428. Kanna um systemini eru asymptodiskt stabil.

Per setning 2.45 nýtast vit bert at kanna asymptodiskan stabilitet av homogenu skipanini.

(i) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x + u$, $\det(A-\lambda I) = (1-\lambda)(-1-\lambda)+1 = 0$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - \lambda - 1 + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$$

Per Routh-Hurwitz er systemið, so hava øll eginvirðini ikki $Re(\lambda)<0$, tí koefficientarnir $a_1 = 0 \not> 0$ og $a_2 = 0 \not> 0$. Per setning 2.36, so er systemið ikki asymptodiskt stabil.

(ii) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} x$, $\det(A-\lambda I) = (1-\lambda)(2-\lambda) - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow 2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda = 0$$

Per Routh-Hurwitz er systemið, so hava øll eginvirðini ikki $Re(\lambda)<0$, tí koefficientarnir $a_1 = -3 \not> 0$ og $a_2 = 0 \not> 0$. Per setning 2.36, so er systemið ikki asymptodiskt stabil.

(iii) $\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos 2t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $\det(A-\lambda I) = (-1)^{3+3} \cdot (-1-\lambda) \cdot \left((-2-\lambda)\cdot(-1-\lambda) - 1\right) = 0$

$$\Leftrightarrow (-1-\lambda)\left(2 + 2\lambda + \lambda + \lambda^2 - 1\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow -\lambda^2 - 3\lambda - 1 - \lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda^3 + 4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$$

Allir koefficientarnir eru positivir, og vit fáa

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 16 - 1 = 15 > 0.$$

Per Routh-Hurwitz hava øll eginvirðini $Re(\lambda) < 0$, og per setning 2.36 er systemið asymptodiskt stabilt.

(iv) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x + u$, $\det(A-\lambda I) = (1-\lambda)(-1-\lambda)(-\lambda) + 1 - (1-\lambda) = 0$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda^2 + \lambda + 1 - 1 + \lambda = 0$$
$$\Leftrightarrow -\lambda^3 + 2\lambda = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda^3 - 2\lambda = 0$$

Per Routh-Hurwitz er systemið, so hava øll eginvirðini ikki $Re(\lambda)<0$, tí koefficientarnir $a_1 = 0 \not> 0$, $a_2 = -2 \not> 0$ og $a_3 = 0 \not> 0$. Per setning 2.36, so er systemið ikki asymptodiskt stabil.

1. Vís at skipanirnar eru asymptodisk stabil.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} x \quad \text{og} \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Vit kanna homogena systemið.

$$\det(A - \lambda I) = (-3-\lambda)(-3-\lambda) - 4 = 0$$
$$\iff 9 + 3\lambda + 3\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$$
$$\iff \lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0 \implies a_1 = 6 \text{ og } a_2 = 5.$$

Per korollar 2.40 (Routh-Hurwitz), so hava eginvirðini negativan realpart. Setningur 2.36 gevur nú, at homogena skipanin er asymptodisk stabil. Við setning 2.45 fylgir, at inhomogena skipanin eisini er asymptodisk stabil.

2. Kanna um talfylgjan er konvergent, og angev grensuvirðið.

(1) $x_n = \dfrac{n^2+1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$

Vit hava $x_n = \dfrac{n^2+1}{n} = \dfrac{n + \frac{1}{n}}{1} = n + \frac{1}{n} \to \infty$ tá $n \to \infty$. (Divergent)

(2) $x_n = \dfrac{1}{\ln(n)+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$

Av tí at $\ln(n) \to \infty$ tá $n \to \infty$, so vil $x_n \to 0$ tá $n \to \infty$. (Konvergent)

(3) $x_n = \dfrac{\ln(n)}{\ln(n^2)}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$

Vit hava, at $x_n = \dfrac{\ln(n)}{\ln(n^2)} = \dfrac{\ln(n)}{2 \cdot \ln(n)} = \dfrac{1}{2}$, so $x_n \to \frac{1}{2}$ tá $n \to \infty$. (Konvergent)

(4) $x_n = \dfrac{3n^4 + 45n^2 + 217n - 1015}{4n^4 + 300000n + 5}, \quad n \in \mathbb{N}.$

Vit fáa $x_n = \dfrac{3 + \frac{45}{n^2} + \frac{217}{n^3} - \frac{1015}{n^4}}{4 + \frac{300000}{n^3} + \frac{5}{n^4}} \to \dfrac{3}{4}$ tá $n \to \infty$. (Konvergent)

3. Kanna um óegentliga integralið er konvergent og angev virðið.

(1) $\int_1^\infty x^2\,dx$. $\int_1^t x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^t = \frac{1}{3}t^3 - 1$

Grensan fyri integralið er óavmarkað $\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{3}t^3 - 1\right) = \infty$, so integralið er divergent.

(2) $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$. $\int_1^t \frac{1}{x^3}\,dx = \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^t = -\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$ tá $t\to\infty$.

(3) $\int_0^\infty \sin(x)\,dx$. $\int_0^t \sin(x)\,dx = \left[-\cos(x)\right]_0^t = -\cos(t) + 1$.

Funktiónin $\cos(t)$ hevur ikki eitt grensuvirði fyri $t\to\infty$, so integralið er divergent.

(4) $\int_1^\infty \left(\frac{1}{3}\right)^x dx$. $\int_1^t \left(\frac{1}{3}\right)^x dx = \left[\ln\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^x\right]_1^t = \ln\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^t - \ln\left(\frac{1}{3}\right)\frac{1}{3}$

$= \frac{1}{3}\ln(3) - \ln(3)\left(\frac{1}{3}\right)^t \to \frac{1}{3}\ln(3)$ tá $t\to\infty$.

4. Givið $\sum_{n=0}^\infty\left(\frac{1}{1000} - \frac{1}{1000-n}\right)$ lat $S_N = \sum_{n=0}^\infty\left(\frac{1}{1000} - \frac{1}{1000-n}\right)$ vera avsnitssum fyri $N = 0, 1, \ldots$

(1) Rokna S_0, S_1 og S_2.

$S_0 = \sum_{n=0}^0\left(\frac{1}{1000} - \frac{1}{1000-n}\right) = 0$. $S_1 = \sum_{n=0}^1\left(\frac{1}{1000} - \frac{1}{1000-n}\right) = \frac{1}{1000} - \frac{1}{1001} = \frac{1}{1001000}$.

$S_2 = \sum_{n=0}^2\left(\frac{1}{1000} - \frac{1}{1000-n}\right) = \frac{1}{1001000} + \frac{1}{1000} - \frac{1}{1002} = \frac{1}{1001000} + \frac{2}{1002000} = \frac{751}{250750500}$.

(2) Vís, at har finst eitt $N\in\mathbb{N}$, so at

$$\frac{1}{1000} - \frac{1}{1000+n} \geq \frac{1}{2000} \quad \forall n \geq N.$$

$$\frac{1}{1000} - \frac{1}{1000+n} \geq \frac{1}{2000} \iff \frac{1}{1000+n} \leq \frac{1}{2000} \iff 1000+n \geq 2000$$

$$\iff n \geq 1000.$$

Lat $N = 1000$, so passar ólikningin fyri øll $n \geq N$.

(3) Vís, at har finst eitt $M \in \mathbb{N}$, so at $S_N \ge S_{1000} - \frac{1}{2} + \frac{N}{2000}$ fyri øll $N > M$.

Vit vurdera upp við at shifta indeks.

$$S_N = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1000} - \frac{1}{1000-n}\right) = S_{1000} + \sum_{n=1001}^{N}\left(\frac{1}{1000} - \frac{1}{1000+n}\right)$$

$$\overset{(ii)}{\ge} S_{1000} + \frac{N-1000}{2000} = S_{1000} - \frac{1}{2} + \frac{N}{2000}, \quad \text{fyri } N > 1000 = M.$$

(4) Avger at rekkjan er divergent.

Per (iii) er $S_N \ge S_{1000} - \frac{1}{2} + \frac{N}{2000}$ fyri $N > 1000$, og av tí at $S_{1000} - \frac{1}{2} + \frac{N}{1000} \to \infty$ tá $N \to \infty$, so vil

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1000} - \frac{1}{1000+n}\right) \quad \text{vera divergent.}$$

5. (1) Greið frá at $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \ge \int_1^N \frac{1}{x}\,dx$ fyri $N = 1, 2, \ldots$ út frá grafinum.

Integralið svarar til arealið undir grafinum hjá $\frac{1}{x}$. Hetta er altíð dominerað av rektanglunum við interval $[n, n+1]$ á breidd 1 og hædd $\frac{1}{n}$.

(2) Vís, at $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$ er divergent.

$$\int_1^t \frac{1}{x}\,dx = [\ln(x)]_1^t = \ln(t) \to \infty \quad \text{tá } t \to \infty.$$

(3) Konkludera, at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ er divergent.

Per (i) er $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \ge \int_1^N \frac{1}{x}\,dx$, men við (ii) er $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$ divergent, og so er rekkjan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ eisini divergent, tá hendan er meiri enn integralið.