Stabilitet — Inhomogena differentiallíkningaskipanir

Vit sóu, at homogena skipanin $\dot{x} = Ax$ er stabil (asymptodisk), um allar loysnir eru avmarkaðar. Í hesum sambandi funnu vit, at tað er bert neyðugt at kenna eginvirðini hjá system matricuni.

Inhomogena skipanin $\dot{x} = Ax + u$, $[t_0, \infty)$, modellerar skipanir undir ávirkan, meðan tað homogena er frítt. Vit definera stabilitet út frá, hvussu skipanin reagerar uppá eini ávirkan.

Def. 2.44 Inhomogena skipanin er asymptodiskt stabil, um fyri einhvørja ávirkan u er galdandi, at fyri tvær tilvildarligar loysnir x_1 og x_2 við ávirkan u, so vil

$$x_1 - x_2 \to 0 \quad \text{tá ið} \quad t \to \infty.$$

Hetta skal skiljast sum, at munurin millum tvær loysnir doyr út yvir tíð. Er inhomogena systemið asymptodiskt stabilt, so er homogena systemið eisini.

Setn. 2.45 Inhomogena systemið er asymptodiskt stabilt, tá og bert tá homogena systemið er asymptodiskt stabilt.

Pf. Set fyri, at homogena systemið er asymptodiskt stabilt. Lat x_1 og x_2 vera tilvildarligar loysnir hjá $\dot{x} = Ax + u$, so at

$$\dot{x}_1 = Ax_1 + u \quad \text{og} \quad \dot{x}_2 = Ax_2 + u.$$

Rokna vit munin, so fáa vit

$$\dot{x}_1 - \dot{x}_2 = Ax_1 - Ax_2 = A(x_1 - x_2).$$

Tískil er funktiónin $x_1 - x_2$ ein loysn til homogena systemið. Homogena systemið er asymptodiskt stabilt, so vit hava at

$$x_1 - x_2 \to 0 \quad \text{tá ið} \quad t \to \infty,$$

og tí er inhomogena systemið eisini asymptodiskt stabilt.

Set nú fyri, at inhomogena systemið er asymptodiskt stabilt. Lat x vera ein tilvildarlig loysn hjá homogena systemið. Ein onnur loysn er tann triviella, 0. Per definitión skal valið av u ongan týdning hava, so lat $u = 0$. Vit fáa, at $x = x - 0 \to 0$ tá $t \to \infty$, so homogena systemið er asymptodiskt stabilt. $\square$

Dømi 2.49 Lat $\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = d^T x \end{cases}$ vera asymptodiskt stabilt.

Um $i\omega$ ikki er eginvirði hjá A, har $\omega > 0$, so hevur ávirkanin $u(t) = e^{i\omega t}$ eina loysn $y_0(t) = H(i\omega) e^{i\omega t}$ per setning 2.21.

Fullkomuliga loysnin er $y(t) = y_h(t) + H(i\omega) e^{i\omega t}$.
Av asymptodiskan stabilitet fylgir, at $y_h(t) \to 0$ tá ið $t \to \infty$. Men so er fyri relativt stórt t galdandi, at einhvør loysn minnir um $y_0(t)$.

$$y(t) \approx H(i\omega) e^{i\omega t}.$$

Altso vilja loysnir yvirhøvur nærkast tí stationera svarinum.

Minst til Stabilitet (asymptodiskt), vit kunnu
1) Rokna λ
2) Routh - Hurwitz
3) Kanna at allar loysnir eru avmarkaðar / $x_1 - x_2 \to 0$ tá $t \to \infty$.

Rekkjur Vit hava trý nýggj evni at taka upp. Høvuðsevnið næstu vikurnar er óendaligar rekkjur, men vit leggja út í smáum við óegentlig integral og talfylgjur.

Konvergens Fyri óegentlig integral, fylgjur og rekkjur vilja vit taka hædd fyri, hvat hendir í grensuyvirgongdini, tá vit eitt nú fara ímóti óendaligt.

Tað handlar um at kunna áseta eitt virði ella ei. Í øllum trimum førum siga vit, at tey eru konvergent, um eitt virði kann setast sum úrslit í grensuni.
Ber hetta ikki til, so er talan um divergens.

Integral
Def. 4.1 Lat $a \in \mathbb{R}$ og $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ vera stykkivís kontinuert. Tá er

(i) $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergent, um $\lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x)\,dx$ hevur eitt grensuvirði.
Tá skriva vit $\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x)\,dx$.

(ii) $\int_a^\infty f(x)\,dx$ divergent, um $\lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x)\,dx$ ikki hevur eitt grensuvirði.

Dømi $\int_1^\infty \frac{1}{x^5}\,dx$: $\int_1^t \frac{1}{x^5}\,dx = \left[-\frac{1}{4}\frac{1}{x^4}\right]_1^t = \frac{1}{4} - \frac{1}{4t^4} \to \frac{1}{4}$ tá $t\to\infty$.

$\int_1^\infty \frac{1}{x^{1,01}}\,dx$: $\int_1^t \frac{1}{x^{1,01}}\,dx = \left[\frac{1}{1-1,01}\frac{1}{x^{0,01}}\right]_1^t = \left[-100\frac{1}{x^{0,01}}\right]_1^t = 100 - \frac{100}{t^{0,01}} \to 100$ tá $t\to\infty$.

$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$: $\int_1^t \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_1^t = 2\sqrt{t} - 2 \to \infty$ tá $t\to\infty$.

Grensan ∞ Vit kunnu gott hava óegentlig integral, sum ikki integrerast til ∞.

Dømi $\int_1^3 \frac{1}{(4-x)^{\frac{2}{3}}}\,dx$. Integrandurin er ikki defineradur í $x=4$.

Rokna $\lim_{t\to 4}\int_0^t \frac{1}{(4-x)^{\frac{2}{3}}}\,dx$, har $0<t<4$. Substituera við $u=4-x$.

Talfylgjur Hesar skilja vit sum talrøð. Vit skriva á listaform

$$\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_N\} \quad \text{við} \quad N\in\mathbb{N}.$$

Í stuttum $\{x_n\}_{n=1}^N$.

Dømi $\{1,2,3,\dots,12\} = \{n\}_{n=1}^{12}$

Vit taka óendaligar fylgjur á sama hátt.

$$\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\} = \{x_n\}_{n=1}^\infty \quad \text{ella} \quad \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

Dømi $\{-1,1,-1,1,\dots\} = \{(-1)^n\}_{n=1}^\infty$

$\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\dots\} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^\infty$

$x_n = \dfrac{n^2 + n\cdot\cos n + \sin n}{n^2}$, $n\in\mathbb{N}$.

Amboð: $x_n\to x$ og $y_n\to y$

$x_n \pm y_n \to x\pm y$

$x_n\cdot y_n \to x\cdot y$ $\quad n\to\infty$

$\frac{x_n}{y_n} \to \frac{x}{y}$ $\quad y\neq 0$.

Def. 4.5 Ein talfylgja $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ sigst at vera konvergent, um har finst eitt $s\in\mathbb{C}$, so at

$$x_n \to s \quad \text{tá ið} \quad n\to\infty.$$

Um ein talfylgja er konvergent, so siga vit, at s er grensuvirðið hjá $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ og skriva $\lim_{n\to\infty} x_n = s$. Ein talfylgja, sum ikki er konvergent er divergent.

Dømi $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er divergent

$\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ er konvergent, tí $x_n = \frac{1}{n} \to 0$ tá $n\to\infty$.

$\left\{\frac{n^2+n\cdot\cos n + \sin n}{n^2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ er konvergent, tí $x_n \to 1$ tá $n\to\infty$.

Teknisk jargon

Tølini x_n nærkast alsamt s, um ein talfylgja er konvergent. Vit skriva gransur matematisk við: fyri eitthvørt $\varepsilon > 0$ finst eitt $N\in\mathbb{N}$, so at

$$|s - x_n| \le \varepsilon \quad , \quad \text{tá } n \ge N.$$

Í kvantorum: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : n \ge N \Rightarrow |s - x_n| \le \varepsilon$.

Óendaligar rekkjur

Ein rekkja er ein sum av tølum $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n ,$$

har $a_n \in \mathbb{R}$ ella $\mathbb{C}$ fyri øll $n\in\mathbb{N}$. Vit síggja gjarna samband millum a_n og x_n frá fylgjur. Ein fylgja kemur úr rekkjuni, tann N'ta avsnitssummurin.

$$S_N = a_1 + a_2 + \dots + a_N = \sum_{n=1}^{N} a_n \quad , \quad N \in \mathbb{N}.$$

Her er talfylgjan $\{S_1, S_2, S_3, \dots, S_N, \dots\}$ ein, ið sigur nøgv um rekkjuna.

Def. 4.15 Um talfylgjan $\{S_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ er konvergent, so er óendaliga rekkjan konvergent. So um

$$S_N \to S \quad \text{tá ið } N\to\infty ,$$

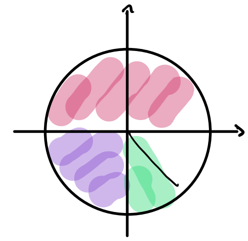
so skriva vit

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Er S_N divergent, so er rekkjan divergent og hevur ongan sum.

Dømi 4.18 $\sum_{n=1}^{\infty} n$, $x_n = n$ klárt divergent

$S_N = 1 + 2 + 3 + \dots + N$



$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad , \quad x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^N}$$

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} \\ S_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} \\ S_3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1 - \frac{1}{8} \end{aligned}\right\} \quad S_N = 1 - \frac{1}{2^N} \to 1 \text{ tá } N \to \infty.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ er konvergent við grensuna $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1.$

Indeks: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad , \quad x_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{N+1} \to 1 \text{ tá } N \to \infty.$$