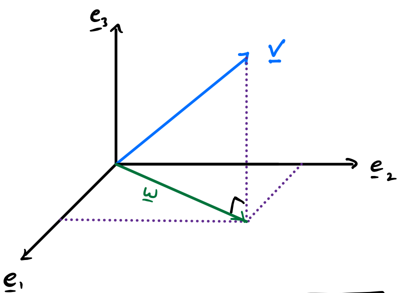
2D → 3D Vit seta $e_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ og $e_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ at vera standardbasis hjá $\mathbb{R}^3$.
Í 3 dimensionella rúminum fáa vit nú tilsvarandi vektorar, um tað so er definerað út frá punkt, at vera $\underline{v} = \begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}$.

Altso einhvør vektorur $\underline{v}$ er linearkombinatión av standard basis vektorunum.

$$\underline{v} = v_1 \underline{e}_1 + v_2 \underline{e}_2 + v_3 \underline{e}_3 = v_1 \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + v_3 \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}.$$

Longd



Vit rokna enn longdina á $\underline{v}$ við Euklidiskan avstand:

$$\|\underline{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

$$\|\underline{w}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \quad \text{og so er} \quad \|\underline{v}\| = \sqrt{\|\underline{w}\|^2 + v_3^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

Dømi 8.1 Longd á $\underline{v} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$:

$$\|\underline{v}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}.$$

Normaliserað hava vit $\underline{w} = \dfrac{1}{\|\underline{v}\|} \underline{v} = \dfrac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$.

Vit kunnu eisini skalera sum vanligt, so $\|c\,\underline{v}\| = |c|\,\|\underline{v}\|$.

$$\|2\underline{v}\| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 6^2} = \sqrt{2^2(1^2 + 2^2 + 3^2)} = 2\sqrt{14}.$$

Vanligar rokni operatiónir víðkast natúrliga úr 2D til 3D. Prikproduktið verður nú

$$\underline{v} \cdot \underline{w} = \begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{bmatrix} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3.$$

Vinkulformilin fylgir eisini strukturinum

$$\cos\vartheta = \frac{\underline{v} \cdot \underline{w}}{\|\underline{v}\|\,\|\underline{w}\|}$$

Krossprodukt $\wedge$

Vit definera eitt nýtt produkt fyri vektorar. Krossproduktið, $\wedge$,

$$\underline{u} = \underline{v} \wedge \underline{w}$$

er ein vektorur $\underline{u}$, sum hevur eginleikarnar:

1) $\underline{u} \perp \underline{v}$ og $\underline{u} \perp \underline{w}$.
2) $\underline{u}$ fylgir høgruhondsregluna.
3) $\|\underline{u}\|$ er jøvn við arealið á útspenta parallelogrammið hjá $\underline{v}$ og $\underline{w}$.

Krossproduktið er eitt vektorprodukt. Vit taka vektorar og fáa ein vektor.
Prikproduktið er eitt skalarprodukt, tí úrslitið er ein skalarur (tal).

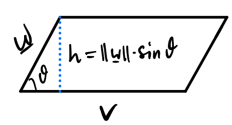
$$\underline{v} \wedge \underline{w} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} v_3 & w_3 \\ v_1 & w_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_3 \end{bmatrix}$$

Dømi $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ og $w = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$. Nú er

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 6 - 3\cdot 5 \\ 3\cdot 4 - 1\cdot 6 \\ 1\cdot 5 - 2\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Arealið á útspenta parallelogrammið

$$\|\underline{u}\| = \|\underline{v} \wedge \underline{w}\| = \|\underline{v}\| \, \|\underline{w}\| \sin\vartheta$$



Dømi $\underline{u} = \underline{v} \wedge \underline{w} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$, so er $P = \|\underline{u}\|$ og

$$\|\underline{u}\| = \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+36+9} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

Lagrange identity

$$\|\underline{v} \wedge \underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 \|\underline{w}\|^2 \sin^2\vartheta = \|\underline{v}\|^2 \|\underline{w}\|^2 (1 - \cos^2\vartheta)$$

$$= \|\underline{v}\|^2 \|\underline{w}\|^2 - \|\underline{v}\|^2 \|\underline{w}\|^2 \cdot \frac{(\underline{v}\cdot\underline{w})^2}{\|\underline{v}\|^2 \|\underline{w}\|^2}$$

$$= \|\underline{v}\|^2 \|\underline{w}\|^2 - (\underline{v}\cdot\underline{w})^2$$

Linjur

Vit framleiða nú bert linjur í 3D við at parametrisera. Altso linjur fáast við

- Tvey punkt.
- Punkt og ein vektor, sum er parallelur við linjuna.

Vit hava mist eginleikan at gera linjur úr punkt og ortogonalar vektorar!

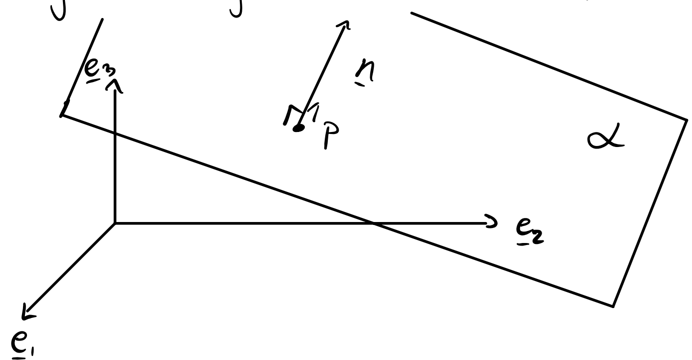
Ein linja l kann tískil skrivast

$$l(t) = p + t\,\underline{v} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Í rúminum kunnu vit ikki altíð vænta, at linjur skerast hóast at tær ikki eru parallelar. Tær kunnu hóast alt vera forskotnar í eini dimensión.

Plan (flatar)

Líkningin $\underline{n} \cdot (x - p) = 0$ varð brúkt at gera linjur í kap. 2, men mongdin av loysnum x er vaksin munandi!



Eitthvørt x í flatanum hjá p ger ein vektor $x - p$, sum er ortogonalur á $\underline{n}$.

Líkningin $\underline{n} \cdot (x - p) = 0$ ger altso eitt plan í rúminum. Tá $\|\underline{n}\| = 1$ so er hesin normalvektorurin hjá α.

Faldað út er líkningin bert ein nýggj útgáva av implicittu líkningini fyri linjur í 2D.

$$\underline{n} \cdot (x - p) = 0 \iff n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 - (n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3) = 0$$
$$\iff A x_1 + B x_2 + C x_3 + D = 0$$

Dømi

Lat $p = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\underline{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Her er $D = -(2 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 2) = 1$, so vit fáa planið

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + 1 = 0$$

Frástøða Vit finna styttstu leið við ortogonala frástøðu. Planið er altíð $|D|$ frá origo.
Fyri tilvildarlig punkt $\hat{x}$ er frástøðan til eitt plan

$$d = \frac{|A\hat{x}_1 + B\hat{x}_2 + C\hat{x}_3 + D|}{\|\underline{n}\|},$$

um $\underline{n}$ er normeraður, so nýtast vit ikki at stytta við 1. Tað ger seg serliga galdandi, um vit skulu rokna nógv, at normering er nógv betur.

Dømi $\alpha: 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 1 = 0$ og $\hat{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$d = \frac{|2 \cdot 4 - 4 + 3 \cdot 4 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{17}{\sqrt{14}} \approx 4{,}543.$$

Vit kunnu framleiða plan við trimum punktum, ella eitt punkt og tveir vektorar. Vit kunnu hóast alt gera normalvektorar via krossproduktið.

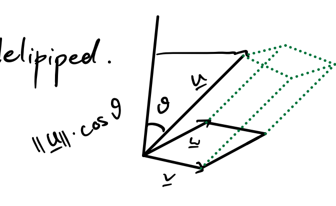
Givið p, q og r definera $\underline{v} = q - p$ og $\underline{w} = r - p$.
Nú er planið í p útspent av $\underline{v}$ og $\underline{w}$ givið á parametriskan form við

$$P(s,t) = p + s\underline{v} + t\underline{w}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

$$= p + s(q-p) + t(r-p) = p + sq - sp + tr - tp$$

$$= (1-s-t)p + sq + tr$$ Barycentrisk koordinat.

Scalar triple product Í rúminum útspenna 3 vektorar eitt parallelipiped.



Parallelogramið er $\|\underline{v} \wedge \underline{w}\|$ og volumen V er nú

$$V = \|\underline{u}\| \, \|\underline{v} \wedge \underline{w}\| \cos\vartheta$$
$$= \|\underline{u}\| \, \|\underline{v} \wedge \underline{w}\| \frac{\underline{u} \cdot (\underline{v} \wedge \underline{w})}{\|\underline{u}\| \, \|\underline{v} \wedge \underline{w}\|}$$
$$= \underline{u} \cdot (\underline{v} \wedge \underline{w})$$

Dømi

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \underline{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V = \underline{u} \cdot (\underline{v} \wedge \underline{w}), \qquad \underline{v} \wedge \underline{w} = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} = -12 - 5 + 2 = -15 \quad \text{ella} \quad \underline{\underline{15}}$$

Legg til merkis, at

$$\det\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\right) = -3 + 4 - 3 - 2 - 9 - 2 = -15$$