Vælkomin til skeiðið Lineer Algebra

Undirvísarir Mortan (mortanjt@setur.fo) og Unn (unnhalad@gmail.com)

Praktiskt info Skeiðslýsingin er at finna á skeid.setur.fo. Leinkja er á Moodle síðuni. Moodle er skipað, so at tit hava eitt stutt yvirlit ovast. Restin er fjalt í mappum og annars hava vikurnar eyka upplýsingar.

Undirvísing Mánadag er fyrilestur 8-9 og 13-14, uppgávurokning er 9-12.
Hósdag er fyrilestur 10-12, uppgávurokning er 13-16.

Met Prósvtal verður út frá samanseting av innlatingum, verkætlan og MC royndir. Býtið er 20 %, 30 %, 25 % og 25 %.

Bygnaður Vit byrja við vektorrokning, so at vit fáa eitt gott útgangsstøði.
Á natúrligan hátt seta vit okkum inn í lineerar skipanir í 2D, áðrenn vit so leypa til 3D. Mestsum øll úrslit kunnu umsetast beinleiðis!
Loyva vit síðani fleiri variablar/dimensiónir, so kunnu vit generalisera til n dimensiónir.

Lineer Algebra Fyri sovítt er hetta ein grein, sum er áhugað í lineerum líkningum

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = b,$$

lineer avmyndan

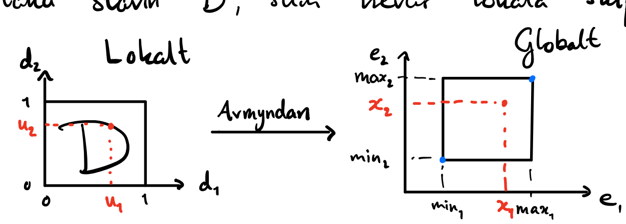
$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n .$$

Vit umboða hesi í vektorrúm við matricur.

Koordinatir Vit byrja við lokalar $\leftrightarrow$ globalar skipanir í koordinatum. Fín anekdota úr býnum Schilda, um hví ein lokal skipan ikki er nøktandi.

2D Vit taka stavin D, sum hevur lokala skipan

Target box



Target box

Skal lutfallið vera varðveitt, so fáa vit

$$\frac{u_1 - 0}{1 - 0} = \frac{x_1 - min_1}{max_1 - min_1} \quad \text{og} \quad \frac{u_2 - 0}{1 - 0} = \frac{x_2 - min_2}{max_2 - min_2} .$$

Legg til merkis, at her er skrivað ov mikið, so at mynstrið sæst.
Veiting: sett upp líkningar fyri avmyndan úr T_1 til T_2.

Soleiðis fáa vit nú koordinatini í ta globalu skipanini

$$\frac{u_1 - 0}{1 - 0} = \frac{x_1 - min_1}{max_1 - min_1} \iff u_1 = \frac{x_1 - min_1}{max_1 - min_1} \quad , \quad max_1 - min_1 \neq 0.$$

$$\iff u_1 (max_1 - min_1) = x_1 - min_1$$

$$\iff u_1 \cdot max_1 - u_1 \cdot min_1 + min_1 = x_1$$

Her fylgir x_2 mutatis mutandis, so vit hava

$$x_1 = (1 - u_1) min_1 + u_1 max_1$$

$$x_2 = (1 - u_2) min_2 + u_2 max_2$$

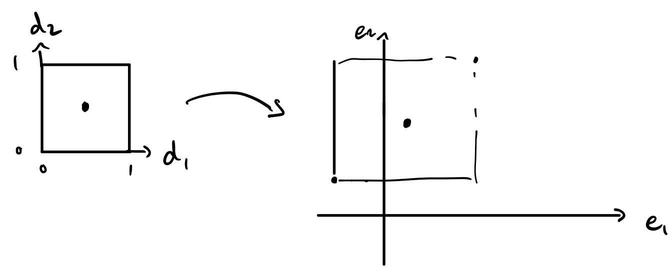
$$\left(u_1 = \frac{x_1 - min_1}{max_1 - min_1} \quad , \quad u_2 = \frac{x_2 - min_2}{max_2 - min_2} \right)$$

Altso er neyðugt at kenna (u_1, u_2) og Target box koordinatini!
Tað er skjótt at vátta, at $(0,0) \mapsto (min_1, min_2)$ og $(1,1) \mapsto (max_1, max_2)$.

Dømi Lat $(min_1, min_2) = (4, 12)$ og avmynda $(u_1, u_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
$(max_1, max_2) = (-2, 6)$

$$x_1 = (1 - \tfrac{1}{2}) \cdot 4 + \tfrac{1}{2} \cdot (-2) = 2 + (-1) = 1$$

$$x_2 = (1 - \tfrac{1}{2}) \cdot 12 + \tfrac{1}{2} \cdot 6 = 6 + 3 = 9$$



Δ Umskriving við $\Delta_1 = max_1 - min_1$ og $\Delta_2 = max_2 - min_2$:

$$x_1 = (1 - u_1) min_1 + u_1 max_1 = min_1 + u_1 \cdot (max_1 - min_1) = min_1 + u_1 \Delta_1$$

$$x_2 = (1 - u_2) min_2 + u_2 max_2 = min_2 + u_2 \Delta_2$$

Støddin á Δ_i vísir um skapið verður deformerað.

$\Delta > 1$ stretch
$0 < \Delta < 1$ shrink
$max < min$ reversal

$\frac{\Delta_1}{\Delta_2}$ svarar til aspect ratio.

3D Legg til merkis, at um vit eru í rúminum, so skal x_3 eisini finnast.

$$x_3 = (1 - u_3)\, \min_3 + u_3 \max_3 = \min_3 + u_3 \Delta_3 .$$

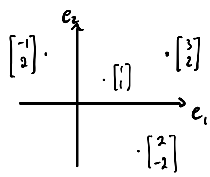
Outside the box Vit hava avmarkað u_i, $i \in \mathbb{N}$, so at $0 \le u_i \le 1$. Men avmyndanin, ella transformationin av input $(u_1, \dots, u_n)$, er ikki avmarkað og sendir punkt uttanfyri lokalu boksina út um target box!

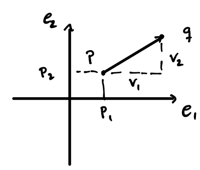
Objects of interest Vit fara at halda fast í at arbeiða í 2D. Fyrst og fremst eru vit áhugaði í punkt og vektorar.

Vit loyva okkum at skriva punkt $p \in \mathbb{E}^2$ og vektorar $v \in \mathbb{R}^2$ á koordinatform

$$p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \qquad \text{(boldface í bókini)}$$

Koordinatini eru eksplicit givin í eindum eftir e_1 og e_2.





Fara vit úr eitt punkt í annað, so kunnu vit leggja ein vector afturat

$$q = p + v \iff v = q - p$$

Hetta definerar fyri sevitt vektorar. Legg til merkis, at vit rokna koordinatvíst.

Dømi

$$p = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{so er} \quad q = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2 \\ 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

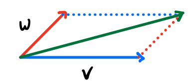
Vektorar geva rætning og longd, ella broyting, meðan punkt geva stað. Vektorar hava altso onga staðseting (kenna kanska staðvektorar).

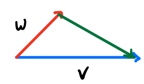
Nulvektor Vit definera $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ at vera nulvektor. Hesin hevur hvørki longd ella rætning.

Standard basis Vektorarnir $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ eru standard basis vektorar hjá $\mathbb{R}^2$.

Standard operatiónir

1. Munur millum punkt svarar til ein vektor: $v = q - p$.
2. Vektor addition og subtraktión gevur ein vektor, ið fylgir parallelogram regluni.

$v+w$: 

$v-w$ 

3. Multiplikatión við einum skalari $s \in \mathbb{R}$ er ein skalering av vektorinum.
4. Punkt og vektor gevur punkt: $q = p + v$.

Reglur kunnu víðkast, og vit fara at leggja meiri afturat. Legg til merkis, at onkrar operatiónir ikki eru meiningsfullar, og tí verða tær ikki nýttar.

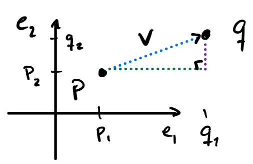
Vektorfelt

Serliga differentiallíkningar framleiða vektorfelt. Vektorar umboða sum so alt reint abstrakt, serliga rætningur og ferð ofta brúkt. Annars kemur accelerátión eisini inn í myndina, um vit tosa um kreftir. Vektorar kunnu gera eina livandi mynd av rørslu. Evt. dømi á tøldu.

Tað skal ikki tulkast sum, at vektorar bert eru fysiskir. Hvørt einasta array til arbeiða við er ein vektorur. Lineer algebra er amboðið til at arbeiða við vektorar.

Longd á v

Vit kunnu skriva vektorar sum $v = q - p$, altso er longdin givin sum frástøða millum tvey punkt. Minnast vit Pythagorasar setning, so roknast hetta



$$\|v\|^2 = (q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 = v_1^2 + v_2^2$$

$$\Rightarrow \|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

Talan er um Euclidiska normin. Um vit skalera við k, so er

$$\|k \cdot v\| = |k|\,\|v\|.$$

Normalisering

Ein normaliseraður vektorur w hevur eindarlongd, so $\|w\| = 1$. So um vit normalisera v, so rokna vit

$$w = \frac{v}{\|v\|}$$

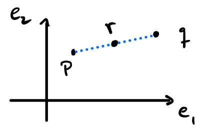
Dømi

Lat $v = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$. Vit hava $\|v\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$.
Normalisera vit, so fáa vit

$$w = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{bmatrix}, \quad \|w\| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = 1.$$

Combining points

Vit kunnu brúka vektorar til at útvega nýggj punkt úr p og q.



Her er r hálva leið millum p og q, so við $v = q - p$, so er $r = p + \frac{1}{2}v$.

Um $t \in [0,1]$, so eru øll punkt úr p til q givin við

$$r = p + t v.$$

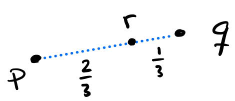
Her kallast t ein parametur.

Vit kunnu eisini velja at umskriva ut frá p og q, so at

$$r = p + tv = p + t(q-p) = p - tp + tq = (1-t)p + tq.$$

Tølini $1-t$ og t eru nú koefficientar, ið avgera lutfallsliga, hvussu nær r er við p og q.
Hetta síðsta er barycentrisk combinatión og $1-t$ og t eru barycentrisk koordinat hjá r.

Dømi



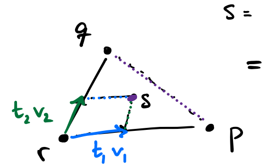
$t = \frac{2}{3}$ so $r = (1-\frac{2}{3})p + \frac{2}{3}q = \frac{1}{3}p + \frac{2}{3}q$

Lutfallið, sum r hevur í mun til p og q, kann skrivast

$$\text{ratio} = \frac{\|r-p\|}{\|q-r\|},$$

men vit kunnu eisini beinleiðis avgera $t = \dfrac{\|r-p\|}{\|q-p\|}$.

Víðka vit barycentriska kombinatiónir til 3 punkt, so gerst hetta beinleiðis við einum parametri afturat.



$$s = r + t_1(p-r) + t_2(q-r)$$
$$= t_1 p + t_2 p + \underbrace{(1-t_1-t_2)}_{t_3} r$$

t_1, t_2, t_3 eru barycentrisku koordinatini.

Points to vector

Trý punkt kunnu gera ein vektor: $v = r - p$ og $w = q - p$, so er $v + w = u$ ein vektorur.