

1 Opgave 2.2

Opgaven går ud på at finde systemfunktionen $H(z)$ og opskriv differensligningen herudfra.

Der tages udgangspunkt i et standard andenordens filter i z -domænet med konjugeret kompleks polpar:

$$H(z) = \frac{(z - z_0)(z - \bar{z}_0)}{(z - p_0)(z - \bar{p}_0)} \quad (1.1)$$

Parenteserne udvides ved at gange ind i dem:

$$H(z) = \frac{z^2 - z \cdot \bar{z}_0 - z_0 \cdot z + z_0 \cdot \bar{z}_0}{z^2 - z \cdot \bar{p}_0 - p_0 \cdot z + p_0 \cdot \bar{p}_0} \quad (1.2)$$

Udtrykkene med $z_0 \cdot \bar{z}_0$ og $p_0 \cdot \bar{p}_0$ kan omskrives, da de er kompleks konjugeret, og den distributive regel anvendes:

$$H(z) = \frac{z^2 - z \cdot (z_0 + \bar{z}_0) + |z_0|^2}{z^2 - z \cdot (p_0 + \bar{p}_0) + |p_0|^2} \quad (1.3)$$

Ganger z^{-2} på tæller og nævner:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1} \cdot (z_0 + \bar{z}_0) + z^{-2} \cdot |z_0|^2}{1 - z^{-1} \cdot (p_0 + \bar{p}_0) + z^{-2} \cdot |p_0|^2} \quad (1.4)$$

Omskrives til forhold mellem $Y(z)$ og $X(z)$:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = G \cdot \frac{1 - z^{-1} \cdot (z_0 + \bar{z}_0) + z^{-2} \cdot |z_0|^2}{1 - z^{-1} \cdot (p_0 + \bar{p}_0) + z^{-2} \cdot |p_0|^2} \quad (1.5)$$

Ganger $X(z)$ på begge sider:

$$Y(z) = X(z) \cdot \frac{1 - z^{-1} \cdot (z_0 + \bar{z}_0) + z^{-2} \cdot |z_0|^2}{1 - z^{-1} \cdot (p_0 + \bar{p}_0) + z^{-2} \cdot |p_0|^2} \quad (1.6)$$

Ganger nævneren på begge sider og udvider venstresiden:

$$\begin{aligned} Y(z) - Y(z) \cdot z^{-1} \cdot (p_0 + \bar{p}_0) + Y(z) \cdot z^{-2} \cdot |p_0|^2 \\ = X(z) \cdot (1 - z^{-1} \cdot (z_0 + \bar{z}_0) + z^{-2} \cdot |z_0|^2) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Flytter de fleste led fra venstresiden. over på højresiden:

$$\begin{aligned} Y(z) = X(z) \cdot (1 - z^{-1} \cdot (z_0 + \bar{z}_0) + z^{-2} \cdot |z_0|^2) \\ + Y(z) \cdot z^{-1} \cdot (p_0 + \bar{p}_0) - Y(z) \cdot z^{-2} \cdot |p_0|^2 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Udvider X leddet:

$$\begin{aligned} Y(z) = X(z) - X(z) \cdot z^{-1} \cdot (z_0 + \bar{z}_0) + X(z) \cdot z^{-2} \cdot |z_0|^2 \\ + Y(z) \cdot z^{-1} \cdot (p_0 + \bar{p}_0) - Y(z) \cdot z^{-2} \cdot |p_0|^2 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Transformerer til diskrete tidsdomæne (differensligning):¹

$$\begin{aligned} y(n) = x(n) - x(n-1) \cdot (z_0 + \bar{z}_0) \\ + x(n-2) \cdot |z_0|^2 + y(n-1) \cdot (p_0 + \bar{p}_0) - y(n-2) \cdot |p_0|^2 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Bruger komplekse regneregler til at simplificere $(z_0 + \bar{z}_0)$ og $(p_0 + \bar{p}_0)$:

$$\begin{aligned} y(n) = x(n) - x(n-1) \cdot (2 \cdot \text{Re}(z_0)) + x(n-2) \cdot |z_0|^2 \\ + y(n-1) \cdot (2 \cdot \text{Re}(p_0)) - y(n-2) \cdot |p_0|^2 \end{aligned} \quad (1.11)$$

Nu kan filterkoefficienter identificeres:

$$\begin{aligned} z_0 &= \exp(0.1028 \cdot 1j) = \cos(0.1028) + j \cdot \sin(0.1028) \\ p_0 &= 0.99 \cdot \exp(0.1028 \cdot 1j) = 0.99 \cdot \cos(0.1028) + 0.99j \cdot \sin(0.1028) \\ b_0 &= 1 \\ b_1 &= -2 \cdot \text{Re}(z_0) = -2 \cdot \cos(0.1028) = -1.9894 \\ b_2 &= |z_0|^2 = |(\cos(0.1028) + j \cdot \sin(0.1028))^2| = 1 \\ a_0 &= 1 \\ a_1 &= (-1) \cdot 2 \cdot \text{Re}(p_0) = -2 \cdot 0.99 \cdot \cos(0.1028) = -1.9695 \\ a_2 &= (-1) \cdot -|p_0|^2 = |(0.99 \cdot \exp(0.1028 \cdot 1j))^2| = 0.9801 \end{aligned} \quad (1.12)$$

Bemærk: at der ved a_1 og a_2 ganges -1 på. Dette skyldes at vi aflæser vores filterkoefficienter gennem differensligningen, mens de er på højresiden, men de skal aflæses fra venstresiden for at det passer.

Hvis ikke vi havde (-1) foran, ville a_0 blive aflæst fra venstresiden og a_1 og a_2 fra højresiden, så nogle af vores koefficienter ville have omvendt fortegn.

¹Sætter $X(z)$ og $Y(z) = x(n)$ og $y(n)$, samt z^{-1} svarer til en forsinkelse på 1 sample.