Generelt Óendaligar rekkjur av funktiónum. Givið funktiónir $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n, \dots$, so vilja vit knýta onkra meining til, hvat $\sum f_n(x)$ verður. Vit leggja funktiónir saman, so vit fara at krevja, at allar f_n, $n \in \mathbb{N}$, eru defineraðar á sama interval I.
Vit knýta sumfunktiónina til rekkjuna, um hon er konvergent, so at

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad , \quad x \in I.$$

Her er $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$ ein endaligur summur, so um f_n, $n \in \mathbb{N}$, eru kontinuertar ella differentiablar funktiónir, so er $S_N(x)$ eisini kontinuert ella differentiabul. Hetta sama kann ikki altíð sigast um $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Dømi Funktiónsrekkjur: $f_n(x) = x^n$ og $g_n(x) = c_n x^n$ gera konvergentar funktiónsrekkjur

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \; , \; |x| < 1 \quad \text{og} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad , \quad x \in (-\rho, \rho).$$

Dømi 5.25 $\sum_{n=0}^{\infty} x(1-x^2)^n$, funktiónirner $f_n(x) = x \cdot (1-x^2)^n$ eru kontinuertar (polynom, so C^∞).
Vit hava tá

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x(1-x^2)^n = x \sum_{n=0}^{\infty} (1-x^2)^n = \begin{cases} \dfrac{x}{1-(1-x^2)} = \dfrac{1}{x} & , \; |1-x^2| < 1 \iff x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), \\ 0 & , \; x = 0. \end{cases}$$

Sumfunktiónin f er altso diskontinuert í $x = 0$.

Dømi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos(3^n x)$, set $f_n(x) = \frac{1}{2^n} \cos(3^n x)$, so er

$$|f_n(x)| = \left| \frac{1}{2^n} \cos(3^n x) \right| \leq \frac{1}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ og } \forall x \in \mathbb{R}.$$

Altso er $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos(3^n x)$ absolut konvergent við 4.20(i) nýtt í $\sum |f_n(x)|$.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos(3^n x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}.$$

Allar $f_n(x)$ eru differentiablar, men $f(x)$ er ikki differentiabult í nakað $x \in \mathbb{R}$!

Konvergens Vit hava sett konvergens upp at vera, tá $S_N(x) \to f(x)$ tá $N \to \infty$.
Tað er fyri givið fast $x \in I$, so

$$\forall x \in I \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists N_0 \in \mathbb{N} : |f(x) - S_N(x)| \leq \varepsilon \quad \forall N \geq N_0.$$

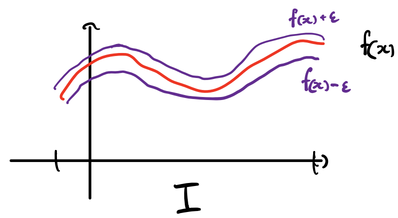
Uniform konv. Konvergens hugtakið er ov veikt til at gera niðurstøður um sumfunktiónina. Fyri øll $x \in I$ ber til at finna eitt N_0, so at frávikið er kontrollerað, men vit gera eitt konvergenshugtak, sum er sterkari og fer at loyva okkum at konkludera kontinuitet/diff./integrabilitet.

Def. 5.28 Lat f_n, $n \in \mathbb{N}$, vera defineraðar á I, og set fyri, at
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in I$$
er væl definerað (konv. røkkja) fyri øll val av $x \in I$. So sigst røkkjan at vera uniformt konvergent móti $f(x)$, um har er eitt $N_0 \in \mathbb{N}$, so at $|f(x) - S_N(x)| \leq \varepsilon$ $\forall N \geq N_0 \, \forall x \in I$.

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N_0 \in \mathbb{N} \, \forall x \in I: \ |f(x) - S_N(x)| \leq \varepsilon \quad \forall N \geq N_0.$$

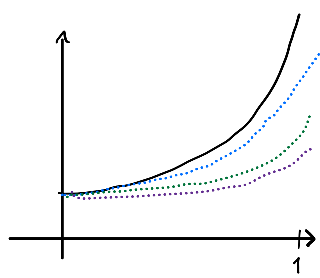
Hvat er munurin? Fyri sovitt kunnu vit justera uppá N_0 so at $|f(x) - S_N(x)|$ liggja tætt alt eftir hvat x er. Takkin við uniformari konvergens er, at N_0 er fast óansæð, hvat x er.

Sum konsekvens er nógv meiri kontrol á:



Fyri $N \geq N_0$ eru allar $S_N(x)$ inni í ε-bandinum fyri øll $x \in I$!

Dømi:



$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$$

ei uniform konv. á $(-1,1)$, men fyri $0 < r < 1$ er uniformur konv. á $[-r,r]$.

Setn. 5.30 Potensrøkkjur við konvergensradius $\rho > 0$ eru uniformt konvergentar á $[-r,r]$, har $r \in (0,\rho)$.

Def. 5.31 Lat f_n, $n \in \mathbb{N}$, vera defineraðar á I. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $x \in I$. $(*)$

(i) Ein røkkja $\sum_{n=1}^{\infty} k_n$ við konstantar liðir er majorantrøkkja hjá $(*)$, um
$$|f_n(x)| \leq k_n, \quad \forall x \in I.$$

(ii) Ein røkkja $\sum_{n=1}^{\infty} k_n$, sum er konvergent verður nevnd konvergent majorantrøkkja.

Dømi: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos(3^n x)$, $\quad |f_n(x)| = \left| \frac{1}{2^n} \cos(3^n x) \right| \leq \frac{1}{2^n}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ er konvergent majorantrøkkja.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad x \in [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}] \qquad |f_n(x)| = \left|\frac{x^n}{n}\right| \le \frac{1}{2^n} \le \frac{1}{n} \quad \forall x \in I.$$

Tvær majorantrekkjur, men bert ein av hesum er konv. Vit mugu leita eftir ta minstu!

Setn. 5.33 Set fyri, at (i) f_n, $n \in \mathbb{N}$, eru kontinuertar á I.
(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ hevur konvergenta majorantrekkju.
So konvergerar $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ uniformt og sumfunktiónin

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

er kontinuert. (Weierstrass' M-test)

Dømi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ á $x \in [0,1)$ $\quad |f_n(x)| \le \frac{1}{n} \quad \forall x \in I$, so $\sum \frac{1}{n}$ er minsta majorantrekkja. Eingin konvergent majorantrekkja.
Kontinuitetur í $f(x)$ á $[-r,r]$ fyri $r \in (0,1)$ er tó punktvísar eginleiki, so fyri øll $x \in [0,1)$ finst eitt r, so at $x \in [-r,r]$. Tí er sumfunktiónin kontinuert á I.

Setn. 5.34 Um 5.33 er galdandi, so er fyri $a, b \in I$ givið, at

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Setn. 5.35 Set fyri, at (i) f_n, $n \in \mathbb{N}$, eru defineraðar og differentiablar á I við kontinuertar avleiddar funktiónir ($f_n(x) \in C^1(I)$).
(ii) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ er væl definerað á I (rekkjan er konv.).
(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} f'(x)$ hevur konvergenta majorantrekkju.
So er f differentiabul, og

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x), \quad x \in I.$$

Dømi $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos(3^n x), \quad \text{og} \quad f_n'(x) = -\frac{3^n}{2^n} \sin(3^n x), \quad \text{so}$$

$$|f_n'(x)| \le \frac{3^n}{2^n} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

So vit kunnu ikki geva nakra meining til $f'(x)$ við okkara amboð.

Dømi 5.37 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}\cos(nx)$, $x \in \mathbb{R}$

$f_n(x) = \frac{1}{3^n}\cos(nx)$ og vit vurdera $|f_n(x)| = \left|\frac{1}{3^n}\cos(nx)\right| \le \frac{1}{3^n}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.
Rekkjan $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{3})^n \overset{5.2}{=} \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$ er ein konvergat majorantrekkja. Vit seta

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}\cos(nx), \quad x \in \mathbb{R},$$

sum per 5.33 er ein kontinuert funktión, tí $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, eru kontinuertar.
Her er $f_n'(x) = -\frac{n}{3^n}\sin(nx)$, so við

$$|f_n'(x)| = \left|-\frac{n}{3^n}\sin(nx)\right| \le \frac{n}{3^n} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

fáa vit konvergenta majorantrekkju $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ til $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$, so nú er

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{n}{3^n}\sin(nx), \quad x \in \mathbb{R},$$

per setn. 5.35.
Øvrugt vil setn. 5.34 geva okkum

$$\int_0^x f_n(t)\,dt = \frac{1}{n3^n}\sin(nx),$$

so at

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n\,3^n}\sin(nx), \quad x \in \mathbb{R}.$$