Übung 8

Aufgabe 14

Die Entropie einer Quelle sei gegeben als:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{M} p(x_i) \cdot \log_2(p(x_i))$$

Die mittlere Codewortlänge l_C in Abhängingkeit zu den einzelnen Codewortlängen l_i sein:

$$l_C = \sum_{i=1}^{M} l_i \cdot p(x_i)$$

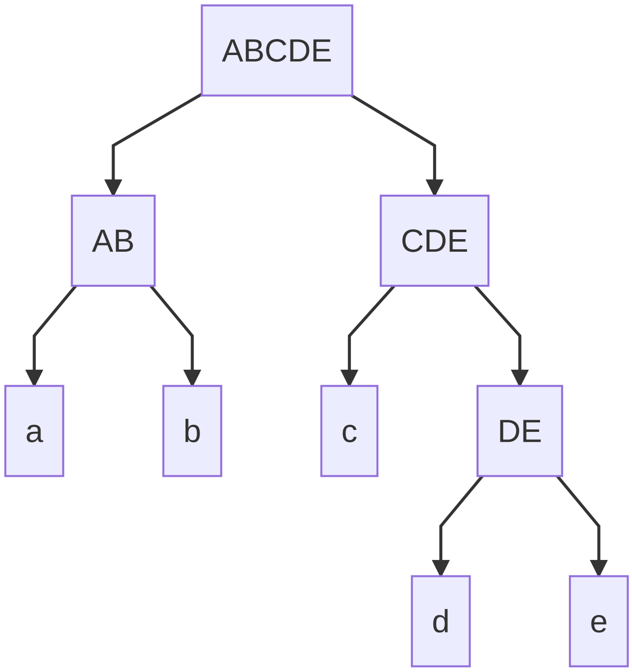
Schließlich sei die Redundanz RC einer Codierung gegeben als:

$$RC(X) = l_C - H(X)$$

Sei unserer Alphabet $\{a, b, c, d, e\}$ und unsere Zeichenfolge $aaaaabbccddee$ mit den Auftrittswahrscheinlichkeiten $\{\frac{5}{13}, \frac{2}{13}, \frac{2}{13}, \frac{2}{13}, \frac{2}{13}\}$

Fanocodierung

1. $\{\frac{5}{13}, \frac{2}{13}, \frac{2}{13}, \frac{2}{13}, \frac{2}{13}\}$
2. $\{\frac{5}{13}, \frac{2}{13}\}, \{\frac{2}{13}, \frac{2}{13}, \frac{2}{13}\}$
3. $\{\frac{5}{13}\}, \{\frac{2}{13}\}, \{\frac{2}{13}, \frac{2}{13}\}, \{\frac{2}{13}\}$
4. $\{\frac{5}{13}\}, \{\frac{2}{13}\}, \{\frac{2}{13}\}, \{\frac{2}{13}\}, \{\frac{2}{13}\}$

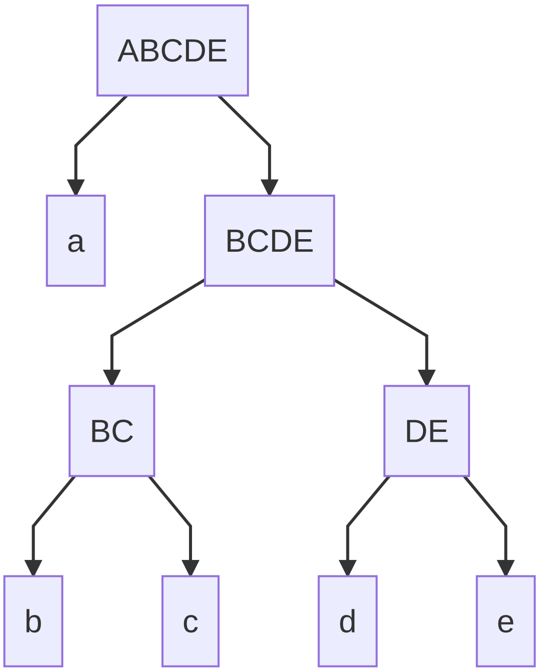


Wort	Code	l_i
a	00	2
b	01	2
c	10	2
d	110	3
e	111	3

Die Fanocodierung ergibt hier eine Redundanz von $RC \approx 0.1156864[bit]$.

Huffmancodierung

1. $\{\frac{5}{13}\}, \{\frac{2}{13}\}, \{\frac{2}{13}\}, \{\frac{2}{13}\}, \{\frac{2}{13}\}$
2. $\{\frac{5}{13}\}, \{\frac{2}{13}\}, \{\frac{2}{13}\}, \{\frac{2}{13}, \frac{2}{13}\}$
3. $\{\frac{5}{13}\}, \{\frac{2}{13}, \frac{2}{13}\}, \{\frac{2}{13}, \frac{2}{13}\}$
4. $\{\frac{5}{13}\}, \{\frac{2}{13}, \frac{2}{13}, \frac{2}{13}, \frac{2}{13}\}$
5. $\{\frac{5}{13}, \frac{2}{13}, \frac{2}{13}, \frac{2}{13}, \frac{2}{13}\}$



Wort	Code	l_i
a	0	1
b	100	3
c	101	3
d	110	3
e	111	3

Die Huffmancodierung ergibt hier eine Redundanz von $RC \approx 0.03876339[bit]$ und ist somit redundanzarmer als die Fanocodierung.

Aufgabe 15

LZW

1	I
2	M
3	S
4	W
5	$\_$

$$\underbrace{\overbrace{S\ W}}ISS\_MISS$$

`yield` $S = 2$

`add` $SW = 6$

1	I
2	M
3	S
4	W
5	$\_$
6	SW

$$S\underbrace{\overbrace{\ W\ }}ISS\_MISS$$

`yield` $W = 4$

`add` $WI = 7$

1	I
2	M
3	S
4	W
5	$\_$
6	SW
7	WI

$$SW\underbrace{\overbrace{I}S}S\_MISS$$

`yield` $I = 1$

`add` $IS = 8$

1	I
2	M
3	S
4	W
5	$\_$
6	SW
7	WI
8	IS

$$SWI\underbrace{\overbrace{S}S}\_MISS$$

`yield` $S = 3$

`add` $SS = 9$

1	I
2	M
3	S
4	W
5	$\_$
6	SW
7	WI
8	IS
9	SS

$$SWIS\underbrace{\overbrace{S}\_}MISS$$

`yield` $S = 3$

`add` §$S\_ = 10$

1	I
2	M
3	S
4	W
5	$\_$
6	SW
7	WI
8	IS
9	SS
10	$S\_$

$$SWISS\underbrace{\overbrace{\_}M}ISS$$

`yield` $\_ = 5$

`add` $\_M = 11$

1	I
2	M
3	S
4	W
5	$\_$
6	SW
7	WI
8	IS
9	SS
10	$S\_$
11	$\_M$

$$SWISS\_\overbrace{\underbrace{M}}ISS$$

`yield` $M = 2$

`add` $MI = 12$

1	I
2	M
3	S
4	W
5	$\_$
6	SW
7	WI
8	IS
9	SS
10	$S\_$
11	$\_M$

$$SWISS\_M\underbrace{\overbrace{IS}S}$$

`yield` $IS = 8$

`add` $ISS = 12$

1	I
2	M
3	S
4	W
5	$\_$
6	SW
7	WI
8	IS
9	SS
10	$S\_$
11	$\_M$
12	ISS

$$SWISS\_MIS\overbrace{\ S}$$

`yield` $S = 3$

Dann sei $m = 2\text{-}4\text{-}1\text{-}3\text{-}3\text{-}5\text{-}2\text{-}8\text{-}3$ die Nachricht mit Länge $m_{len} = 9$ sowie $l_C = \lceil \mathrm{ld}(C_{len}) \rceil = 4$ die Codewortlänge zum Codebuch C mit Codebuchlänge C_{len}, so ist die für die Nachricht benötigte Anzahl an bits $l_C \cdot m_{len} = 36[bit]$

Arithmetische Codierung

Für die Nachricht $SWISS\_MISS$ wird das Alphabet $\Sigma = \{I, M, S, W, \_\}$ mit Auftrittswahrscheinlichkeiten $\{P_I = 0.2, P_M = 0.1, P_S = 0.5, P_W = 0.1, P\_ = 0.1\}$

Die Codewortlänge ist $\lceil -\mathrm{ld}(P(SWISS\_MISS)) \rceil = 20[bit]$

Damit sind die Elementaren Intervalle:

Σ	$I(\Sigma)$	P_Σ
I	$[0, 0.2)$	0.2
M	$[0.2, 0.3)$	0.1
S	$[0.3, 0.8)$	0.5
W	$[0.8, 0.9)$	0.1
$\_$	$[0.9, 1)$	0.1

Σ^*	$I(\Sigma^*)$	$Width$
SI	$[0.3, 0.3 + 0.5 \cdot 0.2 = 0.4)$	0.1
SM	$[0.4, 0.4 + 0.5 \cdot 0.1 = 0.45)$	0.05
SS	$[0.45, 0.45 + 0.5 \cdot 0.5 = 0.7)$	0.25
SW	$[0.7, 0.7 + 0.5 \cdot 0.1 = 0.75)$	0.05
$S\_$	$[0.75, 0.75 + 0.5 \cdot 0.1 = 0.8)$	0.05

Σ^*	$I(\Sigma^*)$	$Width$
SWI	$[0.7, 0.7 + 0.05 \cdot 0.2 = 0.71)$	0.01
SWM	$[0.71, 0.71 + 0.05 \cdot 0.1 = 0.715)$	0.005
SWS	$[0.715, 0.715 + 0.05 \cdot 0.5 = 0.74)$	0.025
SWW	$[0.74, 0.74 + 0.05 \cdot 0.1 = 0.745)$	0.005
$SW\_$	$[0.745, 0.745 + 0.05 \cdot 0.1 = 0.75)$	0.005

Σ^*	$I(\Sigma^*)$	$Width$
$SWII$	$[0.7, 0.7 + 0.01 \cdot 0.2 = 0.702)$	0.002
$SWIM$	$[0.702, 0.702 + 0.01 \cdot 0.1 = 0.703)$	0.001
$SWIS$	$[0.703, 0.703 + 0.01 \cdot 0.5 = 0.708)$	0.005
$SWIW$	$[0.708, 0.708 + 0.01 \cdot 0.1 = 0.709)$	0.001
$SWI\_$	$[0.709, 0.709 + 0.01 \cdot 0.1 = 0.71)$	0.001

Σ^*	$I(\Sigma^*)$	$Width$
$SWISI$	$[0.703, 0.703 + 0.005 \cdot 0.2 = 0.704)$	0.001
$SWISM$	$[0.704, 0.704 + 0.005 \cdot 0.1 = 0.704\_5)$	0.000_5
$SWISS$	$[0.704\_5, 0.704\_5 + 0.005 \cdot 0.5 = 0.707)$	0.002_5
$SWISW$	$[0.707, 0.707 + 0.005 \cdot 0.1 = 0.707\_5)$	0.000_5
$SWIS\_$	$[0.707\_5, 0.707\_5 + 0.005 \cdot 0.1 = 0.708)$	0.000_5

Σ^*	$I(\Sigma^*)$	$Width$
$SWISSI$	$[0.704\_5, 0.745\_3 + 0.002\_5 \cdot 0.2 = 0.705)$	0.000_5
$SWISSM$	$[0.705, 0.705 + 0.002\_5 \cdot 0.1 = 0.705\_25)$	0.000_25
$SWISSS$	$[0.705\_25, 0.705\_25 + 0.002\_5 \cdot 0.5 = 0.706\_5)$	0.001_25
$SWISSW$	$[0.706\_5, 0.706\_5 + 0.002\_5 \cdot 0.1 = 0.706\_75)$	0.000_25
$SWISS\_$	$[0.706\_75, 0.706\_75 + 0.002\_5 \cdot 0.1 = 0.707)$	0.000_25

Σ^*	$I(\Sigma^*)$	$Width$
$SWISSI\_$	$[0.70675, 0.70675 + 0.000\_25 \cdot 0.2 = 0.7068)$	0.000_05
$SWISS\_M$	$[0.706\_8, 0.706\_8 + 0.000\_25 \cdot 0.1 = 0.706\_825)$	0.000_025
$SWISS\_S$	$[0.706\_825, 0.706\_825 + 0.000\_25 \cdot 0.5 = 0.706\_95)$	0.000_125
$SWISS\_W$	$[0.706\_95, 0.706\_95 + 0.000\_25 \cdot 0.1 = 0.706\_975)$	0.000_025
$SWISS\_\_$	$[0.706\_975, 0.706\_975 + 0.000\_25 \cdot 0.1 = 0.707)$	0.000_025

Σ^*	$I(\Sigma^*)$	$Width$
$SWISS\_MI$	$[0.706\_8, 0.706\_8 + 0.000\_025 \cdot 0.2 = 0.706\_805)$	0.000_005
$SWISS\_MM$	$[0.706\_805, 0.706\_805 + 0.000\_025 \cdot 0.1 = 0.706\_807\_5)$	0.000_002_5
$SWISS\_MS$	$[0.706\_807\_5, 0.706\_807\_5 + 0.000\_025 \cdot 0.5 = 0.706\_82)$	0.000_012_5
$SWISS\_MW$	$[0.706\_82, 0.706\_82 + 0.000\_025 \cdot 0.1 = 0.706\_822\_5)$	0.000_002_5
$SWISS\_M\_$	$[0.706\_822\_5, 0.706\_822\_5 + 0.000\_025 \cdot 0.1 = 0.706\_825)$	0.000_002_5

Σ^*	$I(\Sigma^*)$	$Width$
$SWISS\_MII$	$[0.706\_8, 0.706\_8 + 0.000\_005 \cdot 0.2 = 0.706\_801)$	0.000_001
$SWISS\_MIM$	$[0.706\_801, 0.706\_801 + 0.000\_005 \cdot 0.1 = 0.706\_801\_5)$	0.000_000_5
$SWISS\_MIS$	$[0.706\_801\_5, 0.706\_801\_5 + 0.000\_005 \cdot 0.5 = 0.706\_804)$	0.000_002_5
$SWISS\_MIW$	$[0.706\_804, 0.706\_804 + 0.000\_005 \cdot 0.1 = 0.706\_804\_5)$	0.000_000_5
$SWISS\_MI\_$	$[0.706\_804\_5, 0.706\_804\_5 + 0.000\_005 \cdot 0.1 = 0.706\_805)$	0.000_000_5

Σ^*	$I(\Sigma^*)$	$Width$
$SWISS\_MISI$	$[0.706\_801\_5, 0.706\_801\_5 + 0.000\_002\_5 \cdot 0.2 = 0.706\_802)$	0.000_000_5
$SWISS\_MISM$	$[0.706\_802, 0.706\_802 + 0.000\_002\_5 \cdot 0.1 = 0.706\_802\_25)$	0.000_000_25
$SWISS\_MISS$	$[0.706\_802\_25, 0.706\_802\_25 + 0.000\_002\_5 \cdot 0.5 = 0.706\_803\_5)$	0.000_001_25
$SWISS\_MISW$	$[0.706\_803\_5, 0.706\_803\_5 + 0.000\_002\_5 \cdot 0.1 = 0.706\_803\_25)$	0.000_000_25
$SWISS\_MIS\_$	$[0.706\_803\_25, 0.706\_803\_25 + 0.000\_002\_5 \cdot 0.1 = 0.706\_804)$	0.000_000_25

Damit ist die codierte Nachricht $c = 10000110110011111010100001$. Wie bereits *(siehe oben)* vorher berechnet werden $20[bit]$ für die Übertragung benötigt.

Aufgabe 16

Gegeben sei ein Alphabet $\Sigma = \{X, Y, Z\}$ mit den Wahrscheinlichkeiten $\{P(X) = 0.7, P(Y) = 0.1, P(Z) = 0.2\}$ mit dem Codewort $c = 010111_{bin} = 0.34375_{dec}$ in Arithmetischercodierung.

Ferner sei $I : \Sigma^* \mapsto [x_i, x_j)$ für $x_i, x_j \in [0, 1)$ die Intervallfunktion

Die elementaren Intervalle sind damit:

Symbol	Interval	Width
X	$[0, 0.7)$	0.7
Y	$[0.7, 0.8)$	0.1
Z	$[0.8, 1)$	0.2

$c \in I(X)$

Symbol	Interval	Width
XX	$[0, 0 + 0.7 \cdot 0.7 = 0.49)$	0.49
XY	$[0.49, 0.49 + 0.1 \cdot 0.7 = 0.56)$	0.07
XZ	$[0.56, 0.56 + 0.2 \cdot 0.7 = 0.7)$	0.14

$c \in I(XX)$

Symbol	Interval	Width
XXX	$[0, 0 + 0.49 \cdot 0.7 = 0.343)$	0.343
XXY	$[0.343, 0.343 + 0.1 \cdot 0.49 = 0.392)$	0.049
XXZ	$[0.392, 0.392 + 0.2 \cdot 0.49 = 0.49)$	0.098

$c \in I(XXY)$

Symbol	Interval	Width
$XXYX$	$[0.343, 0.343 + 0.049 \cdot 0.7 = 0.3773)$	0.0343
$XXYY$	$[0.3773, 0.3773 + 0.1 \cdot 0.049 = 0.3822)$	0.049
$XXYZ$	$[0.3822, 0.3822 + 0.2 \cdot 0.049 = 0.392)$	0.098

$c \in I(XXYX)$

Symbol	Interval	Width
$XXYXX$	$[0.343, 0.343 + 0.0343 \cdot 0.7 = 0.36701)$	0.02401
$XXYXY$	$0.36701, 0.36701 + 0.1 \cdot 0.0343 = 0.37044)$	0.00343
$XXYXZ$	$[0.37044, 0.37044 + 0.2 \cdot 0.0343 = 0.3773)$	0.00686

$c \in I(XXYXX)$

Symbol	Interval	Width
$XXYXXX$	$[0.343, 0.343 + 0.02401 \cdot 0.7 = 0.359807)$	0.016807
$XXYXXY$	$0.359807, 0.359807 + 0.1 \cdot 0.02401 = 0.362208)$	0.002401
$XXYXXZ$	$[0.362208, 0.362208 + 0.2 \cdot 0.02401 = 0.36701)$	0.004802

$c \in I(XXYXXX)$ aber $-\mathrm{ld}(P(X)^4 \cdot P(Y)) \approx 5.8948 < 6[bit] < -\mathrm{ld}(P(X)^5 \cdot P(Y)) \approx 6.40937$ womit das Abbruchkriterium erreicht wurde. Damit ist c dekodiert das Wort $XXYXX$.

Aufgabe 17

$LZW_{decode}(\text{1-2-3-5-4-7-6-9-8}) = abababababababababababa$

Die Decodierung erfolt über die folgenden Schritte:

1. `yield` $a = 1$
2. `add` $ab = 3$
3. `yield` $b = 2$
4. `add` $ba = 4$
5. `yield` $ab = 3$
6. `add` $aba = 5$
7. `yield` $aba = 5$
8. `add` $abab = 6$
9. `yield` $ba = 4$
10. `add` $bab = 7$
11. `yield` $bab = 7$
12. `add` $baba = 8$
13. `yield` $abab = 6$
14. `add` $ababa = 9$
15. `yield` $ababa = 9$
16. `add Nothing`
17. `yield` $baba = 8$

Codebuch

1	a
2	b
3	ab
4	ba
5	aba
6	$abab$
7	bab
8	$baba$
9	$ababa$