Kriteriir

Konvergenskriteriini skulu skiljast sum mátar at kanna konvergens. Vit hava í fleiri førum hugt at eitt nú $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, men vit argumenteradu divergens út frá integralrokning. Onkursvegna er torført at brúka ambodini úr 4.5 til at gera somu niðurstøðu.

Test

Lat rekkjurnar $\sum a_n$ og $\sum b_n$ vera givnar. Í fyrstu atløgu hava vit divergenstestina

4.19

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{eingin niðurstøða} \\ \text{annað} & \text{divergent}. \end{cases}$$

Tá vit hava størri nøgd av kendar rekkjur, so vil samanberingstestin klára flestu spurningarnar

4.20 $0 \le a_n \le b_n$ (i) Vel $\sum b_n$ størri og konvergent.
(ii) Vel $\sum a_n$ minni og divergent.

Dømi

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^3-1}$ og vit velja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$.

$$\frac{n^2}{2n^3-1} = \frac{1}{2n-\frac{1}{n^2}} \ge \frac{1}{2n}$$ fyri øll $n\in\mathbb{N}$. Rekkjan $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ er divergent,

tí $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ er divergent, so tí er $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+1}$ divergent per samanbering.

Dømi

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n+n}$ og vit velja $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}$. Klárt at $\frac{1}{3^n+n} < \frac{1}{3^n}$ fyri øll $n\in\mathbb{N}$ og rekkjan $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ er konvergent. Per samanbering er $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n+1}$ konvergent.

4.24 Um $\frac{a_n}{b_n} \to c$ tá $n\to\infty$ við $c>0$, so eru rekkjurnar $\sum a_n$ og $\sum b_n$ antin báðar konvergentar ella divergentar.

Dømi

Vit royna $\sum \frac{n^2}{n^3+1}$ og $\sum \frac{1}{n}$ aftur.

$$\frac{\frac{n^2}{n^3+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n^2\cdot n}{n^3+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n^3}} \to 1 \text{ tá } n\to\infty.$$

Rekkjurnar eru ekvivalentar, so av tí at $\sum\frac{1}{n}$ er divergent, so sigur 4.24 at báðar eru divergentar.

Róttestin

Lat $L = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}}$, so um

(i) $L<1$ er rekkjan absolut konv. (ii) Um $L>1$ er rekkjan divergent.
(iii) $L=1$ eingin niðurstøða.

Dømi $\sum_{n=1}^{\infty} n$ hevur $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$, so her var eingin niðurstøða.

Dømi $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5n-3n^3}{7n^3+2}\right)^n$, $\left|\left(\frac{5n-3n^3}{7n^3+2}\right)^n\right|^{\frac{1}{n}} = \left|\frac{\frac{5}{n^2}-3}{7+\frac{2}{n^3}}\right| \to \frac{3}{7} < 1$ tá $n\to\infty$.

So rekkjan konvergerar.

Kvotienttest Lat $C = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, (i) $C<1$ so er rekkjan absolut konvergent.
(ii) $C>1$ so er rekkjan divergent.
(iii) $C=1$ so er eingin niðurstøða.

Dømi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$, $\left|a_{n+1}\cdot\frac{1}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)!}{5^{n+1}}\frac{5^n}{n!}\right| = \frac{n+1}{5} \to \infty > 1$ tá $n\to\infty$.

4. Brúka 4.30 at vísa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}$ er konvergent.

$a_n = \frac{1}{(2n)!} > 0$ fyri øll $n\in\mathbb{N}$ og

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{1}{(2(n+1))!}}{\frac{1}{(2n)!}}\right| = \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{(2n)\cdot(2n-1)\cdot(2n-2)\cdots 1}{(2n+2)(2n+1)(2n)(2n-1)\cdots 1} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \to 0 \text{ tá } n\to\infty.$$

Per 4.30(i) er rekkjan konvergent.

Dømi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$, $a_n = \frac{n^2}{3^n}$

$$\left|\frac{\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}}{\frac{n^2}{3^n}}\right| = \left|\frac{(n+1)^2\, 3^n}{3^{n+1}\, n^2}\right| = \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \to \frac{1}{3} \text{ tá } n\to\infty.$$

Integralkriteriið Tað er langt frá einfalt at finna ein sum sjálvt hjá konvergentar rekkjur, men vit kunnu vurdera við størum neyrleika. Eitt amboð er integralkriteriið

Setn. 4.33 Lat $f(x): [1,\infty) \to [0,\infty)$ vera ein kontinuert avtakandi funktión, so er
(i) $\int_1^{\infty} f(x)\,dx \le \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \le \int_1^{\infty} f(x)\,dx + f(1)$ um $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ er konvergent.
Tvs. $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ er konvergent.
(ii) Um $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ er divergent, so er $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ divergent.

Dømi 4.34 Lat $\alpha>0$. Rekkjan $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha} + \cdots$
Vit brúka integralkriteriið við $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $x\in[1,\infty)$. Funktiónin er fallandi og kontinuert.

$\alpha > 1$: $\displaystyle\int_1^t \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \int_1^t x^{-\alpha}\,dx = \left[\frac{1}{1-\alpha}\,x^{1-\alpha}\right]_1^t = \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{\alpha-1}\frac{x}{x^t} \to \frac{1}{\alpha-1}$ tá $t \to \infty$.

Integralið er konvergent og við 4.33(i) er $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergent tá $\alpha > 1$.
Vit hava eisini, at $\displaystyle\frac{1}{\alpha-1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1} + 1.$

$\alpha = 1$: $\displaystyle\int_1^t \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_1^t = \ln t \to \infty$ tá $t \to \infty$, so $\sum \frac{1}{n}$ er divergent!

$\alpha < 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ er nú divergent per samanbering við $\sum \frac{1}{n}$!

Korollar 4.35 Vurderingin í 4.33 kann flytast úr $x=1$ til $x=N+1$.

Kvotientrekkjur Vit fara at koyra variablar liðir í spæl. Fyrsta vit gera er at kanna einfaldar geometriskar rekkjur.

Def. 5.1 Ein kvotientrekkja hevur formin $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$,
har $x \in \mathbb{R}$ ella $\mathbb{C}$. Talið x er kvotienturin.

Setn. 5.2 Ein kvotientrekkja $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ er konvergent um og bert um $|x| < 1$. Tá $|x| < 1$ er summurin
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Pf. Vísa, at
$$S_N = 1 + x + x^2 + \cdots + x^N = \frac{1 - x^{N+1}}{1-x}$$
Teleskop:
$$S_N(1-x) = 1 - x + x - x^2 + x^2 - \cdots + x^N - x^{N+1}$$
$$= 1 - x^{N+1}$$
Fyri $|x| < 1$: $\displaystyle S_N = \frac{1 - x^{N+1}}{1-x} \to \frac{1}{1-x}$ tá $N \to \infty$.

$x = 1$: $S_N = 1 + 1 + \cdots + 1 = N+1 \to \infty$ tá $N \to \infty$.

$x = -1$: $\displaystyle S_N = \frac{1-(-1)^{N+1}}{1-(-1)} = \frac{1-(-1)^{N+1}}{2} = \begin{cases} 1 & N \text{ lika} \\ 0 & N \text{ ólika} \end{cases}$, divergent. □

Sumfunktión Vit kalla $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x \in (-1,1)$, fyri sumfunktiónina hjá $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$.

Dømi $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$

Korollar 5.5 $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+N} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot x^N = x^N \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{x^N}{1-x}$ við $|x|<1$.

Dømi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1.$

Dømi 5.6 $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{5}{3^{n+1}} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{5}{3}\frac{1}{3^n} = \frac{5}{3}\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{5}{3}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{1-\frac{1}{3}}$

$$= \frac{5}{3}\cdot\frac{\frac{1}{27}}{\frac{2}{3}} = \frac{5\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 27} = \frac{5}{54}.$$