Konvergens og sum

Tá vit hava við óendaliga summatión at gera, so er skjótt at vit síggja, at tankin ikki at fara í holt við hesi óendaligu processina. Okkara konvergens kanningar gera okkum før fyri at meta um, hvørt ein rekkja er gevur meining at arbeiða uppá. Konvergensur sigur okkum einki um summin hjá einari konvergenta rekkju.

Vurdering

Tað kann fyri óendaligar rekkjur bæði vera torført ella ógjørligt at avgera ein sum eksakt. Tá vit so ynskja at estimera ein sum, so er talan um eina vurdering av $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ umvegis S_N. Okkara uppgáva verður altso at finna $N \in \mathbb{N}$, sum er nóg stórt til at approksimera $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ í ein nøktandi mun. Frávikið kann skrivast

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n - S_N\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{N} a_n\right| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n\right|$$

Tankin er fyri $\varepsilon > 0$ at kontrollera frávikið: $\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n\right| \leq \varepsilon$. Tá frávikið er ε-lítið, so er N valt, so at S_N approksimerar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ í tann mun vit ynskja/áseta

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \varepsilon.$$

Integralkriteriið

Frá seinast sóu vit beinleiðis estimatión við integratión. Um $f : [1,\infty) \to [0,\infty)$ er kontinuert og fallandi:

(i) Um $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ er konvergent, so er $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergent og

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq \int_1^{\infty} f(x)\,dx + f(1).$$

(ii) Um $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ er divergent, so er $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ divergent.

Vit víðkaðu setningin til, at undir konvergens av $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ hava vit

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} f(n) \in \left[\int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx,\ \int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx + f(N+1)\right].$$

Dømi

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1, \quad \text{so vit vita, at} \quad 1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2.$$

Hetta skulu vit klára betur! Vit skriva tvær metodur og vísa á fyrimunir og vansar.

Metode (i)

Vel $N \in \mathbb{N}$, so at $\int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx + f(N+1) \leq \varepsilon$. Nú gevur korollar 4.35(i), at $\sum_{n=N+1}^{\infty} f(n) \leq \varepsilon$. Eftirsum, at

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{N} f(n) + \sum_{n=N+1}^{\infty} f(n), \quad \text{so er} \quad \left|\sum_{n=1}^{\infty} f(n) - \sum_{n=N+1}^{\infty} f(n)\right| \leq \varepsilon.$$

Altso $\sum_{n=1}^{N} f(n) \approx \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

Metode (ii) Vel $N \in \mathbb{N}$, so at $f(N+1) \leq \varepsilon$. Nú sigur 4.35(ii), at

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) + \int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq \sum_{n=1}^{N} f(n) + \int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx + \varepsilon.$$

Niðara og ovara mark hava bert ε á muni, altso bara ε frá $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

Dømi 4.36 Vit estimera $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ við eitt $\varepsilon = 0{,}01$. Fyrst metoda (i):

$$\int_{N+1}^{\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{N+1} \qquad \left(\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\right)$$

Tí fáa vit

$$\int_{N+1}^{\infty} f(x) + f(N+1) = \frac{1}{N+1} + \frac{1}{(N+1)^2} = \frac{N+2}{(N+1)^2}$$

$$= \frac{N+2}{N^2+2N+1} = \frac{N+2}{N(N+2)+1} \leq \frac{N+2}{N(N+2)} = \frac{1}{N}.$$

Halin $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{N}$, og $\frac{1}{N} \leq 0{,}01 \iff N \geq 100$. Vit hava altso

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \approx \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^2} = 1{,}635.$$

Metoda (ii): Vit loysa $f(N+1) \leq 0{,}01 \iff \frac{1}{(N+1)^2} \leq 0{,}01 \iff 100 \leq N^2 + 2N + 1$

$\iff N^2 + 2N - 99 \geq 0$ $\qquad N = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot(-99)}}{2}$

$= \frac{-2 \pm 20}{2} = \begin{cases} 9 \\ -11 \end{cases}$

Fyri $N \in \mathbb{N}$ fáa vit $N = 9$.

Nú er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \approx \sum_{n=1}^{9} \frac{1}{n^2} + \int_{10}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1{,}640.$$

Svarið er $\frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}6449$. Munurin á metodurnar sæst á N og at ein stamfunktión skal roknast í úrslitinum. Sigast skal, at stamfunktiónin verður roknað sansað. So (ii) er allarhelst lættast at brúka, men (i) er smart í teoriini.
N eksploderar, um $\varepsilon = 10^{-4}$.

Dømi $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n})$. Fylgjan $a_n \to 0$ tá $n \to \infty$. Funktiónin $f(x) = \ln(1 + \frac{1}{x})$ er kontinuert og fallandi á $[1, \infty)$.

$$\int \ln(1 + \tfrac{1}{x})\,dx = x \cdot \ln(1 + \tfrac{1}{x}) - \int \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) x\,dx$$

$$= x \ln(1 + \tfrac{1}{x}) + \int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= x \ln(1 + \tfrac{1}{x}) + \ln(x+1)$$

$$\int_1^t \ln(1 + \tfrac{1}{x})\,dx = t \cdot \ln(1 + \tfrac{1}{t}) + \ln(t+1) - 2\ln(2) \to \infty.$$

Alternerandi rekkjur

Def. 4.37

Ein alternerandi rekkja er ein, sum við passandi fylgju $b_n > 0$ kann skrivast

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots + (-1)^{n-1} b_n + \cdots$$

ella

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} b_n = -b_1 + b_2 - b_3 + b_4 + \cdots + (-1)^{n} b_n + \cdots$$

Til positivar talrekkjur Σa_n er konvergensur ein spurningur um, hvussu skjótt $a_n \to 0$ tá $n \to \infty$. Alternerandi rekkjur bæði leggja til og draga frá, so enn fleiri rekkjur kunnu konvergera (treytað).

Setn. 4.38

Leibniz' kriterium

Givið eina alternerandi rekkju, har

(i) $b_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(ii) Fylgjan er monotont fallandi: $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \cdots$.

(iii) $b_n \to 0$ tá $n \to \infty$.

So er rekkjan konvergent. Harafturat er

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n - S_N \right| \leq b_{N+1} \quad \text{og} \quad \left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} b_n - S_N \right| \leq b_{N+1}.$$

Sum vanligt ber til at kanna b_n við at gera sær funktiónina $f(n)$. Differentiablar funktiónir kunnu lætt vísa, um tær eru fallandi.

Halin

Sum við integralkriteriið kunnu vit eisini flyta niðara markið, so at

$$\left| \sum_{n=p}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n - \sum_{n=p}^{N} (-1)^{n-1} b_n \right| \leq b_{N+1} \quad , \text{ har } N \geq p.$$

Dømi

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad , \text{ har } b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

(i) $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(ii) Fallandi: tí $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ so $f'(x) = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} < 0$ tá $x \geq 2$.

(iii) $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ tá $n \to \infty$.

Per 4.38 er rekkjan konvergent.

Dømi 4.39

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ er áhugavert sokk konvergent við brúkt av 4.38, meðan $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ er divergent per integralkriteriið! So talan er um eina treytaða konvergenta rekkju.

Rekkjan konvergerar ímóti $\ln(2)$.

Dømi 4.40 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{1+\ln(n)} = -\frac{1}{1+\ln(2)} + \frac{1}{1+\ln(3)} - \cdots$

Talfylgjan $b_n = \frac{1}{1+\ln(n)}$ og $\ln(n)$ er ein vaksandi funktión, so b_n er fallandi. Eisini sæst, at $b_n \to 0$ tá $n \to \infty$ og $b_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Per 4.38 er rekkjan tískil konvergent.

Vit vurdera nú $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{1+\ln(n)}$ við einum fráviki á í mesta lagi $\varepsilon = 0{,}2$.

$$
\begin{aligned}
b_{N+1} = \frac{1}{1+\ln(N+1)} &\leq \frac{1}{5} \\
\Leftrightarrow \quad 5 &\leq 1 + \ln(N+1) \\
\Leftrightarrow \quad 4 &\leq \ln(N+1) \\
\Leftrightarrow \quad e^4 &\leq N+1 \\
\Leftrightarrow \quad N &\geq e^4 - 1.
\end{aligned}
$$

So $N \geq e^4 - 1 = 53{,}6$. Vit hava altso, at $S_{54} \approx \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{1+\ln(n)}$.

$$S_{54} = \sum_{n=2}^{54} (-1)^{n-1} \frac{1}{1+\ln(n)} = -0{,}43.$$

Konvergensurin er seinur við logaritmuni:

$$
\begin{aligned}
b_{N+1} &\leq \frac{1}{101} \\
\Leftrightarrow \quad N &\geq e^{100} - 1.
\end{aligned}
$$