Yvirførslufunktiónir fyri skipanir.

Í staðin fyri at leita eftir n loysnir $x_1, \dots, x_n$, so kann vera at ein loysn x_i, ella ein serlig linearkombinatión av variablunum $x_1, \dots, x_n$ hevur áhuga. Lata vit u vera ein skalar stødd, so kunnu vit byrja at loysa skipanir

System

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = d^T x. \end{cases}$$

Her er $u : I \to \mathbb{R}$ ein kontinuert funktión, sum verður faldað á ein vektor b. Bæði b og d eru vektorar í $\mathbb{R}^n$. Systemið hevur loysnina y við ávirkan u. Tá vit loysa $\dot{x} = Ax + bu$, so fast y við innsetan í $y = d^T x$.

Vit arbeiða fram móti loysnir undir serlig u. Homogena skipanin er við, tá seta vit bert $u = 0$, og struktursetningurin gevur okkum enn, at $y = y_h + y_0$.

Motivatión

Vit sóu at system av slagnum $D_n(y) = u$ kunnu umskrivast til $\dot{x} = Ax + u$. Í hesum regi kunnu vit so loysa eftir serlig svar y sum linearkombinatión av ávísum x_i.
Tankin er aftur at finna stationert svar, t.v.s. ta støðu har systemið er í hvílustøðu eftir ávirkan $u(t) = e^{st}$.

Hædderpunkt

Superpositión av ávirkan Σe^{st} er ein rekkja, so vit kobla differentiallíkningar og rekkjur.

Serligan form

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = d^T x \end{cases}, \quad \text{har } u(t) = e^{st}.$$

Um $\det(A - sI) \neq 0$ fyri $s \in \mathbb{C}$, so er $x(t) = x_0 e^{st}$ ein loysn, har $x_0 = -(A - sI)^{-1} b$. So er

$$y(t) = d^T x = \underbrace{d^T (A - sI)^{-1} b}_{H(s)} e^{st},$$

har $H(s) = d^T (A - sI)^{-1} b$ er yvirførslufunktiónin.

Dømi:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = (-1 \quad -1)\, x \end{cases}, \quad \text{her er } b = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ og } d = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$(A - sI)^{-1} = \frac{1}{(1-s)(3-s)} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad s \neq 1, 3.$$

$$H(s) = -(-1 \quad -1) \frac{1}{(1-s)(3-s)} \begin{pmatrix} 3-s & -2 \\ 0 & 1-s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(1-s)(3-s)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12-4s \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{12-4s}{(1-s)(3-s)}$$

$$= \frac{4(3-s)}{(1-s)(3-s)} = \frac{4}{1-s}, \quad s \notin \{1, 3\}.$$

$u(t) = e^{2t}$: $\quad y(t) = H(2) \cdot e^{2t} = -4e^{2t}$

Minst til at $\quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ um $\det(A) \neq 0$.

Stabilitetur Vit hugsa gjarna, at tær loysnir vit konstruera hava eitt slag av innbygdum stabiliteti. Hugsa vit reverb frá mikrofon og hátalara, so er talan um óstabilitet.

$\dot{x} = Ax$ homogent, $\quad t \geq t_0$ byrja frá einum t_0, minst til at byrjunartreyt

$\dot{x} = Ax + u$ inhomogent $\quad$ gevur eina loysn.

u: ávirkan kann forsterka eginsveiggj.

Funktión Vit siga at ein funktión $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ er avmarkað, um $|f(t)|$ er avmarkað fyri øll $t \in \mathbb{R}$. Hetta merkir, at

$$\exists K > 0: |f(t)| \leq K \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Vektorfunktión Fyri eini vektorfunktión siga vit, at

$$x: I \to \mathbb{C}^n, \ I \subseteq \mathbb{R}, \quad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

er avmarkað, um x_i er avmarkað fyri $i = 1, \dots, n$. Vanliga skrivast at normurin er avmarkaður. So

$$\exists K > 0: \quad \|x(t)\| = \sqrt{|x_1(t)|^2 + |x_2(t)|^2 + \dots + |x_n(t)|^2} \leq K \quad \forall t \in I.$$

Altso longdin á vektorinum er avmarkaður óansæð hvat t er.

Lemma A.16 Lat $\lambda \in \mathbb{R}$ ella $\mathbb{C}$ vera eginvirði hjá A við eginvektor v. Loysnin $x(t) = e^{\lambda t} v$ er avmarkað tá og bert tá $\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$.

Pf. Set fyri, at $x(t)$ er avmarkað, so er

$$\|x(t)\| = \|e^{\lambda t} v\| = |e^{\lambda t}| \, \|v\| = e^{\lambda t} \|v\| \leq K \quad \forall t \in [t_0, \infty[.$$

Um $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$, so vil $e^{\lambda t} \to \infty$ tá ið $t \to \infty$, og so er $x(t)$ óavmarkað.
Altso $\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$.
Lat nú $\lambda \leq 0$, so finna vit K, so at $\|x(t)\| \leq K \quad \forall t \in [t_0, \infty[$.
Vel $K = e^{\lambda t_0} \|v\|$, so er

$$\|x(t)\| = e^{\lambda t} \|v\| \leq e^{\lambda t_0} \|v\| = K.$$

Tá ið $\lambda \leq 0$, so er $e^{\lambda t_0} \geq e^{\lambda t}$ fyri øll $t \geq t_0$. Eisini vil

$$e^{\lambda t} \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{um } \lambda < 0 \\ 1 & \text{um } \lambda = 0 \end{cases}, \quad \text{tá ið } t \to \infty.$$

$\square$

Definitión 2.26 (i) $\dot{x} = Ax$ er stabilt, um einhvør loysn $x(t)$ er avmarkað.
(ii) $\dot{x} = Ax$ er asymptodiskt stabilt, um einhvør loysn $x(t)$ gongur ímóti null: $x(t) \to 0$ tá $t \to \infty$.
(iii) Annars óstabilt.

Asymptodisk stabilitet $\Rightarrow$ stabilitet.

Lemma A.17 Lat A hava distinkt eginvirðir $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. So er $\dot{x} = Ax$ stabilt tá og bert tá $\mathrm{Re}\,\lambda_k \leq 0$ fyri øll $k = 1, \dots, n$.

Pf. Lat fyrst systemið vera stabilt. Per definitión eru allar loysnir avmarkaðar, so $\mathrm{Re}\,\lambda_k \leq 0$ per lemma A.16.
Lat nú $\mathrm{Re}\,\lambda_k \leq 0$ fyri $k = 1, \dots, n$. Vit skulu vísa at allar loysnirnar eru avmarkaðar.
Einhvør loysn er ein linearkombinatión

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} v_n,$$

har $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$. Vit avmarka nú við tríkantsólíkningini.

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &= \|c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} v_n\| \\ &\leq \|c_1 e^{\lambda_1 t} v_1\| + \dots + \|c_n e^{\lambda_n t} v_n\| \\ &= |c_1| \, e^{\lambda_1 t} \|v_1\| + \dots + |c_n| \, e^{\lambda_n t} \|v_n\| \end{aligned}$$

Øll $\mathrm{Re}\,\lambda_k \leq 0$, so $e^{\lambda_k t} \leq e^{\lambda_k t_0}$ fyri øll $t \geq t_0$. Hvør loysn er tískil avmarkað fyri øll $t \geq t_0$ tá $\mathrm{Re}\,\lambda_k \leq 0$ fyri øll $k = 1, \dots, n$. $\square$

Dømi Brúgv ávirkað av vindstoyti, um stabil so kundi brúgvin sveiggjar uttan at steðga. Steðgar tá asymptodisk.

Dømi Illustratión í bók.

Setn. 2.34 $\dot{x} = Ax$ er stabilt tá og bert tá

(i) $Re(\lambda_k) \leq 0$ fyri øll k

(ii) Øll eginvirðir við $Re(\lambda) = 0$ hava $p = q$.

Serligt við n ymisk eginvirði, so er multiplicitetur in 1.

Korollar 2.35 Um A hevur n distinkt eginvirði við $Re(\lambda_k) \leq 0$ fyri $k = 1, \dots, n$, so er systemið stabilt.

Setn. 2.36 $\dot{x} = Ax$ er asymptodiskt stabilt tá og bert tá $Re\, \lambda_k < 0$ fyri øll k.

Dømi

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} x \quad , \quad \omega \geq 0$$

$P(\lambda) = \lambda^2 - \omega^2$ røtur við $\omega > 0$: $(\lambda - \omega)(\lambda + \omega) = 0 \iff \lambda = \pm \omega$

ikki stabilt við $+\omega$

$\omega = 0$: $\lambda^2 = 0 \iff \lambda = 0$, $p = 2$

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

geometrisk mult. $q = 2$!
altso stabilt.
ikki asymptodiskt.

Routh-Hurwitz Tá vit vilja kanna stabilitet, so er fínt at finna øll eginvirðini. Tað kann enda við at verða nógv at krevja, tí n'ta stig merkir potentielt n røtur. Reint algebraiskt er bert møguligt at skriva eina eksplicitta loysn fyri røtur hjá polynom á $n \leq 4$ stigi. Moderna stabilitetsteori hevur tó nøkur góð 100 ár á baki, so vit hava aðrar møguleikar.

Setn. 2.39 Allar røtur hjá einum polynomi við reellum koefficientum

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

hava negativan realpart, um og bert um:

(i) Allir koefficientarnir eru positivir ($a_k > 0$, $k = 1, \dots, n$).

(ii) Allir $k \times k$ determinantar, $k = 2, \dots, n-1$, á forminum

$$D_k = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots & a_{2k-1} \\ 1 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots & a_{2k-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & a_{2k-3} \\ 0 & 1 & a_2 & a_4 & \cdots & a_{2k-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_k \end{pmatrix},$$

eru positivir. Tvs. $D_k > 0$, har $a_p = 0$, tá $p > n$.

Legg til merkis, at $P(\lambda)$ skal vera normerað, so at $a_0 = 1$.
Hetta sær út av nógvum, men er væl ljóst í korollar 2.40, 2.41 og 2.42.

Dømi $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ a & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} x$ $\qquad (A - \lambda I) = \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ a & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2(-1-\lambda) - \lambda - (-1-\lambda)\cdot 2a = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad -\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 2a\lambda + 2a = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \lambda^3 + \lambda^2 + (1-2a)\lambda - 2a = 0$$

Koefficientar : $\quad 1 - 2a > 0 \quad$ og $\quad -2a > 0$
$\Leftrightarrow \quad a < \frac{1}{2} \qquad \Leftrightarrow \quad a < 0$

Determinantar: $\quad \det \begin{pmatrix} 1 & -2a \\ 1 & 1-2a \end{pmatrix} = 1 - 2a + 2a = 1 > 0.$

Vit hava altso eitt asymptodiskt stabilt system, um $a < 0$.

Dømi $\dot{x} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} x$ $\qquad \det(A) = (a-\lambda)(d-\lambda)(f-\lambda) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda = a \ \vee \ \lambda = d \ \vee \ \lambda = f.$$

Vel $a, d, f < 0$ fyri asymptodiskan stabilitet.