Sensitivitätsanalyse / Sensitivitäts-DGL

Unter Sensitivitätsanalyse wird hier die Untersuchung der Abhängigkeit der Lösung einer Anfangswertaufgabe von Parametern verstanden.

Gegeben ist die Anfangswertaufgabe

$$\underline{\dot{x}}(t,\underline{p}) = \underline{f}(\underline{x}(t,\underline{p}),t,\underline{p}), \quad t>0, \quad \underline{x}(0,\underline{p}) = x_0(p)$$

mit dem Parametervektor $\underline{p} \in \mathbb{R}^{n_p}$. Die Notation $\underline{x}(t,\underline{p})$ beschreibt die Abhängigkeit der Lösung vom Parametervektor $\underline{p}$.

Unter gewissen – hier als erfüllt betrachteten – Voraussetzungen hängt die Lösung $\underline{x}(t,\underline{p})$ stetig differenzierbar vom Parametervektor $\underline{p}$ ab.

Die Ableitungen der Zustandsgrößen nach dem Parametervektor $s_{i,j}(t) = \frac{\partial x_i(t,\underline{p})}{\partial p_j}$ werden als Sensitivitäten bezeichnet und in der Sensitivitätsmatrix $\underline{S}(t) = \left[s_{i,j}(t)\right]$ mit $n = \dim(\underline{x})$ Zeilen und $n_p = \dim(\underline{p})$ Spalten zusammengefasst. Sie können als Lösung einer Matrix-Differentialgleichung, der **Sensitivitäts-Differentialgleichung**, bestimmt werden, die sich durch eine totale Differentiation der Anfangswertaufgabe nach $\underline{p}$ ergibt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \underline{x}(0,\underline{p})}{\partial \underline{p}} &= \frac{\partial \underline{x}_0(\underline{p})}{\partial \underline{p}} \\
\frac{\partial}{\partial \underline{p}}\left(\frac{d}{dt}\underline{x}(t,\underline{p})\right) &= \frac{\partial \underline{f}(\underline{x}(t,\underline{p}),t,\underline{p})}{\partial \underline{x}} \cdot \frac{\partial \underline{x}(t,\underline{p})}{\partial \underline{p}} + \frac{\partial \underline{f}(\underline{x}(t,\underline{p}),t,\underline{p})}{\partial \underline{p}}
\end{aligned}$$

Vertauschung der Reihenfolge der Differentiation auf der linken Seite liefert

$$\underline{\dot{S}}(t) = \frac{\partial \underline{f}(\underline{x}(t,\underline{p}),t,\underline{p})}{\partial \underline{x}} \cdot \underline{S}(t) + \frac{\partial \underline{f}(\underline{x}(t,\underline{p}),t,\underline{p})}{\partial \underline{p}}, \quad t>0$$

mit der Anfangsbedingung

$$\underline{S}(0) = \frac{\partial \underline{x}_0(\underline{p})}{\partial \underline{p}}\,.$$

Beispiel

Es soll die Abhängigkeit der Lösung der van der Pol-Differentialgleichung

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ p_3 \cdot (1 - x_1^2(t)) \cdot x_2(t) - x_1(t) \end{bmatrix}, \quad t>0, \quad \underline{x}(0) = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

vom Parametervektor $\underline{p} = \left[p_1\ p_2\ p_3\right]^T$ untersucht werden.

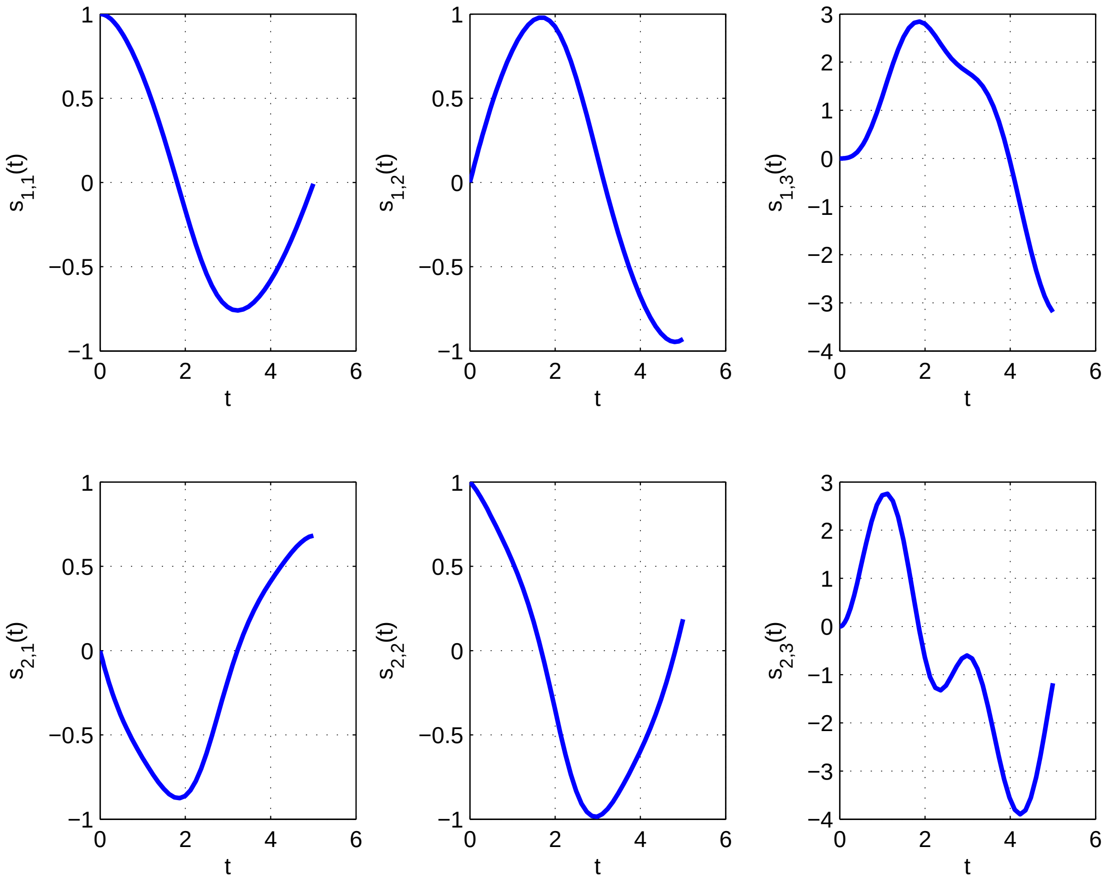

Abbildung 1: Sensitivitäten der van der Pol-Differentialgleichung ($p_1 = 2.5$, $p_2 = 0$, $p_3 = 0.05$).

Die Sensitivitätsmatrix ist eine $(2,3)$-Matrix, die durch Lösung der Sensitivitäts-Differentialgleichung bestimmt werden kann:

$$\dot{\underline{S}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2p_3 x_1(t) x_2(t) - 1 & p_3(1 - x_1^2(t)) \end{bmatrix} \cdot \underline{S}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - x_1^2(t)) x_2(t) \end{bmatrix}$$

Anfangsbedingung:

$$\underline{S}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Die Sensitivitäten sind in Abbildung 1 dargestellt.