Linear systems Vit sóu hvussu vit loysa líkningaskipanir við Gauss elimination. Skapini á Gauss elimineraðar skipanir er ymiskt alt eftir hvat fyri rang koefficient-matrican hevur.

Dømi 6.20 Total matrican

$$\underline{\underline{T}} = \begin{array}{c} \qquad\qquad \underline{\underline{A}} \qquad\qquad\qquad \underline{b} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 4 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & 8 & 6 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 14 & 8 & 10 & 22 & 32 \end{array}\right] \end{array}$$

lýsir eina skipan við 4 líkningar og 5 ókendar. Vit kunnu redusera niður í

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -11 & -24 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Her er koefficientmatrican á trappuform. Ofta síggja vit gjarna, at ein $n \times n$ matrica endar sum $\underline{\underline{I}}$ eftir reduseringi.

Def 6.21 Ein matrica $\underline{\underline{A}}$ hevur rang $\rho(\underline{\underline{A}})$, sum er talið av rekkjum, sum ikki eru 0-rekkjan.

Á trappuform er $\rho(\underline{\underline{A}})$ talið av leiðandi 1-tølum. Í samband við dømi omanfyri er $\rho(\underline{\underline{A}}) = 3$. Hetta er talið av ikki-triviellum líkningum í skipanini.

Lineert óheftni Rang á $\underline{\underline{A}}$ lýsir, hvussu nógvir av vektorunum $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n$ eru lineer óheftir! Omanfyri eru $\underline{a}_1, \underline{a}_2$ og $\underline{a}_4$ lineert óheftir, meðan vit avlesa

$$\underline{a}_3 = 2\,\underline{a}_1 \quad \text{og} \quad \underline{a}_5 = -11\,\underline{a}_1 + 4\,\underline{a}_2 + \underline{a}_4$$

Altso $\underline{a}_3$ og $\underline{a}_5$ eru lineert heftir. Vit fáa altso, at column space hjá $\underline{\underline{A}}$ er 3-dimensionelt.

Setn. 6.24 Ein $m \times n$ matrica $\underline{\underline{A}}$ hevur $\rho(\underline{\underline{A}}) \leq \min\{m, n\}$.

Vit kanna møguleikarnar fyri loysnir til $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$.

Legg til merkis, at $\underline{\underline{T}} = [\,\underline{\underline{A}} \;\; \underline{b}\,]$, so antin er $\rho(\underline{\underline{T}}) = \rho(\underline{\underline{A}})$ ella er $\rho(\underline{\underline{T}}) = \rho(\underline{\underline{A}}) + 1$.

$\rho(\underline{\underline{A}}) < \rho(\underline{\underline{T}})$ Her er talan um eitt inkonsistent system, og tá er eingin loysn. So t.d.

$$trap(\underline{\underline{T}}) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$\rho(\underline{\underline{A}}) = \rho(\underline{\underline{T}})$ og tal av ókendum.

Nú hevur trap($\underline{\underline{T}}$) loysnina standandi, tí allir teir ókendu eru givnir út frá resultat soyluna.

T.d.

$$trap(\underline{\underline{T}}) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad x_1 = -3 \text{ og } x_2 = 5$$

Serliga er <u>ein</u> loysn.

$\rho(\underline{\underline{A}}) = \rho(\underline{\underline{T}})$ < tal av ókendum

Vit taka skipanina fram, sum vit byrjaðu við.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -11 & -24 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Dømi 6.30

Variablarnir x_3 og x_5 kunnu veljast frítt, tí ein loysn avhongur bert av $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$ og $\underline{a}_4$, sum svara til koefficientarnar hjá x_1, x_2 og x_4.
Vit velja fríar parametrar t_3 og t_5 fyri ávikavíst x_3 og x_5.
So hava vit líkningarnar

$$\begin{aligned} x_1 &= -24 - 2t_3 + 11t_5 \\ x_2 &= 7 - 4t_5 \\ x_3 &= t_3 \\ x_4 &= 3 - t_5 \\ x_5 &= t_5 \end{aligned}$$

Óansæð val av $t_3, t_5 \in \mathbb{R}$, so finst x_1, x_2 og x_4 sum lýst omanfyri, so at hetta er ein loysn hjá líkningaskipanini. Tað merkir altso, at óendaliga nógvar loysnir eru!
Á standard parametur form skrivast loysnin

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ 7 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + t_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_5 \begin{bmatrix} 11 \\ -4 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t_3, t_5 \in \mathbb{R}.$$

Loysningsmongdin er eitt heilt plan.

Metoda 6.31 lýsir mannagongdina stigvíst.

Dømi 6.32 Lat $trap(\underline{\underline{T}}) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$ so er $\rho(\underline{\underline{A}}) = \rho(\underline{\underline{T}}) = 2 < n = 3$.
Ein fríur parametur t_2.

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t_2 \in \mathbb{R}.$$

Setningur 6.34 Ein lineer líkningaskipan hevur antin onga, eina ella óendaliga nógvar loysnir.

Strukturur Vit hyggja uppá sambandið millum loysnir hjá homogenar skipanir og inhomogenar skipanir:

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{0} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$$

Setn. 6.35 Lat L_{hom} vera mongdin av loysnum hjá $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{0}$. Í minsta lagi finst triviella loysnin. Um $L_{hom} \neq \{\underline{0}\}$ og $\underline{x}$ og $\underline{y}$ eru tilvildarligar loysnir, so er $\underline{x}+\underline{y}$ ein loysn. Við $k \in \mathbb{R}$ er $k\underline{x}$ eisini ein loysn.

Prógv. Lat $\underline{x}, \underline{y} \in L_{hom} \neq \{\underline{0}\}$, so fáa vit

$$\underline{\underline{A}}(\underline{x}+\underline{y}) = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{\underline{A}}\,\underline{y} = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$$

per linearitet av $\underline{\underline{A}}$.
Fyri $k \in \mathbb{R}$ og $\underline{x} \in L_{hom}$ er $\underline{\underline{A}}(k\underline{x}) = k\,\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = k\,\underline{0} = \underline{0}$.

$\square$

Ein linearkombinatión av loysnum $k_1 \underline{x}_1 + \cdots + k_n \underline{x}_n$ er tískil ein loysn í sær sjálvum.

Struktur 6.37 setningurin Um bara ein loysn til eitt inhomogent system er funnin (partikuler loysn $\underline{x}_0$), so er loysningsmongdin L_{inhom} summurin av $\underline{x}_0$ og L_{hom}.

$$L_{inhom} = x_0 + L_{hom}.$$

Prógv. 1. Lat $\underline{y} \in L_{hom}$ hjá $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$. So er

$$\underline{\underline{A}}(\underline{x}_0+\underline{y}) = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}_0 + \underline{\underline{A}}\,\underline{y} = \underline{b} + \underline{0} = \underline{b}.$$

Tískil er $x_0 + L_{hom}$ í L_{inhom}.

2. Lat $x \in L_{inhom}$. Vit leita eftir $\underline{y} \in L_{hom}$, so at $\underline{x} = \underline{x}_0 + \underline{y}$.

Vel $\underline{y} = \underline{x} - \underline{x}_0$, so er $\underline{\underline{A}}\,\underline{y} = \underline{\underline{A}}(\underline{x}-\underline{x}_0) = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} - \underline{\underline{A}}\,\underline{x}_0 = \underline{b} - \underline{b} = \underline{0}$.
So $\underline{y} \in L_{hom}$. Legg til merkis, at

$$\underline{x}_0 + \underline{y} = \underline{x}_0 + (\underline{x} - \underline{x}_0) = \underline{x}$$

ergo kann $x \in L_{inhom}$ skrivast sum $\underline{x}_0 + \underline{y}$ við $\underline{y} \in L_{hom}$. $L_{inhom} = x_0 + L_{hom}$.

$\square$