Hilbert rúm

Vektorrúm Eitt vektorrúm yvir $\mathbb{F}$ er ein mongd V við bineru operatiónirnar: vektor addition og skalarmultiplikatión.
Operatiónirnar skulu líka natúrligar treytir.
Hugsa gjarna $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ella $\mathbb{C}$.

Innara produkt Eitt innara produkt er ein biner operation á eitt vektorrúm $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{F}$, har fylgjandi eginleikum:

- konjugerað symmetri $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- linearitet $\langle ax + by , z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle$
- positivt definit $\langle x, x \rangle > 0 \iff x \neq 0.$

Cauchy fylgja Ein fylgja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, har $|x_k - x_\ell| \leq \varepsilon$ fyri øll $k, \ell \geq N \in \mathbb{N}$ sigst at vera ein Cauchy fylgja.
Hetta kann skiljast sum, at halin í fylgjuni kann kontrollerast.

Rúm, har allar Cauchy fylgjur konvergera í sama rúmi sigast at vera komplet.
Harafturat sigast vektorrúm við innara produkt at vera innara produkt rúm.

Hilbert rúm Eitt Hilbert rúm er eitt komplet innara produkt rúm.

Vit brúka altso typiskt Hilbert rúm. Okkara fokus er á integrablar og kvadratiskt integrablar funktiónir, t.v.s. $L^2(-\pi, \pi)$.

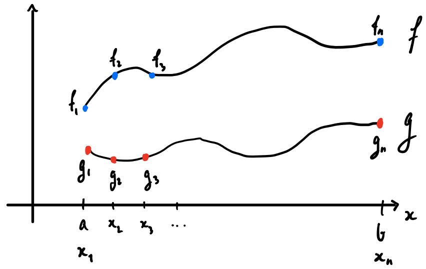
Innara produktið er tá definerað at vera

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx \quad , \quad f, g \in L^2(-\pi, \pi).$$

Basis Vektorarnir $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ eru basisvektorar fyri funktiónsrúmið $L^2(\mathbb{F})$, og normaliserast við $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ til ein ortonormalbasis. Hesir útspenna rúmið per Fouriers setning og eru ortogonalir. Lat $\psi_k = e^{ikx}$, so er

$$\langle \psi_k, \psi_j \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} e^{-ijx}\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-j)x}\, dx = \left[\frac{e^{i(k-j)x}}{i(k-j)} \right]_{-\pi}^{\pi} = \begin{cases} 0 , & k \neq j \\ 2\pi , & k = j . \end{cases}$$

Produktið



$$\Delta x = x_{j+1} - x_j = \frac{b-a}{n-1}$$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

Diskret samling av data gevur vektorarnar

$$\underline{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \underline{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}.$$

Diskret innara produkt: $\langle \underline{f}, \underline{g} \rangle = \underline{g}^{*T} \underline{f} = f_1 \bar{g}_1 + f_2 \bar{g}_2 + \cdots + f_n \bar{g}_n$

$$= \sum_{k=1}^{n} f_k \bar{g}_k \qquad \text{(kompleks virdir)}$$

Hetta má normaliserast. Um vit velja dupult so nógv datapunkt fáa vit nógv størri sum!

$$\langle \underline{f}, \underline{g} \rangle \Delta x = \sum_{k=1}^{n} f_k \bar{g}_k \Delta x = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \overline{g(x_k)} \Delta x .$$

Her stendur Riemann approksimatiónin av tí kontinuerta integralinum, sum innara produktið á $L^2(-\pi,\pi)$ er givið við.
So, um vit lata nøgdina av datapunktum ganga ímóti óendaligt, svarar diskreta innara produktið til integralið!

Men, hvat var tað innara produktið fortelur okkum? Minst til, at skalarproduktið fyri vektorar úttalar seg um, hvussu similerir tveir vektorar eru. Positiv correlatión, um vektorarnir venda eins, null um ortogonalir og negativ um venda øvugt.

Fourierrekkjan hjá $f \in L^2(-\pi,\pi)$ var $\quad f \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$,
har

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \quad , \quad n \in \mathbb{N}_0 .$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx \quad , \quad n \in \mathbb{N}.$$

Fourierkoefficientarnir eru eksplicit givnir sum innara produktið av f og bylgjufunktiónirnar til ymiskar frekvensir. Vit máta altso, hvussu nógv funktiónirnar hava til felags og áseta virðið sum amplitudu til tilsvarandi frekvens.

Transform

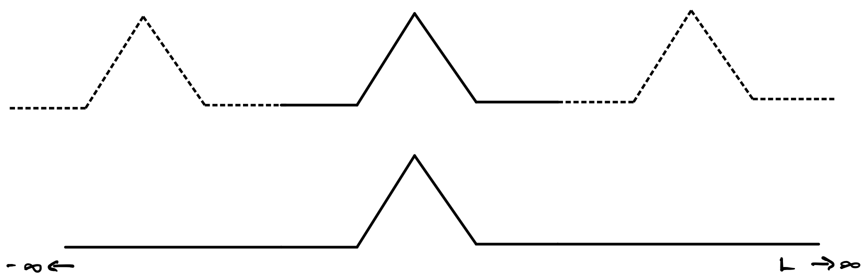
Lat nú $f \in L^2(\mathbb{R})$, ella $\mathbb{C}$, so er hendan definerað fyri $x \in (-\infty,\infty)$. Funktiónin er kvadratiskt integrabul, so hon so at siga skal doyggja út. So á $(-\infty,\infty)$ endurtekur funktiónin seg ikki. Vit hava Fourierrekkjuna á onkrum intervalli $[-L,L)$ er

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}$$

við

$$c_n = \frac{1}{2L} \langle f(x), \psi_n \rangle = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\, e^{-in\pi x/L}\, dx .$$

2L - periodisk



Diskret sæð er f umboðað av bylgjum við frekvensirnar $\omega_n = \frac{n\pi}{L}$. Tá $L \to \infty$ er talan um eitt kontinuum av frekvensum. Definera $\omega = \frac{n\pi}{L}$ og $\Delta\omega = \frac{\pi}{L}$. Tá $L \to \infty$ vil $\Delta\omega \to 0$. Vit fáa nú óendaliga upploysn í frekvensinum.

$$f(x) = \lim_{\substack{\Delta\omega \to 0 \\ (L \to \infty)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta\omega}^{\pi/\Delta\omega} f(\xi)\, e^{-in\Delta\omega\xi}\, d\xi \quad e^{in\Delta\omega x}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, e^{-i\omega\xi}\, d\xi}_{\hat{f}(\omega) = \langle f(\xi), \psi_\omega \rangle \text{ ein funktión av frekvensum!}} \; e^{i\omega x}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega x}\, dx .$$

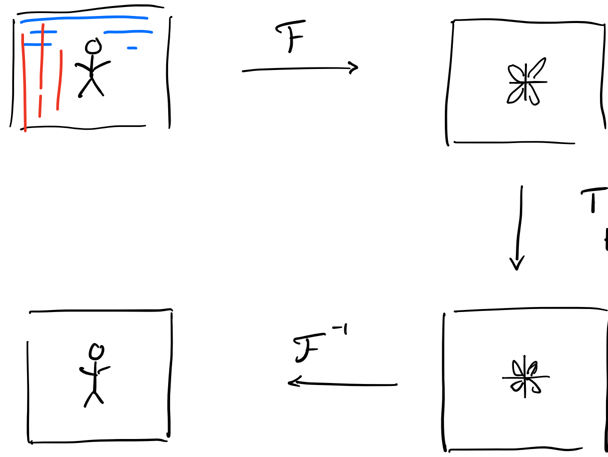
Vit definera $\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}(f(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx$ at vera Fourier transformatiónin av f. Vit skriva eisini $f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega x}\, dx$.

Serliga sterkt amboð, tí vit kunnu velja at arbeiða í tíð/stað ella í frekvensrúminum. Ofta hjálpir konvertering til frekvensrúmið til at loysa problemir, og aftaná kunnu vit venda aftur via inversu transformatiónini.

FFT: Mynd við kamera á fleiri megapixel, men tey fylla ikki so nógv og loada skjótt. Hvussu ber tað til?

FFT2

Mynd

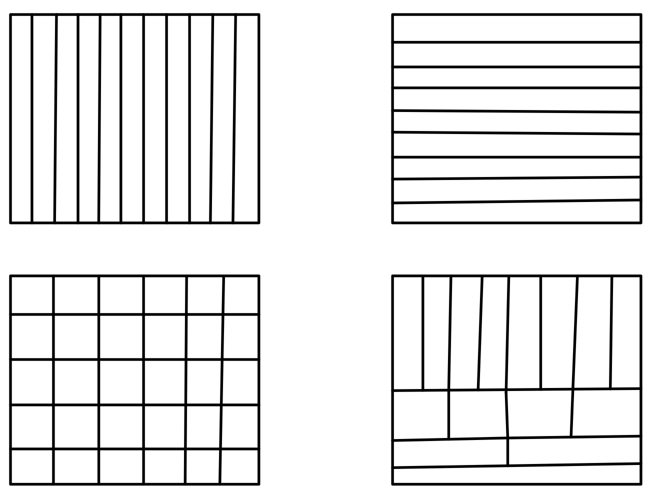


Heisenberg uncertainty principle. Time domain $\longleftrightarrow$ Frequency domain

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \, |f(x)|^2 \, dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \, |\hat{f}(\omega)|^2 \, d\omega\right) \geq \frac{1}{16\pi^2}$$

Resolution:

Tíð Fourier transform



Spectrogram Multiresolution

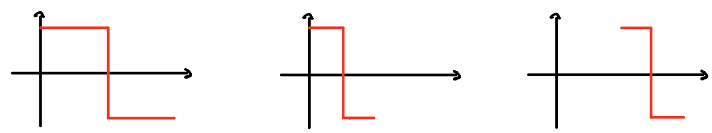
Wavelets

Við wavelets kunnu vit gera multiresolution analysis. Tankin er at gera stuttlivdar bylgjur og fáa uppløysn í bæði tíð og frekvens.

Haar wavelettið kom fyrst í ~1910, men fyrst í 1980'ini kom rull á.

$$\text{Haar}: \quad \psi(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \le x < \frac{1}{2}, \\ -1 & , \quad \frac{1}{2} \le x < 1, \\ 0 & , \quad \text{annars.} \end{cases}$$

Her kallast ψ fyri móðurwavelet og $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$, $j,k \in \mathbb{Z}$, eru dóttur wavelets.



Hesi wavelets ψ og $\psi_{j,k}$ eru eitt system, sum er basis fyri L^2, men harafturat eru nógvir fyrimunir nú, tí bylgjurnar hava kompaktan stuðul. Wavelets yvirtaka nógv av tí, sum vit annars brúka FFT til. Nøgdin av data sum er neyðug er nógv minni og kann justerast alt eftir signalstyrkju.