Setn. 1.15 Fullkomuliga loysnin hjá $D_n(y) = 0$ er givin sum linearkombinatión av loysnunum:

(i) (kompleksar) Fyri hvørja rót λ í $P(\lambda)$ hjá $D_n(y)=0$ skrivast loysnin $y(t) = e^{\lambda t}$, og við multiplicitet $p>1$ skrivast

$$y(t) = t^k e^{\lambda t}, \quad \text{fyri } k = 0, 1, \dots, p-1.$$

Linearkombinatiónin er givin við kompleksum koefficientum.

(ii) (reellar) Fyri hvørja rót λ í $P(\lambda)$ hjá $D_n(y)=0$ skrivast loysnirnar sum í (i). Fyri hvørt par av konjugeraðum rótum $a \pm i\omega$ skrivast

$$y(t) = e^{at}\cos \omega t \quad \text{og} \quad y(t) = e^{at}\sin \omega t.$$

Við multiplicitet $p>1$ skrivast

$$\left.\begin{aligned} y(t) &= t^k e^{at}\cos \omega t \\ y(t) &= t^k e^{at}\sin \omega t \end{aligned}\right., \quad \text{fyri } k = 0, 1, \dots, p-1.$$

Linearkombinatiónin er givin við reellum koefficientum.

Men hví er $y(t) = e^{\lambda t}$ ein loysn tá λ er ein rót í $P(\lambda)$ hjá $D_n(y) = 0$? (setn. 1.6)

Pf. Set $y = e^{\lambda t}$ í $D_n(y) = 0$. Generelt so er givið, at

$$y^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda t},$$

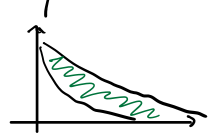
so vit fáa

$$\begin{aligned} D_n(y) &= a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + \dots + a_n y \\ &= a_0 \lambda^n e^{\lambda t} + a_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda t} + \dots + a_n e^{\lambda t} \\ &= (a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n)\, e^{\lambda t} \\ &= P(\lambda) \cdot e^{\lambda t} = 0, \quad \text{tí } \lambda \text{ er rót í } P(\lambda). \quad \square \end{aligned}$$

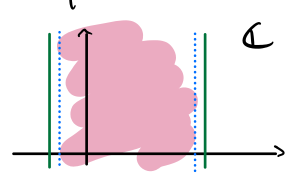
So karakteristiska polynomið er avgerandi fyri okkum av hesi orsøk.

Serlig λ Gevur tað meining at hava multiplicitet og kompleksar røtur? Ja, tá tit designa skipanir!

$\lambda_1 = -1$ og $\lambda_2 = -2$



kompleks



$\mathbb{C}$

Inhomogena diff. likn. $\quad a_0 \dfrac{d^n y}{dt^n} + a_1 \dfrac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\dfrac{dy}{dt} + a_n y = u$ ella $D_n(y) = u$

Funktiónin $u(t)$ er kontinuert á einum intervalli $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ og hevur reel/kompleks virðir. Av tí at u er kontinuert, so eru óendaliga nógvar loysnir.

Setn. 1.18 Eksistens og eintýddni

Fyri hvørt $t_0 \in I$ og hvønn vektor $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, so finst akkurát ein loysn $y(t)$, $t \in I$, hjá diff. likn. $D_n(y) = u$ so at

$$(y(t_0),\ y'(t_0), \dots, y^{(n-1)}(t_0)) = (v_1, \dots, v_n)$$

Vektorurin $(y(t_0), y'(t_0), \dots, y^{(n-1)}(t_0))$ svarar til tað vit kalla byrjunartreytirnar í t_0. Hugsa tá vit vilja rokna eina ávísa loysn.

Dømi $\quad \dfrac{d^4 y}{dt^4} + \dfrac{d^2 y}{dt^2} = 0$

$$\lambda^4 + \lambda^2 = 0 \iff \lambda^2(\lambda^2 + 1) = 0 \iff \lambda = 0 \ \vee\ \lambda = \pm i$$

Fullkomuliga reella Loysnin $y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 \cos t + c_4 \sin(t)$, $c_1, \dots, c_4 \in \mathbb{R}$.

Lat $(y(0), y'(0), y''(0), y'''(0)) = (10, 0, 1, -1)$, so fáa vit eina og bert eina loysn

$$y(t) = 11 - t - \cos(t) + \sin(t).$$

Struktur 1.20 Lat y_0 vera loysn hjá $D_n(y) = u$ og lat y_h vera loysn til $D_n(y) = 0$, so eru allar loysnirnar til inhomogenu differentiallíkningina

$$y = y_h + y_0.$$

Pf. Set fyri at y_0 er ein loysn hjá $D_n(y) = u$ og y_h er loysn hjá $D_n(y) = 0$. Per linearitet hava vit, at

$$D_n(y) = D_n(y_h + y_0) = D_n(y_h) + D_n(y_0) = 0 + u = u.$$

Altso er y loysn hjá $D_n(y) = u$. Í so fall, at bæði y og y_0 vóru loysnir hjá $D_n(y) = u$, so fáa vit

$$D_n(y - y_0) = D_n(y) - D_n(y_0) = u - u = 0.$$

Hetta er ein loysn hjá homogenu líkningina, so vit kunnu skriva $y = (y - y_0) + y_0$. Funktiónin er altso ein summur av y_h og y_0. $\square$

Gættemetoden s. 14

Vit gita systematiskt loysnina y_0 til $D_n(y) = u$ alt eftir ávirkanini $u(t)$.

- Um $u(t) = be^{st}$, so gita vit $y(t) = ce^{st}$.
- Um $u(t) = \cos(\omega t)$ ella $\sin(\omega t)$, so gita vit $y(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$
- Um $u(t) = c_0 t^k + c_1 t^{k-1} + \dots + c_{k-1} t + c_k$, so gita vit eitt $n+k$ polynom

$$y(t) = d_0 t^{n+k} + d_1 t^{n+k-1} + \dots + d_{n+k-1} t + d_{n+k}.$$

Dømi $y''' + 2y'' + y' = e^{2t}$ ella $t+1$, gita ce^{2t} og $at^2 + bt + c$.

$$8ce^{2t} + 8ce^{2t} + 2ce^{2t} = e^{2t} \qquad \therefore c = \frac{1}{18} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{18}e^{2t}.$$

$$\Leftrightarrow \quad 18ce^{2t} = e^{2t}$$

$$0 + 2\cdot 2a + (2at + b) = t + 1$$

$$a = \frac{1}{2} \Rightarrow b = -1 \qquad \therefore y(t) = \frac{1}{2}t^2 - t.$$

Dømi 1.21 Reel loysn hjá $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} + y = \cos(2t)$,

og loysn við $(y(0), y'(0)) = (1,1)$.

Vit gita $y(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t)$ og seta inn.

$$y'(t) = -2A\sin(2t) + 2B\cos(2t)$$

$$y''(t) = -4A\cos(2t) - 4B\sin(2t)$$

$$-4A\cos(2t) - 4B\sin(2t) + 2(-2A\sin(2t) + 2B\cos(2t)) + A\cos(2t) + B\sin(2t)$$

$$= (-3A + 4B)\cos(2t) + (-4A - 3B)\sin(2t) = \cos(2t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3A + 4B = 1 \\ -4A - 3B = 0 \Leftrightarrow A = -\frac{3}{4}B. \end{cases}$$

$$-3\cdot\left(-\frac{3}{4}B\right) + 4B = 1 \Leftrightarrow \frac{25}{4}B = 1 \Leftrightarrow B = \frac{4}{25}.$$

$$\therefore A = -\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{25} = -\frac{3}{25}.$$

$$y(t) = -\frac{3}{25}\cos(2t) + \frac{4}{25}\sin(2t).$$

Karakterlikningin hevur loysnina

$$\lambda^2+2\lambda+1=0 \iff (\lambda+1)^2=0$$
$$\iff \lambda=-1 \quad , \quad p=2.$$

Homogena loysnin er $y(t)=c_1e^{-t}+c_2te^{-t}$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

Fullkomuliga reella loysnin er tískil per struktursetningin

$$y(t)=y_h+y_0=c_1e^{-t}+c_2te^{-t}-\frac{3}{25}\cos(2t)+\frac{4}{25}\sin(2t).$$

Bert ein loysn er við byrjunartreyturnar $(y(0),y'(0))=(1,1)$, per setning 1.18.

$$y(0)=c_1-\frac{3}{25}=1 \iff c_1=\frac{28}{25}$$
$$y'(0)=-c_1+c_2+\frac{8}{25}=1 \iff c_2=\frac{9}{5}$$
$$y_p(t)=\frac{28}{25}e^{-t}+\frac{9}{5}te^{-t}-\frac{3}{25}\cos(2t)+\frac{4}{25}\sin(2t).$$

Superpositión 1.22 Lat u_1 og u_2 vera kontinuertar funktiónir á $I\subseteq\mathbb{R}$. Givið tvær loysnir y_1 og y_2, so at $D_n(y_1)=u_1$ og $D_n(y_2)=u_2$, so er

$$y=c_1y_1+c_2y_2$$

ein loysn hjá $D_n(y)=c_1u_1+c_2u_2$.

Pf. Hetta fylgir av linearitet.

$$D_n(y)=D_n(c_1y_1+c_2y_2)=D_n(c_1y_1)+D_n(c_2y_2)$$
$$=c_1D_n(y_1)+c_2D_n(y_2)=c_1u_1+c_2u_2.$$

☆

Sveiggj Systemir, les guitar ella brúgv, hava sveiggj, sum er superpositión av eginsveiggjini!

$e^{a\pm ib} \leftrightarrow \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}$ Lineert óheftni givið við lemma A.15.

$$e^{it}+e^{-it}=\cos(t)+i\sin(t)+\cos(-t)+i\sin(-t)=2\cos(t)$$

$$e^{it}-e^{-it}=\cos(t)+i\sin(t)-(\cos(-t)+i\sin(-t))=2i\sin(t)$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}(e^{it}+e^{-it})=\cos(t)\quad,\quad \frac{1}{2i}(e^{it}-e^{-it})=\sin(t)$$

Speciel form $\quad a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = b_0 \frac{d^m u}{dt^n} + b_1 \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 u$

Hetta svarar til $D_n(y) = D_m(u)$, og hóast at høgrasíðan nú sær nógv villari út, so er hetta tilsamans ein funktión u.
Koefficientarnir $a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m$ eru reellir. Vit konstruera nú eina yvirførslufunktión $H(s)$, $s \in \mathbb{C}$. Í heila tíkið er talan um "gættemetoden".

Yvirførsla/git Lat $u(t) = e^{st}$, har $s \in \mathbb{C}$. Vit leita eftir eini loysn $y(t) = H(s) e^{st}$. Funktiónin $H(s)$ er ikki tengd at t, men er konstant fyri hvørt s, har $H(s)$ er definerað. Vit fara at seta í $D_n(y) = D_m(u)$.

Legg til merkis, at
$$y^{(k)}(t) = H(s)\, s^k e^{st} \quad \text{og} \quad u^{(k)}(t) = s^k e^{st}.$$

Vit fáa við innsetan

$$a_0 H(s) s^n e^{st} + a_1 H(s) s^{n-1} e^{st} + \dots + a_{n-1} H(s) s e^{st} + a_n H(s) e^{st} = b_0 s^m e^{st} + b_1 s^{m-1} e^{st} + \dots + b_{n-1} s e^{st} + b_n e^{st}$$

$$\iff \quad H(s)\left(a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n\right) e^{st} = \left(b_0 s^m + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m\right) e^{st}$$

$$\iff \quad H(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}, \quad P(s) \neq 0.$$

Vit stytta faktorin $P(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n$, sum akkurát svarar til karakteristiska polynomið hjá $D_n(y) = 0$. Funktiónin $H(s)$ verður definerað sum omanfyri fyri øll $s \in \mathbb{C}$, har $P(s) \neq 0$.

NB Yvirførslufunktiónin
1) Minst til definitiónsmongd
2) "Gør som manden på tavlen" %

Dømi $\quad y''' + 2y'' + y' = u$, har $u(t) = e^{2t}$

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + s} = \frac{1}{s \cdot (s^2 + 2s + 1)} = \frac{1}{s(s+1)^2}, \quad s \notin \{-1, 0\}.$$

Dømi 1.25 $\quad \ddot{y} + y = \dot{u}$ við $u(t) = e^{2t}$.

$$H(s) = \frac{s}{s^2 + 1}, \quad \text{har } s \notin \{\pm i\} \implies y(t) = H(2) e^{2t} = \frac{2}{5} e^{2t}.$$

Setn. 1.24 (Stationert svar) Givið $u(t) = e^{st}$, har s ikki er rót í $P(s)$ hjá $D_n(y) = 0$, so hevur $D_n(y) = D_m(u)$ eina og bert eina loysn

$$y(t) = H(s)\, e^{st}.$$

Loysnin kallast stationera svarið hjá ávirkanini $u(t) = e^{st}$.

Frekvens-karakteristikkir Vit kanna avleiðingar við at seta $s = i\omega$, har $\omega \in \mathbb{R}_+$. Ávirkanin kann tískil skrivast $u(t) = e^{i\omega t}$.

Talan er um sveiggj við $T = \frac{2\pi}{\omega}$ og frekvensin $\frac{\omega}{2\pi}$.

Har $s = i\omega$ ei er rót í karakterlikninginí, $P(i\omega) \neq 0$, so er ein periodisk loysn

$$y(t) = H(i\omega)\, e^{i\omega t}.$$

Hetta víðkast skjótt til loysn av $D_n(y) = D_m(u)$, har árvirkanin skrivast

$$u(t) = \cos(\omega t) \quad \text{ella} \quad \sin(\omega t).$$

Setn. 1.26 Set fyri at y_0 er ein kompleks loysn hjá $D_n(y) = u$, har $u(t) \in \mathbb{C}$. Tá er

(i) funktiónin $Re(y_0)$ ein loysn hjá $D_n(y) = Re(u)$.

(ii) funktiónin $Im(y_0)$ ein loysn hjá $D_n(y) = Im(u)$.

Pf. Av tí at y_0 er ein kompleks loysn, so gevur kompleks konjugering, at $D_n(\bar{y}_0) = \bar{u}$.

Reella loysnin:

$$\begin{aligned} D_n(y_0) = u \ \wedge \ D_n(\bar{y}_0) = \bar{u} \quad &\Rightarrow \quad D_n(y_0) + D_n(\bar{y}_0) = u + \bar{u} \\ &\Leftrightarrow \quad D_n(y_0 + \bar{y}_0) = u + \bar{u} \\ &\Leftrightarrow \quad 2\, D_n(Re(y_0)) = 2\, Re(u). \end{aligned}$$

Imaginera loysnin:

$$\begin{aligned} D_n(y_0) - D_n(\bar{y}_0) = u - \bar{u} \quad &\Leftrightarrow \quad D_n(y_0 - \bar{y}_0) = u - \bar{u} \\ &\Leftrightarrow \quad 2\, D_n(Im(y_0)) = Im(u). \end{aligned}$$ $\square$

Vit hava, at fyri $u(t) = Re(e^{i\omega t}) = \cos(\omega t)$ við $P(i\omega) \neq 0$, so er ein loysn $y(t) = Re(H(i\omega)\, e^{i\omega t})$.

Tilsvarandi $u(t) = Im(e^{i\omega t}) = \sin(\omega t)$ og loysn $y(t) = Im(H(i\omega)\, e^{i\omega t})$.

Setn. 1.27 Um $P(i\omega) \neq 0$ hjá $D_n(y) = u$, so hava vit

(i) Um $u = \cos(\omega t)$, so er stationer loysn til hesi ávirkan givin við
$$y(t) = \mathrm{Re}(H(i\omega)\, e^{i\omega t}) = |H(i\omega)| \cos(t + \arg H(i\omega)).$$

(ii) Um $u = \sin(\omega t)$, so er stationer loysn til hesi ávirkan givin við
$$y(t) = \mathrm{Im}(H(i\omega)\, e^{i\omega t}) = |H(i\omega)| \sin(t + \arg H(i\omega)).$$

Pf. Lat $\arg(a+ib)$ vera í $]-\pi, \pi]$. Vit kunnu skriva kompleksa talið $H(i\omega)$ út frá modulus og argument, so vit fáa

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left(H(i\omega)\, e^{i\omega t}\right) &= \mathrm{Re}\left(|H(i\omega)|\, e^{i \cdot \arg(H(i\omega))} \cdot e^{i\omega t}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(|H(i\omega)|\, e^{i(\omega t + \arg(H(i\omega)))}\right) \\
&= |H(i\omega)| \cos(\omega t + \arg H(i\omega)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\left(H(i\omega)\, e^{i\omega t}\right) &= \mathrm{Im}\left(|H(i\omega)|\, e^{i \cdot \arg(H(i\omega))} \cdot e^{i\omega t}\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(|H(i\omega)|\, e^{i(\omega t + \arg(H(i\omega)))}\right) \\
&= |H(i\omega)| \sin(\omega t + \arg H(i\omega)).
\end{aligned}$$

◻

Fasukarakteristik

Amplitudekarakteristik $A(\omega) := |H(i\omega)|$,

Fasukarakteristik $\varphi(\omega) := \arg H(i\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}_+$.

Dømi $\ddot{y} + y = \dot{u}$ við $u(t) = \cos(2t)$.

$$H(s) = \frac{s}{s^2 + 1}, \quad \text{har } s \notin \{\pm i\}.$$

Stationert svar
$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathrm{Re}\left(H(2i)\, e^{2it}\right) = \mathrm{Re}\left(-\tfrac{2}{3} i \cdot (\cos(2t) + i \cdot \sin(2t))\right) \\
&= \tfrac{2}{3} \sin(2t),
\end{aligned}$$

ella
$$\begin{aligned}
y(t) &= |H(2i)| \cdot \cos(2t + \arg H(2i)) \\
&= \tfrac{2}{3} \cdot \cos\left(2t - \tfrac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$