær sjálvum.

Basis

Ein basis fyri $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ er $\{1, \sqrt{2}\cos(x), \sqrt{2}\sin(x), \sqrt{2}\cos(2x), \sqrt{2}\sin(2x), \ldots\}$. Altso óendaligt dimensionelt.

Fyri $P^n(\mathbb{R},\mathbb{R})$ hava vit $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$.

Polynom við í mesta lagi stig 2 eru í $P^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ og her er basin $\{1, x, x^2\}$.

Dømi 11.36 Lat $R(x) = 2 - 3x - x^2$ Finn $P(x) = 2R(x) - S(x) + 3T(x)$

$S(x) = 1 - x + 3x^2$

$T(x) = x + 2x^2$

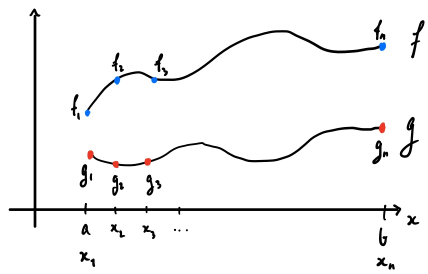
í $P^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Vektorarnir eru $\underline{R} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\underline{S} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ og $\underline{T} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, so

$$\underline{P} = 2\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Altso er $P(x) = 3 - 2x + x^2$.

Produktið



$$\Delta x = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n-1}$$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

Diskret samling av data gevur vektorarnar

$$\underline{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \underline{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}.$$

Diskret innara produkt: $\langle \underline{f}, \underline{g} \rangle = \underline{g}^{*T} \underline{f} = f_1 \bar{g}_1 + f_2 \bar{g}_2 + \cdots + f_n \bar{g}_n$

$$= \sum_{k=1}^{n} f_k \bar{g}_k \qquad \text{(kompleks virðir)}$$

Hetta má normaliserast. Um vit velja dupult so nógv datapunkt fáa vit nógv størri sum!

$$\langle \underline{f}, \underline{g} \rangle \Delta x = \sum_{k=1}^{n} f_k \bar{g}_k \Delta x = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \overline{g(x_k)} \Delta x .$$

Her stendur Riemann approksimatiónin av tí kontinuerta integralinum, sum innara produktið á $L^2(-\pi, \pi)$ er givið við.

So, um vit lata nøgdina av datapunktum ganga ímóti óendaligt, svarar diskreta innara produktið til integralið!

Operator D Ein umráðandi lineer avmyndan av funktiónum er D, sum differentierar $f \in C^n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$. Altso er

$$Df = f'$$

Dømi Lat $p \in P^n(\mathbb{R})$, so er $Dp = p' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$

Dømi 14.12 Lat $p, q \in P^3(\mathbb{R})$ vera

$$p(t) = 3 - t + 2t^2 + 3t^3$$
$$q(t) = 1 + t - t^3$$

og set $r(t) = 2p(t) - q(t) = 5 - 3t + 4t^2 + 7t^3.$

Lineariteten av D skal altso halda, tvs. at

$Dr = r'$ skal samsvara við $D(2p - q) = 2Dp - Dq$

$$Dr = r'(t) = -3 + 8t + 21t^2$$

$$\begin{aligned} 2Dp - Dq &= 2 \cdot p'(t) - q'(t) \\ &= 2(-1 + 4t + 9t^2) - (1 - 3t^2) \\ &= -2 + 8t + 18t^2 - 1 + 3t^2 \\ &= -3 + 8t + 21t^2. \end{aligned}$$