1 Opgave 2.2

Opgaven går ud på at finde systemfunktionen H(z) og opskriv differensligningen herudfra.

Der tages udgangspunkt i et standard andenordens filter i z-domænet med konjugeret kompleks polpar:

$$H(z) = \frac{(z - z_0)(z - \bar{z_0})}{(z - p_0)(z - \bar{p_0})} \tag{1.1}$$

Parenteserne udvides ved at gange ind i dem:

$$H(z) = \frac{z^2 - z \cdot \bar{z_0} - z_0 \cdot z + z_0 \cdot \bar{z_0}}{z^2 - z \cdot \bar{p_0} - p_0 \cdot z + p_0 \cdot \bar{p_0}} \tag{1.2}$$

Udtrykkene med $z_0 \cdot \bar{z_0}$ og $p_0 \cdot \bar{p_0}$ kan omskrives, da de er kompleks konjugeret, og den distributive regel anvendes:

$$H(z) = \frac{z^2 - z \cdot (z_0 + \bar{z_0}) + |{z_0}^2|}{z^2 - z \cdot (p_0 + \bar{p_0}) + |{p_0}^2|} \tag{1.3}$$

Ganger z^{-2} på tæller og nævner:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1} \cdot (z_0 + \bar{z_0}) + z^{-2} \cdot |{z_0}^2|}{1 - z^{-1} \cdot (p_0 + \bar{p_0}) + z^{-2} \cdot |{p_0}^2|} \tag{1.4}$$

Omskrives til forhold mellem $Y(z)$ og $X(z)$:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = G \cdot \frac{1 - z^{-1} \cdot (z_0 + \bar{z_0}) + z^{-2} \cdot |{z_0}^2|}{1 - z^{-1} \cdot (p_0 + \bar{p_0}) + z^{-2} \cdot |{p_0}^2|} \tag{1.5}$$

Ganger X(z) på begge sider:

$$Y(z) = X(z) \cdot \frac{1 - z^{-1} \cdot (z_0 + \bar{z_0}) + z^{-2} \cdot |{z_0}^2|}{1 - z^{-1} \cdot (p_0 + \bar{p_0}) + z^{-2} \cdot |{p_0}^2|} \tag{1.6}$$

Ganger nævneren på begge sider og udvider venstresiden:

$$\begin{aligned} Y(z) - Y(z) \cdot z^{-1} \cdot (p_0 + \bar{p_0}) + Y(z) \cdot z^{-2} \cdot |{p_0}^2| \\ = X(z) \cdot (1 - z^{-1} \cdot (z_0 + \bar{z_0}) + z^{-2} \cdot |{z_0}^2|) \end{aligned} \tag{1.7}$$

Flytter de fleste led fra venstresiden. over på højresiden:

$$\begin{aligned} Y(z) = X(z) \cdot (1 - z^{-1} \cdot (z_0 + \bar{z_0}) + z^{-2} \cdot |{z_0}^2|) \\ +Y(z) \cdot z^{-1} \cdot (p_0 + \bar{p_0}) - Y(z) \cdot z^{-2} \cdot |{p_0}^2| \end{aligned} \tag{1.8}$$

Udvider X leddet:

$$\begin{aligned} Y(z) = X(z) - X(z) \cdot z^{-1} \cdot (z_0 + \bar{z_0}) + X(z) \cdot z^{-2} \cdot |{z_0}^2| \\ +Y(z) \cdot z^{-1} \cdot (p_0 + \bar{p_0}) - Y(z) \cdot z^{-2} \cdot |{p_0}^2| \end{aligned} \tag{1.9}$$

Transformerer til diskrete tidsdomæne (differensligning):[1]

$$\begin{aligned} y(n) = x(n) - x(n-1) \cdot (z_0 + \bar{z_0}) \\ +x(n-2) \cdot |{z_0}^2| + y(n-1) \cdot (p_0 + \bar{p_0}) - y(n-2) \cdot |{p_0}^2| \end{aligned} \tag{1.10}$$

Bruger komplekse regneregler til at simplificere $(z_0 + \bar{z_0})$ og $(p_0 + \bar{p_0})$:

$$\begin{aligned} y(n) = x(n) - x(n-1) \cdot (2 \cdot \mathrm{Re}(z_0)) + x(n-2) \cdot |{z_0}^2| \\ +y(n-1) \cdot (2 \cdot \mathrm{Re}(p_0)) - y(n-2) \cdot |{p_0}^2| \end{aligned} \tag{1.11}$$

Nu kan filterkoefficienter identificeres:

$$\begin{aligned} z_0 = \exp(0.1028 \cdot 1j) = \cos(0.1028) + j \cdot \sin(0.1028) = 0.9947 \pm 0.1026j \\ p_0 = 0.99 \cdot \exp(0.1028 \cdot 1j) = 0.99 \cdot \cos(0.1028) + 0.99j \cdot \sin(0.1028) = 0.9848 \pm 0.1016j \\ b_0 = 1 \\ b_1 = -2 \cdot \mathrm{Re}(z_0) = -2 \cdot \cos(0.1028) = -1.9894 \\ b_2 = |{z_0}^2| = |(\cos(0.1028) + j \cdot \sin(0.1028))^2| = 1 \\ a_0 = 1 \\ a_1 = (-1) \cdot 2 \cdot \mathrm{Re}(p_0) = -2 \cdot 0.99 \cdot \cos(0.1028) = -1.9695 \\ a_2 = (-1) \cdot -|{p_0}^2| = |(0.99 \cdot \exp(0.1028 \cdot 1j)^2)| = 0.9801 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Bemærk: at der ved a_1 og a_2 ganges -1 på. Dette skyldes at vi aflæser vores filterkoefficienter gennem differensligningen, mens de er på højresiden, men de skal aflæses fra venstresiden for at det passer.
Hvis ikke vi havde (-1) foran, ville a_0 blive aflæst fra venstresiden og a_1 og a_2 fra højresiden, så nogle af vores koefficienter ville have omvendt fortegn.

[1] Sætter X(z) og Y(z) = x(n) og y(n), samt z^{-1} svarer til en forsinkelse på 1 sample.