Übung 7

Aufgabe 12:

Bei einer gedächnislosen binären Quelle ist die Entropie dieser gegeben als:

$$H(X) = -p\log_2(p) - (1-p)\log_2(1-p)$$

Algemein ist die Entropie einer Quelle:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{M} p(x_i) \cdot \log_2(p(x_i))$$

Für eine Quelle $\alpha = \{a, b\}$ mit Wahrscheinlichkeiten $\{p_a = 0.85, p_b = 0.15\}$ ist die Entropie $H(X_1) = -0.85\log_2(0.85) - 0.15\log(0.15) \approx 0.60984$ und nach der Zusammenfassung zu Blöcken $\{aa, ab, ba, bb\}$ mit $\{p_{aa} = p_a \cdot p_a = 0.7225, p_{ab} = p_a \cdot p_b = 0.1275, p_{ba} = p_b \cdot p_a = 0.1275, p_{bb} = p_b \cdot p_b = 0.0225, \}$ ist $H(X_2) = -0.7225\log_2(0.7225) - 2(\cdot 0.1275\log_2(0.1275)) - 0.0225\log_2(0.0225)$ $\approx$1.21968

Da in X_2 die doppelte Anzahl an symbolen pro Zeichen wie in X_1 vorhanden sind, ist auch die Entropie doppelt so groß $H(X_1) = \frac{1}{2}H(X_2)$.

Aufgabe 13:

Für die mittlere Codewortlänge l_C gilt:

$$l_C = \sum_{i=1}^{M} l_i \cdot p(x_i)$$

Darüber wird die Redundanz definiert als:

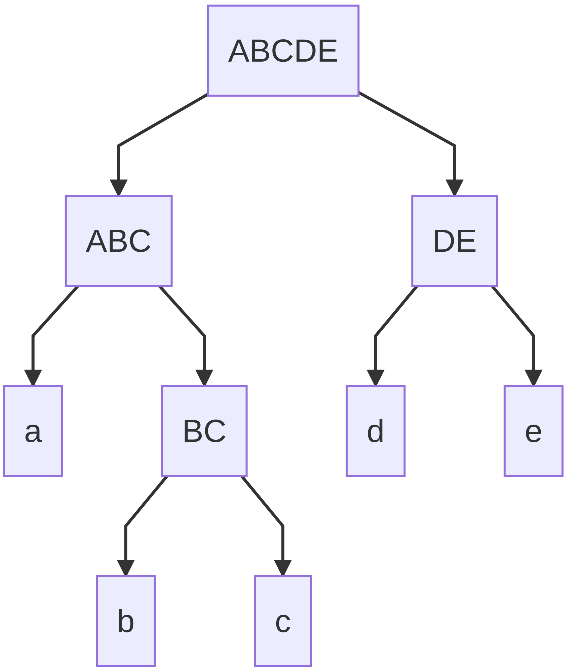
$$RC(X) = l_C - H(X)$$

Teil A) Huffman Code

Die Quelle sendet die Zeichen $\alpha = \{a, b, c, d, e\}$

1.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist $\forall i : p(x_i) = \frac{1}{5}$

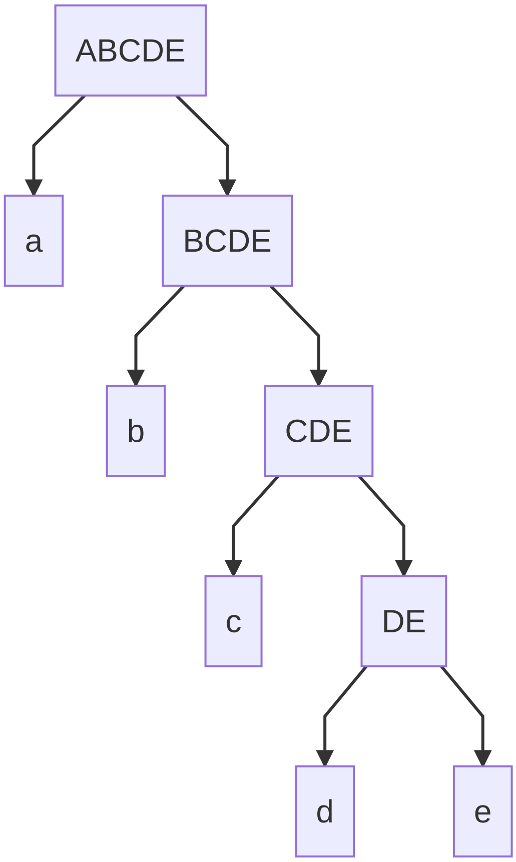


Wort	**Code**	l_i
a	00	2
b	010	3
c	011	3
d	10	2
e	11	2

Mit der obigen Formel für die Mittlere Codelänge ist $l_C = \frac{12}{5}$ und die Entropie $H(X) = -\log_2(\frac{1}{5})$ wodurch die Redundanz $RC = \frac{12}{5} + \log_2(\frac{1}{5}) \approx 0.07807[bit]$ ist.

2.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist $\{p_a = \frac{1}{2}, p_b = \frac{1}{4}, p_c = \frac{1}{8}, p_d = \frac{1}{16}, p_e = \frac{1}{16}\}$

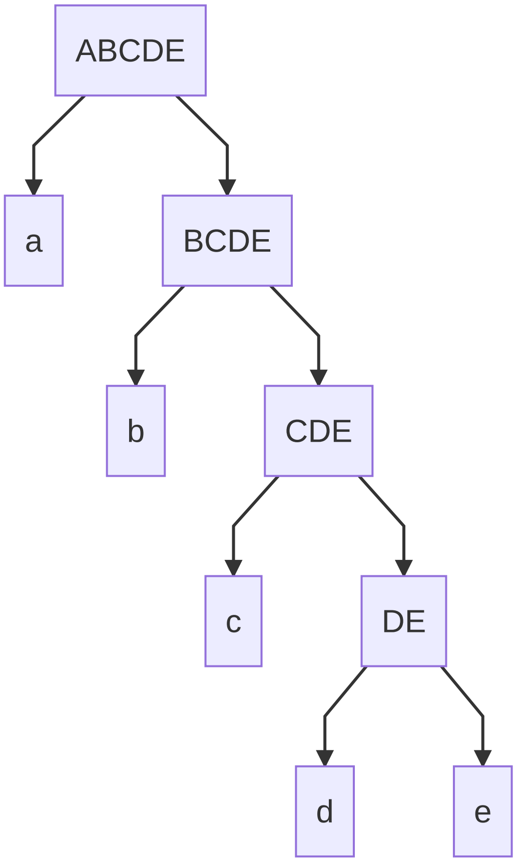


Wort	**Code**	l_i
a	0	1
b	10	2
c	110	3
d	1110	4
e	1111	4

Mit der obigen Formel für die Mittlere Codelänge ist $l_C = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{4}{16} = \frac{15}{8} = 1.875$ und die Entropie $H(X) = -\frac{1}{2}\log_2(\frac{1}{2}) - \frac{1}{4}\log_2(\frac{1}{4}) - \frac{1}{8}\log_2(\frac{1}{8}) - \frac{1}{16}\log_2(\frac{1}{16}) - \frac{1}{16}\log_2(\frac{1}{16}) = 1.625$ wodurch die Redundanz $RC = 1.875 - 1.625 = 0.25[bit]$ ist.

3.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist $\{p_a = 0.4, p_b = 0.3, p_c = 0.2, p_d = 0.05, p_e = 0.05\}$



Wort	**Code**	l_i
a	0	1
b	10	2
c	110	3
d	1110	4
e	1111	4

Mit der obigen Formel für die Mittlere Codelänge ist $l_C = 1 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.05 + 4 \cdot 0.05 = 2$ und die Entropie $H(X) = -0.4 \log_2(0.4) - 0.3 \log_2(0.3) - 0.2 \log_2(0.2) - 0.05 \log_2(0.05) - 0.05 \log_2(0.05) \approx 1.73034$ wodurch die Redundanz $RC \approx 2 - 1.73034 = 0.26966[bit]$ ist.

Teil B) Fano Code

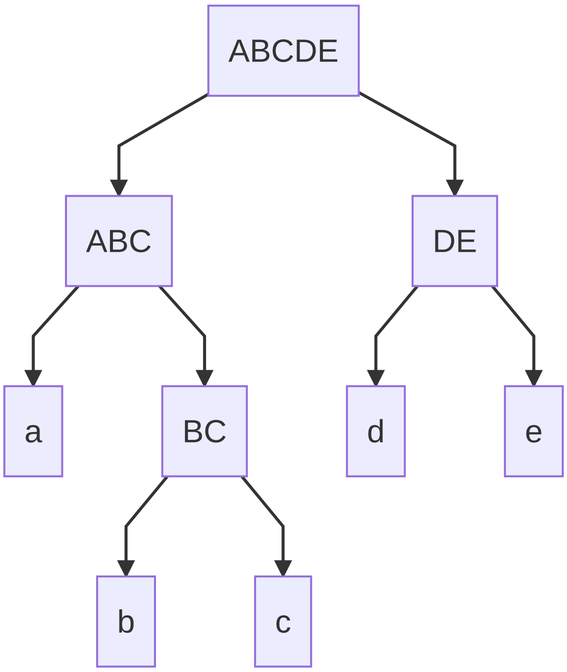
Die Quelle sendet die Zeichen $\alpha = \{a, b, c, d, e\}$

1.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist $\forall i : p(x_i) = \frac{1}{5}$

Die Aufteilung in die einzelnen Mengen ergibt sich wie folgt:

1. $\{\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\}$
2. $\{\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\}, \{\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\}$
3. $\{\frac{1}{5}\}\{\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\}, \{\frac{1}{5}\}, \{\frac{1}{5}\}$
4. $\{\frac{1}{5}\}, \{\frac{1}{5}\}, \{\frac{1}{5}\}, \{\frac{1}{5}\}, \{\frac{1}{5}\}$



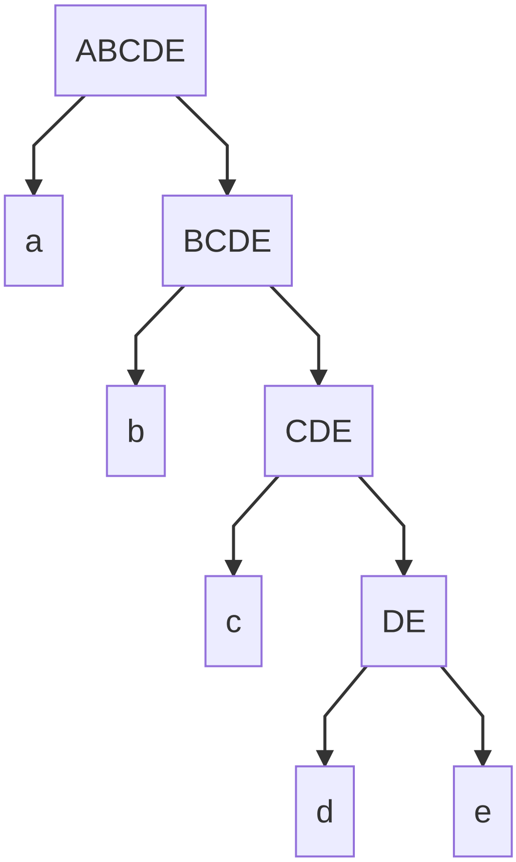
Der dadurch aufgespannte Baum ist identisch zu dem aus **Aufgabe 13 Teil A) 1.** und somit sind auch alle folgenden Rechnungen identisch und die Redundanz damit $RC \approx 0.07807[bit]$

2.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist $\{p_a = \frac{1}{2}, p_b = \frac{1}{4}, p_c = \frac{1}{8}, p_d = \frac{1}{16}, p_e = \frac{1}{16}\}$

Die Aufteilung der einzelnen Mengen ergibt sich wie folgt:

1. $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}\}$
2. $\{\frac{1}{2}\}, \{\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}\}$
3. $\{\frac{1}{2}\}, \{\frac{1}{4}\}, \{\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}\}$
4. $\{\frac{1}{2}\}, \{\frac{1}{4}\}, \{\frac{1}{8}\}, \{\frac{1}{16}, \frac{1}{16}\}$
5. $\{\frac{1}{2}\}, \{\frac{1}{4}\}, \{\frac{1}{8}\}, \{\frac{1}{16}\}, \{\frac{1}{16}\}$



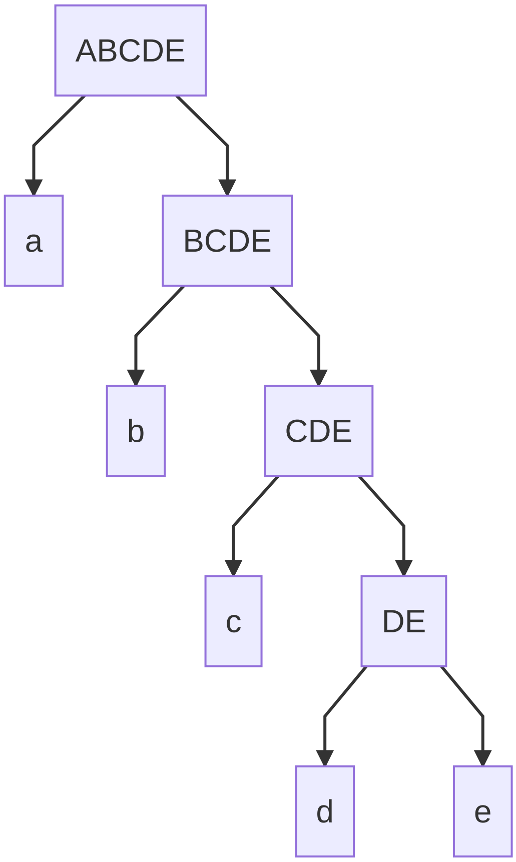
Der dadurch aufgespannte Baum ist identisch zu dem aus **Aufgabe 13 Teil A) 2.** und somit sind auch alle folgenden Rechnungen identisch und die Redundanz damit $RC = 0.25[bit]$

3.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist $\{p_a = 0.4, p_b = 0.3, p_c = 0.2, p_d = 0.05, p_e = 0.05\}$

Die Aufteilung auf die einzelnen Mengen ergibt sich wie folgt:

1. $\{0.4, 0.3, 0.2, 0.05, 0.05\}$
2. $\{0.4\}, \{0.3, 0.2, 0.05, 0.05\}$
3. $\{0.4\}, \{0.3\}, \{0.2, 0.05, 0.05\}$
4. $\{0.4\}, \{0.3\}, \{0.2\}, \{0.05, 0.05\}$
5. $\{0.4\}, \{0.3\}, \{0.2\}, \{0.05\}, \{0.05\}$



Der dadurch aufgespannte Baum ist identisch zu dem aus **Aufgabe 13 Teil A) 3.** und somit sind auch alle folgenden Rechnungen identisch und die Redundanz damit $RC \approx 0.26966[bit]$