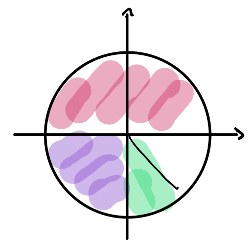
Seinast Typur av konvergens: Integralir yvir interval, har antin funktiónin ikki er definerað ella intervallið er óendaligt.

Fylgjur $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: |s - x_n| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N.$

Rekkjur $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 \in \mathbb{N}: |S - S_N| \leq \varepsilon \quad \forall N \geq N_0.$

Eru hesi ikki konvergent so sigst, at integralið/fylgjan/rekkjan er divergent. Hugtakið óendaligt fær paradoks í spæl, sí evt. Zeno's paradoxes um rørslu.

Dømi 4.18 (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $\quad x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$



$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^N}$$

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= \tfrac{1}{2} = 1 - \tfrac{1}{2} \\ S_2 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = 1 - \tfrac{1}{4} \\ S_3 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} = 1 - \tfrac{1}{8} \end{aligned}\right\} \quad S_N = 1 - \frac{1}{2^N} \to 1 \text{ tá } N \to \infty.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ er konvergent við grensuna $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1.$

Indeks: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, $\quad x_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{N+1} \to 1 \text{ tá } N \to \infty.$$

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, $\quad x_n = (-1)^n$

$$S_N = -1 + 1 - 1 + 1 - \cdots - 1 + 1 = \begin{cases} -1 & N = 2k+1 \\ 0 & N = 2k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

S_N hevur onga grensu tá $N \to \infty$, so rekkjan er divergent.

Hent at vita Um $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent, so er $\sum_{n=N}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+N} \quad \forall N \in \mathbb{N}.$ (L. 4.16)

Um $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eisini er konvergent, so er $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. (L. 4.17).

Konvergens kriterium Vit hava áhuga í at vita hvat skal til fyri at rekkjur konvergera. Tað er ikki so einfalt, men ein stór nøgd av kriterium er, sum vit brúka til at avgera, um ein rekkja er konvergent ella divergent.

Def. 4.15 Tað er upplagt at vita, um definitiónin gevur konvergens fyrst, so

$$S_N \to S \quad \text{tá} \quad N \to \infty.$$

Tá hetta ikki er nóg einfalt, so fara vit til amboðini.

Setn. 4.19 (n'te led) Um $a_n \not\to 0$ tá $n \to \infty$, so er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Pf. Set fyri, at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent við summin S. So vil

$$S_N = a_1 + a_2 + \cdots + a_N \to S \quad \text{tá} \quad N \to \infty.$$

Men so er sama galdandi fyri S_{N-1}

$$S_{N-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1} \to S \quad \text{tá} \quad N \to \infty.$$

Munurin er tískil

$$a_N = S_N - S_{N-1} \to S - S = 0 \quad \text{tá} \quad N \to \infty.$$

$\square$

Ekvivalent kunnu vit siga, at um $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent, so vil $a_n \to 0$ tá $n \to \infty$.

Vit síggja nú púra greitt hví $\sum_{n=1}^{\infty} n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} k$ eru divergent $(k > 0)$.

Setn. 4.20 (Samanbering) Set fyri, at $0 \le a_n \le b_n$ fyri øll $n \in \mathbb{N}$.

(i) Um $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er konvergent, so er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

(ii) Um $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er divergent, so er $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent.

Pf. $0 \le A_N \le B_N$, men $B_N \to B$ tá $N \to \infty$, so A_N er ein vaksandi men avmarkað fylgja. Fylgjan A_N konvergerar tískil ímóti supremum hjá talfylgjuni.

Um $A_N \to \infty$, so vil $A_N \le B_N \to \infty$ tá $N \to \infty$, og so er $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent. $\square$

Dømi 4.21 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ við $a_n = \begin{cases} n^4 & \text{tá } n = 1, \ldots, 1000 \\ \frac{2}{2^n + 1} & \text{tá } n > 1000. \end{cases}$

4.22 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$, $\quad \frac{1}{(n+1)^2} \le \frac{1}{(n+1)n}$

Def. 4.23 Tvær rekkjur $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ við $a_n, b_n \geq 0$ eru ekvivalentar, um har finst $C > 0$, so at $\frac{a_n}{b_n} \to C$ tá $n \to \infty$.

Setn. 4.24 Set fyri, at tvær rekkjur $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eru ekvivalentar. So eru rekkjurnar báðar konvergentar ella divergentar báðar tvær.

Pf. $\frac{a_n}{b_n} \to C \implies \frac{1}{C} \frac{a_n}{b_n} \to 1$ tá $n \to \infty$. So finst $N \in \mathbb{N}$, so at

$$1 - \varepsilon \leq \frac{1}{C} \frac{a_n}{b_n} \leq 1 + \varepsilon \quad \text{fyri øll } n \geq N.$$

So er

$$C b_n (1 - \varepsilon) \leq a_n \leq (1 + \varepsilon) C b_n \quad \forall n \geq N.$$

Per 4.20 er $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent um $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent. Her brúkast 4.17 eisini. Er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent, so er $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent. □

Dømi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ og $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, so er

$$\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} = \frac{(n+1)^2}{n^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1}\right)^2 \to 1 \quad \text{tá } n \to \infty.$$

Rekkjurnar eru altso ekvivalentar per def. 4.23. Rekkjan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ er konvergent, so per 4.24 er $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergent.

Def. 4.26 abs. Ein rekkja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sigst at vera absolut konvergent, um rekkjan $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er konvergent.

Setn. 4.27 Um $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er absolut konvergent, so er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, og

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Def. 4.28 Treytað konvergens.

Dømi Rekkjan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ er konvergent, men ikki absolut konvergent.

Dømi 4.29 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{2^n}$, $a_n = \frac{\sin(n)}{2^n}$ so $|a_n| = \left| \frac{\sin(n)}{2^n} \right| = \frac{|\sin(n)|}{2^n} \leq \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Rekkjan er per 4.20 absolut konvergent, tí vit samanbera við $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

Setn. 4.30 kvotient

Set fyri, at $a_n \neq 0$ fyri øll $n \in \mathbb{N}$, og at har finst $C \geq 0$, so at

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \to C \quad \text{tá } n \to \infty.$$

(i) Um $C < 1$, so er $\sum a_n$ absolut konvergent.

(ii) Um $C > 1$, so er $\sum a_n$ divergent.

Kvotientkriteriið hevur onga niðurstøðu, um $C = 1$.

Dømi 4.31 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ so vit hava

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\frac{1}{(n+1)^\alpha}}{\frac{1}{n^\alpha}} \right| = \left| \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} \right| = \left(\frac{n}{n+1} \right)^\alpha = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right)^\alpha \to 1 \quad \text{tá } n \to \infty.$$ Eingin niðurstøða.

Dømi 4.32 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$, $a_n = \frac{n^2}{2^n}$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{(n+1)^2 \, 2^n}{n^2 \, 2^{n+1}} = \frac{1}{2} \, \frac{1+\frac{1}{n}}{1} \to \frac{1}{2} \quad \text{tá } n \to \infty.$$

Kvotientkriteriið vísir at røðin er absolut konvergent.