Status Vit hava nú verið gjøgnum teoretiska grundarlagið fyri rekkjur. Vit hava verið gjøgnum

- rekkjur við positivar liðir $\sum a_n$, $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
- alternerandi rekkjur $\sum (-1)^n a_n$
- kvotientrekkjur $\sum x^n$, $|x| < 1$
- potensrekkjur $\sum c_n x^n$, $|x| < \rho$
- generellar rekkjur av funktiónum $\sum f_n(x)$

Ymiskir teknikkir vóru til at meta um konvergens, men vit sóu, at sterkari konvergens eginleiki skal til fyri generellar funktiónsrekkjur fyri at fáa kontinuerta sumfunktión burturúr. Tað er altso uniformur konvergensur.

Fourierrekkjur Vit arbeiða víðari við funktiónsrekkjur, har $f_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$.
Fyri fyrst lat okkum minnast til, at ein funktión $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ hevur eina periodu T, um

$$f(x+T) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Vit halda okkum til perioduna $T = 2\pi$. Til aðrar periodur kunnu tit lesa appendiks C. Funktiónirnar vit hyggja at liggja í vektorrúminum

$$L^2(-\pi,\pi) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx < \infty \right\}.$$

Def. 6.1 Til eina 2π-periodiska funktión $f \in L^2(-\pi,\pi)$ knýta vit rekkjuframsetanina

$$f \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right),$$

har koefficientarnir a_n og b_n definerast

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) \, dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Rekkjan verður kallað Fourierrekkjan hjá f og a_n, b_n eru Fourierkoefficientarnir.

Avsnitssummurin skrivast

$$S_N(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right)$$

Vit fara at viðgera symbolið $\sim$ og nær tað kann skrivast at vera $=$.

Lemma 6.2 Lat $f \in L^2(-\pi,\pi)$, so galda

(i) Um f er 2π-periodisk

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_a^{a+2\pi} f(x)\,dx, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

(ii) Um f er líka, tvs. $f(x) = f(-x)$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

(iii) Um f er ólíka, tvs. $f(x) = -f(-x)$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0, \quad \forall a > 0.$$

Hesar vurderingar kunnu hjálpa okkum at rokna Fourierkoefficientarnar.

Setn. 6.3 (i) Um f er líka, so er $b_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, og

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \quad n = 0,1,2,\dots$$

(ii) Um f er ólíka, so er $a_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}_0$, og

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx, \quad n = 1,2,\dots$$

Pf. Set fyri, at f er líka, so er

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \overset{R3}{=} 0, \quad \text{tí } \sin(nx) \text{ er ólíka.}$$

Vit fáa, at

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \overset{R2}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx.$$ ◻

Korollar 6.4 (i) Fourierrekkjan fyri líka funktiónir: $f \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx)$.

(ii) Fourierrekkjan fyri ólíka funktiónir: $f \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$.

Legg til merkis, at hóast vit definera 2π-periodiskar funktiónir á intervallir, sum er 2π til longdar, so er undirskilt, at hesar endurtakast á øllum $\mathbb{R}$.

Dømi 6.5 Lat

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in\,]-\pi, 0[, \\ 1, & x \in\,]0, \pi[, \\ 0, & x = 0, \pi. \end{cases}$$

Funktiónin víðkast til eina 2π-periodiska funktión á $\mathbb{R}$. Legg til merkis, at $f(-x) = -f(x)$, so talan er um eina ólíka funktión.

Við setning 6.3(ii) eru $a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$. Vit fáa

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\sin(nx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin(nx)\,dx$$

$$\overset{6.3(ii)}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_0^{\pi} = \frac{-2}{n\pi}\left(\cos(n\pi)-1\right)$$

$$= \begin{cases} 0, & n \text{ líka,} \\ \frac{4}{n\pi}, & n \text{ ólíka.} \end{cases}$$

So vit fáa

$$f \sim \sum_{n \text{ ólíka}} \frac{4}{n\pi}\sin(nx) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k-1)\pi}\sin\left((2k-1)x\right).$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \cdots\right).$$

Sí figur 6.6, har $S_N(x)$ og $f(x)$ eru teknaði. (Gibbs fænomen 9%)

Stykkivís diff. def. 6.10 Ein funktión er stykkivís differentiabul, um har eru endaligt nógv deilipunkt $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$-\pi = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = \pi$$

og diff. funktiónir $f_i : [x_i, x_{i+1}] \to \mathbb{C}$, so at f_i' er kontinuert og

$$f(x) = f_i(x), \quad x \in\,]x_i, x_{i+1}[.$$

Hetta er nokkso intuitivt, at f er samansett av funktiónum, sum eru differentiablar. Vit sóu, at hetta er so í dømi 6.5.

Grensur Vit definera høgru og vinstru grensu ávikavíst

$$f(x^+) = \lim_{y\to x^+} f(y) \quad \text{og} \quad f(x^-) = \lim_{y\to x^-} f(y).$$

Fyri $x \in \mathbb{R}$, har f er kontinuert er $f(x^+) = f(x^-)$.

Setn. 6.12 Set fyri, at f er 2π-periodisk og stykkivís differentiabul. So konvergerar Fourierrekkjan hjá f punktvíst fyri øll $x \in \mathbb{R}$. Summurin er

(i) Har f er kontinuert er

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right)$$

(ii) Har f er diskontinuert er rekkjan

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

Korollar 6.13 Set fyri, at f er 2π-periodisk, stykkivíst differentiabul og kontinuert. So er

(i) Fyri $x \in \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$.

(ii) Fourierrekkjan konvergerar uniformt ímóti f, og

$$|f(x) - S_N(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 \, dt} .$$

Dømi 6.5 (14) Vit høvdu $\quad f \sim \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin((2n-1)x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

Vit kanna $x = 0$ og π. Her er $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = 0$, so 6.12(i) og (ii) geva, at

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin((2n-1)x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dømi 6.15 Fyri $x = \frac{\pi}{2}$ er $\sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{n-1}$. Vit hava $f(\frac{\pi}{2}) = 1$, so

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin((2n-1)\tfrac{\pi}{2}) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

$$\iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4} .$$

Vurdering Vit hava $\quad |f(x) - S_N(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 \, dt} .$

Korollar 6.16

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 \, dt} \leq \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 \, dt} \leq \sqrt{N}$$

$$\iff \frac{\int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 \, dt}{\varepsilon^2 \pi} \leq N.$$

Setn. 6.17 Set fyri, at f er 2π-periodisk, stykkivíst differentiabul og kontinuert. So er fyri $N \in \mathbb{N}$

$$|f(x) - S_N(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) , \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Pf. Vit seta beint inn og rokna.

$$|f(x) - S_N(x)| = \Big| \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$
$$- \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=0}^{N} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \Big|$$

$$= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right|$$

$$\overset{(\Delta)}{\leq} \sum_{n=N+1}^{\infty} | a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)|$$

$$\overset{(\Delta)}{\leq} \sum_{n=N+1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|). \qquad \square$$

Legg til merkis, at 6.16 hevur ikki tørv á a_n og b_n, medan 6.17 bert hevur tørv á Fourier koefficientarnar.
Generelt gevur 6.17 nógv minni virði fyri N, so hetta kann tykjast løttari:

Dømi: 6.18 $\quad f(x) = x^2$, $[-\pi, \pi[$. $\quad |f(x) - S_N(x)| \leq 0{,}1 = \varepsilon$.

Ein lika funktión, so $b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx)\, dx$$

$$= \frac{n^2 x^2 \sin(nx) - 2\sin(nx) + 2nx\cos(nx)}{n^3}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2\, dx = \frac{2\pi^2}{3}.$$

$$f(x) \overset{(6.13)}{=} \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} \cos(nx), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Við 6.16 skal N vera:

$$N \geq \frac{\int_{-\pi}^{\pi} (2t)^2\, dt}{\pi \cdot 0{,}1^2} = \frac{8\pi^3}{3\pi \cdot 0{,}1^2} = \frac{800\pi^2}{3} \approx 2632.$$

Við 6.17

$$| f(x) - S_N(x)| \leq 4 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{4}{N}$$

$$\frac{4}{N} \leq 0{,}1 \iff N \geq 40.$$