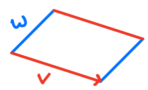
Óheftni

Óheftir vektorar útspenna eitt parallelogram (areal), og tá eru hesir lineer óheftir. Kann ein vektorur v skrivast at vera $4w$, so eru v og w lineert heftir. Teir útspenna ei eitt parallelogram, tí teir eru parallelir.



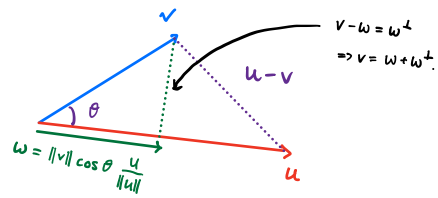
2 lineert óheftir vektorar í $\mathbb{R}^2$ eru ein basis hjá $\mathbb{R}^2$. (3 fyri $\mathbb{R}^3$ osv.)

Prikprodukt

Givið tveir vektorar $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ og $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ definera vit teirra prikprodukt at vera

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

Prikproduktið er eitt vektorprodukt, sum gevur eitt tal úrslit. Hetta sigur nakað um hvussu líkir tveir vektorar eru.



Cosinus relatiónin gevur okkum

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\| \cos\theta,$$

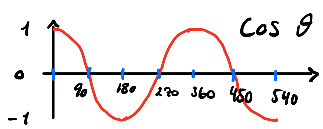
meðan longdin givin út frá norminum eisini kann roknast

$$\begin{aligned} \|u-v\|^2 &= (u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 = u_1^2 - 2u_1 v_1 + v_1^2 + u_2^2 - 2u_2 v_2 + v_2^2 \\ &= u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 - 2(u_1 v_1 + u_2 v_2) \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\, u \cdot v. \end{aligned}$$

Note: equal to $(u-v)\cdot(u-v)$.

Støddirnar eru eins, so vit kunnu isolera eftir $\cos\theta$.

$$\begin{aligned} \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos\theta &= \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\, u\cdot v \\ \Leftrightarrow \quad -2\|u\|\|v\|\cos\theta &= -2\, u \cdot v \\ \Leftrightarrow \quad \cos\theta &= \frac{u\cdot v}{\|u\|\,\|v\|} \end{aligned}$$



Av tí at $\|u\| > 0$ og $\|v\| > 0$, so broytist forteknið hjá $\cos\theta$ alt eftir $u \cdot v$!

Tað merkir, at

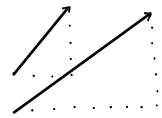
$$\begin{aligned} 0 \le \theta < 90 &\Leftrightarrow u\cdot v > 0 \\ \theta = 90 &\Leftrightarrow u \cdot v = 0 \\ 90 < \theta \le 180 &\Leftrightarrow u \cdot v < 0 \end{aligned}$$

Legg til merkis, at $\cos\theta = \frac{u\cdot v}{\|u\|\,\|v\|} \Leftrightarrow \|v\|\cos\theta = \frac{u\cdot v}{\|u\|}$, so vit fáa projektiónina av v á u

$$w = \|v\|\cos\theta \frac{u}{\|u\|} = \frac{u\cdot v}{\|u\|}\frac{u}{\|u\|} = \frac{u\cdot v}{\|u\|^2} u \quad \Rightarrow \quad w^\perp = v - w$$

Dømi

$$u = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad v = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$



$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \, \|v\|}$$

$$u \cdot v = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix} = 24 + 24 = 48 \quad , \quad \|u\| = 5 \quad , \quad \|v\| = 10$$

$$\cos\theta = \frac{48}{5 \cdot 10} = \frac{48}{50} = \frac{24}{25} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{24}{25}\right) = 16{,}26^\circ .$$

Projektiónin av u á v verður

$$w = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2} v = \frac{48}{100} \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{12}{25} \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 96/25 \\ 72/25 \end{bmatrix}$$

Ólíkningar

Við $\cos\theta = \dfrac{u \cdot v}{\|u\| \, \|v\|}$ fylgir, at $u \cdot v = \|u\| \, \|v\| \cos\theta$

$$\Rightarrow (u \cdot v)^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 \cos^2\theta \quad , \quad 0 \leq \cos^2\theta \leq 1$$

$$\Rightarrow (u \cdot v)^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$$

$$\Rightarrow |u \cdot v| \leq \|u\| \, \|v\|$$ Cauchy Schwartz

Við fáa síðani tríkants ólíkningina

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= (v + w) \cdot (v + w) \\ &= \|v\|^2 + 2 v \cdot w + \|w\|^2 \\ &\leq \|v\|^2 + 2 |v \cdot w| + \|w\|^2 \\ &\leq \|v\|^2 + 2 \|v\| \|w\| + \|w\|^2 \\ &= (\|v\| + \|w\|)^2 \\ \Rightarrow \quad \|v + w\| &\leq \|v\| + \|w\| \end{aligned}$$

Linjur

Vit fara at definera linjur í flatanum og kanna eginleikar.

- tvey punkt
- punkt og vektor
- punkt og ortogonalan vektor

Ein av hesum 3 er neyðugt hjá okkum fyri at skapa eina linju.

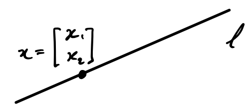
Parametur framsetan

Givið eitt punkt $p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$ og ein vektor $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ so definerar

$$l(t) = p + tv \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

eina linju. Her er t ein parametur variabul. Fyri hvørt tal t_0 fæst eitt punkt.

Á koordinat form $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 + t v_1 \\ p_2 + t v_2 \end{bmatrix}.$



Tað merkir at koordinat hjá punkt á linjuni roknast út frá parametrinum t. Tvær líkningar eru:

$$x_1 = p_1 + t v_1$$
$$x_2 = p_2 + t v_2$$

Vit framleiða gjarna $v = q - p$, altso geva tvey punkt heilt natúrliga eina parametur framsetan fyri linju.
Barycentrisk tulking: $\ell(t) = (1-t)\,p + t\,q$.

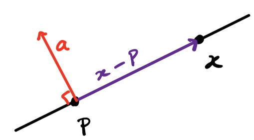
Dømi Lat $p = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $q = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$, so er

$$v = q - p = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-(-1) \\ 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

So vit fáa $\ell(t) = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}.$

Implicit líkning Lat p vera eitt punkt á eini linju. Fyri eitthvørt tilvildarligt x á linjuni er $x-p$ ein vektorur, sum er parallelur við linjuni.
Givið ein vektor a, sum er ortogonalur við linjuna, so er galdandi fyri øll x, at

$$a \cdot (x - p) = 0.$$



Hetta kallast eisini normal formur, tí a sigst at vera normal vektorur hjá linjuni, um $\|a\| = 1$. Vanliga verður faldað út, so

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 - (a_1 p_1 + a_2 p_2) = 0$$
$$\iff \underbrace{a\,x_1 + b\,x_2 + c = 0}_{\text{implicit líkning}}, \qquad a = a_1,\ b = a_2,\ c = -(a_1 p_1 + a_2 p_2)$$

Explicit Tá seinni variabulin er isoleraður, so er explicittur formur:

$$a x_1 + b x_2 + c = 0$$
$$\iff b x_2 = -a x_1 - c$$
$$\iff x_2 = -\frac{a}{b} x_1 - \frac{c}{b}, \quad \text{vanliga } y = ax + b$$

Dømi Lat $p = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $q = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$, so var $v = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Vektorurin a skal vera, so at $a \cdot v = 0$, tvs.

$$a_1 \cdot 6 + a_2 \cdot 1 = 0 \quad , \quad \text{vel } a = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad \left(a = \begin{bmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{bmatrix} \right)$$

So passar hetta! Men $\begin{bmatrix} 1 \\ -6 \end{bmatrix}$ er eisini eitt val, sum riggar.

So $a = 1$, $b = -6$ og $c = -(-1 \cdot 5 + 6 \cdot 3) = -(-5+18) = -13$.

Implicitta líkningin er nú

$$1 \cdot x_1 - 6x_2 - 13 = 0.$$

Umsetan Parametur framsetan: p og v, v parallelur við linjuna

Implicit líkning: p og a, a ortogonalur á linjuna

$$v \to a : \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \Rightarrow a = \begin{bmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{bmatrix} \text{ ella } \begin{bmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{bmatrix}$$

$$a \to v : \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \Rightarrow v = \begin{bmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{bmatrix} \text{ ella } \begin{bmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{bmatrix}$$

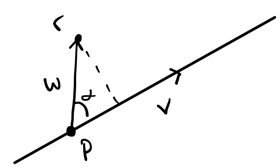
Minst til, at tað er einfalt at fáa punkt úr $ax_1 + bx_2 + c = 0$, t.d. $x = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{c}{b} \end{bmatrix}$ ella $\begin{bmatrix} -\frac{c}{a} \\ 0 \end{bmatrix}$.

Frástøða Úr punkt r til linju við líkning er frástøða

$$d = \frac{|ar_1 + br_2 + c|}{\|a\|} \quad , \quad \text{um } ar_1 + br_2 + c = 0 \text{ so er } r \text{ á linjuni.}$$

Úr punkt r til linju á parametur form gera vit vektorin $w = r - p$.

$$d = \|w\| \cdot \sin\alpha = \|w\| \cdot \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$$



Dømi 3.5 $4x_1 + 2x_2 - 8 = 0$, $r = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

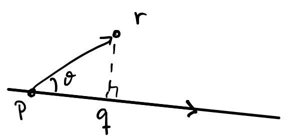
$$d = \frac{4 \cdot 5 + 2 \cdot 3 - 8}{\sqrt{4^2 + 2^2}} = \frac{20 + 6 - 8}{\sqrt{16 + 4}} = \frac{18}{\sqrt{20}} = \frac{9}{\sqrt{5}}$$

Dømi 3.6 $l(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$, $r = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$w = r - p = \begin{bmatrix} 5 - 0 \\ 3 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \cos\alpha = \frac{v \cdot w}{\|v\|\|w\|} = \frac{2 \cdot 5 + (-4) \cdot (-1)}{\sqrt{2^2 + (-4)^2}\sqrt{5^2 + 1^2}} = \frac{14}{\sqrt{20}\sqrt{26}} \approx 0{,}614.$$

$$d(r, l) = \sqrt{26} \cdot \sqrt{1 - 0{,}614^2} \approx 4{,}02.$$

Projektión



$q = p + tv$ finst. Við vinklinum kann staðfestast, at $\cos\theta = \dfrac{\|tv\|}{\|w\|}$

$$\Leftrightarrow \frac{v\cdot w}{\|v\|\,\|w\|} = t\,\frac{\|v\|}{\|w\|} \Leftrightarrow t = \frac{v\cdot w}{\|v\|^2}$$

Dømi 3.7 Lat $l(t) = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$ og $r = \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$,

so er $w = \begin{bmatrix}3-0\\4-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$ og $t = \dfrac{\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}}{2^2} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$.

Tvs. $q = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + \frac{3}{2}\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0+0\\1+3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix}$.

Skering Givið $l_1: l(t) = p + tv$, $l_2: ax_1 + bx_2 + c = 0$ set $x_1 = p_1 + tv_1$, $x_2 = p_2 + tv_2$ í l_2

Loys eftir t og set í l_1 fyri at fáa punktið.

Dømi 3.8 $l_1(t) = \begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix}$, $l_2: 2x_1 + x_2 - 8 = 0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow & 2\cdot(-2t) + (3-t) - 8 &= 0\\ &\Leftrightarrow & -5t - 5 &= 0\\ &\Leftrightarrow & t &= -1 \end{aligned}$$

$$q = \begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}.$$

Parametur (líkning) Um $L_1(t) = p + tv$, $L_2(s) = q + sw$ so er í skeringspunktinum givið at koordinatini eru eins

$$\begin{cases} p_1 + tv_1 = q_1 + sw_1\\ p_2 + tv_2 = q_2 + sw_2 \end{cases}$$ loys s ella t og set inn.

Kann skrivast: $tv - sw = q - p$

Dømi 3.9 $L_1(t) = \begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix}$, $L_2(s) = \begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$

$$\begin{cases} -2t + s = 4\\ -t - 2s = -3 \end{cases} \Rightarrow s = 4 + 2t \; (= 2)$$

$$-t - 2(4+2t) = -3 \Leftrightarrow -5t = 5 \Leftrightarrow t = -1, \quad q = \begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}.$$