Vælkomin til Støddfrøði 2

Skipan Skeiðið er í høvuðsheitum skipað í partarnar

- Linearar diff. likn. av n'tu ordan
- Differentiallikningaskipanir
- Stabilitetur
- Loysn av diff. likn. vha. óendaligum røðum

Endamálið er at loysa diff. likn. og kontrollera frávik.
Umframt hetta, so fara vit at læra um wavelets, og til tess brúka vit at Hilbert rúm og Fourier transformatiónina.

Moodle Strukturur, uppdateringar og munur í mun til DTU.
Neyvari skeiðslýsing á uppvørpu.
Próvtøkan verður tann 26. oktober og er 4 tímar.
Metið verður givið út frá próvtøkuni og innlatingarnar á 75% og 25% ávikavist.
Innlatingar eru hvørja viku, annað enn vika 42, og latast inn tá verandi vikan endar.
Spælireglur!

Mat 1 Samband er millum fyrstu vikurnar og eNoturnar 16 og 17 úr Støddfrøði 1.
Vónandi er lopið ikki alt ov stórt.

Diff. likn. Linearar differentiallikningar á n'ta stigi skrivast

$$a_0 \frac{d^n y}{dt} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = u(t) \quad , \quad t \in I.$$

Konstantarnir $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ og $a_0 \neq 0$. Funktiónin $u(t)$ er definerað á einum intervalli $I \subseteq \mathbb{R}$. Funktiónin y er tann vit leita eftir, t.v.s. svarið ella loysnin.

$$\frac{d^2 y}{dt} + \frac{dy}{dt} + y = 0 \quad , \quad \text{har} \quad u(t) = 0$$

Loysnin $y(t) = 0$ er triviel, hon hevur ikki áhuga. Hetta er eitt system, sum ikki verður ávirkað útifrá. Funktiónin $u(t)$ er altso ávirkan á okkara diff. líkn.

Notatión $\dot{y} = y^{(1)} = y' = \frac{dy}{dt}$, $\ddot{y} = y^{(2)} = \frac{d^2y}{dt^2}$, ..., $y^{(n)} = \frac{d^ny}{dt^n}$

$\dot{y}$ er altíð $\frac{dy}{dt}$, meðan y' kann vera $\frac{dy}{dx}$!

Ex. 1.2 Mass on a spring:

Newton 2. lóg: $F = m \cdot a = m \cdot \ddot{y} = m \cdot \frac{d^2y}{dt^2}$

Hooke's lóg: $F = -k \cdot y$

$$\therefore \quad m\frac{d^2y}{dt} = -ky$$

$$\Leftrightarrow \quad m\frac{d^2y}{dt} + ky = 0$$

við friktión

$$m\frac{d^2y}{dt} + \gamma\frac{dy}{dt} + ky = 0$$

Vit stytta eisini niður í notatiónina við $D_n(y) = u$, so til dømis er

$$D_2(y) = \frac{d^2y}{dt} + \frac{dy}{dt} + y = 0.$$

D operatorurin Vit hava innført differentialoperatorin D, sum er ein lineer avmyndan

$$D^k: C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}) \quad \text{givin við} \quad D^k y = y^{(k)}.$$

Vit hava implicit defineraq

$$D_n = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n.$$

Er D ein lineer avmyndan?

Ein avmyndan $A: V \to W$ er lineer, um i) $A(x+y) = Ax + Ay$, har $x, y \in V$
ii) $A(c \cdot x) = c \cdot Ax$ og $c \in \mathbb{R}$ ella $\mathbb{C}$.

Vit hava, at fyri $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$ og $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ella $\mathbb{C}$, at

$$D(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)' = (\alpha f)' + (\beta g)' = \alpha f' + \beta g' = \alpha Df + \beta Dg.$$

Er D^2 lineer? $D^2 y = D(Dy)$. Hvussu við D^n og D_n?

$$a_0 \frac{d^n y}{dt} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = 0$$

Homogenar diff. likn.

Lat okkum finna útav hvussu vit loysa okkara dømi.
Vit brúka somu amboð sum í mat 1, so vit skulu hava fatur á karakter likningini og karakteristiska polynomið!

$$P(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

$$P(\lambda) = 0$$

Dømi

$$\frac{d^2 y}{dt} + \frac{dy}{dt} + y = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \iff \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Loysnir: $y_1(t) = c_1 \cdot e^{(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})t}$, $y_2(t) = c_2 \cdot e^{(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})t}$

Setn. 1.4 Lat y_1 og y_2 vera loysnir hjá $D_n(y) = 0$, og $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ella $\mathbb{C}$.
So er $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ eisini ein loysn.

Pf: Brúka linearitet hjá D_n.

$$D_n(y) = D_n(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 D y_1 + c_2 D y_2 = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0.$$

Altso er y ein loysn. $\blacksquare$

Setn. 1.5 Loysnirnar hjá $D_n(y) = 0$ útspenna eitt n-dimensionelt vektorrúm.
Allar loysnir, fullkomuliga loysnin, kunnu tískil skrivast

$$y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n ,$$

har $c_1, \ldots, c_n$ eru konstantar og $y_1, \ldots, y_n$ eru lineert óheftar loysnir.

Dømi Loysnirnar hjá $D_2(y) = 0$ omanfyri eru tvær lineert óheftar loysnir, so har ein ikki fleiri, og fullkomuliga kompleksa loysnin skrivast tí

$$y(t) = c_1 \cdot e^{(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})t} + c_2 \cdot e^{(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})t} , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Setn. 1.6 Um λ er rót í $P(\lambda)$ hjá $D_n(y) = 0$, so er $y(t) = e^{\lambda t}$ ein loysn. Loysnir fyri distinkt λ eru lineert óheftar.

Pf: Set $y = e^{\lambda t}$ í $D_n(y) = 0$. Generelt so er givið, at

$$y^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda t},$$

so vit fáa

$$\begin{aligned} D_n(y) &= a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + \cdots + a_n y \\ &= a_0 \lambda^n e^{\lambda t} + a_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda t} + \cdots + a_n e^{\lambda t} \\ &= (a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n) e^{\lambda t} \\ &= P(\lambda) \cdot e^{\lambda t} = 0, \text{ tí } \lambda \text{ er rót í } P(\lambda). \end{aligned}$$

Dømi

$$D_4(y) = \frac{d^4 y}{dt^4} - \frac{d^3 y}{dt^3} + \frac{d^2 y}{dt} - \frac{dy}{dt} = 0$$

$$\begin{aligned} & \lambda^4 - \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \lambda (\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \lambda (\lambda^2 + 1)(\lambda - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \lambda = 0 \vee \lambda = 1 \vee \lambda = \pm i \end{aligned}$$

Lineert óheftar loysnir

$$y(t) = 1, \quad y(t) = e^t, \quad y(t) = e^{it}, \quad y(t) = e^{-it}.$$

Fullkomiliga kompleksa loysnin er

$$y(t) = c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{it} + c_4 e^{-it}, \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{C}.$$

Problem

- Kompleksar loysnir, hvussu fáa vit reel svar?
- Multiplicitet av rótum.

Vit hava reellar koefficientar $a_0, \dots, a_n$, so allar røtur λ í $P(\lambda)$ koma fyri í konjugeraðum pørum. Um $\lambda = a + i\omega$ er ein rót, so er $\bar{\lambda} = a - i\omega$ ein rót.
Kompleksa eksponentialfunktiónin (Eulers identity) gevur fyri λ, at

$$y(t) = e^{\lambda t} = e^{(a+i\omega)t} = e^{at}\left(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\right)$$
$$= e^{at}\cos\omega t + e^{at}\cdot i \cdot \sin\omega t$$

Lemma 1.8 Um y er ein loysn hjá $D_n(y) = 0$, so eru $\operatorname{Re} y$ og $\operatorname{Im} y$ eisini loysnir.

Pf. Givið er at $y = \operatorname{Re} y + i \operatorname{Im} y$ er ein loysn hjá $D_n(y) = 0$. Vit hava

$$D_n(y) = D_n(\operatorname{Re} y + i \operatorname{Im} y) = D_n(\operatorname{Re} y) + i\, D_n(\operatorname{Im} y) = 0.$$

Partarnir eru klárt lineert óheftir, so bæði $D_n(\operatorname{Re} y) = 0$ og $D_n(\operatorname{Im} y) = 0$. □

Vit hava altso, at um $\lambda = a + i\omega$ er ein rót í $P(\lambda)$ hjá $D_n(y) = 0$, so eru funktiónirnar

$$y(t) = e^{at}\cos\omega t \quad \text{og} \quad y(t) = e^{at}\sin\omega t$$

reellar loysnir.

Dømi 1.11

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0 \ , \quad \omega > 0 \qquad \lambda^2 + \omega^2 = 0 \iff \lambda = -\omega^2$$
$$\iff \lambda = \pm i\omega$$

Fullkomulig reel loysn

$$y(t) = c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t \ , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Setn. 1.9 Lineera homogena differentiallíkningin $D_n(y) = 0$ hevur lineert óheftar loysnir

(i) Fyri hvørja reella rót λ í $P(\lambda)$: $y(t) = e^{\lambda t}$
(ii) Fyri hvørja kompleksa rót $\lambda = a + i\omega$ í $P(\lambda)$: $y(t) = e^{at}\cos\omega t$
$y(t) = e^{at}\sin\omega t$

Alg. Fund. setn. $P(\lambda) = a_0(\lambda - \lambda_1)^{p_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{p_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{p_k}$, har $\lambda_i \neq \lambda_j$ tá $i \neq j$.
Talið p_i er algebraiski multiplicitetурin hjá rótini λ_i.

Dømi $\quad D_4(y) = \dfrac{d^4y}{dt^4} = 0$

$$y(t) = c_1 + c_2t + c_3t^2 + c_4t^3 \quad , \quad c_1, \dots, c_4 \in \mathbb{R}$$

Setn. 1.14 Lat λ vera rót í $P(\lambda)$ við multiplicitet p. So hevur $D_n(y)=0$ lineert óheftu loysnirnar

$$y_1(t) = e^{\lambda t}, \; y_2(t) = te^{\lambda t}, \; \dots, \; y_p(t) = t^{p-1}e^{\lambda t}$$

ella

$$y_k(t) = t^k e^{\lambda t} \quad , \quad \text{har} \quad k = 0,1,2,\dots,p-1$$

Tá vit taka samanum fáa vit savnað úrslitið.

Setn. 1.15 Fullkomuliga loysnin hjá $D_n(y)=0$ er givin sum linearkombinatión av loysnunum:

(i) (kompleksar) Fyri hvørja rót λ í $P(\lambda)$ hjá $D_n(y)=0$ skrivast loysnin $y(t) = e^{\lambda t}$, og við multiplicitet $p>1$ skrivast

$$y(t) = t^k e^{\lambda t}, \; \text{fyri} \; k = 0,1,\dots,p-1.$$

Linearkombinatiónin er givin við kompleksum koefficientum.

(ii) (reellar) Fyri hvørja rót λ í $P(\lambda)$ hjá $D_n(y)=0$ skrivast loysnirnar sum í (i). Fyri hvørt par av konjugeraðum rótum $a \pm i\omega$ skrivast

$$y(t) = e^{at}\cos \omega t \quad \text{og} \quad y(t) = e^{at}\sin \omega t.$$

Við multiplicitet $p>1$ skrivast

$$\left.\begin{array}{l} y(t) = t^k e^{at}\cos \omega t \\ y(t) = t^k e^{at}\sin \omega t \end{array}\right. \quad , \; \text{fyri} \; k = 0,1,\dots,p-1.$$

Linearkombinatiónin er givin við reellum koefficientum.

Dømi $\quad \dfrac{d^4y}{dt^4} + \dfrac{d^2y}{dt^2} = 0$

$$\lambda^4 + \lambda^2 = 0 \iff \lambda^2(\lambda^2+1) = 0 \iff \lambda = 0 \lor \lambda = \pm i$$

Fullkomuliga Loysnin

- kompleks: $\quad y(t) = c_1 + c_2t + c_3e^{it} + c_4e^{-it} \quad , \quad c_1, \dots, c_4 \in \mathbb{C}.$
- reel: $\quad y(t) = c_1 + c_2t + c_3\cos t + c_4\sin(t), \quad c_1, \dots, c_4 \in \mathbb{R}.$