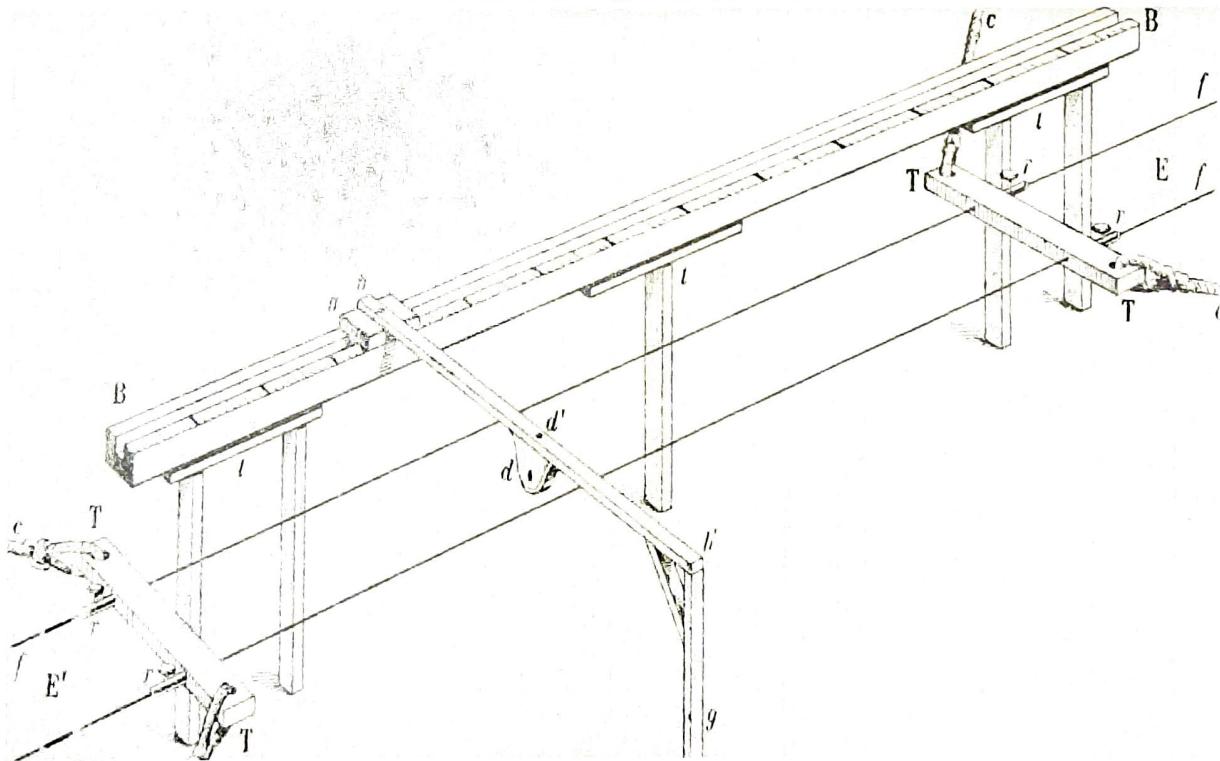


# COURS ET EXERCICES DE PHYSIQUES

**TS1 \ TS2**



**CONTACT:** 77 550 04 15

**ANNEE SCOLAIRE : 2020 - 2021**

## Chapitre I : Cinématique du point

La cinématique étudie les mouvements sans tenir compte de leur cause.

### I. Rappels :

1. **Point matériel** : Un corps peut être assimilé à un point matériel lorsque ses dimensions n'influent pas son étude mécanique.

### 2. Notion de mouvement :

- Un objet est en mouvement si sa position change au cours du temps.
- Un mouvement n'est parfaitement défini que si l'on précise l'objet de référence par rapport auquel on l'étudie.
- Mobile : objet en mouvement.
- Référentiel : solide par rapport auquel on étudie le mouvement d'un objet : référentiel terrestre ; référentiel géocentrique, référentiel héliocentrique...

3. **Repérage d'un mobile** : Pour que la description d'un mouvement soit complète il faut préciser à chaque instant sa position.

3.1. Pour repérer la position on choisit un repère d'espace le plus commode lié au référentiel. Par exemple :

- Repérage en coordonnées cartésiennes
- Repérage en coordonnées curvilignes
- Repérage en coordonnées polaires.
- Repérage en coordonnées cylindriques
- Repérage en coordonnées sphériques.

3.2. Pour situer un événement on choisit un repère de temps qui se ramène au choix d'une origine  $t=0$  et au choix d'une unité de temps : seconde, heure, jour, années....

- **La date** : c'est un nombre algébrique qui permet de situer un événement dans le repère de temps choisi.
- **La durée** : c'est l'intervalle de temps qui sépare deux dates. Elle est toujours positive.

### II. Les grandeurs cinématiques :

Les grandeurs cinématiques sont le vecteur position, le vecteur vitesse et le vecteur accélération.

#### 1. Le vecteur position :

##### a) Expression du vecteur position en coordonnées cartésiennes :

Dans la base cartésienne  $(O, i, j, k)$  le vecteur position d'un mobile M s'écrit :

$$\vec{OM} = xi + yj + zk$$

x, y et z sont les coordonnées cartésiennes du mobile.

##### ➤ Equations ou lois horaires :

C'est toute relation qui lie l'une des coordonnées du mobile au temps.

##### Exemples :

$$x = 2t + 1$$

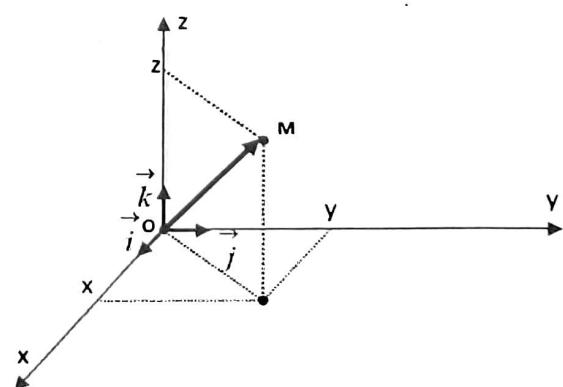
$$y = 4t^2 + 6t - 7$$

$$z = 4 \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

##### ➤ Equation de la trajectoire :

Pour avoir l'équation de la trajectoire, on élimine le temps dans les équations horaires. Si l'équation obtenue est de la forme :

$$\checkmark y = ax + b : \text{on a une droite ;}$$



✓  $y = ax^2 + bx + c$  : on a une parabole ;

✓  $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2$  : on a un cercle de centre C ( $x_C$ ;  $y_C$ ) et de rayon R.

✓  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  : on a une ellipse.

### Exercice d'application n°1 :

Les équations paramétriques du mouvement d'un point mobile sont dans chaque cas :

a)  $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3t + 5 \end{cases}$  b)  $\begin{cases} x = 0,4t \\ y = -2t^2 + 3t - 1 \end{cases}$  c)  $\begin{cases} x = 1 + 2 \sin(3\pi t) \\ y = 2 - 2 \cos(3\pi t) \end{cases}$  d)  $\begin{cases} x = 1 + \sin(2\pi t) \\ y = -2 - 3 \cos(4\pi t) \end{cases}$

Ecrire l'équation de la trajectoire pour chaque cas et préciser sa nature. On donne  $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$

#### b) Coordonnées curvilignes :

Ce type de repérage est utilisé lorsque le mobile se déplace sur une courbe. On choisit un point origine O appartenant à la courbe et un sens positif.

La position du mobile est repérée par son abscisse curviligne s qui représente la mesure algébrique de l'arc  $\overline{OM}$ .

#### c) Coordonnées polaires :

Ce type de repérage est utilisé lorsque le mobile se déplace sur une courbe. Les coordonnées polaires sont :

- $\theta$  est l'angle que fait le vecteur position avec l'axe de référence Ox dans le plan arbitrairement orienté.
- R est la norme du vecteur position.

#### Remarque : Cas particulier du cercle

Lorsque le mobile se déplace sur un cercle, sa position peut être repérée par :

- Ses coordonnées cartésiennes x et y ;
- Son abscisse curviligne s ;
- Ses coordonnées polaires R et  $\theta$ .

On a les relations :  $s = R \times \theta$  et  $\begin{cases} x = x_C + R \cos \theta \\ y = y_C + R \sin \theta \end{cases}$

#### 2. Le vecteur vitesse :

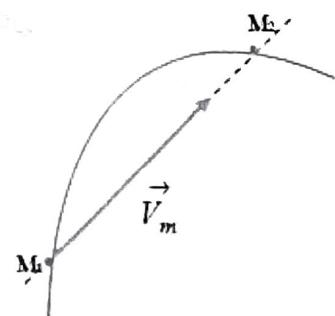
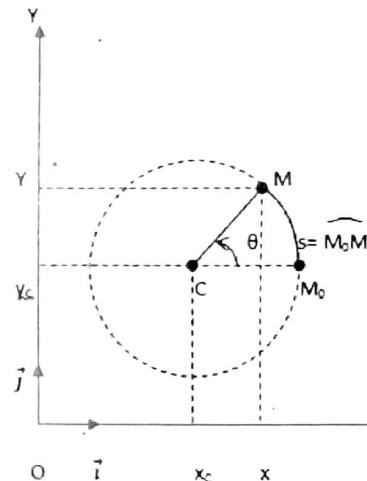
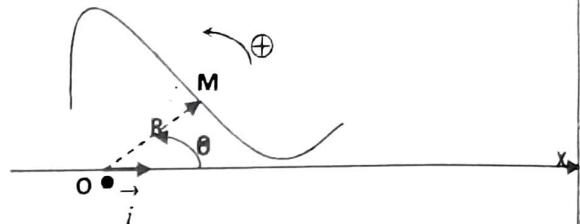
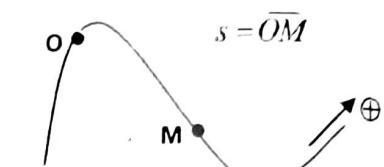
##### a) Vecteur vitesse moyenne :

Soit  $M_1$  la position du mobile à l'instant  $t_1$  et  $M_2$  sa position à l'instant  $t_2 > t_1$ . On définit le vecteur vitesse moyenne entre

ces deux positions par :  $\overrightarrow{V_{moy}} = \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{t_2 - t_1}$ , avec  $\overrightarrow{M_1 M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \Delta(\overrightarrow{OM})$  la variation du vecteur position et  $t_2 - t_1 = \Delta t$  la durée qui sépare les deux instants.

$$\overrightarrow{V_{moy}} = \frac{\Delta(\overrightarrow{OM})}{\Delta t}$$

• En coordonnées cartésiennes :  $\vec{V}_m = \begin{cases} V_{mx} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ V_{my} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \\ V_{mz} = \frac{\Delta z}{\Delta t} \end{cases}$



**En coordonnées curvilignes :** si  $s_1$  est l'abscisse curviligne à la date  $t_1$ ;  $s_2$  son abscisse curviligne à la date  $t_2$  ( $t_2 > t_1$ ). La vitesse algébrique moyenne  $\bar{V}_m = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

### b) Vecteur vitesse instantanée :

#### — Définition :

Le vecteur vitesse instantanée d'un mobile M est défini comme étant la dérivée par rapport au temps de son vecteur position :  $\vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$ .

#### Remarque : Dérivée de quelques fonctions usuelles

Soient a, b et c des constantes.

#### — Expression de $\vec{V}$ en coordonnées cartésiennes

Dans la base  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  le vecteur position a pour expression :  $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$$\Rightarrow \vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{d(x\vec{i})}{dt} + \frac{d(y\vec{j})}{dt} + \frac{d(z\vec{k})}{dt}$$

Or  $\vec{i}, \vec{j}$ , et  $\vec{k}$  sont des vecteurs constants

$$\Rightarrow \vec{V} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

$$\vec{V} \begin{cases} V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \\ V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} \\ V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} \end{cases} \Rightarrow V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \text{ la norme est exprimée en m.s}^{-1}.$$

Exemple :

$$\overrightarrow{OM} \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 4t^2 - 6t + 3 \end{cases} \Rightarrow \vec{V} \begin{cases} V_x = \dot{x} = 2 \\ V_y = \dot{y} = 8t - 6 \end{cases} \Rightarrow \vec{V} = 2\vec{i} + (8t - 6)\vec{j}$$

#### — Expression de $\vec{V}$ en coordonnées curvilignes :

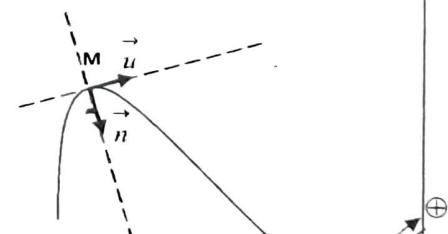
##### ✓ Base de Frenet ou base curviligne ( $\vec{u}_T$ ; $\vec{u}_n$ ) ou ( $\vec{u}$ ; $\vec{n}$ ) :

C'est une base locale liée au mobile qui se déplace formée de deux vecteurs unitaires :

- Le vecteur  $\vec{u}_T$  est tangent à la trajectoire et dirigé dans le sens des abscisses curvilignes croissants ;
- Le vecteur  $\vec{u}_n$  est normal à la trajectoire et dirigé vers l'intérieur de la concavité.

##### ✓ Expression du vecteur vitesse :

$$\vec{V} = \vec{V} \vec{u} = \frac{ds}{dt} \vec{u}$$



#### — Caractéristiques du vecteur vitesse :

**Point d'application :** le point M occupé par le mobile à l'instant considéré.

**Support :** la tangente en M à la trajectoire.

**Sens :** celui du mouvement.

**Module :** la valeur de la vitesse instantanée à cet instant.

#### Exercice d'application n°2 :

Pour chaque cas de l'application n°1

- 1) Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse.
- 2) Calculer la valeur de la vitesse à la date  $t=0s$  puis à  $t=5s$ .



### 3. Le vecteur accélération

#### a) Vecteur accélération moyenne :

Soient  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  les vecteurs vitesses instantanées du mobile aux instants  $t_1$  et  $t_2$ , par définition :

$$\overrightarrow{a_m} = \frac{\vec{V}_2 - \vec{V}_1}{t_2 - t_1}$$

#### b) Vecteur accélération instantanée :

##### — Définition :

Le vecteur accélération instantanée est défini comme étant la dérivée par rapport au temps du vecteur

vitesse instantanée :  $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}$ .

##### — Expression de $\vec{a}$ en coordonnées cartésiennes :

Dans la base  $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  on a :  $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \Rightarrow \vec{V} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$   
 $\Rightarrow \vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = \ddot{x} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = \ddot{y} \Rightarrow a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}, \text{ la norme appelée accélération est exprimée en m.s}^{-2}. \\ a_z = \frac{dv_z}{dt} = \ddot{z} \end{cases}$$

##### — Expression de $\vec{a}$ en coordonnées curvilignes :

Dans la base de Frenet on a  $\vec{a} = a_T \vec{u}_T + a_n \vec{u}_n$  avec :

$$\begin{cases} a_T = \frac{dv}{dt} : \text{accélération tangentielle} \\ a_n = \frac{v^2}{\rho} : \text{accélération normale} \end{cases}$$

$\rho$  est le rayon de courbure de la trajectoire (pour un cercle  $\rho=R$  : rayon du cercle).

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_n^2} \Rightarrow a_n = \sqrt{a^2 - a_T^2}$$

#### Exercice d'application n°3 :

Dans un repère  $(0, \vec{i}, \vec{j})$  un mobile a pour vecteur position  $\vec{OM} = 2\vec{u} + (t^2 - 2t + 4)\vec{j}$ .

1) Calculer la norme du vecteur accélération instantanée.

- 2) Déterminer l'expression de la norme du vecteur vitesse instantanée. En déduire sa valeur à  $t = 2s$ .  
 3) Calculer les accélérations tangentielle et normale à la date  $t = 2s$ . En déduire le rayon de courbure à cette date.

### III. Etude de quelques mouvements simples :

#### 1. Mouvement accéléré - mouvement décéléré :

Si  $\vec{a} \cdot \vec{V} > 0$  : le mouvement est accéléré  $\vec{a}$  et  $\vec{V}$  ont même sens.

Si  $\vec{a} \cdot \vec{V} < 0$  : le mouvement est décéléré ou retardé  $\vec{a}$  et  $\vec{V}$  sont de sens opposés.

Si  $\vec{a} \cdot \vec{V} = 0$  le mouvement est uniforme : soit  $\vec{a} = 0$  ou soit  $\vec{a} \perp \vec{V} \Rightarrow a_t = 0$

#### Remarque :

➤ En coordonnées cartésiennes :  $\vec{a} \cdot \vec{V} = a_x V_x + a_y V_y + a_z V_z$

➤ Dans la base de Frenet :  $\vec{a} \cdot \vec{V} = a_T \cdot \vec{V}$  Si  $\vec{a}_t$  et  $\vec{V}$  sont de sens opposés le mouvement est retardé. Si  $\vec{a}_t$  et  $\vec{V}$  sont de même le mouvement est accéléré.



À toute fonction  $f$  on associe une fonction  $F$  telle que  $\frac{dF}{dt} = f$  : on dit que  $F$  est la primitive de  $f$   
Exemple :  $f = 2t + 3 \Rightarrow F = t^2 + 3t + C$ .

— **Primitives de quelques fonctions usuelles :**

Soient  $a$ ,  $b$  et  $C$  des constantes

Fonction $f$	Primitive $F$
$a$	$at + C$
$at + b$	$\frac{1}{2}at^2 + bt + C$
$\cos t$	$\sin t + C$
$\sin t$	$-\cos t + C$
$\cos(at + b)$	$\frac{1}{a}\sin(at + b) + C$
$\sin(at + b)$	$-\frac{1}{a}\cos(at + b) + C$

3. **Etude des mouvements rectilignes :**

a) **Caractères généraux :**

Un mobile est animé d'un mouvement rectiligne s'il se déplace sur une droite. Un seul axe suffit alors pour repérer sa position (l'axe  $x'$  par exemple) : les grandeurs cinématiques s'écrivent alors

- $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$  : vecteur position
- $\vec{V} = V_x\vec{i} = \dot{x}\vec{i}$  : vecteur vitesse instantanée
- $\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} = \ddot{x}\vec{i}$  : vecteur accélération instantanée.

Remarque :  $x$ ,  $V_x$  et  $a_x$  sont algébriques.

b) **Mouvement rectiligne uniforme (M.R.U) :**

— **Définition :**

Un mobile est animé d'un M.R.U lorsqu'il se déplace sur une droite avec un vecteur vitesse constant :

$$\vec{V} = V_x\vec{i} \Rightarrow V_x = V_{0x} = \text{constante} \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}.$$

- ✓ Si le mobile se déplace dans le sens positif alors  $V_x > 0$ .
- ✓ Si le mobile se déplace dans le sens négatif alors  $V_x < 0$ .

— **Équation horaire :**

$$V_x = \text{cste} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow x = V_x t + C$$

Pour déterminer la constante  $C$  on choisit un point  $P$  de la trajectoire :

à  $t = t_p$  on a  $x = x_p \Rightarrow C = x_p - V_x t_p$ , l'équation horaire s'écrit alors :

$$x = V_x(t - t_p) + x_p$$

Remarque : Si à  $t = 0$  on a  $x = x_0$ , l'équation devient :  $x = V_x t + x_0$ .

**Exercice d'application n°4 :**

Un mobile animé d'un mouvement rectiligne uniforme se déplace sur un axe  $x'$  en allant dans le sens négatif avec un vecteur vitesse de norme  $5 \text{ m.s}^{-1}$ . A la date  $t_1 = 2 \text{ s}$ , il passe par la position d'abscisse  $x_1 = 3 \text{ m}$ .

1. Etablir l'équation horaire du mouvement.
2. Déterminer la position du mobile à  $t = 0$ .
3. A quelle date passera-t-il par l'origine du repère.

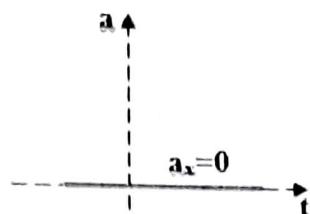


Diagramme de l'accélération

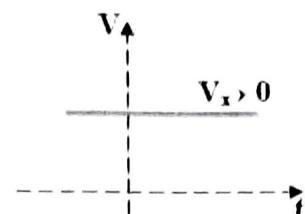


Diagramme de la vitesse

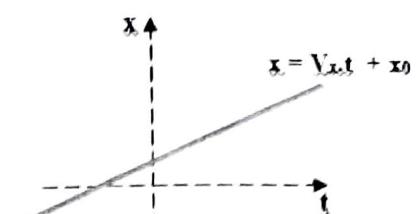


Diagramme du mouvement : l'abscisse est une fonction affine du temps

### c) Mouvement rectiligne uniformément varié (M.R.U.V) :

#### — Définition :

Un mobile est animé d'un M.R.U.V s'il se déplace sur une droite avec un vecteur accélération constante :  $\vec{a} = a_x \vec{i} = \text{constante} \Rightarrow a_x = a_{0x} = \text{constante}$ .

#### — Equations horaires :

$$\begin{cases} \vec{a} = \text{cste} \\ \vec{V} = \vec{a}t + \vec{V}_0 \\ \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}at^2 + \vec{V}_0t + \overrightarrow{OM}_0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \vec{a} = \text{cste} \\ \vec{V} = \vec{a}(t - t_p) + \vec{V}_p \\ \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}a(t - t_p)^2 + \vec{V}_p(t - t_p) + \overrightarrow{OP} \end{cases} \text{ soit en projetant suivant } x' \text{O}x \text{ on a :}$$

$$\begin{cases} a_x = \text{cste} \\ V_x = a_x t + V_{0x} \\ x = \frac{1}{2}a_x t^2 + V_{0x}t + x_0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a_x = \text{cste} \\ V_x = a_x(t - t_p) + V_{px} \\ x = \frac{1}{2}a_x(t - t_p)^2 + V_{px}(t - t_p) + x_p \end{cases}$$

#### Remarque :

- $a_x = \frac{V_x - V_{px}}{t - t_p} = \frac{\Delta V_x}{\Delta t}$
- $V_f^2 - V_i^2 = 2a_x(x_f - x_i)$
- Si  $a \cdot V > 0$ , le mouvement est rectiligne uniformément accéléré (M.R.U.A)
- Si  $a \cdot V < 0$ , le mouvement est rectiligne uniformément décéléré (M.R.U.D)

#### — Représentation graphique :

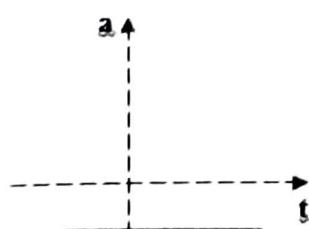


Diagramme de l'accélération

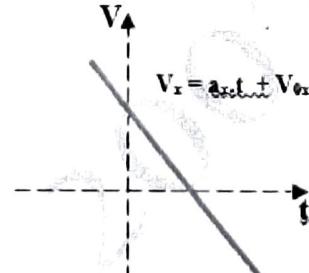


Diagramme de la vitesse : la vitesse est une fonction affine du temps

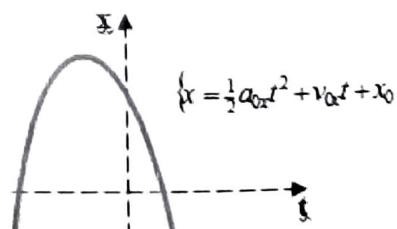


Diagramme du mouvement : l'abscisse est une fonction du second degré du temps

#### Exercice d'application n°5 :

Une voiture démarre sans vitesse initiale d'un feu rouge et atteint la vitesse de 72 km.h<sup>-1</sup> après un parcours de 25 m. Elle maintient ensuite sa vitesse constante. La première phase du mouvement est rectiligne uniformément varié et la deuxième rectiligne uniforme.

La date  $t = 0$  est l'instant de démarrage de la voiture et l'origine des abscisses est la position du feu.

1. Calculer l'accélération du mouvement pendant la première phase et la durée  $t_1$  de cette phase.
2. Etablir l'équation horaire du mouvement :
  - a) Pour la 1<sup>ière</sup> phase ;
  - b) Pour la deuxième phase.
3. Représenter le diagramme de la vitesse entre  $t = 0$  et  $t = 5s$ .
4. Calculer la distance parcourue entre  $t = 0$  et  $t = 5s$ .

#### d) Mouvement rectiligne sinusoidal (M.R.S) :

##### — Définition :

Un mobile est animé d'un M.R.S s'il oscille autour d'une position d'équilibre le long d'un segment de droite. Son équation horaire est de la forme :

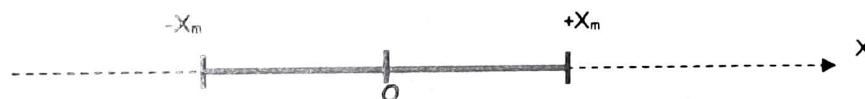
$$x = X_m \sin(\omega t + \varphi) ; \quad x = X_m \cos(\omega t + \varphi) ; \quad x = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t \text{ avec}$$

- $x$  : élongation du mouvement (exprimée en m) ;
- $X_m$  : élongation maximale ou amplitude (exprimée en m)
- $(\omega t + \varphi)$  : phase instantanée (exprimée en rad)
- $\varphi$  : phase à l'origine des dates  $t = 0$  (exprimée en rad)
- $\omega$  : pulsation du mouvement (exprimée en rad.s<sup>-1</sup>)

##### — Vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{i} \text{ avec } x = X_m \cos(\omega t + \varphi) \text{ or } -1 \leq \cos(\omega t + \varphi) \leq 1 \Rightarrow -X_m \leq X_m \cos(\omega t + \varphi) \leq X_m \\ \Rightarrow -X_m \leq x \leq X_m$$

Le mobile effectue des oscillations le long d'un segment de droite de longueur  $L = 2X_m$  de manière périodique.



##### — Période du M.R.S :

La période du M.R.S correspond à la durée d'une oscillation c'est - à - dire le temps que met le mobile pour parcourir deux fois la longueur du segment ( $2L = 4X_m$ ). Elle est donnée par l'expression :  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

On l'exprime en seconde (s).

##### — Fréquence du M.R.S :

La fréquence correspond au nombre d'oscillations effectuées pendant l'unité de temps.  $N = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ . On l'exprime en Hertz (Hz).

##### — Vecteur vitesse :

$$\vec{V} = V \vec{i} \text{ avec } x = X_m \cos(\omega t + \varphi) \text{ et } V = V_x = \dot{x} : \text{la valeur algébrique de la vitesse} \\ \Rightarrow V = -\omega X_m \sin(\omega t + \varphi) = \omega X_m \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

On a donc :  $\varphi_x = \varphi$  et  $\varphi_v = \varphi + \frac{\pi}{2} = \varphi_x + \frac{\pi}{2}$  : on dit que  $x$  et  $V$  sont en quadrature de phase c'est - à - dire :

- ✓ Si  $x = \mp X_m$  alors  $V=0$ .
- ✓ Si  $V = \mp V_m$  alors  $x=0$ , avec  $V_m = \omega X_m$  : la vitesse maximale.

##### Remarque :

- ✓  $V > 0$  si le mobile se déplace dans le sens positif.
- ✓  $V < 0$  si le mobile se déplace dans le sens négatif.

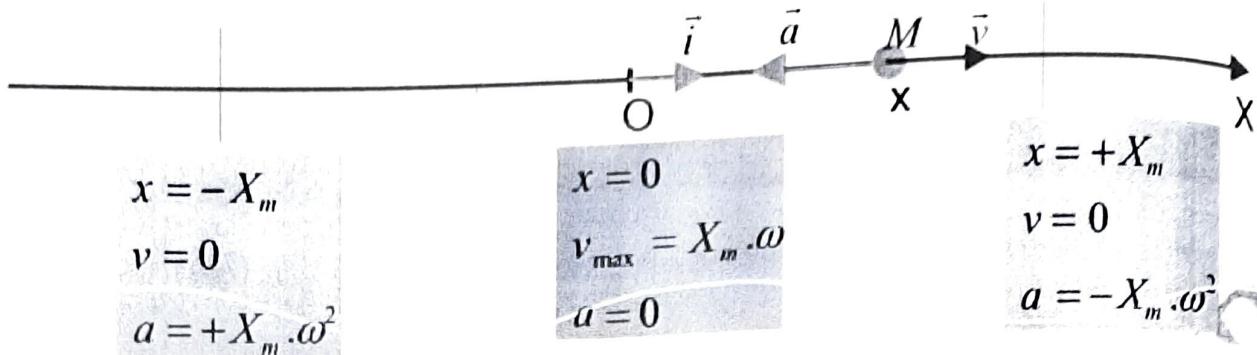
##### — Vecteur accélération :

$$\vec{a} = a_x \vec{i} = \ddot{x} \vec{i} \text{ avec } x = X_m \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \dot{x} = -\omega X_m \sin(\omega t + \varphi)$$



$$\Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 X_m \cos(\omega t + \varphi) = \omega^2 X_m \cos(\omega t + \varphi + \pi)$$

$\varphi_a = \varphi + \pi = \varphi_x + \pi$  : l'accélération et l'elongation sont en opposition de phase  
 $a_m = \omega^2 X_m$ : accélération maximale.



#### — Équation différentielle du M.R.S :

$$\begin{cases} x = X_m \cos(\omega t + \varphi) \\ \ddot{x} = -\omega^2 X_m \cos(\omega t + \varphi) \end{cases} \Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x \Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0 : \text{équation différentielle du M.R.S.}$$

#### — Représentation graphique de $x = f(t)$ , $V = g(t)$ et $a = h(t)$ :

$$x = X_m \cos(\omega t + \varphi) ; V = -\omega X_m \sin(\omega t + \varphi) \text{ et } a = -\omega^2 X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

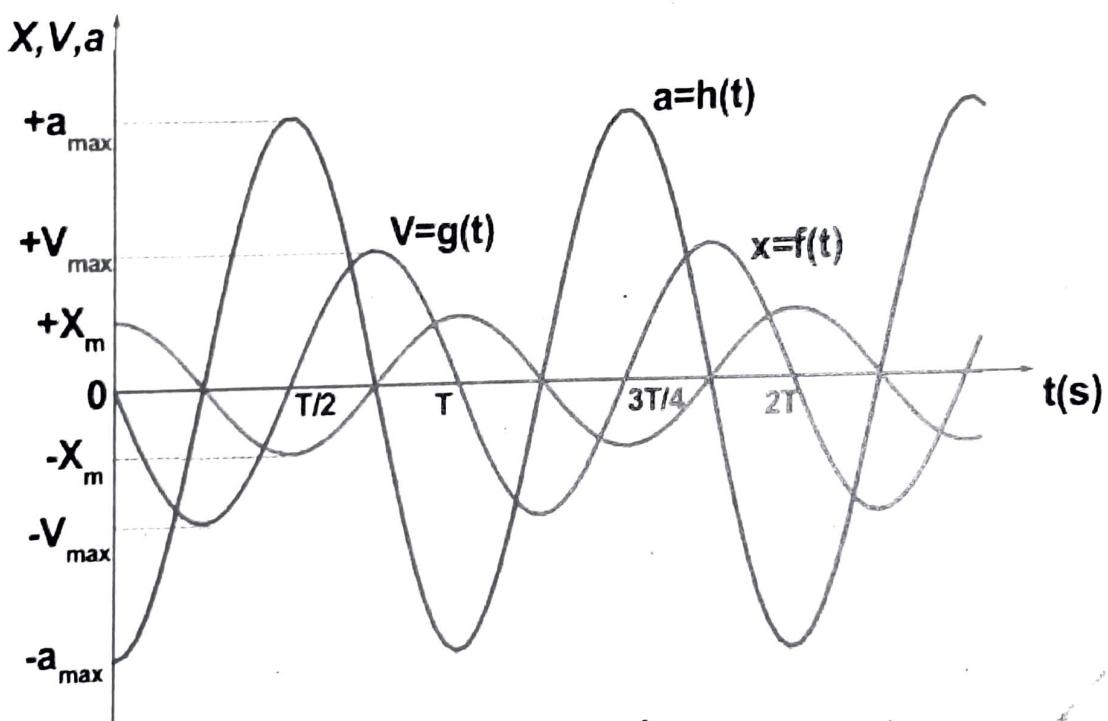


Fig 4.10 : Diagramme du mouvement

#### — Représentation graphique de $\ddot{x} = f(x)$ :

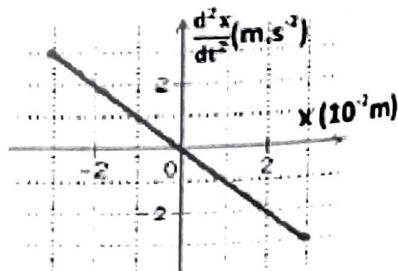
$$\text{On a } \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad (1)$$

Graphiquement on a une droite linéaire d'équation :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = bx \quad (2).$$

(1) et (2)  $\Rightarrow -\omega^2 = b$  : coefficient directeur de la droite.

$$b = \frac{\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1}{x_2 - x_1}$$



Exercice d'application n°6 :

Un mobile M, animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal, met 0,2 s pour faire un aller et retour. A la date  $t = 0$  s, il est à l'elongation maximale 24 cm et sa vitesse est nulle. Choisir la bonne réponse.

1. La période des oscillations est :

- a) 0,4 s b) 0,2 s c) 0,1 s d) 0,8 s

2. L'équation horaire du mouvement de M peut s'écrire :

- a)  $x = 0,24 \sin(10\pi t + \pi/2)$  b)  $x = 0,24 \cos(20\pi t + \pi/2)$   
c)  $x = 0,24 \sin(5\pi t + \pi/2)$  d)  $x = 0,24 \sin(10\pi t)$

Exercice d'application n°7 :

L'enregistrement du mouvement d'oscillation verticale d'un solide

S de masse m, accroché à un ressort à spires non jointives a permis de tracer la courbe représentant les variations de l'abscisse x en fonction du temps.

1. Déterminer les valeurs de l'amplitude et de la période du mouvement de S.

2. Déterminer la phase à l'instant  $t = 0$ .

3. Ecrire l'équation horaire du mouvement.

4. En déduire l'équation horaire du vecteur vitesse.

5. A quelle date le mobile passe-t-il pour la première fois par la position  $x = 0$  en allant dans le sens négatif. Calculer la vitesse et l'accélération à cette date.

4. Etude des mouvements circulaires :

a) Mouvement circulaire uniforme (M.C.U):

— Définition :

Un mobile est animé d'un M.C.U s'il se déplace sur un cercle avec un vecteur vitesse de norme constante  $V = \left| \frac{ds}{dt} \right| = \text{constante}$ .

— Vecteur vitesse :

Dans la base de Frenet on a :  $\vec{V} = V \cdot \vec{u}_T$  avec  $V = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(R\theta) = R \frac{d\theta}{dt} = R\dot{\theta} = R\omega \Rightarrow \vec{V} = R\omega \cdot \vec{u}_T$   
 $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$  est la vitesse angulaire, elle est constante pour un mouvement circulaire uniforme.

— Vecteur accélération :

Dans la base de Frenet on a  $\vec{a} = \vec{a}_T \vec{u}_T + \vec{a}_n \vec{u}_n$  avec :  $\begin{cases} \vec{a}_T = \frac{dV}{dt} \\ \vec{a}_n = \frac{V^2}{R} \end{cases}$

Pour un M.C.U on a  $\begin{cases} V = \text{cste} \\ R = \rho \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{a}_T = 0 \\ \vec{a}_n = \frac{V^2}{R} = R\omega^2 \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}_n \vec{u}_n = \frac{V^2}{R} \vec{u}_n = R\omega^2 \vec{u}_n$ .

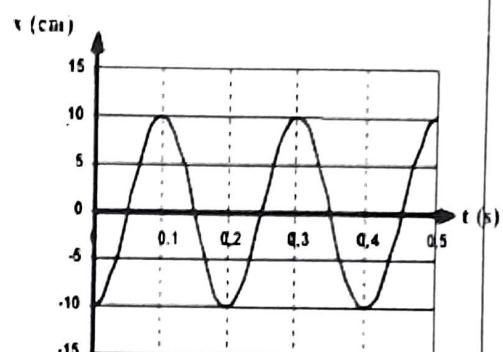
Dans un M.C.U le vecteur accélération est toujours dirigé vers le centre du cercle : on dit qu'il est centripète.

— Equations horaires :

$$\begin{cases} s = V(t - t_p) + s_p \\ \theta = \omega(t - t_p) + \theta_p \end{cases}$$

Exercice d'application n°8 :

Les équations horaires du mouvement d'un point mobile M sont :  $\begin{cases} x(t) = 1 + 2 \sin(2\pi t) \\ y(t) = 4 + 2 \cos(2\pi t) \end{cases} t \geq 0$  Les unités sont dans le système international.



1. Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire de M et préciser sa nature.
2. Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse  $\vec{v}$  de M et déduire sa norme.
3. Déterminer les coordonnées du vecteur accélération  $\vec{a}$  de M et calculer sa norme.
4. Quelle est la nature du mouvement de M ? Quelle est la position de à  $t=0s$  ?
5. L'axe x'x est la référence, écrire l'équation horaire de l'elongation angulaire  $\theta$  et de l'abscisse curviligne  $s(t)$ .

**b) Mouvement circulaire uniformément varié (M.C.U.V) :**

— **Définition :**

Un mobile est animé d'un mobile M.C.U.V s'il déplace sur un cercle avec une accélération angulaire  $\ddot{\theta}$  constante.

— **Equations horaires :**

$$\begin{cases} \omega = \ddot{\theta}(t - t_p) + \omega_p \\ \theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta}(t - t_p)^2 + \omega_p(t - t_p) + \theta_p \end{cases}$$

**Remarque :**  $w_f^2 - w_i^2 = 2\ddot{\theta}(\theta_f - \theta_i)$ ;  $\ddot{\theta} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ .

— **Vecteur vitesse :**

Dans la base de Frenet on a :  $\vec{V} = V \cdot \vec{u}_T$  avec  $V = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(R\theta) = R \frac{d\theta}{dt} = R\dot{\theta} = R\omega$  avec  $\omega = \ddot{\theta}(t - t_p) + \omega_p \Rightarrow V = [R\ddot{\theta}(t - t_p) + R\omega_p] = [R\ddot{\theta}(t - t_p) + V_p]$  d'où  $\vec{V} = [R\ddot{\theta}(t - t_p) + V_p] \vec{u}_T$

— **Vecteur accélération :**

Dans la base de Frenet on a  $\vec{a} = a_T \vec{u}_T + a_n \vec{u}_n$  avec :  $\begin{cases} a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}[R\ddot{\theta}(t - t_p) + V_p] = R\ddot{\theta} \\ a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{V^2}{R} = R\omega^2 \end{cases}$

$$\vec{a} = R\ddot{\theta} \vec{u}_T + \frac{V^2}{R} \vec{u}_n$$

**Exercice d'application n°9 :**

Un disque tourne autour de son axe de révolution ( $\Delta$ ) à raison de  $\omega=20$  tours/s. Il est freiné à partir de la date  $t=0s$ . Son mouvement est alors uniformément varié. Le disque s'immobilise au bout de 10s.

1. Quelle est l'accélération angulaire du disque ?
2. Quelle est la vitesse angulaire d'un point M situé à 15cm de l'axe à  $t=5s$  ? En déduire l'accélération normale.
3. Calculer le nombre de tours effectués par le disque avant de s'immobiliser.

**Exercice d'application n°10 :**

Un point mobile M est animé d'un mouvement circulaire de rayon  $R=10cm$ . Son accélération angulaire  $\ddot{\theta} = 5 \cdot 10^{-1} rad.s^{-2}$ . A  $t=0$ ,  $\dot{\theta}_0 = 2rad/s$  et  $\theta_0 = 0rad$ .

1. Ecrire les équations horaires de  $\dot{\theta}(t)$ ,  $\theta(t)$  et  $V(t)$ .
2. Calculer à  $t=2s$  les accélérations normale et tangentielle de M.

**Fin du chapitre**

## Exercices sur la cinématique

### Exercice n°1 :

I) Un mobile (B) débute son mouvement à  $t = 0$  en se déplaçant dans un plan vertical (P) muni des axes  $x'0x$  horizontal et  $y'0y$  vertical. A tout instant  $t > 0$  et relatif à un repère  $R(0, \vec{i}, \vec{j})$  où  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  sont des vecteurs unitaires portés respectivement par l'axe  $x'0x$  et l'axe  $y'0y$ , son vecteur vitesse est le suivant :  $\vec{v}(t) = \vec{i} + (\alpha t - 1)\vec{j}$  avec  $\alpha$  est une constante positive.

1. A l'instant de date  $t_1 = 2$  s, la vitesse du mobile B a une valeur  $v_1 = \sqrt{10}$  m/s.
  - a) Montrer que  $\alpha$  vérifie l'équation :  $\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$  et déterminer sa valeur.
  - b) Déterminer les lois horaire  $x(t)$  et  $y(t)$  du mouvement du mobile B sachant qu'à la date  $t_1$  il passe par un point  $M_1$  d'abscisse  $X_1 = 3,5$  m et d'ordonnée  $Y_1 = -1,75$  m.
2. Etablir l'équation cartésienne de la trajectoire du mobile (B). En déduire la nature du mouvement.
3. A un instant de date  $t_2$ , le mobile (B) passe par un point  $M_2$  d'abscisse  $X_2 = 4$  m.
  - a) Déterminer la valeur de  $t_2$ .
  - b) Pour la date  $t_2$  et en faisant le calcul nécessaire, on demande de :
    - Déterminer le vecteur vitesse  $V_2$  du mobile (B). En déduire sa direction et sa valeur.
    - Trouver la valeur  $a$  et celles de ses composantes, tangentielle  $a_T$  et normale  $a_n$ .
    - Déduire le rayon de courbure  $R_c$  au point  $M_2$ .

II) Un second mobile (D) commence son mouvement à  $t = 0$  en se déplaçant dans le même plan (P).

Son vecteur position est  $\vec{OM} = \vec{i} + (3t + 2)\vec{j}$  où  $x$  et  $y$  sont en mètres.

1. Montrer que le mobile (D) effectue un mouvement rectiligne uniforme le long d'une droite ( $\Delta$ ) qu'on établira son équation.
2. Déterminer les coordonnées du point N de rencontre des deux mobiles (B) et (D).

### Exercice n°2 :

Le diagramme des vitesses d'un mobile A animé d'un mouvement rectiligne sur un axe Ox est donné par la figure 1.

1. Tracer le diagramme de l'accélération en fonction du temps.
2. Quelles sont les différentes phases du mouvement et leur nature ? Justifier.
3. Etablir les équations horaires du mouvement entre  $t = 0$  et  $t = 20$  s. Déterminer la position du mobile aux instants  $t = 6$  s ;  $t = 10$  s ; et  $t = 20$  s, sachant qu'à  $t = 0$  s,  $x_{0A} = 10$  m.
4. A quel instant le mobile rebrousse-t-il chemin ?
5. A quel instant le mobile passe-t-il par l'origine ?
6. Calculer la distance parcourue par le mobile entre les instants  $t = 6$  s et  $t = 12$  s.

### Exercice n°3 :

Un automobiliste se déplace sur une route horizontale à la vitesse constante de valeur  $V_0 = 16$  m.s<sup>-1</sup>.

Lorsqu'il est à une distance  $D = 300$  m du feu, le feu vert s'allume et reste vert pendant 15 s. Le feu change de couleur après ces 15 s.

Dans tout l'exercice, on prendra comme origine des dates ( $t = 0$  s), l'instant où le feu vert s'allume et l'origine des espaces ( $x = 0$  m), la position de la voiture à cet instant. Le sens positif est le sens du mouvement.

**3.1.** A partir de l'instant de date  $t = 0$  s, l'automobiliste accélère et impose à sa voiture une accélération constante de valeur algébrique  $a_1$ .

A l'instant  $t_1$ , sa vitesse prend la valeur  $V_1 = 20$  m.s<sup>-1</sup>. Entre  $t = 0$  s et  $t_1$ , l'automobiliste parcourt 72 m.

**3.1.1.** Déterminer l'accélération  $a_1$ .

**3.1.2.** Trouver la date  $t_1$ .

**3.1.3.** Déterminer l'équation horaire de l'abscisse du mouvement de la voiture pour  $t \in [0, t_1]$ .

**3.2.** A partir de l'instant  $t_1$ , l'automobiliste maintient sa vitesse constante.

**Cours à domicile : 77 550 04 15**

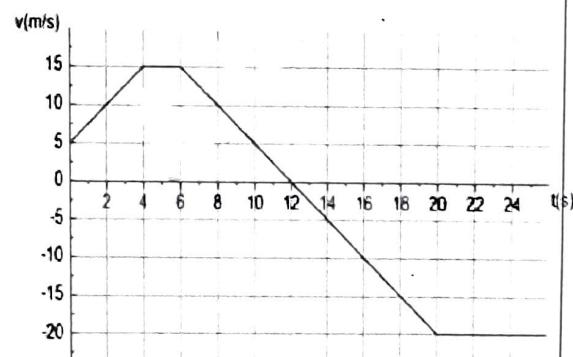


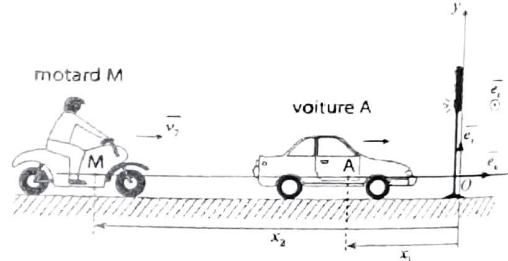
Figure 1

- 3.2.1.** Ecrire l'équation horaire de l'abscisse du mouvement de la voiture à partir de l'instant  $t_1$ .
- 3.2.2.** L'automobile se trouve-t-il avant ou après le feu au moment où celui-ci change de couleur ? Calculer la distance qui le sépare du feu à cet instant.
- 3.3.** Si à l'instant  $t_1$ , l'automobiliste freine et impose à sa voiture un mouvement uniformément retardé d'accélération de module  $|a_2| = 2 \text{ m.s}^{-2}$ .
- 3.3.1.** Déterminer les équations horaires de la vitesse et de l'abscisse du mouvement de la voiture à partir de l'instant  $t_1$ .
- 3.3.2.** Calculer la distance parcourue par la voiture du début du freinage jusqu'à son arrêt.
- 3.3.3.** Déterminer la vitesse  $V_2$  de la voiture lors de son passage au point situé à 150 m du feu et la date  $t_2$  correspondante à ce passage.
- 3.4.** Quelques minutes après avoir dépassé le feu, l'automobiliste maintient constante la vitesse à  $20 \text{ m.s}^{-1}$ . A cette vitesse, il doit négocier un virage de rayon  $R = 200 \text{ m}$ .
- 3.4.1.** Déterminer les caractéristiques du vecteur accélération pendant le virage.
- 3.4.2.** Calculer la durée de parcours du virage si on l'assimile à un quart de cercle.

**Exercice n°4 :**

Une voiture A est arrêtée sur une route horizontale rectiligne à une distance  $d_1 = 3 \text{ m}$  d'un feu rouge. Lorsque le feu passe au vert, à l'instant  $t=0$ , la voiture démarre avec une accélération constante  $a_1 = 3 \text{ m/s}^2$ . Au même moment un motard M roulant à une vitesse constante  $v_2 = 54 \text{ km/h}$  se trouve à une distance  $d_2 = 24 \text{ m}$  de la voiture. La voiture et le motard considérés comme des points matériels sont repérés à l'instant t à l'aide de leurs vecteurs positions respectifs  $\overrightarrow{OM}_1 = x_1 \vec{i}$  et  $\overrightarrow{OM}_2 = x_2 \vec{i}$ . On choisira comme origine O des abscisses la position du feu tricolore.

- Déterminer les équations horaires  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  de la voiture et du motard respectivement.
- Déterminer les instants des dépassements ainsi que les positions de la voiture et du motard à ces instants.
- Si le motard roule à la vitesse  $v_2 = 36 \text{ km/h}$  pourra-t-il rattraper la voiture ?
  - Calculer, dans ce cas, l'instant pour lequel la distance qui sépare le motard de la voiture est minimale.
  - En déduire cette distance.
- Quelle est la vitesse minimale  $v_{min}$  du motard à partir de laquelle il pourra rattraper la voiture ?



**Exercice n°5 :**

**Les deux parties sont indépendantes**

Un oscillateur mécanique est constitué d'un ressort à spires non jointives dont une extrémité est fixée à un solide S de dimensions telles qu'il peut être assimilé à un point mobile. L'autre extrémité du ressort est fixe. Le plan sur lequel se déplace le solide S est horizontal. On écarte le solide S de sa position d'équilibre et on le libère. La position du solide est donnée par le vecteur position  $\overrightarrow{OM} = x \vec{i}$ . L'origine du repère est choisie de telle sorte que lorsque l'oscillateur passe par sa position d'équilibre, on ait  $\overrightarrow{OM} = \vec{0}$ . Le solide se déplace sur un segment de droite de longueur 40 cm.

**1ere partie :** L'équation différentielle du mouvement de S est :

$$\ddot{x} + 100\pi^2 x = 0. \quad \text{Les unités sont celles du Système International.}$$

**5.1.** Trouver la pulsation et la période du mouvement.

**5.2.** La forme générale de l'équation horaire du mouvement de S est  $x = Xm \sin(\omega t + \varphi)$  préciser la signification de chaque grandeur et donner son unité dans le système international.

**5.3.** On suppose différentes conditions initiales notées (a<sub>1</sub>), (a<sub>2</sub>) et (a<sub>3</sub>).

- (a<sub>1</sub>) : la date  $t = 0$  est la date de passage du mobile par l'elongation nulle, le mobile se déplaçant dans le sens négatif ;
- (a<sub>2</sub>) : la date  $t = 0$  est la date de passage du mobile par l'abscisse maximale.
- (a<sub>3</sub>) : la date  $t = 0$  est la date de passage par l'elongation nulle, le mobile se déplaçant dans le sens positif.

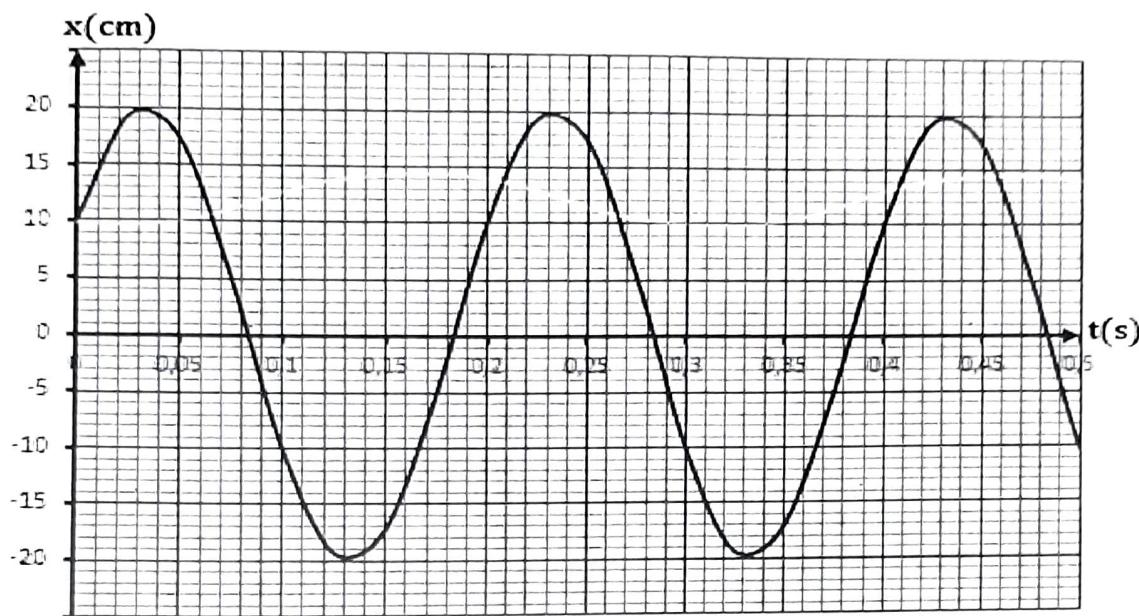
On donne, dans un ordre quelconque, l'équation horaire du mouvement :

**b<sub>1</sub>)**  $x=0,2\sin(10\pi t)$     **b<sub>2</sub>)**  $x=0,2\sin(10\pi t+\pi)$     **b<sub>3</sub>)**  $x=0,2\sin(10\pi t + \frac{\pi}{2})$

Attribuer une équation horaire à chacune des conditions initiales **(a<sub>1</sub>)**; **(a<sub>2</sub>)**; **(a<sub>3</sub>)**.

**2<sup>eme</sup> partie :**

Le solide est animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal sur un axe x'0x. La variation de sa position à tout instant est représentée par le diagramme de la figure ci-dessous.



**5.4.** En déduire la pulsation  $\omega$  et la vitesse maximale  $V_m$  du mobile.

**5.5.** Déterminer les valeurs de l'abscisse et de l'accélération du mobile à la date  $t=0,2$  s.

**5.6.** Etablir l'équation horaire  $x(t)$ .

**5.7.** Le mouvement est-il accéléré ou décéléré à  $t = 0,2$  s.

**5.8.** Déterminer par le calcul la date (après  $t = 0$ ) de passage pour la première fois en  $x = -10$  cm.

**5.9.** Déterminer la distance parcourue par le solide entre  $t = 0,1$  s et  $t = 0,5$  s.

**3<sup>ème</sup> partie :**

Dans un repère orthonormé ( $0, i, j$ ), un mobile est animé d'un mouvement dont les équations horaires sont

$$x(t) = -2\cos(2\pi t); y = 2\sin(2\pi t) \quad (t \text{ en seconde}, x \text{ et } y \text{ en mètre}).$$

1- Donner l'équation de la trajectoire du mobile.

2- Calculer la vitesse du mobile. En déduire la nature du mouvement.

3- Calculer la vitesse angulaire et la norme du vecteur accélération du mobile.

4- Représenter la trajectoire et les vecteurs, vitesse et accélération au point B (0, 2). Echelles : 1cm pour 1m;

1cm pour  $2\pi\text{m/s}$  et 1cm pour  $4\pi\text{m/s}^2$ .

5- Montrer que le vecteur accélération peut s'écrire sous la forme  $=-k$ . où  $k$  est une constante à déterminer.

Comment appelle-t-on un tel mouvement.

Fin de la série

## Chapitre II : Les bases de la dynamique

La dynamique est la partie de la physique qui étudie les mouvements en tenant contre de leur cause.

### I. Système matériel :

Un système est un ensemble de points matériels. Il peut déformable ou non. Sa masse  $M$  est égale à la somme des masses de ses différents points matériels.

- **Système isolé** : c'est un système qui n'est soumis à aucune force extérieure.
- **Système pseudo - isolé** : c'est un système soumis à des forces extérieures qui se compensent :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

### II. Centre d'inertie d'un système :

#### 1. Définition :

Le centre d'inertie  $G$  d'un système est le seul point du système qui se déplace d'un mouvement rectiligne uniforme dans un repère terrestre lorsque le système évolue en demeurant isolé ou pseudo-isolé.

#### 2. Relation barycentrique :

Soit un système de masse  $M$  constitué de  $n$  points matériels  $A_1, A_2, \dots, A_n$  de masses respectives  $m_1, m_2, \dots, m_n$ .

Le barycentre  $G$  des points  $A_1, A_2, \dots, A_n$  est tel que :  $m_1 \overrightarrow{GA_1} + m_2 \overrightarrow{GA_2} + \dots + m_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$  (1)

Soit  $O$  un point origine choisi arbitrairement :  $\overrightarrow{GA_1} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA_1}$ ;  $\overrightarrow{GA_2} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA_2}$

(1) devient :  $m_1(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA_1}) + m_2(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA_2}) + \dots + m_n(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA_n})$

$$\Rightarrow (m_1 + m_2 + \dots + m_n)\overrightarrow{GO} + m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + \dots + m_n\overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$$

$$M\overrightarrow{GO} + \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OA_i} = \vec{0} \text{ or } \overrightarrow{GO} = -\frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OA_i} \text{ d'où}$$

$$M\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OA_i} \text{: relation barycentrique}$$

#### 3. Principe de l'inertie :

Le centre d'inertie  $G$  d'un système isolé ou pseudo - isolé décrit toujours un mouvement rectiligne uniforme dans un repère galiléen.

**Remarque** : Un repère galiléen est un repère dans lequel le principe de l'inertie est vérifié

#### Exemples :

- Le repère géocentrique : l'origine est le centre de la terre et les axes sont orientés vers trois étoiles lointaines. Il est utilisé pour l'étude des mouvements des satellites.
- Le repère héliocentrique ou de Copernic : l'origine est le centre du soleil et les axes sont orientés vers trois étoiles lointaines. Il est utilisé pour l'étude des mouvements des planètes.
- Le repère terrestre : il est muni d'un point origine  $O$  de la terre auquel on rattache un système d'axes. Il est utilisé pour l'étude des mouvements de courte durée se déroulant au niveau de la terre ou à son voisinage.
- Le repère de temps.

**N.B.** : Un référentiel galiléen est un référentiel formé d'un repère d'espace galiléen et d'un repère de temps

### III. Vecteur quantité de mouvement :

#### 1. Cas d'un point matériel :

Le vecteur quantité de mouvement d'un point matériel de masse  $m$  animé d'un mouvement de vecteur vitesse  $\vec{v}$  a pour expression :

$$\vec{p} = m\vec{v} \Rightarrow p = mv : \text{on l'exprime en kg.m.s}^{-1}.$$

## 2. Cas d'un système :

Soit un système de masse  $M$  constitué de  $n$  points matériels  $A_1, A_2, \dots, A_n$  de masses respectives  $m_1, m_2, \dots, m_n$  et de vitesses respectives  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ .

Le vecteur quantité de mouvement d'un tel système s'écrit :

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n = \sum_{l=1}^n m_l \vec{v}_l \quad (1)$$

Si  $G$  le barycentre des points  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , alors on a :

$$\begin{aligned} M \overrightarrow{OG} &= \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OA}_i \Rightarrow \frac{d}{dt}(M \overrightarrow{OG}) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OA}_i \text{ or } M \text{ et } m_i \text{ sont constantes} \\ \Rightarrow M \frac{d}{dt} \overrightarrow{OG} &= \sum_{i=1}^n m_i \frac{d}{dt} \overrightarrow{OA}_i \Rightarrow M \vec{V}_G = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \quad (2) \end{aligned}$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow \vec{p} = M \vec{V}_G$$

### 3. Autre énoncé du principe de l'inertie :

Le vecteur quantité de mouvement d'un système isolé ou pseudo - isolé se conserve ( $M.R.U \Rightarrow \vec{V}_G = cste \Rightarrow \vec{p} = M \vec{V}_G = cste$ ).

#### Remarque : Application aux chocs

- Choc mou :** Lors d'un tel choc on a une conservation du vecteur quantité de mouvement :

$$\vec{p}_{\text{avant}} = \vec{p}_{\text{après}}$$

Exemple : Système ( $m_1, m_2$ )

$$\vec{p}_{\text{avant}} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 ; \vec{p}_{\text{après}} = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 \Rightarrow m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2$$

- Choc élastique :** Lors d'un tel choc on a une conservation du vecteur quantité de mouvement et de l'énergie cinétique totale :  $\begin{cases} \vec{p}_{\text{avant}} = \vec{p}_{\text{après}} \\ Ec_{\text{avant}} = Ec_{\text{après}} \end{cases}$

Exemple : Système ( $m_1, m_2$ )

$$\begin{cases} \vec{p}_{\text{avant}} = \vec{p}_{\text{après}} \\ Ec_{\text{avant}} = Ec_{\text{après}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 \end{cases}$$

## IV. Relation fondamentale de la dynamique (R.F.D)

### 1. Enoncé :

Dans un référentiel galiléen nous admettons avec Newton qu'à chaque instant la somme vectorielle des forces extérieures qui s'exercent sur un système est égale à la dérivée par rapport au temps de son vecteur quantité de mouvement :  $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ .

### 2. Conséquences de la R.F.D :

#### a) Cas d'un système isolé ou pseudo - isolé :

Pour un tel système on a :  $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p} = \text{constante}$  (principe de l'inertie).

#### b) Cas d'un système non isolé ni pseudo - isolé en translation :

Pour un tel système on a :  $\sum \vec{F}_{\text{ext}} \neq \vec{0}$  R.F.D  $\Rightarrow \sum \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$  avec  $\vec{p} = M \vec{V}_G \Rightarrow \sum \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{dM \vec{V}_G}{dt}$ , avec

$$M = \text{cste} \Rightarrow \sum \vec{F}_{\text{ext}} = M \frac{d\vec{V}_G}{dt} \text{ or } \frac{d\vec{V}_G}{dt} = \vec{a} : \text{vecteur accélération du centre d'inertie}$$

$$\Rightarrow \sum \vec{F}_{\text{ext}} = M \vec{a} : \text{(théorème du centre d'inertie)}$$

#### — Enoncé du théorème du centre d'inertie (T.C.I) ou deuxième loi de Newton :

Dans un repère galiléen la somme vectorielle des forces extérieures qui s'exercent sur un système en translation est égale à chaque instant au produit de sa masse par le vecteur accélération de son centre d'inertie.

c) Cas d'un système non isolé ni pseudo - isolé en rotation :

- Si la rotation est uniforme on a d'après le principe de l'inertie :  $\sum M_{\vec{F}_{ext}/\Delta} = 0$ .
- Si la rotation n'est pas uniforme on montre que :

$$\sum M_{\vec{F}_{ext}/\Delta} = J_{\Delta} \ddot{\theta} \text{ (théorème de l'accélération angulaire) avec}$$

- ✓  $J_{\Delta}$  : moment d'inertie du système ;
- ✓  $\ddot{\theta}$  : accélération angulaire.

3. Domaine de validité de la R.F.D :

La R.F.D n'est valable que dans un référentiel galiléen et pour des corps non relativistes c'est - à - dire animés de vitesses  $v < 0,14 C$  avec  $C = 3 \cdot 10^8 m.s^{-1}$ .

V. Quelques théorèmes généraux :

1. Théorème de l'énergie cinétique :

a) Expression :

- $E_c = \frac{1}{2}mv^2$  (pour la translation) ;
- $E_c = \frac{1}{2}J_{\Delta}w^2$  (pour la rotation) ;
- $E_c = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J_{\Delta}w^2$  (pour le cas général : translation + rotation)

b) Théorème :

$$\Delta E_c = E_{cf} - E_{ci} = \sum W_{\vec{F}_{ext}}$$

2. Energie mécanique :

a) Expression :

$$E_m = E_c + E_p \text{ avec :}$$

- $E_{pp} = mg(z - z_r)$  : énergie potentielle de pesanteur
- $E_{peT} = \frac{1}{2}k(\Delta\ell^2 - \Delta\ell_{rT}^2)$  : énergie potentielle élastique de translation
- $E_{per} = \frac{1}{2}C(\alpha^2 - \alpha_{rT}^2)$  : énergie potentielle élastique de rotation

b) Conservation de l'énergie mécanique :

Pour un système conservatif (c'est - à - dire soumis qu'à des forces extérieures conservatives) l'énergie mécanique est constante : sa variation est nulle.

$$E_m = \text{cste} \Rightarrow \Delta E_m = E_{mf} - E_{mi} = 0$$

c) Non conservation de l'énergie mécanique :

Pour un système non conservatif on a :

$$\Delta E_m = E_{mf} - E_{mi} = \sum W_{\vec{F} \text{ non conservatives}}$$

Fin du chapitre

## Exercices sur les bases de la dynamique

### Exercice n°1 :

Une locomotive de masse  $M_1 = 20$  tonnes animé d'une vitesse  $V_1 = 5 \text{ m.s}^{-1}$  heurte un wagon au repos de masse

$M_2 = 25$  tonnes. Les deux engins restent accrochés l'un à l'autre après le choc.

1) Calculer la vitesse commune  $V'$  de l'ensemble après le choc.

2) Calculer la perte d'énergie cinétique du système suite au choc.

### Exercice n°2 :

Une particule de masse  $m_1$  lancée avec une vitesse  $V_1$  heurte une particule cible immobile de masse  $m_2$ .

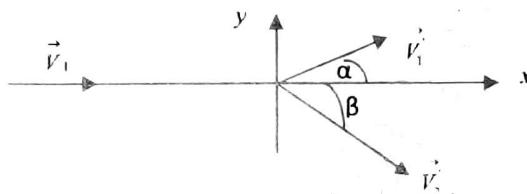
La particule projectile repart avec une vitesse  $V'_1$  et sa trajectoire est déviée d'un angle  $\alpha$  (voir croquis).

La particule cible est chassée avec une vitesse  $V'_2$  telle que  $\left( \begin{array}{c} \vec{V}'_2 \\ \vec{V}'_1 \\ \vec{V}_1 \end{array} \right) = \beta$ .

1) Donner l'expression de  $m_2$  en fonction de  $m_1$ ,  $V_1$ ,  $V'_1$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  puis calculer sa valeur.

2) Donner l'expression de  $V'_1$  en fonction de  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $V'_2$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  puis calculer sa valeur.

**On donne :**  $V_1 = 20000 \text{ km.s}^{-1}$ ;  $V'_2 = 6250 \text{ km.s}^{-1}$ ;  $m_1 = 1 \text{ u}$ ;  $\sin\alpha = 0,50$ ;  $\sin\beta = 0,40$ ;  $\sin(\alpha + \beta) = 0,80$ .



### Exercice n°3 : (TS1)

Un solide de masse  $m_1$  est lancée avec une vitesse  $\vec{V}_1$ . Il heurte un solide de masse  $m_2$  lancée à la vitesse  $\vec{V}_2$ . Les deux solides supposés ponctuels se déplacent sur le même plan horizontal, leur vecteur vitesse  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  sont colinéaires mais de sens contraires.

**On donne :**  $m_2 = 2m_1 = 400 \text{ g}$ ;  $V_1 = 1,20 \text{ m.s}^{-1}$  et  $V_2 = 0,75 \text{ m.s}^{-1}$ .

1) Le choc est supposé élastique

- Trouver les normes des vecteurs vitesses immédiatement après le choc.
- On désigne par G le centre d'inertie des deux solides.

Quelle est la vitesse de G avant le choc ?

Quelle est la vitesse de G immédiatement après le choc ?

- On considère le repère  $R_G$  défini par le centre d'inertie G du système et l'axe  $Gx$  orienté positivement dans le sens de  $\vec{V}_1$ .

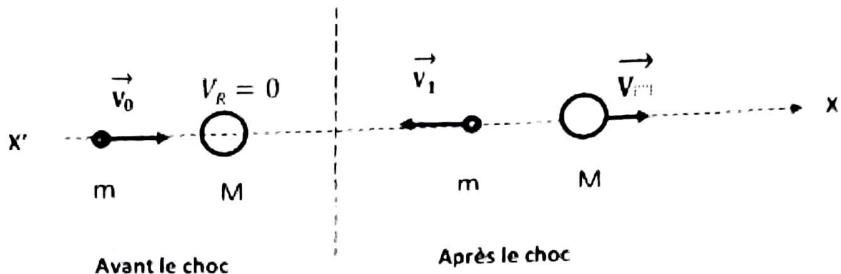
Déterminer dans ce repère les vitesses des solides avant et après le choc.

- Les deux solides se heurtent maintenant avec les mêmes vitesses que précédemment mais restent collés après le choc qui est mou.

Déterminer la vitesse  $V$  de l'ensemble après le choc. Comparer ce résultat à celui obtenu plus haut et conclure.

Comparer les énergies cinétiques du système avant et après le choc.

Un neutron provenant d'une réaction de fission est expulsé avec une vitesse  $\vec{V}_0$  de valeur (norme)  $V_0 = 20000 \text{ km. s}^{-1}$ . Pour contrôler cette réaction de fission, il faut ralentir les neutrons grâce à des chocs successifs sur d'autres noyaux initialement au repos ( $V_R = 0$ ) jusqu'à obtenir au bout de  $n$  chocs, une vitesse des neutrons  $v_n = 2,94 \text{ km. s}^{-1}$  (figure 2). Les chocs sont supposés élastiques et les vitesses colinéaires (choc frontal). On notera  $m$  la masse du neutron et  $M$  celle d'un noyau au repos heurté par le neutron.



**Figure 2**

1. Soient  $\vec{V}_1$  la vitesse du neutron juste après le premier choc et  $\vec{V}$  la vitesse du noyau-cible juste après le choc.

On considère le système formé par le neutron et le noyau cible.

a) Donner l'expression du vecteur quantité de mouvement du système avant le choc puis son expression après le choc.

b) Donner l'expression de l'énergie cinétique du système avant le choc puis son expression après le choc.

c) En appliquant la conservation de la quantité de mouvement et celle de l'énergie cinétique montrer qu'après le premier choc la valeur  $V_1$  de la vitesse du neutron est donnée par :  $V_1 = \frac{(M-m)V_0}{M+m}$ .

2. Déduire de la question précédente l'expression de la vitesse  $V_2$  du neutron après le choc en fonction de  $m$ ,  $M$  et  $V_0$ .

3. Montrer qu'après  $n$  chocs la vitesse du neutron peut s'écrire  $V_n = V_0 q^n$  ; on donnera l'expression de  $q$ .

4. Calculer le nombre de chocs nécessaire sur des noyaux de deutérium sachant que le rapport de la masse du deutérium sur la masse du neutron vaut  $\frac{M}{m} = 2$ .

#### Exercice n°5 : (TS1)

Une fusée à décollage vertical a une masse au sol  $m_0$  dont 80% de gaz.

Elle décolle à la date 0 ; la vitesse d'éjection des gaz par rapport à la fusée est  $w$ , le débit de gaz est constant égal à  $\mu$ .

1) En appliquant le théorème du centre d'inertie à la fusée à une date  $t$ , exprimer l'accélération  $a$  du mouvement.

2) Tracer la courbe qui donne les variations de l'accélération en fonction du temps.

On donne :  $\mu = 100 \text{ kg.s}^{-1}$ ;  $w = 2400 \text{ m.s}^{-1}$ .

**Fin de la série**

## Chapitre III : Applications des bases de la dynamique

Pour résoudre un problème de dynamique il faut :

- Choisir un système ;
- Choisir un référentiel pour savoir s'il est galiléen ou non
- Faire le bilan des forces extérieures qui s'exercent sur le système et les représenter sur un schéma
- Appliquer la R.F.D ou l'une de ses conséquences (T.C.I) ou (T.A.A).
- Projeter la relation vectorielle obtenue sur un système convenablement choisi.

### I- Mouvement rectiligne

#### I-1. Mouvement d'un projectile dans un champ de pesanteur : cas où $\vec{V}_0 \parallel \vec{g}$

Une bille de masse  $m$  est lancée verticalement vers le haut avec un vecteur vitesse  $\vec{V}_0$  verticale de norme  $V_0 = 10 \text{ m.s}^{-1}$  à partir d'un point A situé à 1m du sol.

L'origine des dates est prise à l'instant où la bille est lancée. On choisit un axe vertical ( $Oz$ ) dirigé vers le haut, d'origine O situé au sol. On néglige la résistance de l'air et on donne  $g = 9,8 \text{ N.kg}^{-1}$

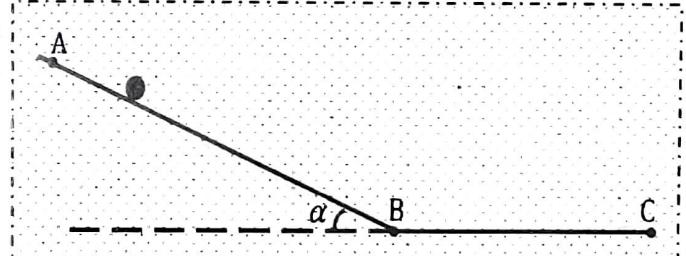
1. Déterminer le vecteur accélération de la bille et en déduire les équations horaires.
2. Déterminer la durée de la montée et en déduire l'altitude maximale de la bille par rapport au sol.
3. Au bout de combien de temps repasse-t-elle au point A ? quelle est alors sa vitesse ?
4. Au bout de combien de temps frappe-t-elle le sol ?

#### I-2. Solide glissant sur un plan incliné

Une bille de masse  $m = 50 \text{ g}$ , assimilable à un point matériel, est abandonnée sans vitesse initiale en un point A d'une gouttière, constituée de deux parties :

- ✓ un tronçon rectiligne AB incliné d'un angle  $\alpha = 30^\circ$  par rapport au plan horizontal et de longueur  $AB = l = 1,6 \text{ m}$
- ✓ un tronçon horizontal BC.

La force de frottement  $\vec{f}$  qui s'applique sur la bille ne s'exerce qu'entre B et C ;  $\vec{f}$  est colinéaire et de sens contraire à la vitesse  $\vec{V}$  de la bille. Son intensité est  $f = 0,4 \text{ N}$ .

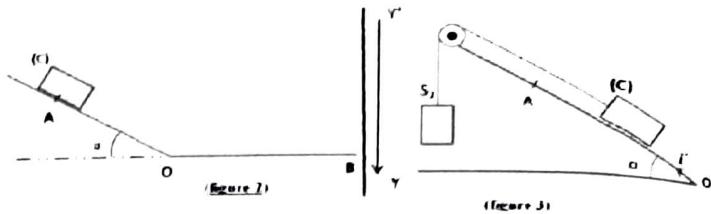


##### I. Mouvement sur la partie AB

1. Enoncer le théorème du centre d'inertie.
2. En appliquant convenablement ce théorème à la bille, exprimer l'accélération  $a_1$  prise par la bille en fonction de  $g$  et  $\alpha$  puis calculer sa valeur.
3. Quelle est la nature du mouvement de la bille ? Ecrire les expressions  $x_1(t)$  et  $V_1(t)$  respectivement de sa position et de sa vitesse à l'instant  $t$  en prenant pour origine des espaces, le point A et comme origine des dates, l'instant où la bille a été lâchée.
4. Déterminer la durée  $\Delta t_1$  du parcours AB. En déduire sa vitesse  $V_B$ .

##### II. Mouvement sur la partie BC

1. Déterminer l'accélération  $a_2$  de la bille.
2. Calculer la longueur BC pour qu'elle arrive en C avec une vitesse nulle.
3. Ecrire les expressions  $x_2(t)$  et  $V_2(t)$  respectivement de sa position et de sa vitesse à l'instant  $t$  on prendra le point B comme origine des espaces et pour origine des temps, l'instant de son passage en B.
4. Déterminer la durée  $\Delta t_2$  du parcours.



### Partie I :

Un chariot (C) de masse  $m=0,5 \text{ Kg}$  glisse sans frottement sur un plan incliné faisant un angle  $\alpha = 30^\circ$  avec l'horizontale (figure 2). Le solide est abandonné sans vitesse initiale au point A. On donne  $OA = 4,9 \text{ m}$  et  $OB = 4\text{m}$ .

1.

- Représenter sur un schéma les forces extérieures qui s'exercent sur le chariot (C) le long de son mouvement sur le plan (OA).
  - Donner l'expression de l'accélération  $a_1$  en fonction de  $g$  et de  $\alpha$ . La calculer.
  - Calculer la vitesse du chariot au point O.
- On admet que la vitesse au point O garde la même valeur lorsque sa direction change.
    - Déterminer la nature du mouvement sur (OB).
    - Déterminer sa vitesse au point B.
  - En réalité, le chariot atteint le point B avec une vitesse  $V_B = 5 \text{ m/s}$ . En admettant l'existence d'une force de frottement  $f$  constante, opposée au vecteur vitesse, déterminer la valeur de cette force.

### Partie II :

Le chariot (C) est attaché à un fil inextensible  $f_1$  qui passe sur la gorge d'une poulie de masse négligeable. L'autre extrémité du fil est accrochée à un solide  $S_2$  de masse  $m_2$  inconnue (figure 3). Le contact entre le chariot et le plan se fait avec des forces de frottement supposées équivalentes à une force  $f$  parallèle, de sens contraire au mouvement de valeur  $f = 0,5 \text{ N}$ . Le système est abandonné à lui-même sans vitesse initiale à partir de O, l'origine des temps est choisie à cette date. Le chariot arrive au point A situé à  $4,9 \text{ m}$  de O, à l'instant  $t = 3,14 \text{ s}$ .

- Etablir l'expression de l'accélération  $a_2$  du centre d'inertie du chariot en fonction de  $m$ ,  $m_2$ ,  $g$ ,  $f$  et  $\alpha$ . En déduire la nature du mouvement.
- Ecrire l'équation horaire du mouvement du chariot. En déduire la valeur de son accélération  $a_2$ .
- Déduire la valeur de la masse  $m_2$  du solide.

### I-4. Chute verticale dans un fluide

Dans beaucoup de moteurs, pour diminuer l'usure des pièces mécaniques, on utilise des huiles dont l'une des caractéristiques fondamentales est la viscosité. Dans ce qui suit, on se propose de déterminer la viscosité d'une "huile moteur". Pour cela, on étudie la chute verticale d'une bille en acier dans l'huile. La bille est lâchée sans vitesse initiale à partir d'un point O du fluide pris comme origine de l'axe (OX) vertical et orienté vers le bas et l'instant de lâcher est pris comme origine des dates  $t = 0$ .

Sur la bille s'exercent les trois forces suivantes :

- ✓ son poids  $\vec{P}$  ;
- ✓ la résistance  $\vec{f}$  du fluide, qui est une force colinéaire et de sens opposé au vecteur vitesse instantanée de la bille, d'intensité  $f = 6\pi\eta rV$ , expression où  $\eta$  est la viscosité du fluide supposée constante,  $V$  est la valeur de la vitesse instantanée de la bille et  $r$  son rayon ;
- ✓ la poussée d'Archimède  $\vec{F}$  qui est une force verticale orientée vers le haut, d'intensité  $F = \rho V_b g$  relation où  $\rho$  est la masse volumique du fluide,  $V_b$  le volume de la bille et  $g$  l'intensité de la pesanteur.

- Représenter les forces appliquées à la bille à une date  $t > 0$ .
- Par application du théorème du centre d'inertie, montrer que l'équation différentielle du mouvement de la bille peut s'écrire sous la forme :  $\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau}V = C$  où  $C$  et  $\tau$  sont des constantes.
- Donner l'expression de  $C$  en fonction de  $g$ ,  $\rho_{ac}$  (masse volumique de l'acier) et  $\rho_h$  (masse volumique de "l'huile moteur") puis exprimer  $\tau$  en fonction de  $\rho_{ac}$ ,  $r$  et  $\eta$  (viscosité de l'huile de moteur). Vérifier que  $C = 8,4 \text{ m.s}^{-2}$ .
- Au bout d'un temps suffisamment long, l'accélération de la bille s'annule. La vitesse obtenue à partir de cet instant est appelée vitesse limite de module  $V_{lim}$ .



b) Décrire la nature du mouvement de la bille après annulation de l'accélération puis exprimer la vitesse limite  $V_{lim}$  en fonction de  $\tau$  et  $C$ .

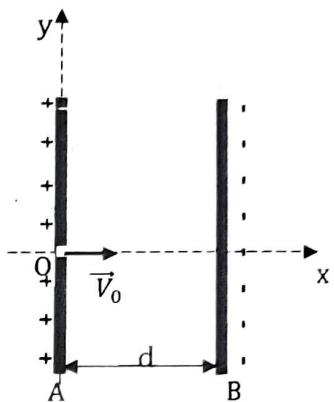
b) On trouve expérimentalement que  $V_{lim} = 4,2 \text{ cm.s}^{-1}$ . Quelle valeur de  $\tau$  peut-on en déduire ?

5. Déterminer la valeur de la viscosité  $\eta$  de "l'huile de moteur".

**Donnée :** masse volumique de l'acier :  $\rho_{ac} = 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ; masse volumique de l'huile moteur :  $\rho_h = 1,26 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ; rayon de la bille  $r = 1,5 \text{ mm}$ ; volume de la bille  $V_b = \frac{4}{3}\pi r^3$ ;  $g = 10 \text{ N/kg}$ .

### I-5. Mouvement d'une particule chargée dans un champ uniforme : cas où $\vec{E} \parallel \vec{V}_0$

Une particule de charge  $q$  positive arrive avec une vitesse  $\vec{V}_0$  en un point O d'un condensateur plan comme indiqué sur le schéma à l'instant de date  $t=0$ . La distance entre les armatures est  $d$  et on établit une tension  $U = V_A - V_B$  entre les plaques.

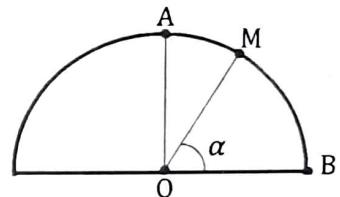


1. Donner les caractéristiques du champ électrique  $\vec{E}$  entre les plaques.
2. Déterminer l'expression du vecteur accélération du mobile.
3. En déduire la nature du mouvement et l'équation horaire  $x(t)$  du mouvement.
4. Déterminer la vitesse  $v$  de la particule en un point M situé à une distance  $x$  de la plaque A. En déduire la vitesse  $v_B$  de la particule à son arrivée sur plaque B.

## II- Mouvement circulaire

### II-1. Solide glissant sur une sphère

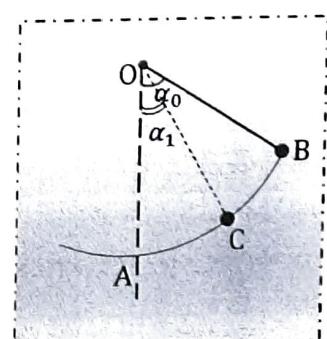
Un solide ponctuel S de masse  $m = 10 \text{ g}$  est placé au sommet A d'une demi-sphère de rayon  $r = 1 \text{ m}$ . On agite légèrement la demi-sphère de sorte que le solide quitte la position A sans vitesse initiale puis glisse sans frottement le long de la demi-sphère. La position M du solide peut être repérée par l'angle  $\alpha = \widehat{BOM}$ .



1. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, donner l'expression de la vitesse  $V$  du solide en M en fonction de  $r, g$  et  $\alpha$ .
2. Exprimer l'intensité de la réaction  $R$  exercée par la sphère sur le solide au point M en fonction de  $m, g$  et  $\alpha$ .
3. Déterminer la valeur  $\alpha_0$  de l'angle  $\alpha$  pour laquelle le solide quitte la sphère.  
En déduire la valeur de la vitesse en ce point.

### II-2. Pendule simple

Une boule de plomb quasi ponctuelle, de masse  $m = 100 \text{ g}$ , est suspendue à l'extrémité d'un fil inextensible et de masse négligeable. L'autre extrémité du fil est fixée à un point O et la longueur du fil vaut  $\ell = 50 \text{ cm}$ . On écarte la boule de sa position d'équilibre stable au point A, d'un angle  $\alpha_0 = 45^\circ$  et on la lâche sans vitesse initiale.



1. Donner l'expression de la vitesse lorsque la boule passe au point C défini par l'angle  $\widehat{AOC} = \alpha_1$ . En déduire sa vitesse lorsqu'elle passe en A.
2. Donner l'expression de la tension du fil lorsque la boule passe au point C. En déduire la tension du fil lorsque la boule passe au point A.
3. Le solide S étant initialement au repos à la position d'équilibre stable au point  $M_0$ , on lui communique une vitesse horizontale  $V_0$  de telle sorte qu'il décrive un mouvement circulaire autour de O, dans le plan vertical.
  - a. Montrer que l'intensité de la tension du fil vérifie la relation:  $T = mg \cos \alpha + \frac{mv^2}{\ell}$ .



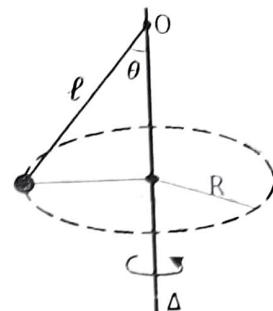
- b. En déduire la valeur minimale de la vitesse  $V_H$  au point culminant H atteint par le solide, pour que le fil reste tendu.

- c. En déduire la valeur minimale de la valeur de la vitesse  $V_0$  initialement communiquée au solide.

### **II-3. Pendule conique**

Considérons un pendule constitué d'un solide de masse  $m$  relié à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur  $\ell$  et de masse négligeable, l'extrémité supérieure du fil est fixée au point O d'un axe verticale ( $\Delta$ ). Lorsque cet axe tourne à une vitesse angulaire suffisante, le fil s'incline et le centre d'inertie G du solide prend un mouvement circulaire uniforme sur le cercle de centre I et de rayon R.

1. Déterminer la tension du fil en l'exprimant en fonction de la vitesse angulaire.
2. Donner l'expression de l'angle  $\theta$  en fonction de  $\omega$ .
3. Déterminer la vitesse minimale de rotation au-delà de laquelle la bille s'écarte de sa position d'équilibre.
4. Calculer la tension du fil pour  $\theta=30^\circ$  et pour les deux valeurs de  $\omega$  :  $w_1=6 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $w_2=2 \text{ rad.s}^{-1}$ .  $L=80\text{cm}$  ;  $m=100\text{g}$



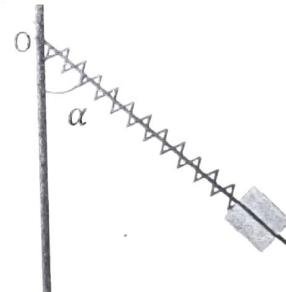
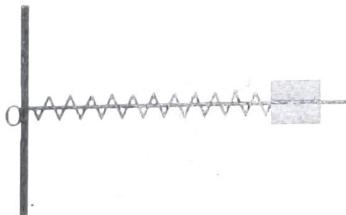
### **II-4. Pendule élastique**

Sur une barre verticale est soudée en un point O une tige horizontale. On enfile sur cette tige un ressort de constante de raideur K et de longueur à vide  $l_0$ , l'une des extrémités du ressort est fixée au point O, sur l'autre extrémité est fixée un solide de masse m pouvant coulisser sans frottement sur la tige.

La barre en tournant sur elle-même entraîne l'ensemble dans son mouvement de rotation, de vitesse angulaire constante  $\omega$ . Exprimer l'allongement pris par le ressort en fonction de  $m, K, l_0$  et  $\omega$ .

On donne :  $\omega = 2 \text{ tours.s}^{-1}$  ;  $K = 30 \text{ N.m}^{-1}$  ;  $m = 100 \text{ g}$  ;  $l_0 = 20 \text{ cm}$  ;  $\pi^2 = 10$ .

1. La tige est inclinée d'un angle  $\alpha = 45^\circ$  par rapport à la verticale.
  - a) Etablir l'expression de la tension T du ressort en fonction de  $m, g, l_0, x(\text{allongement}), \alpha$ .
  - b) En déduire l'expression de l'allongement du ressort. Faire l'application numérique.
  - c) Calculer la vitesse linéaire du solide de masse m.

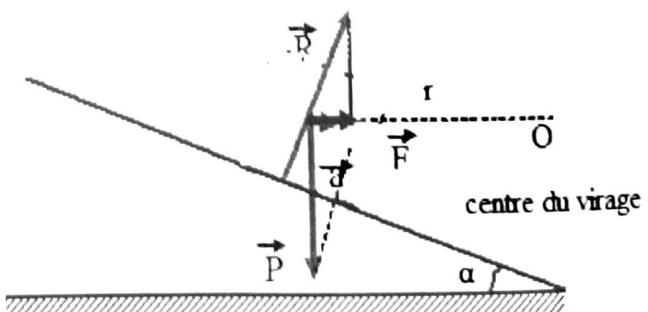


### **II-5. Véhicule dans un virage :**

On étudie le mouvement d'un cycliste dans un virage relevé d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale ; on suppose une absence totale de frottements entre la route et la bicyclette.

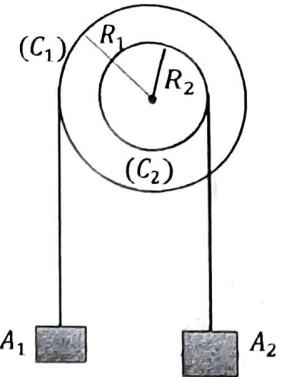
Le rayon du virage étant r, calculer la vitesse v que le cycliste doit avoir pour tourner sans encombrement.

Données :  $r = 5^\circ$  ;  $r = 250\text{m}$  ;  $g = 9.8\text{ms}^{-2}$



### II-6. Mouvement combiné rotation plus translation

Deux cylindres ( $C_1$ ) et ( $C_2$ ), coaxiaux, solidaires l'un de l'autre ont respectivement pour rayon  $R_1 = 10 \text{ cm}$  et  $R_2 = 5 \text{ cm}$ . Ils constituent un système ( $S$ ) pouvant tourner autour d'un axe horizontal confondu avec leur axe de révolution, sur lequel se trouve le centre de gravité. Le moment d'inertie du système ( $S$ ) par rapport à cet axe de révolution vaut  $J_S = 27.10^{-4} \text{ Kg.m}^2$ . Le cylindre ( $C_1$ ) soutient un corps ( $A_1$ ) de masse  $m_1 = 100 \text{ g}$  par l'intermédiaire d'un fil inextensible, de masse négligeable, fixé au cylindre. Le cylindre ( $C_2$ ) soutient, de la même façon, un corps ( $A_2$ ) de masse  $m_2 = 120 \text{ g}$ .



Les fils étant verticaux et leur sens d'enroulement est tels que ( $A_1$ ) et ( $A_2$ ) se déplacent en sens contraire, on libère ce dispositif sans vitesse initiale.

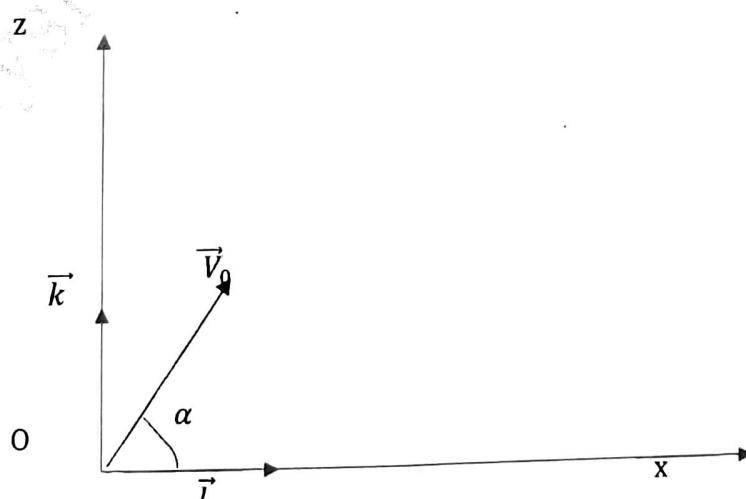
1. Etablir la nature du mouvement de chaque corps, ( $A_1$ ), ( $A_2$ ) et du système ( $S$ ).
2. Calculer numériquement l'accélération angulaire de ( $S$ ) et l'accélération de ( $A_1$ ) et de ( $A_2$ ).
3. Calculer la valeur de la tension de chaque fil.

### III. Mouvement parabolique

#### III-1. Mouvement d'un projectile dans un champ de pesanteur : cas où $\vec{V}_0$ non parallèle à $\vec{g}$

Un obus de masse  $m = 1,6 \text{ kg}$  est lancé dans le plan vertical d'un repère ( $O ; \vec{i} ; \vec{k}$ ) à partir du point  $O$  avec un vecteur vitesse  $\vec{V}_0$  faisant un angle  $\alpha$  avec le plan horizontal d'intensité  $V_0 = 200 \text{ m.s}^{-1}$ . On néglige la résistance de l'air et on prend  $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ .

1. Etablir les équations paramétriques  $x = f(t)$  et  $z = g(t)$ . En déduire l'équation de la trajectoire.
2. a) On donne à  $\alpha$  la valeur  $\alpha_1 = 55^\circ$ ; détermine la position P atteint par le projectile lorsqu'il arrive sur l'axe horizontale ( $O ; \vec{i}$ ). Cette position correspond à la portée du tir.  
 b) Montrer qu'il y a une deuxième valeur de  $\alpha$  noté  $\alpha_2$  pour laquelle la portée est atteinte.  
 c) Pour quelle valeur de  $\alpha$  la portée est-elle maximale.
3. a) Calculer la hauteur maximale atteint ou flèche de tir.  
 b) Pour quelle valeur de  $\alpha$  la flèche de tir est-elle maximale. Que pensez vous de cette condition de tir.
4. a) Calculer la durée du tir.  
 b) Calculer la vitesse du projectile arrivant en P.  
 c) Déterminer les caractéristiques du vecteur vitesse au point P.



**Cas où  $\vec{E}$  et  $\vec{V}_0$  sont perpendiculaire**

Des électrons pénètrent en O, avec un vecteur vitesse  $\vec{V}_0$  horizontal, entre deux armatures A et B d'un condensateur plan. Entre ces deux plaques de longueur  $l$  et distantes de  $d$ , est appliquée une tension  $U_{AB} > 0$ .  
 Données : masse électron  $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ; charge électron  $q = -e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ .

1. Déterminer les caractéristiques du champ  $\vec{E}$  à l'intérieur du condensateur.

2. Donner l'équation cartésienne du mouvement d'un électron.

3. a) Déterminer les coordonnées du point de sortie ?

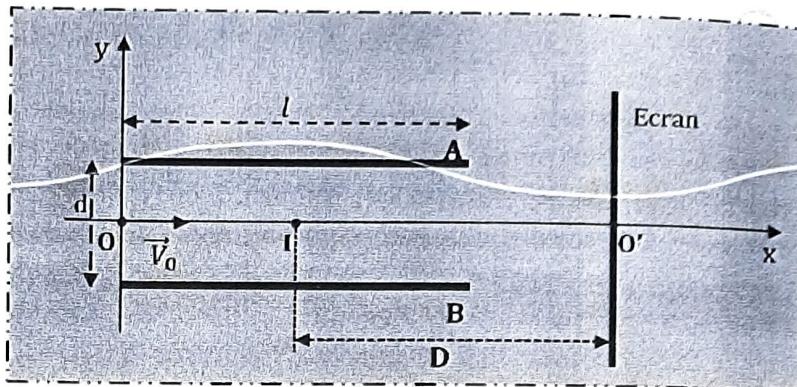
b) Quelle condition doit remplir la tension  $U_{AB}$  pour que les électrons puissent sortir du champ électrique  $\vec{E}$  sans heurter les plaques ? Cette condition est la condition d'émergence.

c) Déterminer l'expression de la vitesse au point de sortie S et la déviation électrostatique  $\alpha$ .

4. Un écran est placé à la distance D du point I, perpendiculairement à  $(O, \vec{r})$ .

a) Quelle est la nature du mouvement des particules entre le point S et l'écran. Justifier.

b) Exprimer l'ordonnée du point d'impact O'P (déflexion électrique) des électrons sur cet écran. Montrer qu'elle est proportionnelle à  $U_{AB}$ .



❖ **Cas où  $(\overrightarrow{ox}, \overrightarrow{V}_0) = \alpha$**

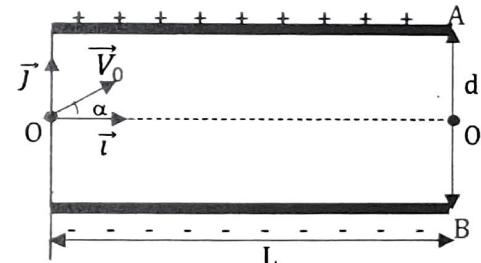
Un faisceau de protons homocinétique, pénètre en O avec une vitesse  $\vec{V}_0$  dans l'espace compris entre deux armatures A et B d'un condensateur plan auquel on applique une tension  $U_{AB} > 0$ . Entre ces plaques s'établit un champ électrique uniforme  $\vec{E}$  (voir figure).

1. Déterminer l'équation de la trajectoire

2. Déterminer l'ordonnée maximale  $y_s$ .

3. Quelle est la condition d'émergence du faisceau ?

4. Déterminer la tension  $U_{AB}$  qui permet aux de sortir en O'.



**IV- Exemples de résolution :**

**Application n°1 : mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur terrestre  $\vec{g}$  :**

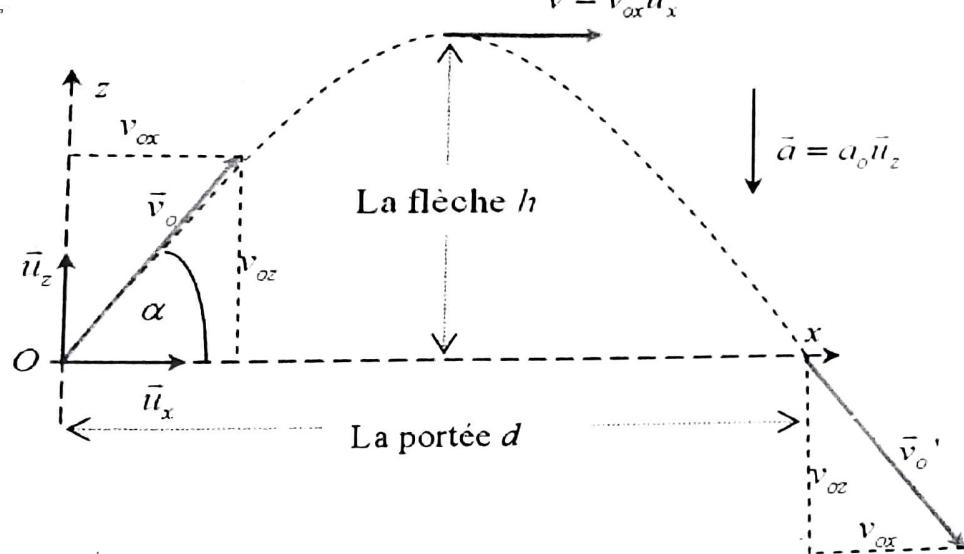
Un projectile de masse m est lancé dans le champ de pesanteur terrestre  $\vec{g}$  à partir d'un point O origine d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{k})$  avec un vecteur vitesse  $\vec{V}_0$  faisant un angle  $\alpha$  avec le plan horizontal.

On néglige la résistance de l'air. Etudier son mouvement.

Résolution :

1. **Equations horaires du mouvement :**

- Système : projectile
- RTSG
- BF :  $\vec{P}$  : poids du projectile
- T.C.I :  $\vec{P} = m\vec{a} \Rightarrow m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g} = \text{cste} \Rightarrow \begin{cases} \vec{V} = \vec{a}t + \vec{V}_0 \\ \vec{OM} = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{V}_0 t + \vec{OM}_0 \end{cases}$



Dans le repère ces équations donnent :

- At  $t = 0$  :

$$\vec{a} \begin{cases} a_z = g_x = 0 \\ a_z = g_z = -g \end{cases} \Rightarrow \vec{V}_0 \begin{cases} V_{0x} = V_0 \cos \alpha \\ V_{0z} = V_0 \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OM_0} \begin{cases} x_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases}$$

- At  $t \neq 0$  :

$$\vec{a} \begin{cases} a_z = g_x = 0 \\ a_z = g_z = -g \end{cases} \Rightarrow \vec{V} \begin{cases} V_x = a_x t + V_{0x} \\ V_z = a_z t + V_{0z} \end{cases} \Rightarrow \vec{V} \begin{cases} V_x = V_0 \cos \alpha \\ V_z = -gt + V_0 \sin \alpha \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OM} \begin{cases} x = \frac{1}{2} a_x t^2 + V_{0x} t + x_0 \\ z = \frac{1}{2} a_z t^2 + V_{0z} t + z_0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OM} \begin{cases} x = (V_0 \cos \alpha) t \\ z = -\frac{1}{2} g t^2 + (V_0 \sin \alpha) t \end{cases}$$

## 2. Équation cartésienne de trajectoire :

$$\overrightarrow{OM} \begin{cases} x = (V_0 \cos \alpha) t & (1) \\ z = -\frac{1}{2} g t^2 + (V_0 \sin \alpha) t & (2) \end{cases} \text{ la relation (1)} \Rightarrow t = \frac{x}{V_0 \cos \alpha} \quad (1)'$$

$$(1)' \text{ dans (2) donne : } z = -\frac{1}{2} g \left( \frac{x}{V_0 \cos \alpha} \right)^2 + (V_0 \sin \alpha) \left( \frac{x}{V_0 \cos \alpha} \right) \Rightarrow z = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{V_0^2 \cos^2 \alpha} + x \tan \alpha$$

Nature de la trajectoire : la trajectoire est une parabole.

## 3. Détermination de la portée du tir :

C'est la distance  $OP$  qui sépare le point d'impact  $P$  du projectile du point de lancement  $O$ .

$$OP = x_P - x_0 = x_P, \text{ or au point } P \text{ on a } z=0 \Rightarrow z = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{V_0^2 \cos^2 \alpha} + x \tan \alpha = 0$$

$$\Rightarrow x \left( -\frac{1}{2} g \frac{x}{V_0^2 \cos^2 \alpha} + \tan \alpha \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 : \text{point de lancement} \\ -\frac{1}{2} g \frac{x}{V_0^2 \cos^2 \alpha} + \tan \alpha = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} g \frac{x}{V_0^2 \cos^2 \alpha} + \tan \alpha = 0 \end{cases}$$

$$x_P = \frac{2V_0^2 \cos^2 \alpha \tan \alpha}{g} = \frac{2V_0^2 \cos^2 \alpha \sin \alpha}{g \cos \alpha} = \frac{2V_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g}, \text{ avec } 2 \cos \alpha \sin \alpha = \sin 2\alpha \Rightarrow x_P = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

## 4. Valeur de $\alpha$ pour laquelle la portée est maximale :

$$x_P \text{ est maximale si } \sin 2\alpha = 1 \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

Cours à domicile : 77 550 04 15



### 5. Les valeurs de $\alpha$ pour lesquelles la portée est atteinte :

#### a) Première méthode :

$$x_P = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{gx_P}{V_0^2}, \text{ soit } u \text{ l'angle tel que}$$

$$\sin u = \frac{gx_P}{V_0^2} \Rightarrow \sin 2\alpha = \sin u$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha = u \\ 2\alpha = \pi - u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{u}{2} \\ \alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{u}{2} \end{cases}$$

**Remarque :** Les deux angles sont complémentaires ( $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ ). L'angle de tir  $\alpha$  le plus petit correspond au tir tendu, l'autre au tir en cloche.

#### b) Deuxième méthode :

Au point P on a  $x = x_P$  et  $z = 0$ .

$$\Rightarrow = -\frac{1}{2}g \frac{x_P^2}{V_0^2 \cos^2 \alpha} + x_P \tan \alpha = 0 \Rightarrow = -\frac{1}{2}g \frac{x_P}{V_0^2 \cos^2 \alpha} + \tan \alpha = 0 \text{ or } \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$$

$$\Rightarrow -\frac{gx_P}{2V_0^2} (1 + \tan^2 \alpha) + \tan \alpha = 0 \Rightarrow -\frac{gx_P}{2V_0^2} \tan^2 \alpha + \tan \alpha - \frac{gx_P}{2V_0^2} = 0.$$

Si  $\Delta = 1 - 4 \left( \frac{gx_P}{2V_0^2} \right)^2 > 0$ , alors on aura deux angles de tir : 
$$\begin{cases} \alpha_1 = \tan^{-1} \left( \frac{1+\sqrt{\Delta}}{\frac{gx_P}{V_0^2}} \right) \\ \alpha_2 = \tan^{-1} \left( \frac{1-\sqrt{\Delta}}{\frac{gx_P}{V_0^2}} \right) \end{cases}$$

### 6. Détermination de la flèche du tir :

C'est la côte maximale atteinte par le projectile. Au sommet S de la trajectoire  $z = z_S = z_{max}$

$$\Rightarrow V_{zS} = -gt_S + V_0 \sin \alpha = 0 \Rightarrow t_S = \frac{V_0 \sin \alpha}{g}, \text{ avec } z = -\frac{1}{2}gt^2 + (V_0 \sin \alpha)t \Rightarrow z_S = -\frac{1}{2}gt_S^2 + (V_0 \sin \alpha)t_S$$

$$\Rightarrow z_S = -\frac{1}{2}g \left( \frac{V_0 \sin \alpha}{g} \right)^2 + (V_0 \sin \alpha) \frac{V_0 \sin \alpha}{g} = \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{g} \left( -\frac{1}{2} + 1 \right) \Rightarrow z_S = z_{max} = \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

**Remarque :** la flèche est maximale pour  $\sin \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$  : c'est le tir suivant la verticale qui est formellement déconseillé en artillerie car le projectile retombe sur le tireur.

### 7. Détermination de la durée du tir :

$$\Delta t = t_p - t_0 = t_p, \text{ avec } x_p = (V_0 \cos \alpha)t_p = \frac{2V_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g} \Rightarrow t_p = \frac{2V_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g V_0 \cos \alpha} \Rightarrow t_p = \frac{2V_0 \sin \alpha}{g} = 2t_s.$$

**Remarque : autre méthode**

Au point P,  $z = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}gt^2 + (V_0 \sin \alpha)t = 0 \Rightarrow t \left( -\frac{1}{2}gt + V_0 \sin \alpha \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 = t_0 \\ t = t_p = \frac{2V_0 \sin \alpha}{g} \end{cases}$

### 8. Détermination de la vitesse au point de chute :

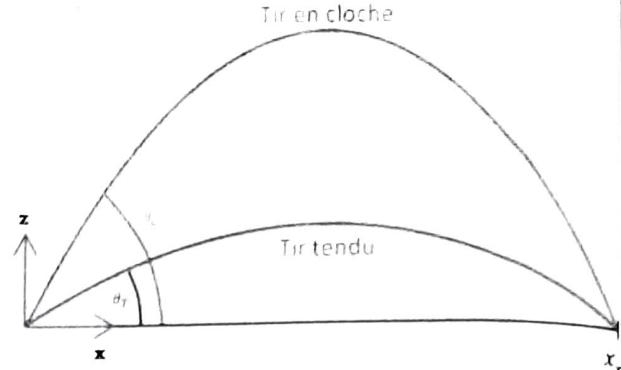
$$\vec{V} \begin{cases} V_x = V_0 \cos \alpha \\ V_z = -gt + V_0 \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \vec{V}_P \begin{cases} V_{Px} = V_0 \cos \alpha \\ V_{Pz} = -gt_p + V_0 \sin \alpha \end{cases} \text{ avec } t_p = \frac{2V_0 \sin \alpha}{g}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_P \begin{cases} V_{Px} = V_0 \cos \alpha \\ V_{Pz} = -2V_0 \sin \alpha + V_0 \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \vec{V}_P \begin{cases} V_{Px} = V_0 \cos \alpha \\ V_{Pz} = -V_0 \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow V_p = \sqrt{(V_0 \cos \alpha)^2 + (-V_0 \sin \alpha)^2} = V_0.$$

**Remarque : autre méthode**

On applique le théorème de l'énergie cinétique entre O et P :

$$\frac{1}{2}mV_p^2 - \frac{1}{2}mV_0^2 = w_{\vec{P}}(O \rightarrow P) \text{ or } w_{\vec{P}}(O \rightarrow P) = mg(z_0 - z_p) = 0 \text{ d'où } V_p = V_0.$$



9. Détermination de la direction de la vitesse au point de chute :

Soit  $\beta$  l'angle entre  $\vec{V}_P$  et la verticale descendante :  $\sin\beta = \frac{v_{Px}}{v_P} = \frac{v_0 \cos\alpha}{v_P} \Rightarrow \beta = \sin^{-1}\left(\frac{v_0 \cos\alpha}{v_P}\right)$ .

Application n°2 : Mouvement d'une particule chargée dans un champs électrique uniforme  $\vec{E}$  :

a) Rappels :

— Caractéristiques du champ uniforme  $\vec{E}$  :

$\vec{E}$  direction : perpendiculaire aux plaques  
 $\vec{E}$  sens : suivant les potentiels décroissants

intensité :  $E = \frac{U}{d}$ , exprimée en  $V.m^{-1}$  ou  $N/C$

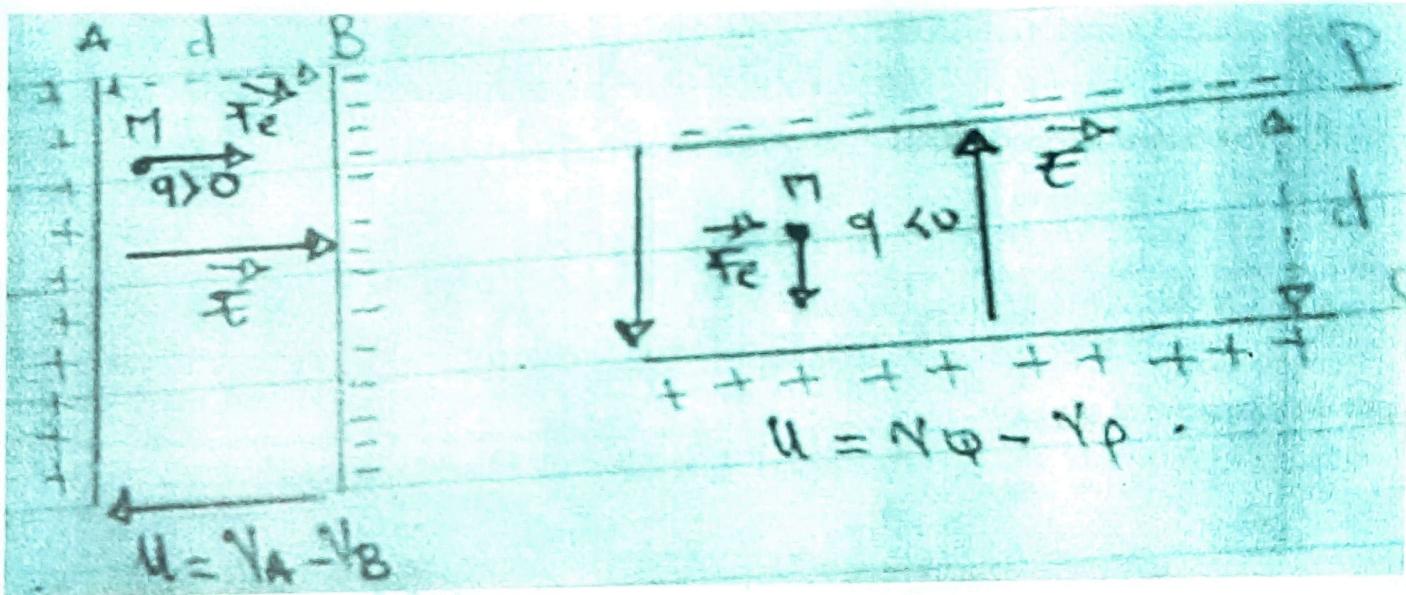
— Caractéristiques de la force électrostatique  $\vec{F}_e$

C'est la force qui s'exerce sur une particule chargée placée dans une région où règne un champ électrique. Elle a pour expression :  $\vec{F}_e = q\vec{E}$

$\vec{F}_e$  direction : perpendiculaire aux plaques (même direction que  $\vec{E}$ )

$\vec{F}_e$  sens : même sens que  $\vec{E}$  si  $q > 0$ , de sens contraire si  $q < 0$

intensité :  $F_e = |q|E = |q|\frac{U}{d}$ , exprimée en N



— Travail de la force électrostatique :

$$W_{\vec{F}_e}(M \rightarrow N) = q(V_M - V_N) = qU_{MN}; \quad W_{\vec{F}_e}(A \rightarrow B) = q(V_A - V_B) = qU_{AB}.$$

— Théorème de l'énergie cinétique :

Considérons une charge  $q$  qui se déplace dans un champ électrique uniforme sous la seule action de la force électrostatique d'un point O à un point M.

$$\text{T.E.C entre O et M : } \frac{1}{2}mV_M^2 - \frac{1}{2}mV_O^2 = W_{\vec{F}_e}(O \rightarrow M) = q(V_O - V_M) = qU_{OM}.$$

b) Applications :

Une particule de charge  $q > 0$  pénètre avec un vecteur vitesse  $\vec{V}_0$  dans la région située entre deux plaques de longueur  $\ell$  distante de  $d$  où règne un champ électrique uniforme  $\vec{E}$ . On note  $U = U_{AB}$  la tension entre les plaques et on néglige le poids de la particule devant la force électrostatique.

1. Équations horaires du mouvement :

- Système : particule
- R.T.S.G

$$T.C.I : \vec{F}_e = m\vec{a} \Rightarrow q\vec{E} = m\vec{a} \Rightarrow$$

$$\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m} = \text{constante}$$

$$\vec{E} \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E = \frac{U}{d} \end{cases} \Rightarrow \vec{a} \begin{cases} a_x = \frac{qE_x}{m} = 0 \\ a_y = \frac{qE_y}{m} = \frac{qU}{md} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\vec{V} \begin{cases} V_x = a_x t + V_{0x} = V_{0x} = V_0 \\ V_y = a_y t + V_{0y} = \frac{qU}{md} t \end{cases} \Rightarrow \vec{V} \begin{cases} V_x = V_0 \\ V_y = \frac{qU}{md} t \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OM} \begin{cases} x = \frac{1}{2} a_x t^2 + V_{0x} t + x_0 \\ y = \frac{1}{2} a_y t^2 + V_{0y} t + y_0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{OM} \begin{cases} x = V_0 t \\ y = \frac{1}{2} \frac{qU}{md} t^2 \end{cases}$$

## 2. Equation et nature de la trajectoire :

On a :  $x = V_0 t \Rightarrow t = \frac{x}{V_0} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \frac{qU}{md} \left( \frac{x}{V_0} \right)^2 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \frac{qU}{mdV_0^2} x^2$  la trajectoire est une parabole.

## 3. Coordonnées du point de sortie S.

$$S \begin{pmatrix} x_S = \ell \\ y_S = \frac{1}{2} \frac{qU}{mdV_0^2} \ell^2 \end{pmatrix}$$

## 4. Durée de la traversée du condensateur :

$$\Delta t = t_S - t_0 = t_S, \text{ avec } x_S = V_0 t_S = \ell \Rightarrow \Delta t = t_S = \frac{\ell}{V_0}$$

## 5. Vitesse au point de sortie :

$$\vec{V} \begin{cases} V_x = V_0 \\ V_y = \frac{qU}{md} t \end{cases} \Rightarrow \vec{V}_S \begin{cases} V_{Sx} = V_0 \\ V_{Sy} = \frac{qU}{md} t_S \end{cases} \Rightarrow \vec{V}_S \begin{cases} V_{Sx} = V_0 \\ V_{Sy} = \frac{qU\ell}{mdV_0} \end{cases} \Rightarrow V_S = \sqrt{V_0^2 + \left( \frac{qU\ell}{mdV_0} \right)^2}$$

## 6. Détermination de la déviation angulaire $\alpha$ :

$$\tan \alpha = \frac{V_{Sy}}{V_{Sx}} = \frac{qU\ell}{mdV_0^2} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1} \left( \frac{qU\ell}{mdV_0^2} \right)$$

## 7. Détermination de la condition d'émergence :

C'est la condition qu'il faut pour que la particule puisse sortir du condensateur sans heurter l'une des plaques.

$$\text{Condition : } Y_S < \frac{d}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{qU}{mdV_0^2} \ell^2 < \frac{d}{2} \Rightarrow U < \frac{md^2V_0^2}{q\ell^2} = U_{max}.$$

## 8. Nature du mouvement entre la sortie du condensateur et l'écran :

Après le point de sortie S :  $\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_e = q\vec{E} = \vec{0}$  or  $\vec{F}_e = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{V} = \text{cste} = \vec{V}_S \Rightarrow M.R.U.$

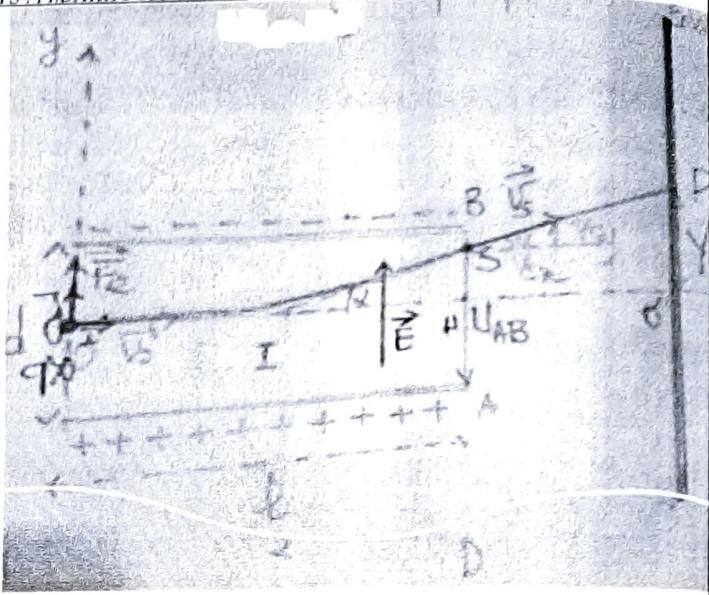
## 9. Détermination de la déflexion électrique Y=O'P :

C'est la distance O'P qui sépare le centre O' de l'écran du point d'impact P de la particule.

$$\checkmark \text{ Triangle IHS : } \tan \alpha = \frac{HS}{IH} = \frac{y_S}{\frac{1}{2}\ell} = \frac{2y_S}{\ell} \quad (1)$$

$$\checkmark \text{ Triangle IO'P : } \tan \alpha = \frac{O'P}{IO'} = \frac{Y}{D} \quad (2)$$

$$(1) \text{ Et (2)} \Rightarrow \frac{Y}{D} = \frac{2y_S}{\ell} \Rightarrow Y = \frac{2Dy_S}{\ell} \text{ avec } Y_S = \frac{1}{2} \frac{qU}{mdV_0^2} \ell^2 \Rightarrow Y = \frac{2D \times \frac{qU\ell^2}{mdV_0^2}}{\ell}$$





$$\Rightarrow Y = \frac{Dq\ell}{mdV_0^2} U = kU \text{ avec } k = \frac{Dq\ell}{mdV_0^2} = \text{constante.}$$

**Remarque :**

- $U = \frac{1}{k}Y = S_v Y$  avec  $S_v$  la sensibilité verticale. La mesure expérimentale de  $Y$  permet de déterminer la tension  $U$ : c'est le principe de fonctionnement d'un oscilloscope.
- Si  $U = U_m \sin(wt)$  alors  $Y = kU = kU_m \sin(wt) = Y_m \sin(wt)$  avec  $Y_m = kU_m$ : le faisceau de particule sera recueilli dans ce cas le long d'un segment de droite de longueur  $L = 2Y_m$ .

**Application n°3 : Mouvement dans un fluide**

On étudie le mouvement solide  $S$  dans un fluide. On note  $\rho_s$  la masse volumique du solide et  $\rho_f$  celle du fluide. Les forces qui s'exercent sur le solide sont :

- Son poids  $\vec{P}$  vertical dirigé vers le bas d'intensité  $P = mg = \rho_s V_S g$
- La force de poussée d'Archimède  $\vec{F}$  verticale dirigée vers le haut d'intensité  $F = \rho_f V_S g$
- La force de frottement visqueuse  $\vec{f}$  verticale dirigée vers le haut d'intensité  $f = k \cdot v = 6\pi\eta r v$  avec  $k = 6\pi\eta r = \text{constante et } \eta \text{ le coefficient de viscosité du fluide.}$

1. Représentation graphique des forces : (voir figure).

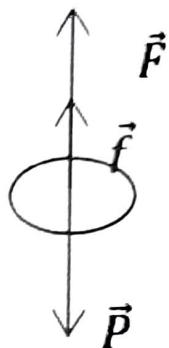
2. Équation différentielle régissant la vitesse  $v$  du solide :

$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{f} = m\vec{a} \text{ suivant } Ox : P - F - f = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow mg - \rho_f V_S g - k \cdot v = m \frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow m \frac{dv}{dt} + k \cdot v = mg - \rho_f V_S g \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} \cdot v = g \left( 1 - \frac{\rho_f V_S}{m} \right)$$

En posant  $\alpha = \frac{k}{m}$  et  $\beta = g \left( 1 - \frac{\rho_f V_S}{m} \right)$ , l'équation différentielle devient :

$$\frac{dv}{dt} + \alpha \cdot v = \beta$$



3. Montrons que la vitesse tend vers une valeur limite :

En début de chute ( $t=0$ ) on a  $f=0$  et  $P > F$ , la bille tombe, la vitesse croît et  $f$  croît. A un instant donné le poids  $\vec{P}$  est compensé par la somme vectorielle des forces  $\vec{F} + \vec{f} \Rightarrow \vec{P} + \vec{F} + \vec{f} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = cte$  : la vitesse atteint alors une vitesse limite  $\vec{v}_{lim}$ .

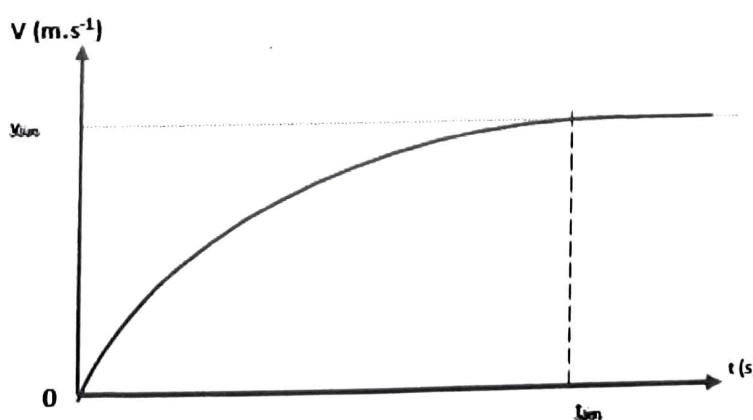
4. Nature du mouvement si la vitesse limite est atteinte :

Si  $\vec{v} = \vec{v}_{lim} = cte \Rightarrow \vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \text{le mouvement est rectiligne uniforme.}$

5. Expression de la vitesse limite :

$$\text{Si } \vec{v} = \vec{v}_{lim} = cte \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow 0 + \alpha \cdot v_{lim} = \beta \Rightarrow v_{lim} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

6. Allure de la courbe  $v = f(t)$  :



**Fin du chapitre**

## Exercices sur les applications des bases de la dynamique

### Exercice n°1 : TS<sub>2</sub>

On donne :  $m=0,25 \text{ kg}$ ;  $a=30^\circ$ ;  $h=0,75 \text{ m}$ ;  $g=10 \text{ N/kg}$ .

Un solide (S) de masse  $m$  assimilable à un point matériel se déplace sans frottement sur une piste AO située dans un plan vertical. La piste AO est rectiligne et fait un angle  $\alpha$  avec le plan horizontal. Des élèves étudient le mouvement de (S) sur AO et au-delà du point O.

#### 1. Etude du mouvement du centre d'inertie du mobile sur la partie AO de la piste.

Le mobile est lancé à partir du point A avec un vecteur vitesse  $\vec{u}_A$  et arrive en O avec un vecteur vitesse  $\vec{u}_O$  de valeur  $V_0=1 \text{ m/s}$ . Il est animé d'un mouvement dont l'accélération est  $=a$ . ( $a$  est le vecteur colinéaire à  $\vec{u}$ ).

- 1.1. Faire l'inventaire des forces extérieures agissant sur le mobile et les représenter sur un schéma.

#### 1.2. Déterminer :

- 1.2.1. La valeur algébrique  $a$  de l'accélération du mobile ;
- 1.2.2. La nature du mouvement du mobile ;
- 1.2.3. La valeur  $V_A$  de la vitesse communiquée au mobile au point A.

#### 2. Etude du mouvement du mobile dans le repère (O, i, j)

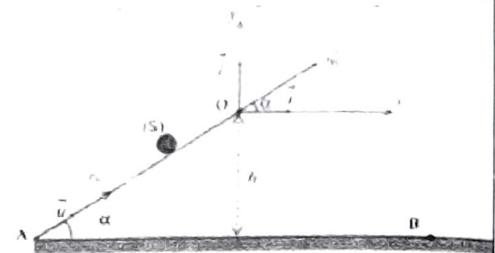
Après le point O, le mobile est soumis au champ de pesanteur  $\vec{g}$ .

- 2.1. Déterminer les équations horaires  $x(t)$  et  $y(t)$ .

- 2.2. Etablir l'équation cartésienne numérique de la trajectoire. Quelle est sa nature ?

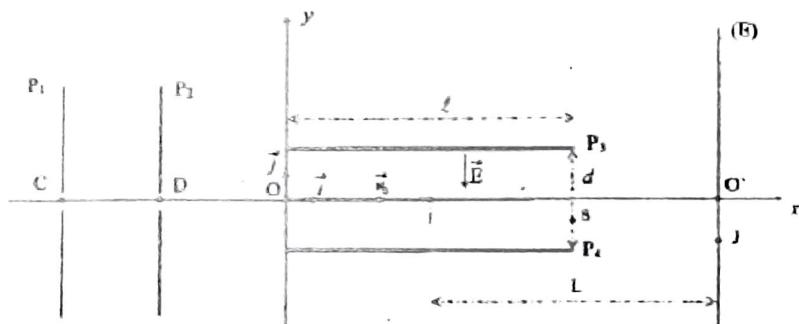
#### 2.3. Déterminer :

- 2.3.1. L'altitude maximale atteinte par le mobile par rapport au sol.
- 2.3.2. Les coordonnées  $x_B$  et  $y_B$  du point de chute B du mobile sur le sol ;
- 2.3.3. Les caractéristiques (norme et direction) de la vitesse  $V_B$  du mobile au moment où il entre en contact avec le sol.



### Exercice n°2 : TS<sub>2</sub>

Dans tout l'exercice, on suppose que le mouvement des protons a lieu dans le vide et on néglige leur poids par rapport aux autres forces. On considère le dispositif de la figure. Des protons sont émis en C avec une vitesse quasiment nulle, puis accélérés entre les points C et D des plaques P<sub>1</sub> et P<sub>2</sub>.



1. Préciser le signe de la tension  $U_{CD}$  pour que les protons soient accélérés. Justifier la réponse.

2. On supposera pour la suite  $|U_{CD}|=U$ .

- 2.1. Exprimer la vitesse  $V_D$  d'un proton en D en fonction de U, e, et  $m_p$ .

- 2.2. Calculer  $V_D$ .

3. Après la traversée de la plaque P<sub>2</sub> en D, les protons pénètrent en O entre deux plaques parallèles P<sub>3</sub> et P<sub>4</sub> de longueur  $l=20 \text{ cm}$  et distantes de  $d=7 \text{ cm}$ . La tension  $U'$  appliquée à ces plaques crée un champ électrostatique uniforme.

- 3.1. Montrer que l'énergie cinétique d'un proton se conserve entre D et O.

- 3.2. Etablir dans le repère (O, i, j) les équations horaires du mouvement d'un proton dans la région limitée par les plaques P<sub>3</sub> et P<sub>4</sub>.

- 3.3. Vérifier que l'équation de la trajectoire peut s'écrire :  $y = -\frac{U'}{4dU} x^2$

- 3.4. Déterminer la condition à laquelle doit satisfaire la tension  $U'$  pour que les protons sortent du champ électrostatique sans heurter la plaque P<sub>4</sub>.

- 3.5. Déterminer U' pour que les protons sortent du champ en passant par le point S de coordonnées  $(l; -\frac{d}{5})$

4. A la sortie du champ électrostatique par le point S, les protons sont reçus en un point J, sur un écran plat (E) placé perpendiculairement à l'axe Ox.

- 4.1. Quelle est la nature de la trajectoire d'un proton entre les points S et J ? Justifier.

4.2. Etablir l'expression littérale de la déviation O'A du spot sur l'écran (E).

4.3. Calculer la distance O'A.

On donne :  $L=20 \text{ cm}$ ;  $U=1000 \text{ V}$ ;  $m_p=1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ ;  $OI=10 \text{ cm}$ ;  $e=1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ .

### Exercice n°3 : TS<sub>1</sub>

Au cours d'une sortie pédagogique, des élèves se proposent d'appliquer leurs connaissances en dynamique à l'étude du mouvement de chute libre. Du haut d'une colline dont le versant a la forme d'un plan incliné faisant un angle  $\alpha$  avec l'horizontale, ils lancent un projectile supposé ponctuel, de masse m, à partir d'un point O avec une vitesse initiale  $\vec{V}_0$  faisant un angle  $\beta$  avec le plan incliné ( $\beta > \alpha$ ).

L'origine des dates  $t_0 = 0$  est prise au moment du lancer du projectile en O.

L'étude du mouvement est rapportée au repère d'espace (OX, OY) muni des vecteurs unitaires  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  pris dans le plan vertical contenant  $\vec{V}_0$  projectile.

1. Par application du théorème du centre d'inertie, établir les équations horaires  $x(t)$  et  $y(t)$  du mouvement du projectile.

2. Etablir l'expression de la date  $t_A$  à laquelle le projectile tombe sur le plan incliné au point A en fonction  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $V_0$  et de l'intensité de la pesanteur g.

3. Montrer que la distance  $d=OA$ , appelée portée sur le plan incliné, peut se mettre sous la forme :

$$d = \frac{2V_0^2 \sin \beta \cos(\beta - \alpha)}{g(\cos \alpha)^2}$$

4. Le groupe d'élèves effectue des tirs avec des vitesses initiales de même valeur  $V_0$ .

4.1. Etablir, en fonction de  $\alpha$ , l'expression de la valeur  $\beta_L$  de l'angle  $\beta$  pour laquelle la portée prend une valeur maximale  $d_{\max}$ .

4.2. En déduire l'expression de cette portée  $d_{\max}$  en fonction de g,  $\alpha$  et  $V_0$ .

5. On considère un lancer de vitesse initiale  $V_0 = 12 \text{ m/s}$  avec  $\alpha = 60^\circ$ .

5.1. Calculer  $\beta_L$  et  $d_{\max}$ .

5.2. Calculer le temps mis par le projectile pour tomber sur le plan incliné pour  $\beta = \beta_L$ . On prendra  $g = 9,8 \text{ N/Kg}$ .

### Exercice n°4 : TS<sub>1</sub>

Un mobile ponctuel de masse m, se déplace sans frottement sur une piste comportant des parties circulaires ou rectilignes et dont l'axe est situé dans un plan vertical (Figure 2). Le mobile est lâché en A sans vitesse initiale.

1. Déterminer la vitesse  $V$  du mobile en un point M situé entre A et B à une altitude Z du plan horizontal passant par A.

2. Montrer que l'intensité de la réaction  $\vec{R}$  de la piste en M a pour expression  $R = mg(1 - \frac{3z}{r})$ ; r étant le rayon de courbure de la trajectoire.

3. Si la trajectoire ABC était entièrement circulaire de rayon  $r = 30 \text{ cm}$ , à quelle distance verticale de A le mobile quitterait-il la piste?

4. La piste est interrompue entre deux points D et E situés dans un même plan horizontal.

a) Établir l'équation de la trajectoire du mobile après le point D.

b) Exprimer la vitesse  $\vec{V}_D$  en fonction de g et  $Z_D$ .

c) Déterminer la flèche ( $\alpha$ ) en fonction de  $V_D$ , g et  $\alpha_0$ .

d) Déterminer la distance DE en fonction de  $V_D$ , g et  $\alpha_0$ .

e) En déduire alors une relation entre DE,  $Z_D$  et  $\alpha_0$ .

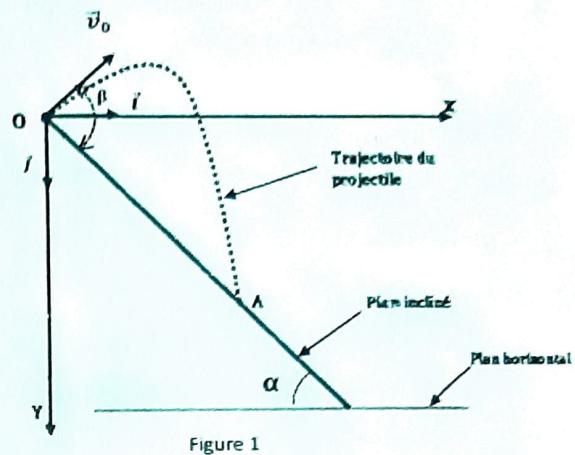
f) DE étant fixé, pour quelle valeur de  $\alpha_0$ ,  $Z_D$  est minimale?

5. Le mobile partant de A descend jusqu'en F où, il rencontre une nouvelle piste circulaire de centre O' et de rayon r', située dans un plan vertical (figure 3). Au point G, la réaction de la piste sur le mobile est égale au quart de son poids. En déduire :

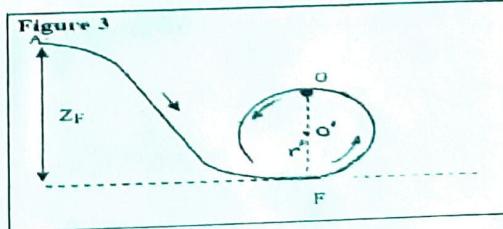
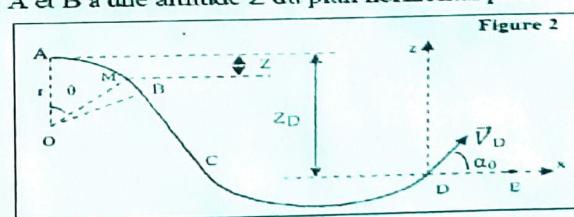
a) La vitesse  $V_G$  et  $V_F$  aux points G et F.

b) La distance  $Z_F$  de F au plan horizontal passant par A.

On donne :  $r' = 5 \text{ cm}$ ;  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$



On néglige l'action de l'air sur le





## Bakhoum PC: Gravitation universelle

### I. Loi de Newton :

Deux corps ponctuels de masse  $m_A$  et  $m_B$  placés en deux points A et B distants de  $r$  exercent chacun sur l'autre une force attractive portée par la droite joignant les deux points d'intensité proportionnelle au produit des masses et inversement proportionnelle au carré de la distance  $r$ .

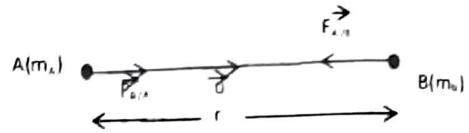
Soit  $\vec{u}$  un vecteur unitaire dirigé de A vers B.

- $\vec{F}_{A/B} = -F_{A/B} \cdot \vec{u} = -\frac{K m_A m_B}{r^2} \cdot \vec{u}$
- $\vec{F}_{B/A} = F_{B/A} \cdot \vec{u} = \frac{K m_A m_B}{r^2} \cdot \vec{u}$

$$\Rightarrow \vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A} = -\frac{K m_A m_B}{r^2} \cdot \vec{u} : \text{loi de Newton, avec}$$

$K = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$  : la constante gravitationnelle.

L'intensité commune des forces s'écrit :  $F_{A/B} = F_{B/A} = \frac{K m_A m_B}{r^2}$ .



### II. Champ de gravitation :

#### 1. Espace champ de gravitation :

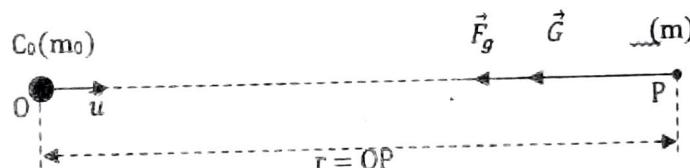
L'espace champ de gravitation d'une masse  $m_0$  est la région de l'espace où elle exerce son influence. Tout corps de masse  $m$  placée dans cette région est soumis à une force gravitationnelle  $\vec{F}_g = m\vec{G}$ .

$\vec{G}$  : vecteur champ de gravitation créé par la masse  $m_0$ .

#### 2. Vecteur champ de gravitation :

##### a) Cas d'un corps ponctuel :

Considérons un corps  $C_0$  de masse  $m_0$  placé en un point O. On se propose de déterminer les caractéristiques du vecteur champ de gravitation créé par la masse  $m_0$  en un point P situé à une distance  $r$ .



La masse  $m$  placée en P est soumise à la force gravitationnelle :  $\vec{F}_g = m\vec{G} = -\frac{K m_0 m}{r^2} \vec{u} \Rightarrow \vec{G} = -\frac{K m_0}{r^2} \vec{u}$

$\vec{G}$	point d'application : point P
	direction : même direction que $\vec{u}$
	sens : sens contraire à $\vec{u}$
	intensité : $G = \frac{K m_0}{r^2}$

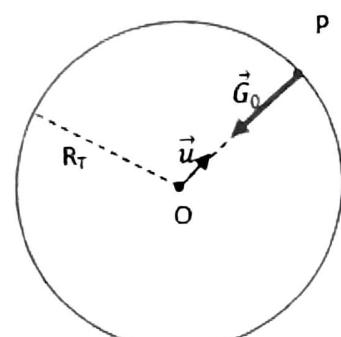
##### b) Vecteur champ de gravitation terrestre :

###### — Cas d'un point situé à la surface de la Terre (altitude z = 0) :

Par analogie on montre que :

$$\vec{G}_0 = -\frac{K M_T}{R_T^2} \vec{u} \Rightarrow G_0 = \frac{K M_T}{R_T^2}$$

Avec  $M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ Kg}$ ;  $R_T = 6400 \text{ Km}$ ;  $G_0 = 9,77 \approx 9,8 \text{ N/Kg}$ .





— Cas d'un point situé à une altitude z de la surface de la Terre :

$$\vec{G} = -\frac{KM_T}{(R_T + z)^2} \vec{u} \Rightarrow G = \frac{KM_T}{(R_T + z)^2}$$

— Relation entre G et  $G_0$ :

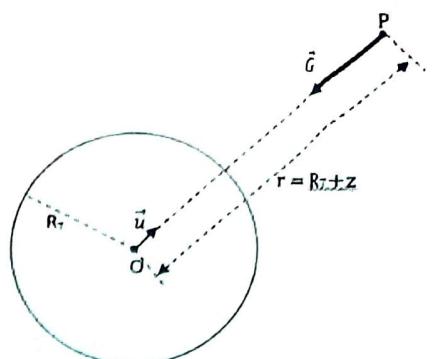
$$\begin{cases} G_0 = \frac{KM_T}{R_T^2} \Rightarrow KM_T = G_0 R_T^2 \\ G = \frac{KM_T}{(R_T + z)^2} \end{cases} \Rightarrow G = \frac{G_0 R_T^2}{(R_T + z)^2}$$

**Remarque :** Au voisinage immédiat de la Terre on a :

$$z \ll R_T \Rightarrow \frac{z}{R_T} \ll 1 \text{ avec}$$

$$G = \frac{G_0 R_T^2}{(R_T + z)^2} = G_0 \frac{R_T^2}{R_T^2 \left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^2} = G_0 \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^2} = G_0 \left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^{-2} \text{ or si } \epsilon \ll 1 \text{ alors } (1 + \epsilon)^n = 1 + n\epsilon$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^{-2} = 1 - \frac{2z}{R_T} \Rightarrow G = G_0 \left(1 - \frac{2z}{R_T}\right)$$



III. Energie potentielle de gravitation :

Considérons le système formé par la Terre de masse  $M_T$  et un corps C de masse m situé à l'altitude z de la surface donc à la distance  $r = R_T + z$  du centre de la Terre.

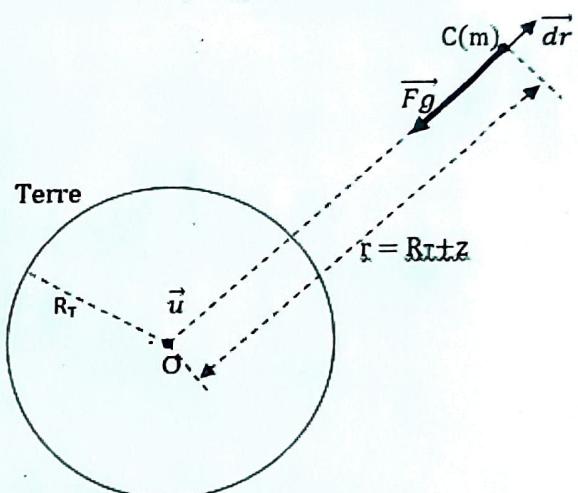
Pour un déplacement élémentaire  $d\vec{r}$  du point d'application de la force gravitationnelle  $\vec{F}_g$  correspond un travail élémentaire :

$$dW_{\vec{F}_g} = \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = -F_g \cdot dr \text{ or } dW_{\vec{F}_g} = -dE_p$$

$$\Rightarrow dE_p = F_g \cdot dr = \frac{KM_T m}{r^2} \cdot dr$$

$$\Rightarrow \int dE_p = \int \frac{KM_T m}{r^2} \cdot dr \Rightarrow E_p = KM_T m \int \frac{dr}{r^2}$$

$$\Rightarrow E_p = -\frac{KM_T m}{r} + C$$



**Remarque :**

Pour déterminer la constante C, on choisit une position de référence des énergies potentielles de gravitation.

— Cas où la référence est choisie à la surface de la Terre :

$$E_p(r) = -\frac{KM_T m}{r} + C \quad (1)$$

$$E_{pref}(r = R_T) = -\frac{KM_T m}{R_T} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{KM_T m}{R_T} \quad (2)$$

$$(2) \text{ dans (1)} \Rightarrow E_p(r) = -\frac{KM_T m}{r} + \frac{KM_T m}{R_T} \Rightarrow E_p(r) = KM_T m \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{r}\right)$$

— Cas où la référence est choisie à l'infini

$$E_p(r) = -\frac{KM_T m}{r} + C \quad (1)$$

$$E_{pref}(r \rightarrow \infty) = -\frac{KM_T m}{\infty} + C = 0 \Rightarrow C = 0 \quad (2)$$

$$(2) \text{ dans (1)} \Rightarrow E_p(r) = -\frac{KM_T m}{r}$$

IV. Etude du mouvement des satellites :

Un satellite est tout corps qui gravite autour d'une planète sous l'action de la force gravitationnelle que la planète exerce sur lui.

L'étude du mouvement d'un satellite terrestre se fait dans un référentiel géocentrique (l'origine est le centre de la terre et les axes sont orientés vers 3 étoiles lointaines).

Considérons un satellite S de masse m de la Terre de masse M située à l'altitude z de la surface.

- Système : satellite
- Référentiel géocentrique
- B.F :  $\vec{F}_g$  : force gravitationnelle
- T.C.I  $\Rightarrow \vec{F}_g = m\vec{a}$  avec  $\begin{cases} \vec{F}_g = F_g \vec{u}_n \\ \vec{a} = a_T \vec{u}_T + a_n \vec{u}_n \end{cases} \Rightarrow$   
 $F_g = F_g \vec{u}_n = m(a_T \vec{u}_T + a_n \vec{u}_n) \Rightarrow a_T = \frac{dV}{dt} = 0 \Rightarrow V = cte \Rightarrow M.U,$   
 en plus la trajectoire est circulaire.

Conclusion : Le mouvement du satellite est circulaire uniforme.

## 2. Vitesse linéaire, vitesse angulaire et période du satellite :

### — Vitesse linéaire du satellite :

$$\vec{F}_g = m\vec{a} \text{ donne suivant } \vec{u}_n : F_g = ma_n \Rightarrow \frac{KMm}{r^2} = \frac{mV^2}{r} \Rightarrow V^2 = \frac{KM}{r} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{KM}{r}}$$

La vitesse est indépendante de la masse du satellite. Elle est appelée **vitesse de satellisation ou première vitesse cosmique**.

### — Vitesse angulaire du satellite :

$$M.C.U \Rightarrow V = r \cdot w \Rightarrow w = \frac{V}{r} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{KM}{r}} \Rightarrow w = \sqrt{\frac{KM}{r^3}}$$

### — Période du satellite :

Elle correspond au temps mis par le satellite pour effectuer un tour (une révolution).

$$T = \frac{d}{v} \text{ avec } d = 2\pi r \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{V} \text{ or } V = \sqrt{\frac{KM}{r}} \Rightarrow T = 2\pi r \sqrt{\frac{r}{KM}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{KM}}$$

## 3. 3<sup>ème</sup> loi de Kepler :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{KM}} \Rightarrow T^2 = 4\pi^2 \times \frac{r^3}{KM} \Rightarrow \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{KM} = cte : 3^{\text{ème}} \text{ loi de Kepler}$$

### ➤ Enoncé de la 3<sup>ème</sup> loi de Kepler :

Le rapport du carré de la période sur le cube du rayon de l'orbite décrit par un satellite autour d'une planète de masse M est constant.

**Remarque :** la 3<sup>ème</sup> loi de Kepler permet de déterminer la masse d'une planète à partir de ses différents satellites.

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{KM} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{KM} \cdot r^3 \quad (1)$$

Graphiquement la courbe  $T^2 = f(r^3)$  est une droite linéaire d'équation :

$$T^2 = a \cdot r^3 \quad (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow \frac{4\pi^2}{KM} = a \Rightarrow M = \frac{4\pi^2}{Ka} \text{ avec } a = \frac{T_1^2 - T_2^2}{r_2^3 - r_1^3}.$$

## 4. Energie du satellite :

### — Energie cinétique de gravitation :

$$E_c = \frac{1}{2} mV^2 \text{ avec } V = \sqrt{\frac{KM}{r}} \Rightarrow E_c = \frac{KMm}{2r}$$

### — Energie mécanique de gravitation :

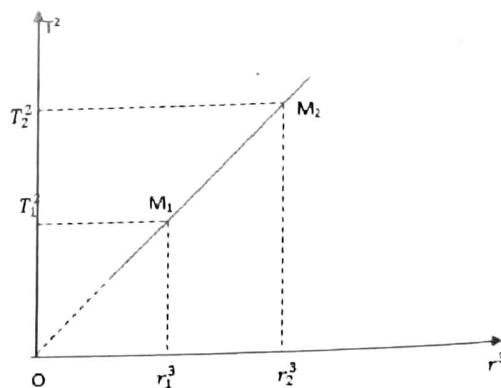
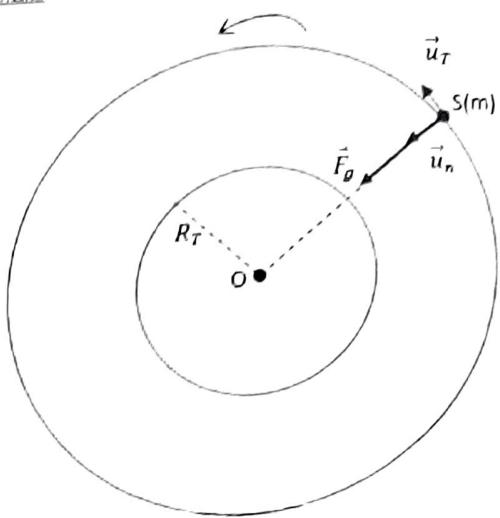
$$E_m = E_c + E_p \text{ avec } E_p = -\frac{KMm}{r} + C \text{ et } E_c = \frac{KMm}{2r} \Rightarrow$$

$$E_m = \frac{KMm}{2r} - \frac{KMm}{r} + C = KMm \left( \frac{1}{2r} - \frac{1}{r} \right) + C \Rightarrow E_m = -\frac{KMm}{2r} + C$$

$$\text{Remarque : Si } C = 0 \text{ alors : } \begin{cases} E_c = -E_m \\ E_p = 2E_m \end{cases}$$

Si le satellite est soumis à des forces de frottement, son énergie mécanique diminue entraînant une augmentation de l'énergie cinétique (donc de la vitesse) et une diminution de l'énergie potentielle (donc de l'altitude).

Cours à domicile : 77 550 04 15



### 6. Satellite géostationnaire :

#### — Définition :

C'est un satellite qui paraît immobile par rapport à un observateur situé à la surface de la terre.

#### — Conditions à remplir :

Pour être géostationnaire le satellite doit :

- ✓ Evoluer dans le plan de l'équateur ;
- ✓ Avoir pour centre celui de la terre ;
- ✓ Tourner dans le même sens de rotation que la terre (d'Ouest en Est) ;
- ✓ Avoir la même période de rotation que la terre ( $T_T = 23H56min4s = 86164 s$ ).

#### — Détermination du rayon de son orbite :

$$T_S = T_T \text{ avec } T_S = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{KM}} \Rightarrow T_T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{KM}} \Rightarrow T_T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{KM} \Rightarrow r^3 = \frac{4\pi^2 T_T^2}{KM} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{4\pi^2 T_T^2}{KM}} = 4,22 \cdot 10^7 m.$$

#### — Détermination de son altitude z :

$$r = R_T + z \Rightarrow z = r - R_T \Rightarrow z = \sqrt[3]{\frac{4\pi^2 T_T^2}{KM}} - R_T = 3,58 \cdot 10^7 m \approx 3,6 \cdot 10^7 m = 36000 Km.$$

### 6. Vitesse de libération ou d'évasion d'un corps :

C'est la vitesse minimale avec laquelle il faut lancer un corps pour qu'il se libère définitivement de l'attraction terrestre.

Système : {Terre ; corps} : conservatif

$$\begin{aligned} E_{m_{sol}} = E_{m_{\infty}} &\Rightarrow E_{c_{sol}} + E_{p_{sol}} = E_{c_{\infty}} + E_{p_{\infty}} \Rightarrow \frac{1}{2}mV_{sol}^2 - \frac{KMm}{R_T} + C = E_{c_{\infty}} - \frac{KMm}{\infty} + C \\ \frac{1}{2}mV_{sol}^2 - \frac{KMm}{R_T} &= E_{c_{\infty}} \text{ or } E_{c_{\infty}} \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mV_{sol}^2 - \frac{KMm}{R_T} \geq 0 \Rightarrow V_{sol}^2 \geq \frac{2KM}{R_T} \Rightarrow V_{sol} \geq \sqrt{\frac{2KM}{R_T}} \\ V_{sol_{min}} &= Ve = \sqrt{\frac{2KM}{R_T}} = 11,18 \cdot 10^3 m/s \end{aligned}$$

#### Remarque :

- Si l'objet est lancé à partir d'une altitude z de la surface, l'expression précédente devient :  $Ve = \sqrt{\frac{2KM}{R_T+z}}$
- Si l'objet est lancé à partir de la surface de la lune (de rayon  $R_L$  et de masse  $M_L$ ), l'expression devient :

$$Ve = \sqrt{\frac{2KM_L}{R_L}}.$$

### 7. Période apparente d'un satellite $T_A$ :

C'est l'intervalle de temps qui sépare deux passages successifs du satellite à la verticale d'un point M situé à la surface de la terre :

#### — Cas où le satellite tourne dans le même sens de rotation que la terre (vers l'Est) :

Si M tourne d'un angle  $\alpha_T = w_T \Delta t$ , le satellite tourne d'un angle  $\alpha_S = w_S \Delta t = 2\pi + \alpha_T \Rightarrow w_S \Delta t = 2\pi + w_T \Delta t \Rightarrow$

$$w_S \Delta t - w_T \Delta t = 2\pi \Rightarrow \Delta t = \frac{2\pi}{w_S - w_T} = T_A$$

$$\text{Avec } w = \frac{2\pi}{T}, T_A = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{T_S} - \frac{2\pi}{T_T}} \Rightarrow T_A = \frac{T_T T_S}{T_T - T_S}$$

#### — Cas où le satellite tourne dans le sens de celui de rotation que la terre (vers l'Ouest) :

Si M tourne d'un angle  $\alpha_T = w_T \Delta t$ , le satellite tourne d'un angle  $\alpha_S = w_S \Delta t = 2\pi - \alpha_T \Rightarrow w_S \Delta t = 2\pi - w_T \Delta t \Rightarrow$

$$w_S \Delta t + w_T \Delta t = 2\pi \Rightarrow \Delta t = \frac{2\pi}{w_S + w_T} = T_A$$

$$\text{Avec } w = \frac{2\pi}{T}, T_A = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{T_S} + \frac{2\pi}{T_T}} \Rightarrow T_A = \frac{T_T T_S}{T_T + T_S}$$

### Fin du chapitre

## Exercices sur la gravitation universelle

### Exercice n°1 :

La terre est supposée sphérique, de rayon  $R_T$ , de masse  $M$ . La répartition de masse est à symétrie sphérique. On appelle  $K$  la constante gravitationnelle.

1. Quelles sont les caractéristiques de la force de gravitation subie par un point matériel de masse  $m$  à la distance  $r > R$  du centre de la terre ? Faire un schéma à l'appui.
2. Quelles sont les caractéristiques du champ de gravitation en ce point ? Exprimer sa norme  $G$  en fonction de  $G_0$ , norme à la surface de la terre. Représenter le vecteur champ sur le schéma précédent.
3. Un satellite assimilable à un point matériel, est en orbite circulaire de rayon  $r$ , centré sur le centre de la terre.
  - 3.1. Montrer que son mouvement est uniforme.
  - 3.2. Exprimer la vitesse linéaire du satellite sur sa trajectoire et sa période de révolution  $T$  en fonction de  $K, M$  et  $r$ .
  - 3.3. En déduire la troisième loi de Kepler.
  - 3.4. A.N. La navette spatiale est en orbite à l'altitude 250 Km. Calculer la vitesse et la période. La lune ayant une période de révolution de 28 jours autour de la terre, donner l'ordre de grandeur de la distance terre-lune en utilisant la période de révolution trouvée pour la navette.
4. L'énergie potentielle de gravitation du système terre-satellite est alors  $E_p = -KMm/r$ .
  - a) Où a été choisie la référence de l'énergie potentielle ?
  - b) Quelle est l'expression de l'énergie mécanique du satellite sur sa trajectoire ?
  - c) Etablir l'expression de son énergie cinétique en fonction de  $K, M, m$  et  $r$ .
  - d) Comparer l'énergie cinétique et l'énergie mécanique d'une part et l'énergie potentielle et l'énergie mécanique d'autre part.
5. A cause des frottements exercés par la haute atmosphère, l'énergie mécanique du satellite varie. Diminue-t-elle ou augmente-t-elle ? Elle passe de la valeur  $E_1$  à la valeur  $E_2$ , le rayon de l'orbite passe de  $r_1$  à  $r_2$ , sa vitesse de  $v_1$  à  $v_2$ . Indiquer en le justifiant comment varie le rayon de l'orbite et la vitesse du satellite à cause des frottements ?
6. Si l'on ne tient plus compte des frottements atmosphériques, avec quelle vitesse appelée vitesse de libération  $v_1$  faut-il lancer la sonde de masse  $m$  depuis le sol terrestre pour que celle-ci échappe à l'attraction terrestre ?
7. On considère un autre satellite de la terre qui paraît immobile par rapport à un observateur terrestre.
  - a) Comment appelle-t-on un tel satellite.
  - b) Quelles sont les conditions qu'il doit remplir pour paraître immobile par rapport à un observateur terrestre ?
  - c) Déterminer le rayon de son orbite.
  - d) Déterminer son altitude par rapport à la surface de la terre.

Données :  $K = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.Kg}^{-1}\text{m}^2$ ;  $R_T = 6400 \text{ Km}$ ;  $M = 6 \cdot 10^{24} \text{ Kg}$ ; 1 durée d'un jour sidéral  $T = 86164 \text{ s}$ .

### Exercice n°2 :

Dans le domaine de l'astronautique, une navette spatiale désigne conventionnellement un véhicule spatial pouvant revenir sur Terre en effectuant un atterrissage contrôlé à la manière d'un avion et pouvant être réutilisé pour une mission ultérieure. Le vol d'une navette spatiale comprend trois étapes : le lancement, le vol orbital et l'atterrissage. On se propose d'étudier le vol orbital. Dix minutes après le décollage, la navette est en mouvement circulaire uniforme autour de la terre à l'altitude  $h$ . Sa masse est  $m = 69,68 \cdot 10^3 \text{ kg}$ . L'intensité du champ de gravitation terrestre à l'altitude  $h$  est  $G_h = 6,95 \text{ m.s}^{-2}$ . Le rayon de la terre est  $R_T = 6380 \text{ km}$ . La masse de la terre sera notée  $M_T$ .

3.1 Rappeler l'expression de la force de gravitation universelle, puis établir l'expression de l'intensité du champ de gravitation  $G_h$  en fonction de  $G_0$ ,  $R_T$  et  $h$  ;  $G_0$  étant l'intensité du champ de gravitation au sol ( $G_0 = 9,80 \text{ m.s}^{-2}$ ).

3.2 En déduire l'expression de l'altitude  $h$  de la navette. Calculer sa valeur.

3.3 Etablir l'expression de la vitesse  $V$  du centre d'inertie de la navette à l'altitude  $h$  en fonction de  $G_h$ ,  $R_T$  et  $h$ . Calculer cette vitesse  $V$  pour  $h = 1196 \text{ km}$ .

3.4 Etablir l'expression de la période  $T$  de révolution de la navette à l'altitude  $h$  en fonction de  $R_T$ ,  $V$  et  $h$ .

Calculer la période  $T$ .

3.5 La navette se trouvant à l'altitude  $h$ , se déplace d'Ouest en Est.

Calculer l'intervalle de temps  $\Delta t$  qui sépare deux passages successifs de la navette à la verticale d'un point de la Terre. On rappelle que la période de révolution de la Terre autour de l'axe des pôles est  $T_T = 86164 \text{ s}$ .

3.6 La navette doit être mise sur l'orbite d'altitude  $h' = 2 h$  pour une autre mission avant son retour.

- 3.6.1 Donner l'expression de l'énergie mécanique de la navette évoluant à l'altitude  $h$  en fonction de  $G_0$ ,  $R_T$ ,  $m$  et h. L'expression de l'énergie potentielle de gravitation du satellite est :  $E_p = -\frac{K M_T m}{r}$  avec  $r$  le rayon de l'orbite de la navette.

- 3.6.2 Déterminer l'énergie que doivent fournir les moteurs pour faire passer la navette de l'altitude  $h$  à l'altitude  $h'=2h$ .

### **Exercice n°3 : (TS<sub>1</sub>)**

Les parties 2 et 3 sont indépendantes de la partie 1.

Le premier lanceur Ariane est une fusée à trois étages qui pèse, avec sa charge utile (satellite), 208 tonnes au décollage. Le premier étage qui fonctionne pendant 145 secondes est équipé de 4 moteurs Viking V alimentés par du peroxyde d'azote N<sub>2</sub>O<sub>4</sub> (masse de peroxyde emportée : 147,5 tonnes). L'intensité de la force de poussée totale  $\vec{F}$  est constante pendant le fonctionnement des réacteurs et vaut  $F=2445$  KN. Ce lanceur peut mettre en orbite circulaire basse de 200 Km d'altitude un satellite de 4850 Kg ; il peut également placer sur une orbite géostationnaire un satellite ; comme il peut placer en orbite héliosynchrone des satellites très utiles pour des applications météorologiques.

#### **1. Etude du mouvement d'ascension de la fusée :**

On étudie le mouvement de la fusée dans le référentiel terrestre qu'on suppose galiléen. Le champ de pesanteur est supposé uniforme dans le domaine étudié et son intensité est :  $g_0=9,8 \text{ m/s}^2$ .

On choisit un axe Oz vertical dirigé vers le haut. On néglige les frottements et la poussée d'Archimète dans l'air ainsi que l'action des autres planètes. La fusée Ariane s'élève verticalement sous l'action de la force de poussée  $\vec{F}$  due à l'éjection des gaz. Cette force est donnée par :  $\vec{F} = -\mu \vec{V}_E$ , relation où  $\vec{V}_E$  est la vitesse d'éjection des gaz par rapport à la fusée et  $\mu$  le débit constant des gaz qui s'exprime par :  $\mu = -\frac{dm}{dt}$  avec  $-dm$  la masse de gaz éjectée pendant la durée  $dt$ .

1.1. On désigne par  $m_0$  la masse de la fusée à la date  $t=0$ , début de l'ascension et  $m$  la masse de la fusée à la date  $t$ . Montrer que :  $m=m_0 - \mu t$ .

1.2. Calculer à l'aide des données utiles fournies en début d'énoncé le débit de gaz  $\mu$  et la norme  $V_E$  de la vitesse d'éjection des gaz.

1.3. Appliquer le théorème du centre d'inertie à la fusée et en déduire l'expression du vecteur accélération  $\vec{a}$  en fonction du poids  $\vec{P}$  de la fusée, de  $m$  et de la force de poussée  $\vec{F}$ .

1.4. En déduire que de la norme  $a$  s'écrit  $a(t) = \frac{\mu V_E}{m_0 - \mu t} - g_0$ . Le mouvement de la fusée est-il uniformément accéléré ? Justifier sans calcul.

#### **2. Etude du mouvement d'un satellite artificiel situé à basse altitude ( $h=200$ km)**

On suppose que la terre, de masse  $M_T$ , de rayon  $R_T$  et de centre O, est une sphère et qu'elle présente une répartition de masse à symétrie sphérique et que le satellite peut être assimilé à un point matériel.

Le satellite artificiel S, de masse  $m_S$ , décrit une orbite circulaire de rayon  $r$  autour de la terre. On note  $K$  la constante de gravitation universelle.

2.1. Exprimer l'intensité du champ de gravitation terrestre  $G(h)$  en fonction de  $M_T$ ,  $R_T$ ,  $h$  et  $K$  puis en fonction de  $R_T$ ,  $h$  et  $G_0$  ( $G_0$  étant l'intensité du champ de gravitation terrestre au sol).

2.2. Montrer que le mouvement du satellite est uniforme.

2.3. En déduire l'expression de la vitesse  $V_S$  du satellite en fonction de  $G_0$ ,  $R_T$  et  $h$  puis celle sa période de révolution  $T_S$ .

2.4. Calculer  $V_S$  et  $T_S$  sachant que  $G_0=9,8 \text{ m/s}^2$ ;  $h=200$  Km et  $R_T=6400$  Km.

#### **3. METEOSTAT 8 : satellite géostationnaire.**

Les satellites météorologiques comme Météostat sont des appareils d'observation géostationnaires. Ce satellite a été lancé par ARIANE 5 le 28 août 2002. Il est opérationnel depuis le 28 janvier 2004. Il fournit de façon continue des informations couvrant une zone circulaire représentant environ 42% de la surface de la terre.

3.1. Préciser les conditions à remplir par METEOSTAT 8 pour qu'il soit géostationnaire.

3.2. En déduire, pour METEOSTAT 8, la valeur du rayon  $R_T + h$  de son orbite puis celle de son altitude  $h$ .

Exercice n°4 : (TS1)

1. Satellite sur terre.
  - 1.1. Un satellite  $S_1$  considéré comme ponctuelle de masse  $m$  est au repos sur la terre en un point de latitude  $\lambda$ . Quelle est son mouvement dans le référentiel galiléen géocentrique.
  - 1.2. Exprimer sa vitesse  $v_0$  et son énergie cinétique  $E_{c0}$ , dans le référentiel géocentrique, en fonction de  $m$ ,  $R$ ,  $T_0$  (période de la terre) et  $\lambda$ .
  - 1.3. En déduire l'expression de l'énergie mécanique totale  $E_0$  sachant que l'expression de l'énergie potentielle de gravitation est :  $Ep(r) = \frac{-g_0 m R^2}{r}$ . A.N :  $m=800$  kg;  $\lambda=40^\circ$ . Calculer les valeurs de  $v_0$ ;  $E_{c0}$  et  $E_0$ .
2. Satellite sur orbite circulaire : Le satellite  $S_1$  est maintenant sur une orbite circulaire autour de la terre.
  - 2.1. Etude générale.
    - a. Faire l'étude du satellite dans le référentiel géocentrique et déterminer la relation entre le rayon  $r$  de l'orbite, la vitesse  $v$  du satellite et  $g_0$  le champ de gravitation à la surface de la terre.
    - b. Déduire l'expression de la période  $T$  de révolution en fonction du rayon  $r$ ,  $g_0$  et  $R$ .
    - c. Exprimer l'énergie cinétique  $E_c$ . En déduire l'expression de l'énergie totale  $E$  en fonction de  $m$ ,  $r$ ,  $g_0$  et  $R$ .
  - 2.2. Orbite circulaire rasante.  
 Le satellite est d'abord envoyé sur une orbite basse de rayon  $r_1$ . L'altitude  $z_1$ , de l'ordre de quelques centaines de kilomètres, est très faible devant le rayon  $R$  de la terre. On peut donc considérer  $r \approx R$  (orbite rasante).
    - a. Donner l'expression de sa vitesse  $v_1$  (1<sup>ère</sup> vitesse cosmique) en fonction de  $g_0$  et  $R$ .
    - b. Donner l'expression de sa période  $T_1$  et de l'énergie mécanique totale  $E_1$ .
    - c. Calculer  $v_1$ ,  $T_1$  et  $E_1$ .
    - d. Exprimer l'énergie  $E$  qu'il a fallu fournir au satellite, initialement au repos sur la terre à la latitude  $\lambda$ , pour le mettre sur orbite rasante. Cette énergie dépend-elle du point de lancement sur terre ? Où sont situées les bases de lancement les plus favorables du point de vue énergétique (l'énergie fournie est minimale) ?
  - 2.3. Orbite circulaire géostationnaire.  
 Le satellite est ensuite envoyé sur l'orbite géostationnaire de rayon  $r_2$ .
    - a. Qu'est-ce qu'un satellite géostationnaire ? En déduire la valeur de sa période de révolution  $T_2$  dans le référentiel géocentrique.
    - b. Exprimer et calculer le rayon  $r_2$  et l'altitude  $z_2$  du satellite géostationnaire.
    - c. Exprimer et calculer la vitesse  $v_2$  et l'énergie  $E_2$  du satellite géostationnaire.
    - d. Un autre satellite  $S_2$  de masse  $m_2=1$  tonne est en orbite circulaire autour de la terre de rayon  $r'=20000$  km dans le plan équatorial. A  $t=0$ , les satellites  $S_1$  et  $S_2$  sont sur la même verticale "côte à côte" et évoluent dans le même sens.
      - Calculer sa vitesse angulaire  $w_2$ .
      - Calculer l'intervalle de temps minimal  $\tau$  où les deux satellites se retrouvent de nouveau sur une même verticale "côte à côte" (pas nécessairement la même verticale qu'à  $t=0$ ).

**Fin de la série**

**Cours à domicile : 77 550 04 15**



## Chapitre V: Généralités sur le champ magnétique

### I- Les sources de champ magnétique :

Une source de champ magnétique est tout corps capable de produire un champ magnétique comme les aimants, les courants et la terre.

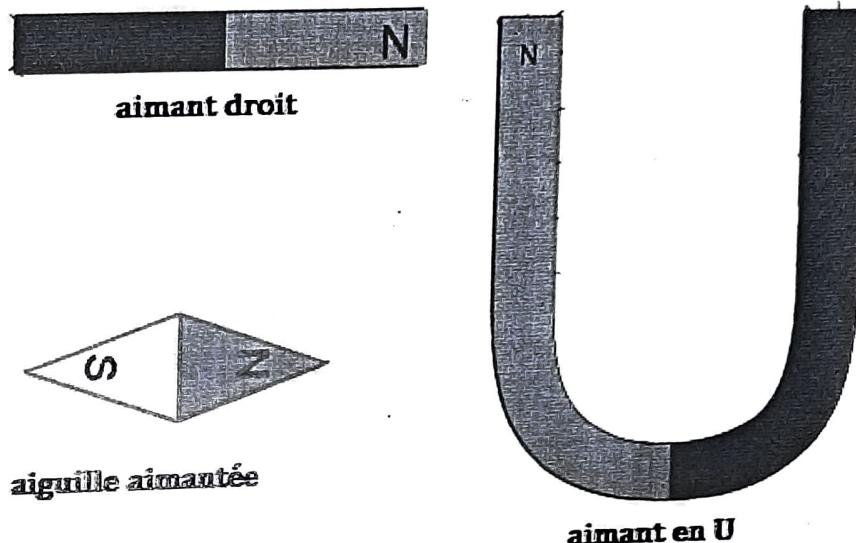
La source possède toujours un pôle ou face Nord et un pôle ou face sud.

Des pôles ou faces de même nom se repoussent alors que des pôles ou faces de nom différent s'attirent : on dit qu'ils sont en interaction magnétique.

Remarque : Dans la région de l'espace où existent des interactions magnétiques, règne un vecteur champ magnétique noté  $\vec{B}$ .

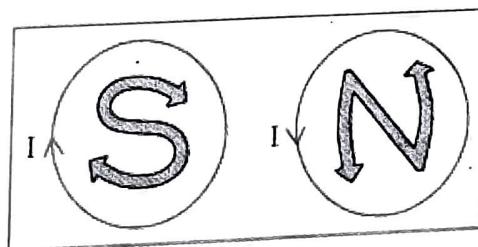
#### Exemples :

- Les aimants :** Un aimant est un corps capable d'attirer le fer, le nickel, le cobalt et certains alliages contenant beaucoup de fer (tel que l'acier); ces corps sont appelés corps ferromagnétiques.



#### — Les courants :

On regarde sur l'une des faces et on examine le sens du courant : s'il correspond au sens indiqué par la lettre S on regarde sur une face Sud ; s'il correspond à celui indiqué par la lettre N on regarde sur une face Nord.



### II. Vecteur champ magnétique :

#### 1. Espace champ magnétique :

C'est la région de l'espace où existe des interactions magnétiques.

#### 2. Caractéristiques du vecteur champ magnétique $\vec{B}$ :

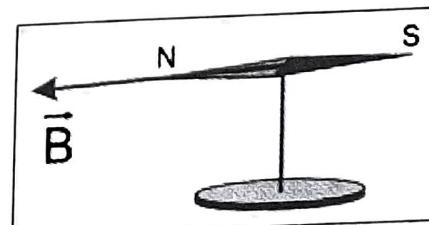
Pour déterminer les caractéristiques du vecteur champ magnétique en un point d'un espace champ, on place en ce point une aiguille aimantée :

**point d'application** : point considéré

**direction** : celle prise par l'aiguille

**sens** : du pôle sud vers le pôle nord de l'aiguille

**intensité** :  $B$  dépend de la source (exprimée en Tesla (T))



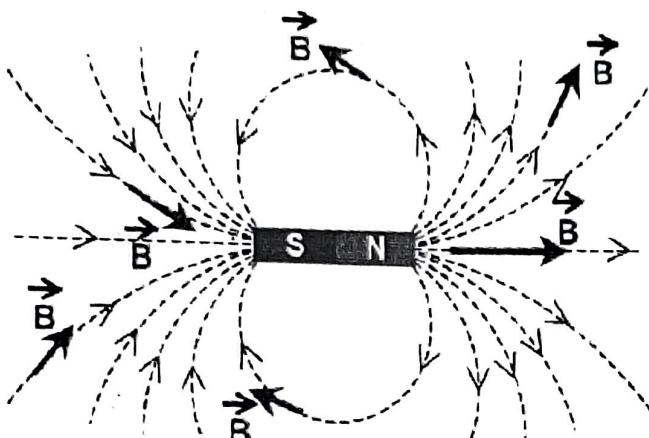
### 3. Ligne de champ magnétique :

C'est une courbe tangente en chacun de ses points au vecteur champ magnétique  $\vec{B}$  et orientée dans le même sens.

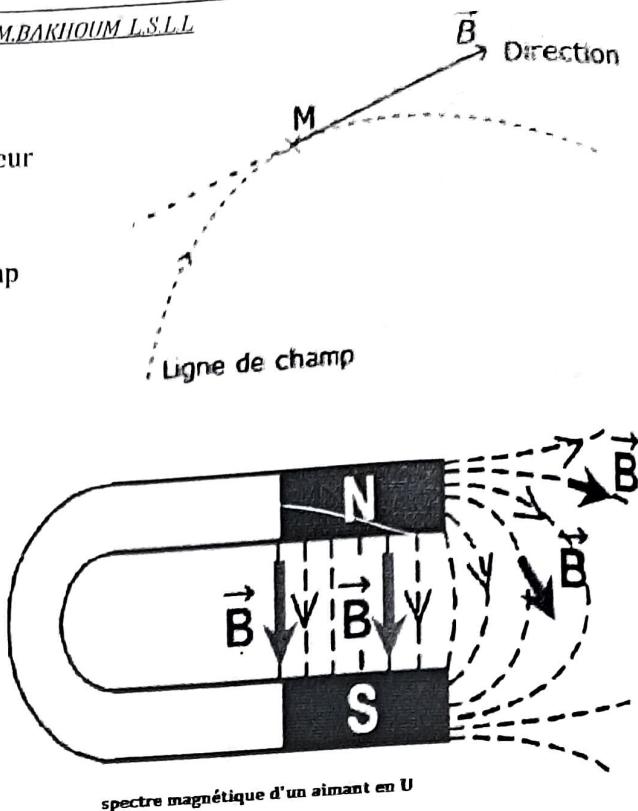
### 4. Spectre de champ magnétique :

C'est l'ensemble des lignes de champ d'un espace champ magnétique.

**Exemples :**



spectre magnétique d'un aimant droit

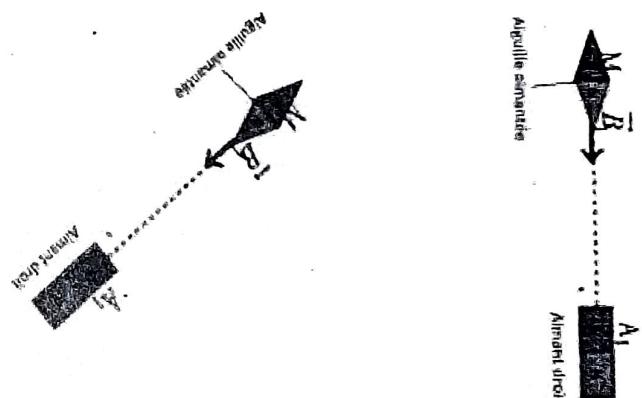
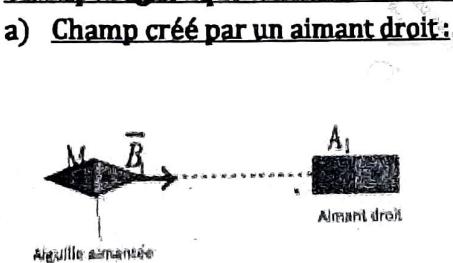


spectre magnétique d'un aimant en U

- ✓ Les lignes de champ sont plus serrées au niveau des pôles de l'aimant droit : on dit que le champ magnétique y est beaucoup plus intense.
- ✓ Entre les branches de l'aimant en U les lignes de champ sont des droites parallèles : on dit que le champ magnétique y est uniforme.

### III. Champ magnétique des aimants :

#### 1. Champ magnétique d'un aimant droit :



**point d'application :** point M

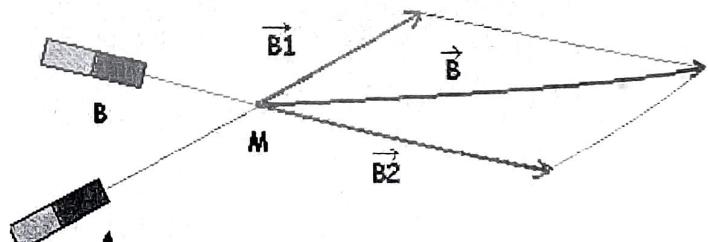
**direction :** même direction que l'aimant

**sens :** du pôle sud vers le pôle nord de l'aimant

**intensité :**  $B$  dépend de la distance entre l'aimant et M

#### b) Champ créé par deux aimants droits :

Pour déterminer le champ créé par deux en un point M on fait la somme des champs créés par chacun en ce point.



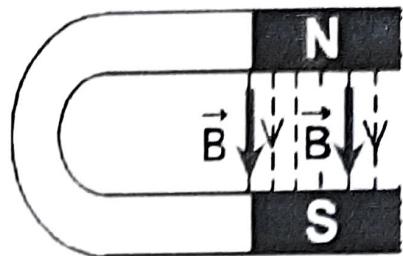
### 2. Champ créé par un aimant en U :

**point d'application :** point considéré

**direction :** perpendiculaire aux branches de l'aimant

**sens :** du pôle Nord vers le pôle Sud de l'aimant

**intensité :**  $B$  dépend de l'aimant



### IV. champ magnétique des courants :

#### 1. Champ créé par un conducteur rectiligne infiniment long :

Considérons un Conducteur PQ rectiligne infiniment long parcouru par un courant d'intensité  $I$ , qui traverse perpendiculairement une feuille de carton en un point O. On se propose de déterminer le champ magnétique qu'il crée en un point M situé à une distance  $d$  de O.

**point d'application :** point M

**direction :** tangente à la ligne de champ passant par M

$$\vec{B} \text{ intensité : } B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{I}{d}, \text{ avec } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ S.I}$$

**sens :** donné par l'une des règles suivantes

##### a) Règle de la main droite :

La main est placée le long du conducteur de sorte que le courant sort par les doigts, la paume tournée vers le point M, le pouce tendu indique le sens de  $\vec{B}$ .

##### b) Règle de l'observateur d'Ampère :

L'observateur se couche le long du fil de sorte que le courant entre par ses pieds et sort par la tête. Il regarde le M de face, son pouce tendu indique le sens de  $\vec{B}$ .

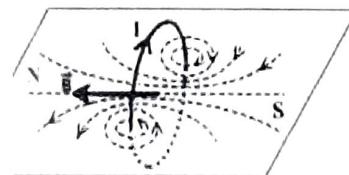
#### 2. Champ créé par une spire circulaire :

Considérons une spire circulaire de rayon  $R$  parcourue par un courant constant d'intensité  $I$ . On se propose de déterminer les caractéristiques du champ créé au centre O de la spire.

**point d'application :** point O

**direction :** suivant l'axe de la spire

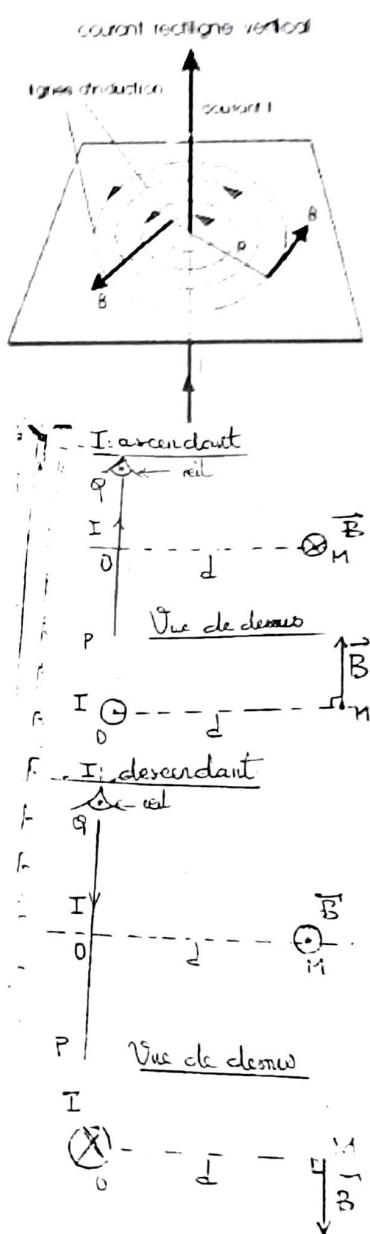
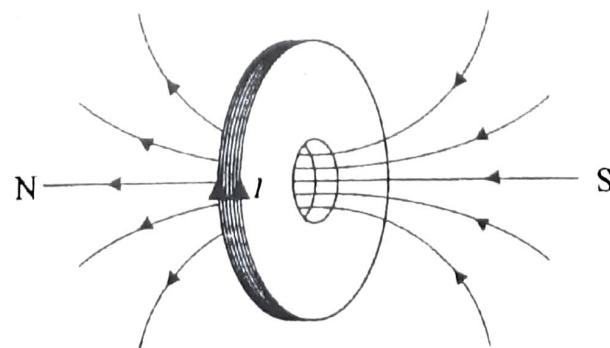
**intensité :**  $B = \frac{\mu_0 I}{2R}$



#### 3. Champ créé par une bobine plate :

Une bobine plate est constituée de  $N$  spires enroulées sur un cylindre isolant dont la longueur  $L$  est inférieure au rayon  $R$ .

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2R}$$



**Remarque : Cas des bobines de Helmholz :**

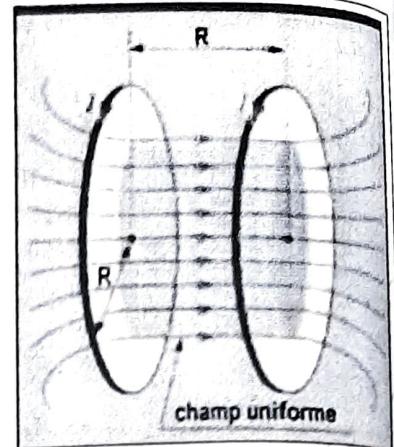
C'est ensemble de deux bobines séparées d'une distance  $d = R$  (rayon), parcourues par des courants de même intensité et de même sens.

Entre les deux bobines le champ magnétique est uniforme :  $B = 0,72\mu_0 NI$

**4. Champ créé par un solénoïde :**

Un solénoïde est constitué de  $N$  spires enroulées sur un cylindre de longueur  $L$  supérieure au rayon  $R$ . Il est considéré comme infiniment long si  $L \geq 10R$ .

Le champ à l'intérieur du solénoïde est uniforme.



**point d'application :** point  $O$

**direction :** suivant l'axe du solénoïde  
**sens :** de la face sud vers la face nord

$$\text{intensité : } B = \frac{\mu_0 Ni}{L} = \mu_0 nI$$

$n = \frac{N}{L}$  : densité linéique des spires (nombre de spire par unité de longueur).

**V. Champ magnétique terrestre :**

Plaçons une aiguille aimantée en un point  $M$  éloignée de tout aimant et de tout circuit électrique parcouru par un courant.

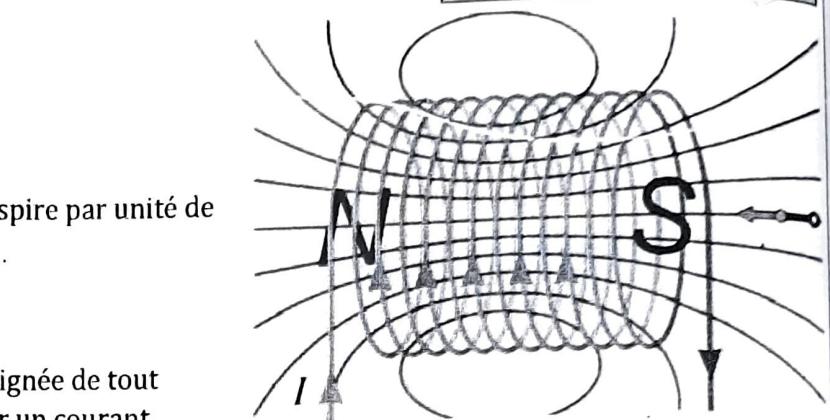
$$\vec{B}_T = \vec{B}_V + \vec{B}_H : \text{champ magnétique terrestre}$$

$\vec{B}_V$  : composante verticale de  $\vec{B}_T$

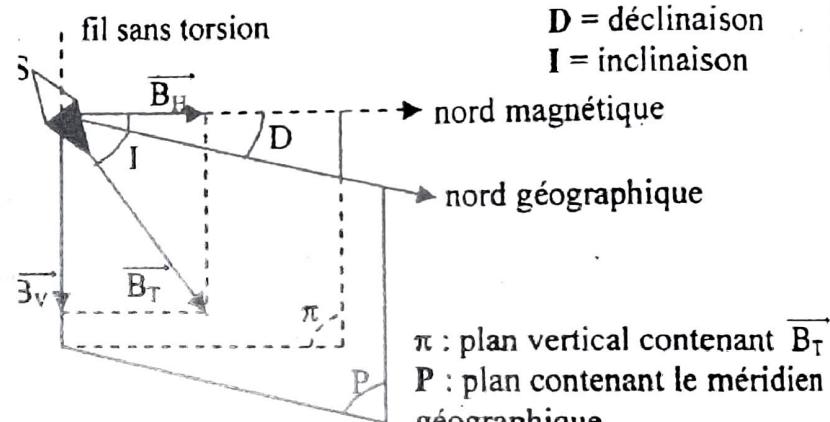
$\vec{B}_H$  : composante horizontale de  $\vec{B}_T$  :

$$B_H = 2 \cdot 10^{-5} T = \text{constante}$$

$$\vec{B}_T \left| \begin{array}{l} B_H = B_T \cos I \\ B_V = B_T \sin I \end{array} \right. \Rightarrow B_T = \sqrt{B_V^2 + B_H^2}$$



**D** = déclinaison  
**I** = inclinaison



$\pi$  : plan vertical contenant  $\vec{B}_T$   
P : plan contenant le méridien géographique

**Remarque :**

Une aiguille aimantée montée sur un pivot vertical n'est sensible qu'à la composante horizontale du champ magnétique terrestre. Son orientation en absence d'autres sources de champ est suivant la direction sud-nord magnétique.

**Bakhoum PC: Exercices sur généralités sur le champ magnétique – champ magnétique des courants**

**Exercice n°1 :**

Un groupe d'élèves, sous la supervision de leur professeur, se déterminer le nombre de spire d'une bobine de leur laboratoire. Cette bobine est assimilée à un solénoïde de longueur  $\ell = 0,5$  m, comportant N spires de rayon  $R = 5$  cm. Pour ce faire, ils disposent la bobine horizontalement, son axe ( $\Delta$ ) étant orthogonal au plan méridien magnétique. Au centre de cette bobine est placée une petite aiguille aimantée horizontale mobile autour d'un axe vertical ( $\Delta'$ ). Le groupe d'élèves lance un courant électrique d'intensité  $I$  dans le solénoïde et constate que l'aiguille dévie d'un angle  $\alpha$ .

1. Faire un schéma ou seront représentés la bobine en indiquant le sens du courant, le vecteur champ magnétique  $\vec{B}_C$  créé par le courant, le vecteur  $\vec{B}_H$  composante horizontale du champ magnétique terrestre, la position finale de l'aiguille et l'angle  $\alpha$ .

2. Exprimer  $\tan \alpha$  en fonction de  $B_H$ ,  $N$ ,  $I$ ,  $\ell$  et  $\mu_0$  (perméabilité magnétique du vide)

3. Le groupe fait varier l'intensité  $I$  du courant dans le circuit et mesure la valeur de l'angle  $\alpha$  pour chaque valeur de  $I$ . Les résultats obtenus permettent de tracer la courbe  $\tan \alpha = f(I)$ . (Figure 1)

- 3-1. Déterminer à partir de cette courbe la relation entre  $\tan \alpha$  et  $I$   
 3-2. En déduire la valeur de  $N$ .

On donne :  $\mu_0 = 4 \pi 10^{-7}$  SI ;  $B_H = 2.10^{-5}$  T.

**Exercice n°2 :**

On étudie le champ magnétique créé par les bobines de HELMOLTZ. Ce sont deux bobines plates circulaires, identiques, de même axe, de centres  $O_1$  et  $O_2$ , de rayon  $R$ , distantes l'une de l'autre de  $d = R$ , comportant chacune  $N$  spires. On désigne par  $O$  le milieu de  $O_1O_2$  (Voir fig. 1 et 2).

On donne  $R = 6,5$  cm ;  $N = 100$  spires. La valeur du champ au centre est  $B = 0,72 \mu_0 \frac{N}{R} I$

1) Les deux bobines sont traversées par des courants de même sens et de même intensité  $I$ . Recopier la figure 2 et représenter le vecteur champ magnétique résultant  $\vec{B}$ , créé par les bobines au point  $O$ .

2) Au point  $O$ , on place une aiguille aimantée, mobile autour d'un pivot vertical. En l'absence de courant dans les bobines, l'aiguille s'oriente comme l'indique la figure 3. L'axe de l'aiguille est alors parallèle aux plans des bobines. La valeur de la composante horizontale du champ magnétique terrestre vaut  $B_H = 2.10^{-5}$  T. On fait passer dans les bobines un courant d'intensité  $I = 50$  mA, l'aiguille aimantée dévie alors d'un angle  $\alpha$ .

a) Faire un schéma indiquant clairement le sens du courant dans les bobines, les vecteurs champs magnétiques au point  $O$  et l'angle de rotation  $\alpha$  de l'aiguille aimantée.

b) Déterminer la valeur de l'angle de rotation  $\alpha$  de l'aiguille aimantée.

3) Sans modifier le courant traversant les bobines ( $I = 50$  mA) on place un aimant droit suivant une direction perpendiculaire à  $O_1O_2$  et confondue avec la direction initiale de l'aiguille (voir figure 4). L'aiguille accuse alors une déviation  $\alpha' = 45^\circ$  par rapport à sa position en l'absence de courant. Préciser les caractéristiques du vecteur champ magnétique créé par l'aimant droit au point  $O$ .

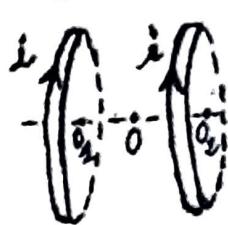


Figure 1

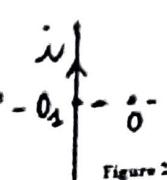


Figure 2

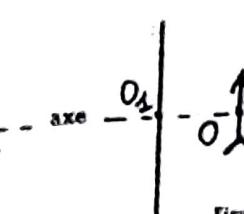


Figure 3

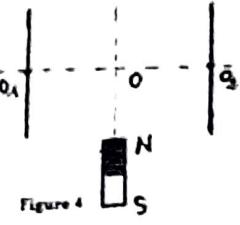


Figure 4

**Fin de la série**

## I. Force de Lorentz :

### 1- Définition :

C'est la force qui s'exerce sur une particule chargée en mouvement dans un champ magnétique : c'est une force magnétique notée  $\vec{F}_m$ .

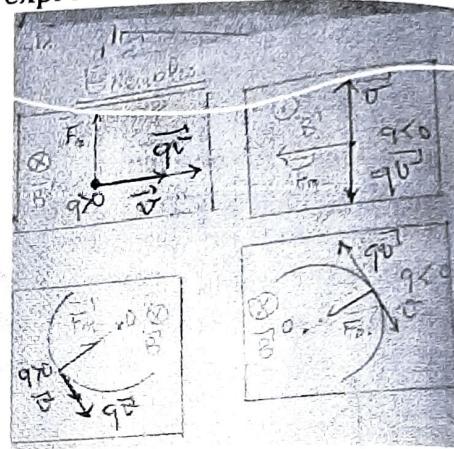
### 2- Expression :

Une particule de charge  $q$  en mouvement de vecteur vitesse  $\vec{v}$  dans une région où règne un champ magnétique  $\vec{B}$  est soumise à la force magnétique de Lorentz ayant pour expression :

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B} \text{ avec } \wedge \text{ (vectoriel)}$$

### 3- Caractéristiques de la force de Lorentz :

- Point d'application : le point considéré de la trajectoire
- Direction :  $\vec{F}_m \perp \vec{v}$  et  $\vec{F}_m \perp \vec{B}$  donc  $\vec{F}_m \perp$  au plan ( $\vec{v}, \vec{B}$ )
- Sens donné par la règle de la main droite : la main est placée le long du vecteur  $q\vec{v}$ , la paume tournée vers  $\vec{B}$ , le pouce tendu indique le sens de  $\vec{F}_m$ .
- Intensité :  $F_m = |qvB \sin(\vec{v}, \vec{B})|$ ; si  $\vec{v} \perp \vec{B}$  alors  $F_m = |q|vB$ .



### Remarque:

- Si  $q=0$ ,  $F_m=0$  : un champ magnétique est sans action sur une particule neutre ;
- Si  $v=0$ ,  $F_m=0$  : un champ magnétique est sans action sur une particule chargée au repos ;
- Si  $\vec{v} \parallel \vec{B}$ ,  $F_m=0$  : un champ magnétique est sans action sur une particule chargée se déplaçant parallèlement à sa direction.

## II- Etude du mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme : cas où $\vec{v} \perp \vec{B}$ .

Une particule de charge  $q>0$  pénètre dans une région de largeur  $\ell$  où règne un vecteur champ uniforme  $\vec{B}$  en un point O origine d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  avec une vecteur vitesse  $\vec{v} \perp \vec{B}$ .

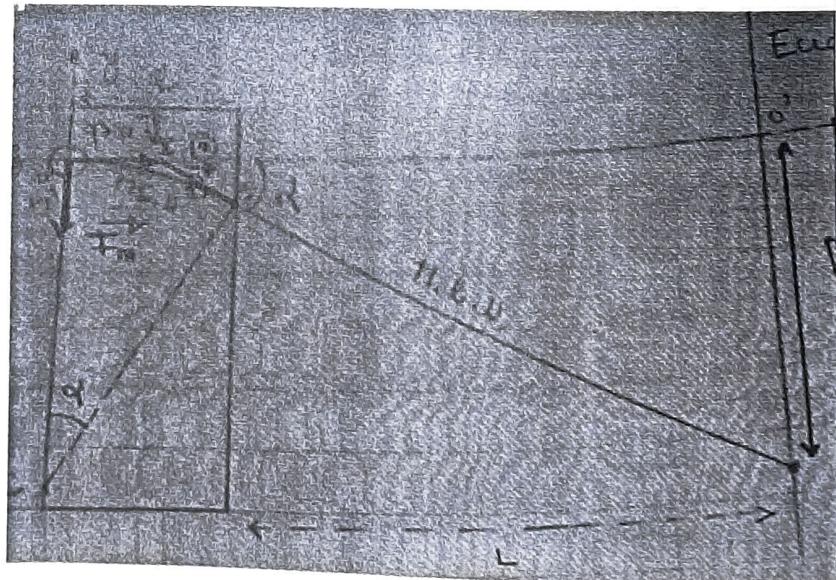
### a) Nature de la trajectoire :

- Système : particule
- R.T.S.G
- B.F :  $\vec{F}_m ; \vec{P} \ll \vec{F}_m$
- T.C.I :  $\vec{F}_m = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}_m}{m}$  or

$$\vec{a} = \begin{cases} a_x = \frac{F_{mx}}{m} = 0 \\ a_y = \frac{F_{my}}{m} = -\frac{F_m}{m} \text{ et } \vec{v} \begin{cases} v_{0x} = v \\ v_{0y} = 0 \\ v_{0z} = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$a_z = 0$  et  $v_{0z} = 0 \Rightarrow z = \text{cste} = z_0 = 0$ , il n'y a pas de mouvement suivant l'axe Oz

Conclusion : la trajectoire est plane, le mouvement se fait dans le plan ( $Ox, Oy$ ) contenant  $\vec{v}$  et  $\perp$  à  $\vec{B}$ .



### b) Nature du mouvement :

- $\vec{a} = \frac{\vec{F}_m}{m} = \frac{q}{m} \vec{v} \wedge \vec{B} \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{v}$  or dans la base de Frenet  $\vec{v}' = v\vec{u}_T$  donc  $\vec{a} \perp \vec{u}_T$  d'où  $a_T = \frac{dv}{dt} = 0$   
 $\Rightarrow v = \text{cste}$  : le mouvement de la particule est uniforme.
- $a_T = 0 \Rightarrow a = a_n = \frac{v^2}{\rho}$  et  $a = \frac{F_m}{m} = \frac{|q|vB}{m}$  d'après le T.C.I.  $\Rightarrow \frac{v^2}{\rho} = \frac{|q|vB}{m} \Rightarrow \rho = \frac{mv}{|q|B} = \text{cste}$  donc le mouvement est circulaire.

## Sciences Physiques

**Conclusion :** Une particule de charge  $q$  en mouvement dans un champ magnétique  $\vec{B}$  avec un vecteur vitesse  $\vec{v} \perp \vec{B}$  décrit toujours un mouvement circulaire uniforme de rayon :  $R = \frac{mv}{|q|B}$ .

c) Nature du mouvement entre le point de sortie M et l'écran :

A la sortie du champ :  $\vec{F}_m = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}_m}{m} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \text{cste}$  donc le mouvement est **rectiligne uniforme**.

d) Déflexion magnétique  $D_m$ :

S'il n'y avait pas de champ magnétique la particule serait recueilli en  $O'$ . Avec le champ magnétique, elle est déviée suivant la droite ( $I, M, P$ ).

On appelle **déflexion magnétique** la distance  $D_m = O'P$  qui sépare le centre  $O'$  de l'écran du point d'impact  $P$  de la particule.

- D'après le triangle  $IO'P$  :  $\tan \alpha = \frac{O'P}{IO'} \Rightarrow O'P = IO' \tan \alpha$  avec  $IO' \approx L \Rightarrow O'P = Lt \tan \alpha$  (1)
- D'après le triangle  $CMM'$  :  $\sin \alpha = \frac{M'M}{CM} = \frac{\ell}{R}$  (2)

Pour de faibles déviations :  $\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha$ .

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow O'P = L \frac{\ell}{R} \text{ avec } R = \frac{mv}{|q|B} \text{ alors } O'P = L \ell \times \frac{|q|B}{mv} \Rightarrow O'P = L \ell B \times \frac{|q|}{m} \times \frac{1}{v}.$$

La déflexion magnétique dépend du rapport  $\frac{|q|}{m}$  (appelé charge massique) et est mieux adaptée aux particules lentes.

III- Applications :1- Spectrographe de masse : montage de Dempster

Un spectrographe de masse est un appareil qui permet de séparer les isotopes d'un élément en utilisant les déflexions électrique et magnétique.

Le montage de Dempster est formé de 3 chambres.

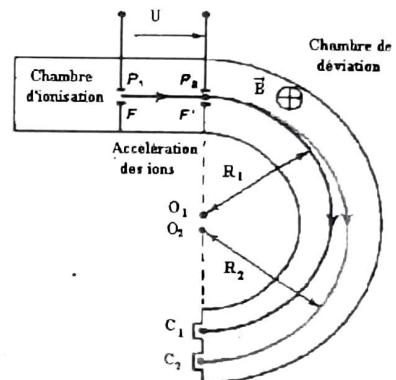
- Une chambre d'ionisation (I) : où les isotopes de l'élément considéré sont ionisés et sortent avec une vitesse pratiquement nulle.
- Une chambre d'accélération (II) : où règne un champ électrique uniforme  $\vec{E}$  donc une tension accélératrice  $U$  qui accélère les ions.
- Une chambre de déviation (III) : où règne un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$  qui dévie les ions suivant des trajectoires circulaires.

Soient  ${}^{A_1}_z X$  et  ${}^{A_2}_z X$  les isotopes de l'élément  $X$  avec  $A_1 < A_2$ .

On suppose ces isotopes s'ionisent négativement dans la chambre d'ionisation.

a) Etude du mouvement des ions dans la chambre d'accélération :

- Système : particule
- R.T.S.G
- B.F :  $\vec{F}_e ; \vec{P} \ll \vec{F}_e$
- T.C.I :  $\vec{F}_e = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}_e}{m} = \frac{q\vec{E}}{m} = \text{cste} \Rightarrow M.R.U.V$



Équations horaires :

$$M.R.U.V \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{|q|E}{m} \\ v = at = \frac{|q|E}{m} t \\ x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \frac{|q|E}{m} t^2 \end{cases}$$

b) Energie cinétique des ions en F' :

T.E.C entre F et F' :  $E_c(F') - E_c(F) = W_{F \rightarrow F'} = q(V_{P1} - V_{P2})$  avec  $E_c(F) = 0$   
 $\Rightarrow E_c(F') = q(V_{P1} - V_{P2}) = qU_{P1P2}$

Posons  $E_{c1}$  l'énergie cinétique de l'ion  ${}^{A_1}_z X^-$  en F' et  $E_{c2}$  celle de l'ion  ${}^{A_2}_z X^-$ .

- $E_{C2} = q_2 U_{P1P2}$

Or  $q_1 = q_2 = q$  donc  $E_{C1} = E_{C2}$

**Conclusion :** les deux ions ont la même énergie cinétique en  $F'$ .

c) Vitesse d'un ion en  $F'$ :

$$E_c(F') = qU_{P1P2} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = qU_{P1P2} \Rightarrow v = \sqrt[2]{\frac{2qU_{P1P2}}{m}} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = \sqrt[2]{\frac{2qU_{P1P1}}{m_1}} \\ v_2 = \sqrt[2]{\frac{2qU_{P1P1}}{m_2}} \end{cases}$$

d) Comparaison des vitesses des deux ions en  $F'$ :

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt[2]{\frac{m_1}{m_2}}}{\sqrt[2]{\frac{m_2}{m_1}}} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \text{ avec } \begin{cases} m_1 = A_1 u \\ m_2 = A_2 u \end{cases} \text{ et } u = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ Kg} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = \sqrt{\frac{A_2}{A_1}}$$

- Les deux ions ont des vitesses différentes en  $F'$  :  $v_1 \neq v_2$  car  $m_1 \neq m_2$ .
- $m_1 < m_2 \Rightarrow v_1 > v_2$  : l'ion qui a la masse la plus petite est plus accéléré.

e) Etude du mouvement dans ions (III):

Dans (III) les ions pénètrent avec un vecteur vitesse  $\vec{v} \perp \vec{B}$  et décrivent un mouvement circulaire uniforme (M.C.U) de rayon  $R = \frac{mv}{|q|B}$ .

$$\text{Avec } v = \sqrt{\frac{2qU_{P1P2}}{m}} \Rightarrow R = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mU_{P1P2}}{q}}$$

Le rayon dépend de la masse de l'ion : l'ion qui a la masse la plus grande a le plus grand rayon donc est plus dévié.

$$R_1 = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m_1 U_{P1P2}}{q}} \text{ et } R_2 = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m_2 U_{P1P2}}{q}} \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \frac{\frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m_2 U_{P1P2}}{q}}}{\frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m_1 U_{P1P2}}{q}}} \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} = \sqrt{\frac{A_2}{A_1}} ; m_1 < m_2 \Rightarrow R_1 < R_2$$

f) Détermination de la distance d qui sépare les deux points d'impact:

$$d = C_1 C_2 = F'C_2 - FC_1 = 2R_2 - 2R_1 = 2(R_2 - R_1) = \frac{2}{B} \sqrt{\frac{2m_2 U_{P1P2}}{q}} - \frac{2}{B} \sqrt{\frac{2m_1 U_{P1P2}}{q}} \Rightarrow$$

$$d = \frac{2}{B} \sqrt{\frac{2U_{P1P2}}{q}} (\sqrt{m_2} - \sqrt{m_1}) = \frac{2}{B} \sqrt{\frac{2m_2 U_{P1P2}}{q}} \left( \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} - 1 \right) = 2R_1 \left( \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} - 1 \right)$$

$$d = \frac{2}{B} \sqrt{\frac{2U_{P1P2}}{q}} (\sqrt{m_2} - \sqrt{m_1}) = 2R_1 \left( \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} - 1 \right) = 2R_1 \left( \sqrt{\frac{A_2}{A_1}} - 1 \right).$$

g) Détermination du pourcentage ou de l'abondance isotopique:

En reliant les collecteurs  $C_1$  et  $C_2$  à des microampèremètres on peut mesurer la quantité d'électricité recueillie dans chacun.

$$q = Ne = I \cdot \Delta t$$

- q, la quantité d'électricité (exprimée en coulomb)
- N, nombre de porteurs de charges (d'ions)
- e, la charge élémentaire :  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C
- I, intensité du courant (exprimée en ampère)

$$\begin{cases} q_1 = N_1 e = I_1 \Delta t \\ q_2 = N_2 e = I_2 \Delta t \end{cases} \Rightarrow \frac{q_1}{q_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{I_1}{I_2}$$

Soient  $P_1$  le pourcentage isotopique de l'ion  $^{A_1}_Z X^-$  et  $P_2$  le pourcentage isotopique de l'ion  $^{A_2}_Z X^-$  :

$$P_1 = \frac{100N_1}{N_1 + N_2} = \frac{100I_1}{I_1 + I_2} = \frac{100q_1}{q_1 + q_2} \text{ et } P_2 = \frac{100N_2}{N_1 + N_2} = \frac{100I_2}{I_1 + I_2} = \frac{100q_2}{q_1 + q_2}$$

L'isotope le plus abondant a le pourcentage le plus élevé et est recueilli au niveau du collecteur le plus lumineux (le plus éclairé).

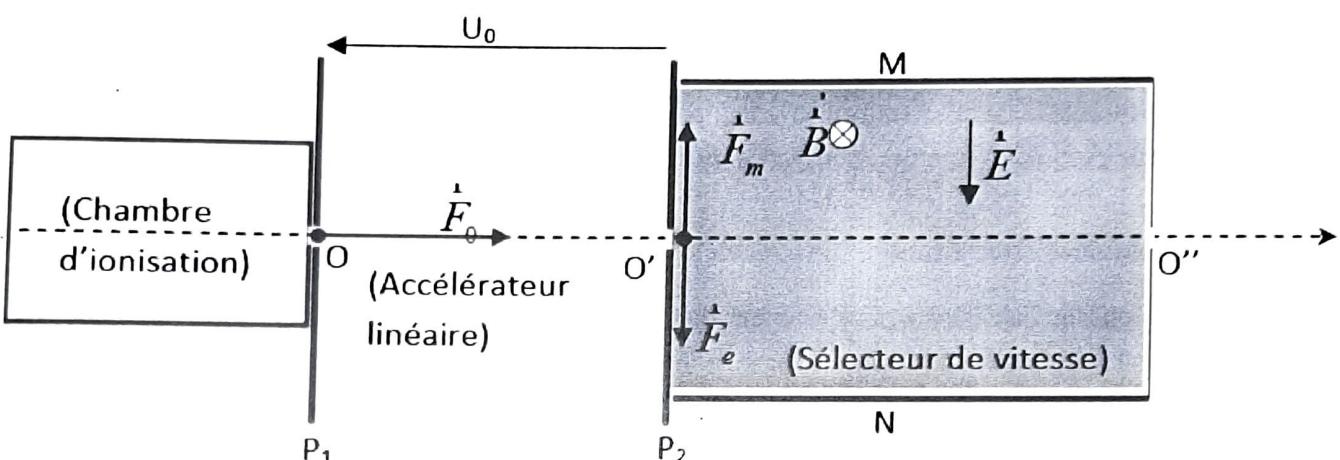
(ii) Détermination de la masse molaire moyenne de l'élément X :

$$M(X) = \frac{P_1 A_1 + P_2 A_2}{100}$$

**2- Filtre de vitesse :**

Le dispositif est formé de 3 chambres :

- Une chambre d'ionisation (I),
- Une chambre d'accélération (II),
- Un sélecteur de vitesse (III) où règne un champ électrique uniforme  $\vec{E}$  et un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$  dans le même sens mais de sens contraire.



- Si  $F_m < F_e \Leftrightarrow |q|vB < |q|E \Rightarrow v < \frac{E}{B}$  : les ions sont déviés dans le sens de la force électrique et ne sortent pas du sélecteur.
- Si  $F_m > F_e \Leftrightarrow |q|vB > |q|E \Rightarrow v > \frac{E}{B}$  : les ions sont déviés dans le sens de la force magnétique et ne sortent pas du sélecteur.
- Si  $F_m = F_e \Leftrightarrow |q|vB = |q|E \Rightarrow v = \frac{E}{B}$  : les ions ne sont pas déviés, ils décrivent un mouvement rectiligne uniforme en sortant par le trou  $O''$ .

**Conclusion :** Seuls les ions qui pénètrent dans le sélecteur avec une vitesse  $v = \frac{E}{B}$  y sortent sans pour autant déviés. Les ions sont donc filtrés à partir de leur vitesse d'où l'appellation filtre de vitesse, donné à ce dispositif.

**Remarque :** On peut jouer sur la tension accélération accélératrice  $U_0$  pour avoir une valeur de la vitesse  $v = \frac{E}{B}$ .

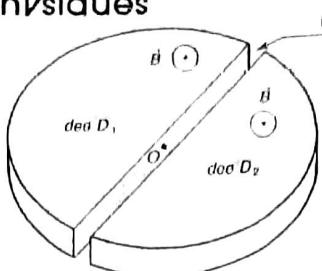
On sait que :  $v = \sqrt{\frac{2qU_0}{m}} = \frac{E}{B} \Rightarrow U_0 = \frac{mE^2}{2qB^2}$

Si on a deux isotopes de masses  $m_1$  et  $m_2$  :

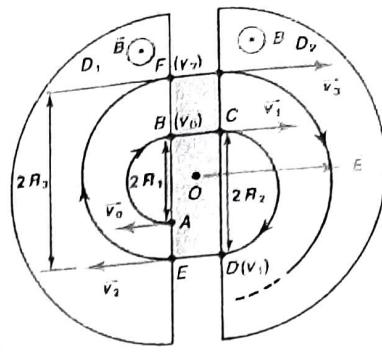
- La tension  $U_{01} = \frac{m_1 E^2}{2qB^2}$  permet de faire sortir les ions de masse  $m_1$ .
- La tension  $U_{02} = \frac{m_2 E^2}{2qB^2}$  permet de faire sortir les ions de masse  $m_2$ .

**3- Le cyclotron :**

Le cyclotron est un accélérateur cyclique de particules chargées. Il est formé de deux boîtes conductrices demi-cylindriques appelées « dees » et baignant dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$ . Une source S placée entre les « dees » produit des ions qui sont accélérés par une tension alternative  $u$  régnant entre les « dees ». (voir figure).



8



b

#### — Détermination de la période cyclotron Tc :

Dans un "deee" le mouvement est circulaire uniforme  $\Rightarrow T_c = \frac{2\pi}{w}$  avec  $w = \frac{v}{R} \Rightarrow I_c = \frac{v}{w}$  et  $R = \frac{|q|B}{w}$

$$\Rightarrow T_c = \frac{2\pi m}{|q|B}$$

— Détermination de la fréquence cyclotron Nc:  $N_c = \frac{1}{T_c} = \frac{|q|B}{2\pi m}$

- Détermination de la fréquence cyclotron  $N_c = \frac{1}{T_c} = \frac{2\pi m}{qB}$
- Détermination du temps mis par l'ion dans un « dee »: dans un « dee », l'ion décrit un demi-cercle, donc  $\Delta t = \frac{T_c}{2} = \frac{\pi m}{|qB|}$ .

— Expression de l'énergie cinétique maximale en fonction du nombre n de passage entre les «dees» :

Après chaque passage entre les « dees » l'énergie cinétique augmente de  $qU$ .

$$E_{cn} - E_{c(n-1)} = qU \Rightarrow E_{cn} = nqU \dots \dots \dots \text{n}^{\text{e}} \text{ passage.}$$

$$E_{\text{cmax}} = E_{cn} = nqU$$

### — Expression de $V_n$ en fonction de $n$ et $V_1$ :

$$E_{cn} = nqU \text{ et } E_{c1} = qU \Rightarrow E_{cn} = nE_{c1} \Rightarrow \frac{1}{2}mV_n^2 = n \cdot \frac{1}{2}mV_1^2 \text{ d'où } V_n^2 = nV_1^2 \\ \Rightarrow V_n = V_1\sqrt{n}$$

### — Expression de R<sub>n</sub> en fonction de R<sub>1</sub> et n :

$$\text{On a } R = \frac{mV}{|q|B} \Rightarrow \begin{cases} R_1 = \frac{mV_1}{|q|B} \\ R_n = \frac{mV_n}{|q|B} \end{cases} \Rightarrow \frac{R_n}{R_1} = \frac{V_n}{V_1} = \sqrt{n} \quad \Rightarrow \quad R_n = R_1 \sqrt{n}$$

— Détermination du nombre de tours effectués après n passages entre les « dees » :

~~1 tour → 2 passages~~

ntours  $\rightarrow N$  passages d'où  $2N=n \Rightarrow N = \frac{n}{2}$

## Fin du chapitre

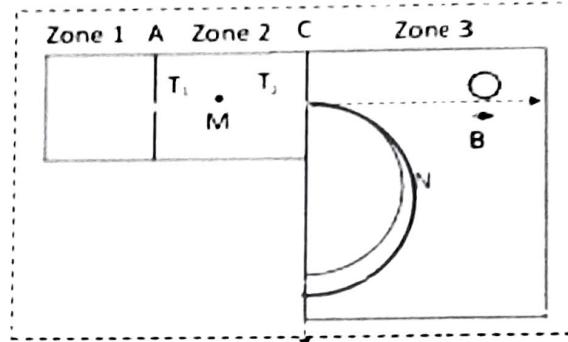
**Exercice n°1:**

Le potassium naturel est un mélange de deux isotopes  $^{39}\text{K}$  et  $^{40}\text{K}$ . L'isotope  $^{39}\text{K}$  est plus abondant.

On se propose de déterminer le nombre de masse  $x$  du deuxième isotope ainsi que le pourcentage de chacun des isotopes dans le potassium naturel.

On utilise pour cela un spectrographe de masse (voir figure) comportant essentiellement trois zones.

- Dans la zone (1) un échantillon de potassium est vaporisé et ionisé sous forme d'ion  $^{39}\text{K}^+$  et  $^{40}\text{K}^+$ .
- Dans la zone (2) les ions sont accélérés par un champ électrique  $\vec{E}$ .
- Dans la zone (3) les ions sont déviés par un champ magnétique  $\vec{B}$  (perpendiculaire au plan de la figure) pour atteindre un écran luminescent.



Un vide poussé a été fait dans les trois zones. Le poids des ions est négligeable par rapport aux autres forces. On assimilera la masse d'un ion à la somme des masses des nucléons de son noyau. Ainsi la masse d'un ion  $^{39}\text{K}^+$  est  $m = 39 m_0$  et celle d'un ion  $^{40}\text{K}^+$  est  $m' = xm_0$  avec  $m_0 = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ .

La charge élémentaire est  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ .

**I. Etude du mouvement dans la zone (2):**

Entre deux plaques A et C règne un champ électrique uniforme  $\vec{E}$ . Les ions pénètrent en  $T_1$  avec une vitesse pratiquement nulle et ressortent en  $T_2$  avec une vitesse direction  $T_1T_2$ .

- Représenter qualitativement la force  $\vec{F}_e$  exercée sur un ion se trouvant en M. En déduire la direction et le sens du vecteur champ électrique  $\vec{E}$  ainsi que le signe de la tension entre les plaques A et C :  $U = V_A - V_C = U_{AC}$
- Chaque réponse sera justifier. Aucun calcul numérique n'est demandé :
  - Les deux types d'ions sont - ils soumis à la même force électrique ?
  - Les deux types d'ions subissent - ils la même accélération ?
  - Les deux types d'ions ont - ils la même énergie cinétique à leur passage en  $T_2$  ?
  - Les deux types d'ions ont - ils la même vitesse à leur passage en  $T_2$  ?
- Donner l'expression du travail de la force électrique exercée sur un ion lorsque celui passe de la plaque A à la plaque C.
- Etablir l'expression de la vitesse  $V$  des ions  $^{39}\text{K}^+$  à leur passage en  $T_2$ , en fonction de  $e$ ,  $U$  et  $m_0$ . En déduire sans nouveau calcul, l'expression de la vitesse  $V'$  des ions  $^{40}\text{K}^+$  en fonction de  $e$ ,  $U$ ,  $x$  et  $m_0$ .

**II. Etude du mouvement dans la zone (3):**

Les ions issus de  $T_2$  pénètrent dans la zone (3) avec des vitesses perpendiculaires à la plaque C. Leur mouvement s'effectue dans le plan de la figure sur des trajectoires circulaires.

- En un point N de l'une des trajectoires représenter qualitativement le vecteur vitesse d'un ion ainsi que la force magnétique  $\vec{F}_m$  exercée sur cet ion. En déduire le sens du vecteur  $\vec{B}$ .
- Montrer que les ions sont animés d'un mouvement uniforme. Que peut-on dire du vecteur accélération ? Représenter qualitativement le vecteur accélération au point N.
- Montrer que la trajectoire d'un ion  $^{39}\text{K}^+$  a un rayon  $R = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{78m_0U}{e}}$ . En déduire sans nouveau calcul l'expression du rayon  $R'$  de la trajectoire des ions  $^{40}\text{K}^+$ .
- Dans le repère  $(T_2, \vec{i}, \vec{j})$  :
  - Préciser les coordonnées du centre noté  $\Omega$  du cercle de rayon R décrit par un ion.
  - Etablir les équations horaires  $x(t)$ , et  $y(t)$  du mouvement.
  - En déduire l'équation cartésienne de la trajectoire.

Cours à domicile : 77 550 04 15

5 Calculer numériquement la distance D entre  $T_2$  et le point d'impact sur l'écran luminescent des ions  $^{39}\text{K}^+$ , dans le cas où  $|U|=1000 \text{ V}$  et  $B=0,1\text{T}$ .

### III. Exploitation :

Sur l'écran luminescent on observe deux taches I et I'. La tache I' est la moins lumineuse.

1. A quel type d'ions correspond chaque tache ? L'isotope  $\text{xK}^+$  est - il plus « lourd ou plus léger » ? Justifier.
2. Exprimer  $IT_2$  et  $I'T_2$  en fonction des rayons des trajectoires et montrer que  $\frac{IT_2}{I'T_2} = \sqrt{\frac{x}{39}}$ .
3. On ajuste les valeurs de U et B de telle sorte que  $IT_2 = 60,0 \text{ cm}$ . On mesure la distance  $I'I$  entre les deux taches. On trouve  $I'I = 1,5 \text{ cm}$ .
  - a) En déduire la valeur de x.
  - b) D'après vous quel avantage présente ce protocole expérimental ?
4. En I et I' on place des « compteurs » de particules. Pendant la même durée on a pu dénombrer  $n = 2216$  impacts au point I et  $n'=163$  impacts au point I'.
  - a) Déduire de cette mesure la composition isotopique du potassium naturel.
  - b) Calculer la masse molaire moyenne du potassium.
5. On superpose au champ  $\vec{B}$  un champ électrique uniforme  $\vec{E}$  pour compenser l'effet de ce premier et pour que les ions  $^{39}\text{K}^+$  puissent garder un mouvement rectiligne uniforme dans la zone 3.
  - a) En un point de la trajectoire représenter les forces qui s'exercent sur un ion  $^{39}\text{K}^+$ .
  - b) Déterminer les caractéristiques de  $\vec{E}$ .
  - c) Préciser le sens de la déviation des ions  $\text{xK}^+$ .
  - d) Déterminer la valeur  $U'$  de la tension accélératrice qui permet aux ions  $\text{xK}^+$  de décrire un mouvement rectiligne uniforme dans la zone 3.

### Exercice n°2 :

Des protons  $\text{H}^+$  de masse  $m = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$  sont produits par une chambre d'ionisation. On néglige les forces de pesanteur.

Ces protons pénètrent en S sans vitesse initiale dans un accélérateur linéaire où ils sont soumis à un champ électrique uniforme créé par une tension  $U = V_C - V_A$

1

1.1 Exprimer l'accélération d'un proton en fonction de U, d, m et la charge élémentaire e.

1.2 Ecrire l'équation horaire du mouvement d'un proton dans l'accélérateur.

2 Les protons pénètrent ensuite en O avec une vitesse dans un domaine limité par deux plans P et P' où règne un champ magnétique uniforme orthogonal à la vitesse.

2.1 Reproduire le schéma sur votre feuille de copie et représenter la force magnétique subie par un proton en O. Calculer sa norme.

2.2 Montrer que le mouvement des protons est uniforme et circulaire entre P et P'. Exprimer le rayon de leur trajectoire en fonction de m, B, e et U.

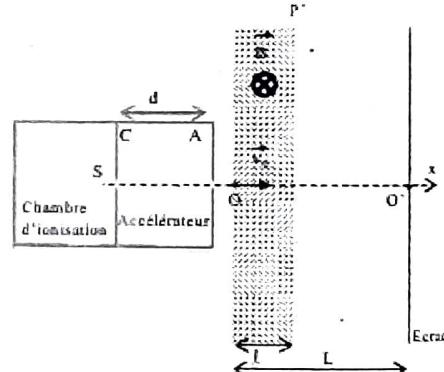
3 On admet que la distance l entre les plans P et P' est négligeable devant L (distance entre O et l'écran et que les protons sortent par P' et viennent heurter l'écran en M).

3.1 Quelle est la nature du mouvement des protons après leur sortie du champ magnétique ? Justifier.

3.2 Exprimer la déflexion magnétique  $O'M$  en fonction de L, l, B, e, U, et m.

3.3 Pour empêcher les protons d'atterrir sur l'écran, on augmente la largeur l' du champ magnétique. Quelle valeur minimale  $L_1$  faudrait-il donner à l', pour que les protons ressortent par le plan P ?

Données :  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ;  $U = 10 \text{ kV}$ ;  $B = 0,5 \text{ T}$ .



**Fin de la série**

## Chapitre VII: Loi de Laplace

### I. Force de Laplace :

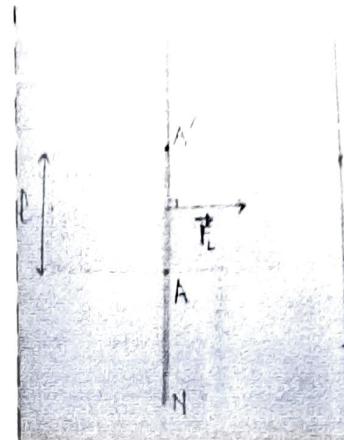
C'est la force qui s'exerce sur un conducteur rectiligne parcouru par un courant et placé dans un champ magnétique. C'est une force électromagnétique qu'on notera par  $\vec{F}_L$ .

#### — Enoncé de la loi de Laplace :

Considérons un conducteur rectiligne MN parcouru par un courant constant d'intensité I. La portion AA' du conducteur de longueur  $\ell$  qui est plongée dans  $\vec{B}$  est soumise à la force de Laplace ayant pour expression :  $\vec{F}_L = I\vec{\ell} \wedge \vec{B}$  avec  $\vec{\ell} = \overrightarrow{AA'}$ ;  $\vec{\ell}$  et I on toujours même.

#### — Caractéristiques de $\vec{F}_L$ :

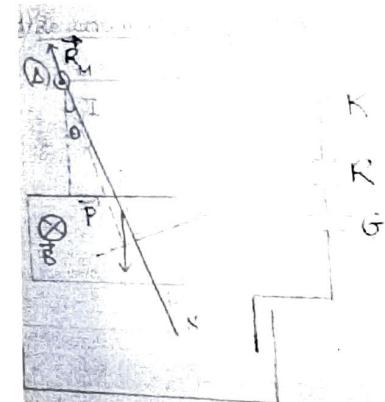
- Point d'application : le milieu de la portion AA'
- Direction :  $\vec{F}_L \perp MN$  et  $\vec{F}_L \perp \vec{B}$
- Sens : voir figure, donné par la règle de la main droite (*la main est placée le long du conducteur de sorte que le courant sort par les doigts, la paume tournée vers  $\vec{B}$ , le pouce tendu indique le sens de  $\vec{F}_L$* )
- Intensité :  $F_L = I\ell B |\sin(\vec{\ell}; \vec{B})|$  avec I en Ampère (A),  $\ell$  en mètre (m), B en tesla (T) et F en Newton (N).



### II- Applications :

#### 1- Le conducteur pendule :

- Si  $I=0$ , le conducteur MN est sur la verticale
- Si  $B=0$ , le conducteur MN est sur la verticale
- Si  $I \neq 0$  et  $B \neq 0$ , le conducteur MN dévie d'un angle  $\theta$  par rapport à la verticale dans un sens qui dépend de ceux de I et B.



#### Etude de l'équilibre du pendule :

- Système : conducteur MN
- R.T.S.G.
- B.F :  $\begin{cases} \vec{P} : \text{poids du conducteur} \\ \vec{F} : \text{force de Laplace} \\ \vec{R} : \text{réaction de l'axe} \end{cases}$

À l'équilibre :

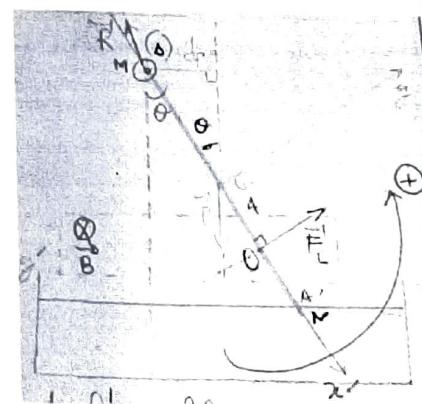
- $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$  (1)
- $\sum \vec{M}_{F_{ext}} = \vec{0}$  (2)

$$(2) \Rightarrow M_{\vec{F}/\Delta} + M_{\vec{P}/\Delta} + M_{\vec{R}/\Delta} = 0 \Rightarrow F_{LOM} - mg.MG.\sin\theta + 0 = 0$$

$$\Rightarrow I.AA'.B.OM = mg.MG.\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{I.AA'.B.OM}{mg.MG}$$

$$(1) \Rightarrow \vec{F} + \vec{P} + \vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} F_x + P_x + R_x = 0 \\ F_y + P_y + R_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 - P\cos\theta + R_x = 0 \\ F - P\sin\theta + R_y = 0 \end{cases}$$

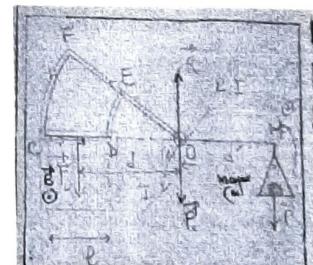
$$\Rightarrow \begin{cases} R_x = mg\cos\theta \\ R_y = mgsin\theta - F \end{cases} \Rightarrow R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$



#### 2- La balance de Cotton :

- Si  $I=0$ , la balance est en équilibre sous l'action de son poids  $\vec{P}_0$  et de la réaction  $\vec{R}$  ( $\vec{P}_0 + \vec{R} = \vec{0}$ ) : les points C, D, O et M sont sur la même horizontale.
- Si  $I \neq 0$ , la force de Laplace qui s'exerce sur la portion CD entraîne un déséquilibre de la balance. Pour rétablir l'équilibre, on pose une masse marquée m sur le plateau de la balance.

$$\text{A l'équilibre : } \sum \vec{M}_{F_{ext}} = \vec{0} \Rightarrow M_{\vec{F}/\Delta} + M_{\vec{P}/\Delta} + M_{\vec{R}/\Delta} + M_{\vec{P}_0/\Delta} = 0$$

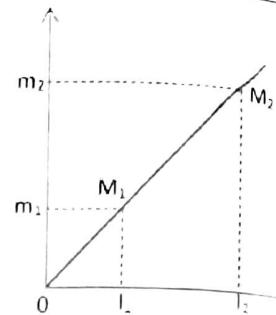


$$Pd' + 0 + 0 = 0 \Rightarrow I\ell Bd - mgd' = 0 \Rightarrow m = \frac{\ell Bd}{gd'} I \quad (1).$$

En faisant varier  $I$ , on peut tracer la courbe  $m = f(I)$

Graphiquement : on a une droite linéaire d'équation  $m = a \cdot I$  (2)

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow \frac{\ell Bd}{gd'} = a \Rightarrow B = \frac{agd}{\ell d} \text{ avec } a = \frac{m_2 - m_1}{I_2 - I_1}$$

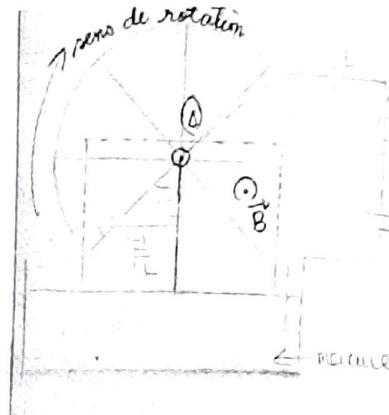


### 3- La roue de Barlow :

La roue est formée de rayons rigides de longueur  $R$  régulièrement pouvant pénétrer les uns après les autres dans une nappe remplie de mercure.

Le rayon qui plonge dans le mercure est soumis à la force de Laplace d'intensité  $F_L = IRB$ . Cette force fait déplacer le rayon qui cède la place à un autre rayon, qui sous l'action de la même force effectue le même mouvement et ainsi de suite entraînant la rotation de la roue.

- $M_{F_L/\Delta} = F_L \frac{R}{2} = \frac{1}{2} IR^2 B$  : moment de  $\vec{F}_L$  par rapport à l'axe  $\Delta$ .
- $W_{F_L} = M_{F_L/\Delta} \alpha$  : Travail de  $\vec{F}_L$  pour une rotation d'angle  $\alpha$  de la roue
- $P_{F_L} = M_{F_L/\Delta} w$  : puissance de  $\vec{F}_L$  avec  $w$ , la vitesse angulaire.



### 4- Les rails de Laplace :

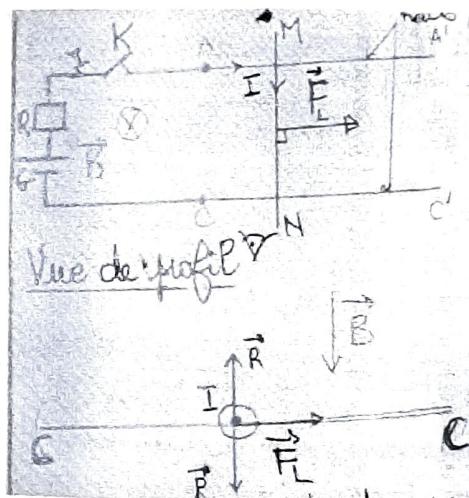
#### a) Cas où les rails sont disposés horizontalement :

- Si  $I=0$ , le conducteur MN est immobile
- Si  $I \neq 0$  et  $B=0$ , le conducteur MN est immobile
- Si  $I \neq 0$  et  $B \neq 0$ , le conducteur MN se met en mouvement dans un sens qui dépend de ceux de  $I$  et  $B$ .

$$\text{T.C.I. } \sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F}_L + \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

$$\text{Suivant } x'x : F_{Lx} + P_x + R_x = ma_x \Rightarrow F_L + 0 + 0 = ma \Rightarrow I \cdot MN \cdot B = ma$$

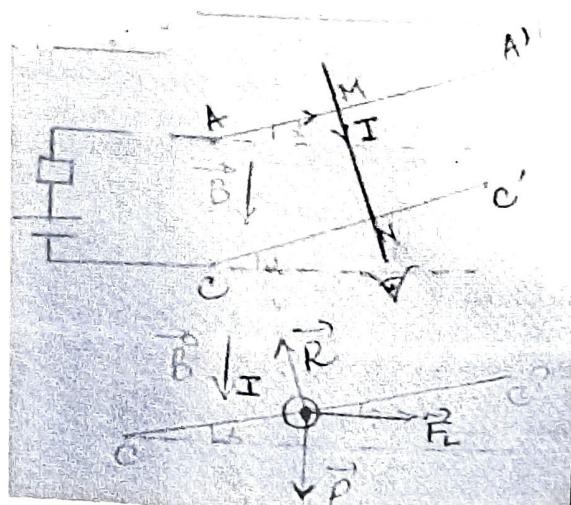
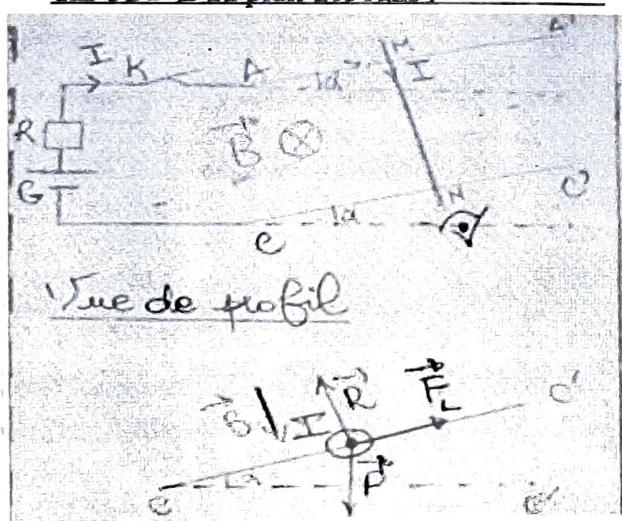
$$\Rightarrow a = \frac{I \cdot MN \cdot B}{m}$$



#### b) Cas où les rails sont inclinés d'un angle α par rapport à l'horizontale :

##### • Cas où $\vec{B} \perp$ au plan des rails :

##### - Cas où $\vec{B}$ est verticale dirigée vers le bas



- A l'équilibre :  $\vec{F}_L + \vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$
- Si MN est en mouvement :  $\vec{F}_L + \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$

Fin du chapitre

## Bakhoum PC: Exercices sur force de Laplace

### Exercice n°1:

- La tige MN de centre de gravité G est suspendue par son extrémité supérieure en M à un axe fixe ( $\Delta$ ), autour duquel il peut tourner librement : sa partie inférieure plonge dans une cuve contenant une solution conductrice comme le montre la figure -2-. La tige parcourue par un courant continu d'intensité I réglable, dévie d'un angle  $\alpha$  par rapport à la verticale. Uniquement la partie GN de la tige plonge dans un champ magnétique  $\vec{B}_0$  uniforme et horizontal.

1- Sur la figure-2- :

a- représenter les forces qui s'exercent sur la tige dans sa position d'équilibre ;

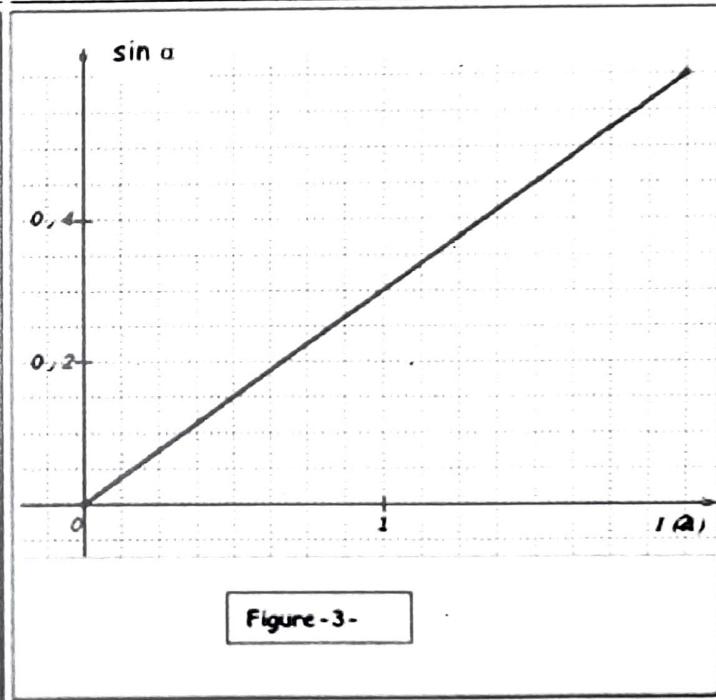
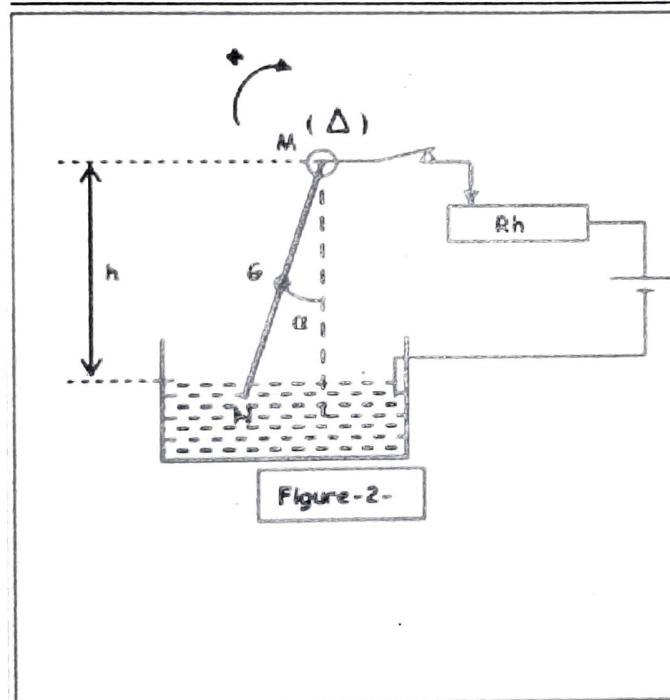
b- indiquer le sens de  $\vec{B}_0$  en expliquant la règle utilisée.

2- On fait varier I et on mesure à chaque fois l'angle  $\alpha$ . Ces mesures ont permis de tracer la courbe  $\sin \alpha = f(I)$  de la figure -3-.

a- Par application du théorème des moments à la tige en équilibre, montrer que  $\sin \alpha = \frac{3LB_0}{4mg} \cdot I$

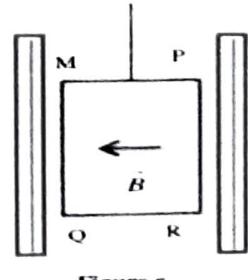
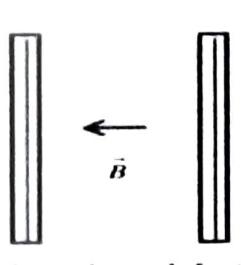
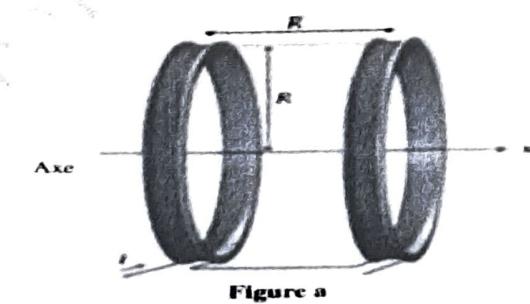
b- En exploitant la pente de la courbe, trouver la valeur du champ magnétique  $\vec{B}_0$ .

c- Déterminer la valeur maximale  $I_0$  de I qu'il ne faut pas dépasser pour que le point N reste en contact avec la solution conductrice. On donne  $h=16\text{cm}$ .



### Exercice n°2 : TS<sub>1</sub>

Pour créer un champ magnétique uniforme on utilise les bobines de Helmholtz. Ce sont deux bobines plates identiques, coaxiales, séparées par une distance égale à leur rayon R et parcourues par des courants de même intensité I et de même sens. Dans l'espace entre les bobines règne un champ magnétique uniforme horizontal  $\vec{B}$  (figures a et b).



1. Sur la figure b est représenté le vecteur champ  $\vec{B}$  créé par les bobines. Recopier cette figure, indiquer le sens des courants dans les bobines et représenter trois lignes de champ.
2. Pour étudier le mouvement d'une particule chargée dans  $\vec{B}$ , on place entre ces deux bobines une ampoule contenant un canon à électrons. En faisant pivoter l'ampoule on peut donner une orientation au vecteur vitesse  $\vec{V}_0$  des électrons sortants du canon. On néglige dans la suite le poids de l'électron.
  - a. Donner l'expression vectorielle de la force subie par un électron animé d'une vitesse  $\vec{V}_0$  dans le champ magnétique.
  - b. L'ampoule est montée de sorte que la vitesse  $\vec{V}_0$  soit parallèle à  $\vec{B}$ . Déterminer la nature du mouvement de ces électrons. Justifier.
  - c. L'ampoule est maintenant orientée de sorte que  $\vec{V}_0$  soit orthogonale à  $\vec{B}$ . Déterminer dans ce cas la nature du mouvement des électrons.
3. On place maintenant entre les bobines de Helmholtz une bobine plate rectangulaire de cotés  $MP=QR=a=4$  cm et  $MQ=PR=b=6$  cm contenant  $N=40$  tours de fil conducteur. Elle est suspendue par un fil de constante de torsion  $C$ , vertical passant par le milieu de  $MP$  (figure c). La bobine plate est en équilibre de telle sorte que  $\vec{B}$  soit parallèle aux cotés horizontaux. On fait passer dans la bobine un courant d'intensité constante  $I'=0,5$  A.
  - a. Préciser la nature et le nom des forces exercées par le champ magnétique de la bobine. Donner les caractéristiques de la force agissant sur chaque côté en faisant un schéma clair où figureront le sens du courant  $I'$ , de  $\vec{B}$  et de la force éventuellement. On prendra  $V=4 \cdot 10^{-2}$  T.
  - b. La bobine plate quittera-t-elle sa position d'équilibre initiale ? Justifier.
  - c. Sachant la bobine plate tourne d'un angle de  $\frac{\pi}{6}$  rad et s'immobilise à nouveau, exprimer la somme des moments des forces par rapport à l'axe du fil de suspension. En déduire la constante de torsion  $C$  du fil.
4. La bobine plate est en équilibre et placée de telle sorte que son plan soit orthogonal au vecteur champ magnétique  $\vec{B}$ ; on fait passer un courant d'intensité  $I'=0,5$  A.
  - a. Donner les caractéristiques de la force agissant sur chaque côté en faisant un schéma clair où figureront les sens du courant, de  $B$  et de la force.
  - b. La bobine quittera-t-elle sa position d'équilibre ? Justifier la réponse.

### Exercice n°3 :

1. Un générateur de courant continu pouvant débiter un courant d'intensité variable, est relié à deux rails horizontaux et parallèles. Une tige AC placée perpendiculairement aux rails glisse sans frottement parallèlement à ceux-ci. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme normal au plan des rails, dirigé de bas en haut et de norme  $B = 0,1$  T (figure 1).
  - a. La tige AC se déplace dans le sens indiqué sur la figure 1. Quel est le sens du courant qui traverse la tige.
  - b. La tige AC a une longueur  $l = 8$  cm, l'intensité du courant est  $I = 1,5$  A ; calculer l'intensité de la force de Laplace qui s'exerce sur la tige.
  - c. Déterminer le travail effectué par cette force si la tige se déplace sur une distance  $d = 10$  cm.
2. On incline les rails d'un angle  $\alpha = 10^\circ$  par rapport à l'horizontale (figure 2) et la masse de la tige est prise égale à  $20$  g ;
  - a. Quels seraient le sens et l'intensité du courant  $I_0$  qui maintiendrait la tige immobile ?
  - b. Sans modifier le sens, on fait passer un courant d'intensité  $5$  A ; exprimer l'accélération de la tige en fonction de  $I$ ,  $B$ ,  $l$ ,  $m$ ,  $g$  et  $\alpha$  puis calculer sa valeur.
  - c. A l'instant  $t = 0$ , la tige est lancée vers le bas avec une vitesse  $V_0 = 0,24$  m/s, calculer sa vitesse à l'instant  $t = 0,5$  s et la distance parcourue depuis son lancement à  $t = 0$ . On donne  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>.

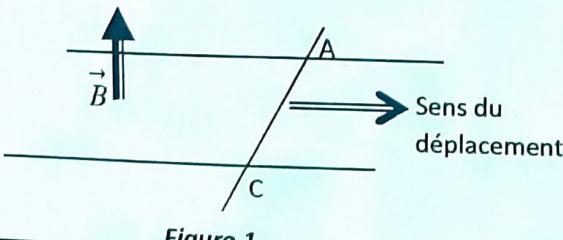
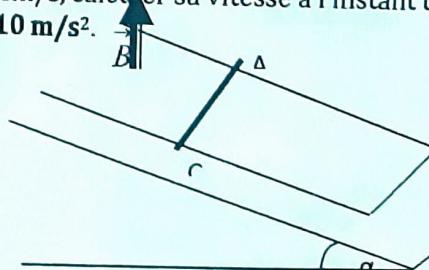


Figure 1



## Bakhoum Pc: Induction magnétique, étude du dipôle RL (résumé)

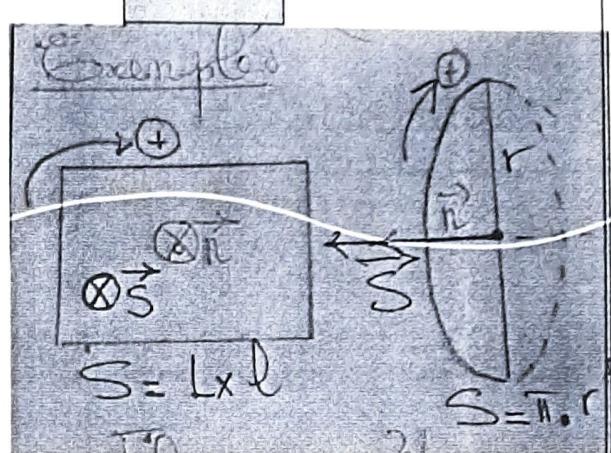
### I. Généralités :

#### 1. Vecteur surface d'un circuit :

Le vecteur surface d'un circuit plan est donnée par l'expression :

- $S$  : la surface du circuit (exprimée en  $m^2$ ) ;
- $\vec{n}$  : vecteur unitaire perpendiculaire au plan du circuit appelé la normale, dirigé de la face sud vers la face nord, son sens est donné par la règle de la main droite (*la main empoigne le circuit dans le sens positif choisi arbitrairement, la paume tournée vers le centre, le pouce tendu indique le sens de  $\vec{n}$* )

$$\vec{S} = S\vec{n}$$



#### 2. Flux magnétique :

Le flux magnétique d'un circuit plan de vecteur surface  $\vec{S}$  placé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  a pour expression :

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cos(\vec{B}, \vec{S})$$

Avec  $\left\{ \begin{array}{l} B: s'exprime en Teslas (T) \\ S: s'exprime en m^2 \\ \Phi: s'exprime en webers (Wb) \end{array} \right.$

Pour une bobine ou un solénoïde comportant  $N$  spires on a :

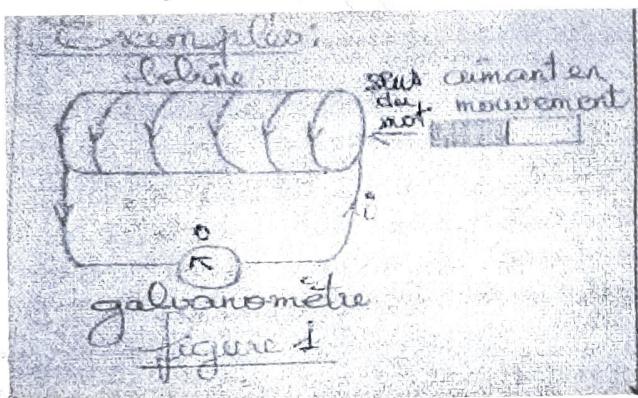
$$\Phi = N \cdot \vec{B} \cdot \vec{S} = N \cdot B \cdot S \cos(\vec{B}, \vec{S})$$

#### 3. Phénomène d'induction magnétique :

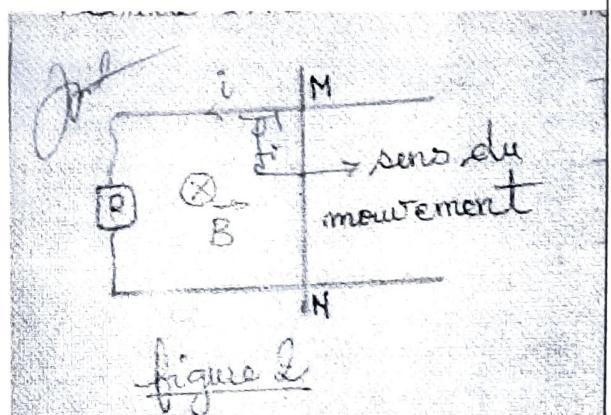
Toute variation de flux magnétique à travers un circuit se manifeste :

- Par la circulation d'un courant appelé courant induit si le circuit est fermé
- L'apparition d'une tension appelée force électromotrice (f.e.m) induite si le circuit est ouvert.

Ce phénomène porte le nom d'**induction magnétique**.



**Figure 1:** le déplacement de l'aimant entraîne une variation du flux magnétique de la bobine, cette variation est à l'origine de la circulation du courant.



**Figure 2:** le déplacement du conducteur MN entraîne une variation du flux magnétique qui se manifeste par la circulation d'un courant.

Le flux propre est le flux créé par le courant induit. Il a pour expression :

$$\Phi_p = L \cdot i \quad \text{avec :}$$

- $i$  : le courant induit,
- $L$  : le coefficient d'auto-inductance ou inductance, on l'exprime en Henry (H).

Remarque : l'inductance dépend de la forme du circuit et du nombre de spires.

Exemple : Pour un solénoïde de longueur  $\ell$ , de diamètre  $D=2R$  ( $R$  rayon) comportant  $N$  spires on a :

$$\Phi_p = L \cdot i = NBS \text{ avec } B = \frac{\mu_0 Ni}{\ell} \Rightarrow L \cdot i = N \frac{\mu_0 Ni}{\ell} S \Rightarrow L = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell} \text{ avec } S = \pi R^2 = \frac{\pi D^2}{4}$$

## 5. Les lois de l'induction magnétique :

### a) Sens du courant induit : loi de Lenz :

Le sens du courant induit est tel que par ses effets électromagnétiques, il s'oppose toujours à la cause qui lui a donné naissance.

Exemple : figure précédente

En déplaçant le conducteur MN vers la droite, le sens du courant induit est tel que la force de Laplace induite ( $\vec{f}_i = i\vec{l} \wedge \vec{B}$ ) qu'il crée s'oppose au mouvement.

### b) f.e.m d'induction, f.e.m d'auto-induction:

#### — f.e.m d'induction :

La f.e.m d'induction est définie comme étant l'opposé de la dérivée par rapport au temps du flux magnétique :

$$e = - \frac{d\phi}{dt} \quad \text{e s'exprime en volt (V).}$$

#### — f.e.m d'auto-induction :

La f.e.m d'induction est définie comme étant l'opposé de la dérivée par rapport au temps du flux propre

$$e = - \frac{d\phi_p}{dt} \text{ avec } \Phi_p = L \cdot i \Rightarrow$$

$$e = -L \frac{di}{dt}$$

Remarque

- ✓ si  $i = \text{constante}$  alors  $\frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow e = 0$  : le phénomène d'auto-induction ne se manifeste pas en régime permanent.
- ✓ Si  $i$  augmente alors  $\frac{di}{dt} > 0 \Rightarrow e < 0$  : la f.e.m d'auto-induction s'oppose à l'établissement du courant (loi de Lenz).
- ✓ Si  $i$  diminue alors  $\frac{di}{dt} < 0 \Rightarrow e > 0$  : la f.e.m d'auto-induction s'oppose à l'annulation du courant.

Dans les deux derniers cas, on dit qu'on est en régime variable ou transitoire.

### c) Intensité du courant induit : loi de Pouillet

Si  $R$  est la résistance totale du circuit et  $e$  la seule f.e.m du circuit, l'intensité du courant induit s'écrit :

$$i = \frac{e}{R} = - \frac{1}{R} \frac{d\phi}{dt}$$

### d) Quantité d'électricité induite :

Si  $R$  est la résistance totale du circuit la quantité d'électricité induite est donnée par l'expression :

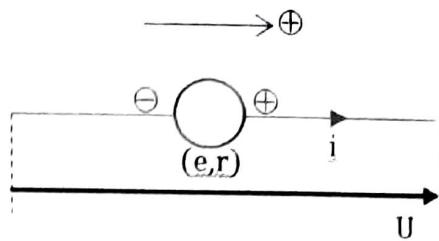
$$Q = \frac{|\Delta\phi|}{R} = \frac{|\Phi_f - \Phi_i|}{R}$$

a) Cas d'un générateur :

— Convention générateur :

Considérons un dipôle AB orienté de A vers B.

En convention générateur le courant monte les potentiels, la tension positive **U** et l'intensité **i** sont représentées par des flèches de même sens.

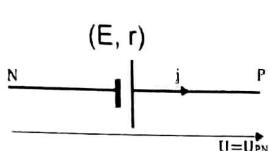


— Loi d'ohm :

$$U = e - ri$$

- ✓  $e$  la f.e.m du dipôle exprimée en volt (V)
- ✓  $R$  la résistance interne du dipôle exprimée en ohm ( $\Omega$ ).

**Exemple :** Pour une pile de f.e.m (E) et de résistance interne  $r$  :

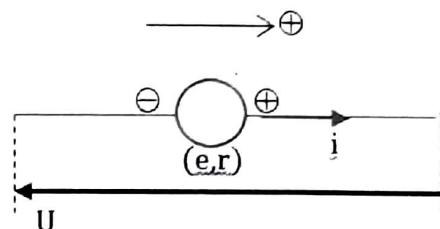


$$U = U_{PN} = E - ri$$

b) Cas d'un récepteur :

Considérons un dipôle AB orienté de A vers B.

En convention récepteur le courant monte les potentiels, la tension positive **U** et l'intensité **i** sont représentées par des flèches de sens contraire.



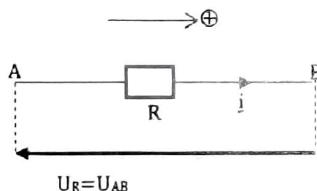
— Loi d'ohm :

$$U = ri - e$$

- ✓  $e$  la f.e.m du dipôle exprimée en volt (V)
- ✓  $R$  la résistance interne du dipôle exprimée en ohm ( $\Omega$ ).

Applications :

❖ Cas d'un conducteur ohmique :



Loi d'ohm:

$$U_R = Ri$$

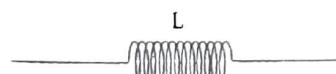
la tension aux bornes d'un conducteur

ohmique est proportionnelle à

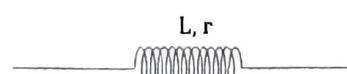
l'intensité du courant.

❖ Cas d'une bobine :

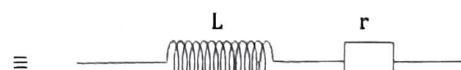
✓ Représentation symbolique d'une bobine :



Bobine pure ou  
non résistive



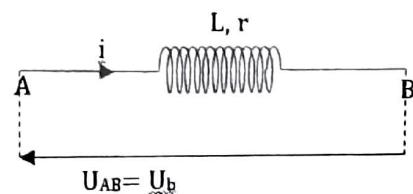
Bobine résistive ou dipôle  $r$ ,  $L$



✓ Loi d'ohm :

$$U_b = ri - e \text{ avec } e = -L \frac{di}{dt}$$

$$U_b = ri + L \frac{di}{dt}$$



**Remarque :**

- En régime permanent,  $i = \text{cste} = I_p = I_m$ ,  $\frac{di}{dt} = 0$ , la tension aux bornes de la bobine est minimale :  $U_b = U_{b\min} = rI_m$  : la bobine se comporte comme un conducteur ohmique.
- Pour une bobine pure  $r=0$  :  $U_b = L \frac{di}{dt}$ .

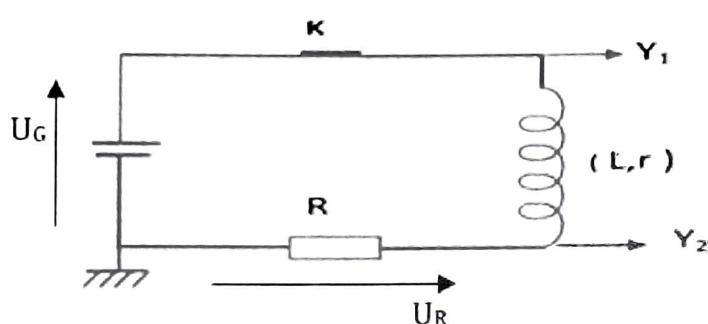
## **II. Etude du dipôle R,L :**

### **1. Etude expérimentale :**

Considérons un circuit constitué d'un générateur qui délivre une tension constante  $E$ , d'un conducteur ohmique de résistance  $R$  et d'une bobine d'inductance  $L$ .

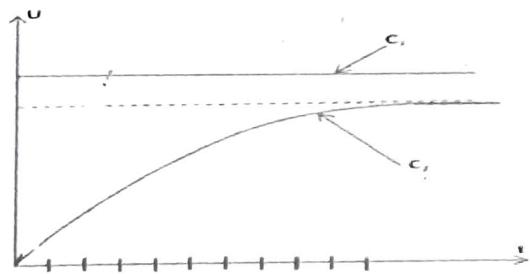
Grâce à un oscilloscope bicourbe, on visualise les tensions aux bornes du générateur et du conducteur ohmique.

#### a) Schéma du montage :

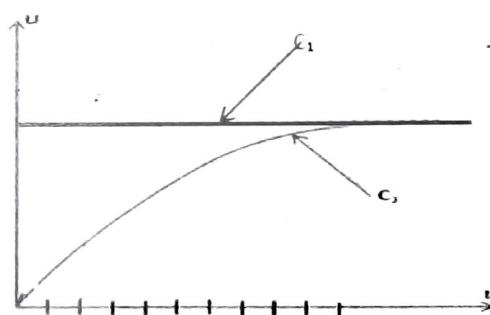


- ✓ La voie Y1 visualise la tension aux bornes du générateur.
- ✓ La voie Y2 visualise la tension aux bornes du conducteur ohmique donc l'intensité du courant à  $\frac{1}{R}$  près.

#### b) Courbes observées :



Cas où la bobine est résistive ( $r \neq 0$ )



Cas où la bobine est non résistive ( $r=0$ )

- ✓ La courbe  $C_1$  correspond à la tension aux bornes du générateur ;
- ✓ La courbe  $C_2$  correspond à la tension aux bornes du conducteur ohmique.

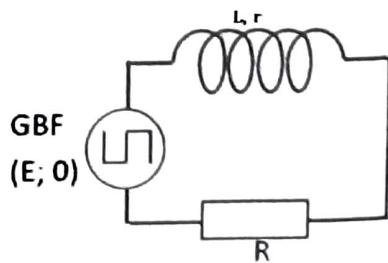
Dans les deux cas la bobine s'oppose à l'établissement du courant.

N.B : Une bobine dans un circuit électrique s'oppose toujours à l'établissement ou à l'annulation du courant : c'est le phénomène d'auto-induction.

### **2. Etude théorique :**

#### a) Équation différentielle régissant l'intensité du courant :

Considérons le circuit constitué d'un générateur basse fréquence (GBF) qui délivre une tension en créneau, d'un conducteur ohmique de résistance  $R$  et d'une bobine d'inductance  $L$  et de résistance  $r$ .



D'après la loi des mailles :  $U_R + U_b - U_G = 0$  avec  $U_R = Ri$  et  $U_b = rl + L \frac{di}{dt}$

$Ri + ri + L \frac{di}{dt} = U_G \Rightarrow (R + r)i + L \frac{di}{dt} = U_G$  en posant  $R_T = R + r$  : la résistance totale

$$L \frac{di}{dt} + R_T i = U_G \Rightarrow$$

$$\frac{dt}{dt} + \frac{R_T}{L} i = \frac{U_G}{L}$$

(1) : équation différentielle régissant.

### b) Evolution de $i$ lors de l'établissement du courant :

Lors de l'établissement du courant la tension aux bornes du générateur est maximale  $U_G = E$ .

(1) devient :

$$\frac{dt}{dt} + \frac{R_T}{L} i = \frac{E}{L} \quad (2)$$

(2) Admet une solution de la forme :

$$i = I_m(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

avec  $I_m$  et  $\tau$  des constantes.

#### Vérification :

- $i = I_m(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$  (a)

- $\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} [I_m(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})] = \frac{I_m}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$  (b)

(a) Et (b) dans (2) donnent :  $\frac{I_m}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{R_T}{L} I_m (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = \frac{E}{L} \Rightarrow (\frac{I_m}{\tau} - \frac{R_T}{L} I_m) e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{R_T}{L} I_m = \frac{E}{L}$

$$\begin{cases} \frac{R_T I_m}{L} = \frac{E}{L} \\ \frac{I_m}{\tau} - \frac{R_T I_m}{L} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Par identification on a :

$$\begin{cases} I_m = \frac{E}{R_T} : \text{intensité maximale (intensité du courant en régime permanent)} \\ \tau = \frac{L}{R_T} : \text{constante de temps du dipôle } R, L \end{cases}$$

— Conclusion :  $i = I_m(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$  est solution de l'équation différentielle (2) si et seulement si  $I_m = \frac{E}{R_T}$

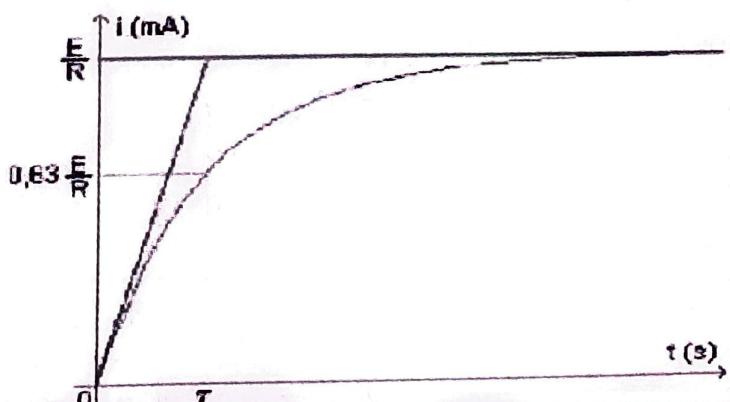
et  $\tau = \frac{L}{R_T}$ .

#### Représentation graphique de $i$ en fonction du temps :

$$i = I_m(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \Rightarrow \begin{cases} \text{si } t = 0 ; i = 0 \\ \text{si } t \rightarrow +\infty ; i = I_m \end{cases}$$

#### Remarque :

La constante de temps  $\tau$  caractérise la durée du régime transitoire ( $\Delta t \approx 5\tau$ ) : elle correspond au temps auquel l'intensité atteint 63% de sa valeur maximale.



### Évolution de l'orside l'annulation du courant :

Lors de l'annulation du courant la tension aux bornes du générateur est nulle, l'équation différentielle

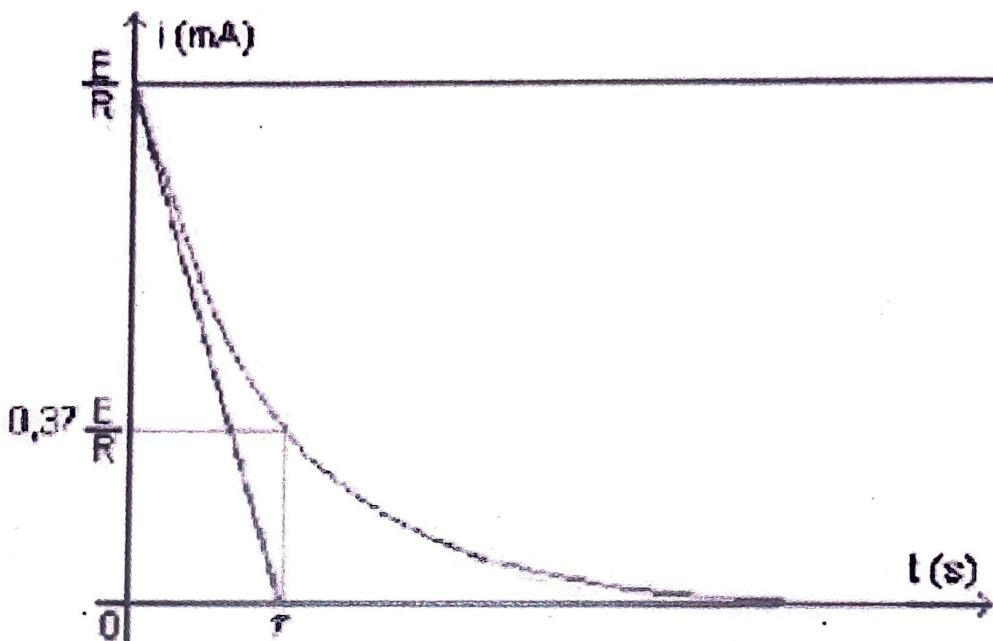
(1) devient :

$$\frac{dt}{dt} + \frac{R_T}{L} i = 0 \quad (3)$$

(3) Admet une solution de la forme :  $i = I_m e^{-\frac{t}{\tau}}$  avec :  $\begin{cases} I_m = \frac{E}{R_T} \\ \tau = \frac{L}{R_T} \end{cases}$

- Représentation graphique de  $i$  en fonction du temps :

$$i = I_m e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow \begin{cases} \text{si } t = 0 ; i = I_m \\ \text{si } t \rightarrow +\infty ; i = 0 \end{cases}$$



Remarque : Lors de l'annulation du courant pour  $t=\tau$ ,  $i = 0,37 I_m$ .

### 3. Energie magnétique emmagasinée dans une bobine :

$$P = ui = \left( ri + L \frac{di}{dt} \right) i = ri^2 + Li \frac{di}{dt} = P_j + P_m \text{ avec}$$

- $P_j = ri^2$  : la puissance joule ;
- $P_m = Li \frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2 \right)$  : la puissance magnétique emmagasinée dans la bobine.

Or  $P_m = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2 \right) = \frac{dE_m}{dt}$ , par analogie on a :

$$E_m = \frac{1}{2} Li^2$$

Energie magnétique emmagasinée dans la bobine

Lorsque le courant s'établit, la bobine emmagasine de l'énergie, celle-ci crée le retard à l'établissement du courant.

Quand il y a rupture du courant, la bobine restitue l'énergie emmagasinée, ceci entraîne un retard à l'annulation du courant.

Dans les deux cas on parle de phénomène d'auto-induction.

**Fin du chapitre**

**Exercice n°1:**

I]- On dispose d'un générateur de tension de fem  $E$ , de deux lampes  $L_1$  et  $L_2$  identiques, d'une bobine (B) d'inductance  $L$  et de résistance interne  $r$ , d'un conducteur ohmique de résistance  $R$  réglable, d'un ampèremètre, d'un voltmètre et d'un interrupteur (K). Les différents dipôles et multimètres sont associés comme l'indique le schéma de la figure-6.

On ajuste la valeur de la résistance  $R$  du conducteur ohmique de façon à la rendre égale à celle de la bobine (B). A la fermeture de l'interrupteur (K), on constate que la lampe  $L_1$  atteint son éclat maximal en retard par rapport à la lampe  $L_2$ .

1) Préciser la cause de ce retard et le phénomène mis en évidence.

2) a- Prévoir ce qu'on peut observer, au niveau des deux lampes, une fois que le régime permanent s'établit. Justifier.

b- En régime permanent, l'ampèremètre indique une intensité de courant  $I = 100\text{mA}$  et le voltmètre une tension  $U = 1,2\text{V}$ . En déduire la valeur de la résistance interne  $r$  de la bobine.

II]- Dans le but de déterminer l'inductance  $L$  de la bobine (B) de résistance supposée nulle, on réalise le circuit électrique schématisé par la figure 7 comportant un générateur délivrant une tension alternative triangulaire, un conducteur ohmique de résistance  $R_1 = 300\Omega$  et la bobine (B). On ferme l'interrupteur K et à l'aide de l'oscilloscope, on visualise simultanément la tension  $u_{AM}(t)$  aux bornes de résistor  $R_1$  sur la voie  $Y_1$  et la tension  $u_{BM}(t)$  aux bornes de la bobine sur la voie  $Y_2$ .

Pour une valeur  $N_1$  de la fréquence de la tension délivrée par le générateur G et en faisant les réglages nécessaires, on obtient les chronogrammes représentés sur la figure 8 avec :

- sensibilité verticale de la voie  $Y_1$ :  $1\text{V.div}^{-1}$ ; sensibilité verticale de la voie  $Y_2$ :

$0,2\text{V.div}^{-1}$ ;

- balayage horizontal :  $4\text{ms.div}^{-1}$ .

1) Identifier, parmi les chronogrammes  $c_1$  et  $c_2$  celui qui correspond à la tension visualisée sur la voie  $Y_2$ . Justifier la réponse. Déterminer la fréquence  $N_1$  du GBF.

2) Montrer, qu'à tout instant, la bobine est le siège d'un phénomène d'aut-induction électromagnétique.

3) Donner les expressions des tensions  $u_{AM}$  et  $u_{BM}$  en fonction de l'intensité  $i$  du courant et des caractéristiques du dipôle AB.

4) Exprimre  $u_{BM}$  en fonction de  $u_{AM}$ ,  $L$  et  $R_1$ . Déterminer les valeurs de  $u_{BM}$  et  $\frac{du_{AM}}{dt}$  sur l'intervalle des temps  $[0, \frac{T}{2}]$ .

Déterminer la valeur de l'inductance  $L$  de la bobine.

**Exercice n°2:**

Un élève d'une classe de terminale veut déterminer les caractéristiques électriques d'une bobine extraite d'un jouet. Pour cela il réalise le circuit série comportant un générateur de tension continue, la bobine ( $r, L$ ) et un conducteur ohmique de résistance  $R=100\Omega$  (figure 1). A la date  $t=0$ , l'interrupteur K est fermé et on enregistre l'évolution des tensions sur les voies  $Y_1$  et  $Y_2$  d'un oscilloscope bicourbe.

Les oscillogrammes obtenus sont reproduits sur la figure 2.

1. Préciser les grandeurs représentées par les courbes  $C_1$  et  $C_2$  de la figure 2.

2. Déterminer graphiquement :

- L'intensité  $I_p$  du courant parcourant le circuit en régime permanent.
- La tension aux bornes de la bobine en régime permanent

3. En déduire la valeur de la résistance de la bobine.

4. Déterminer graphiquement la valeur de la force électromotrice  $E$ .

5. Peut-on négliger la résistance interne de la bobine (réponse à justifier) ?

6. A partir de la courbe, déterminer la valeur de la grandeur  $\frac{dU_{CD}}{dt}$  à l'instant  $t=0$ . En déduire la valeur de  $\frac{di}{dt}$  à  $t=0$  puis calculer la valeur de la constante de temps  $\tau$  du circuit sachant que  $\frac{I_p}{\tau} = \left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0}$ . En déduire la valeur de  $L$ .

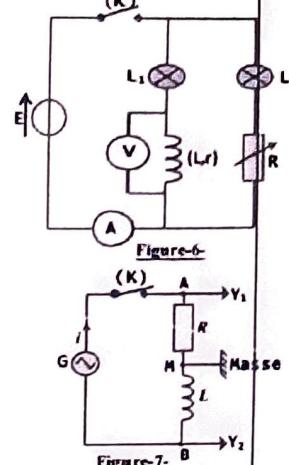


Figure-7-

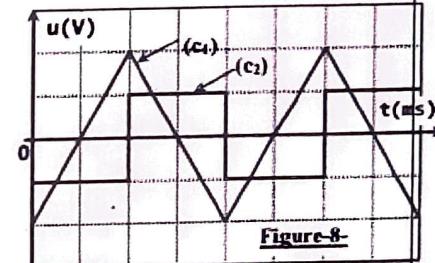


Figure-8-

**Sciences Physiques**

N.B : La droite OT est la tangente à la courbe  $C_2$  à la date  $t=0$

7. Etablir l'équation différentielle liant  $i$ , l'intensité du courant, sa dérivée  $\frac{di}{dt}$ ,  $L$ ,  $R$ ,  $r$  et  $E$ .
8. La solution de cette équation différentielle est de la forme :  $i(t) = A + B e^{-\alpha t}$ .
  - a. Déterminer les valeurs de  $A$ ,  $B$  et  $\alpha$ .
  - b. Exprimer  $i(t)$  et  $U_{BC}(t)$  en fonction de  $R$ ,  $L$ ,  $r$ ,  $E$  et  $t$ .

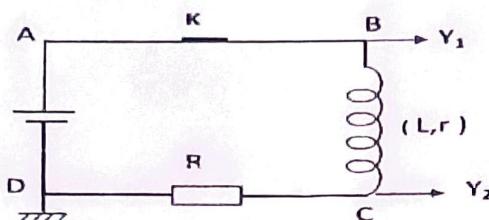


Figure 1

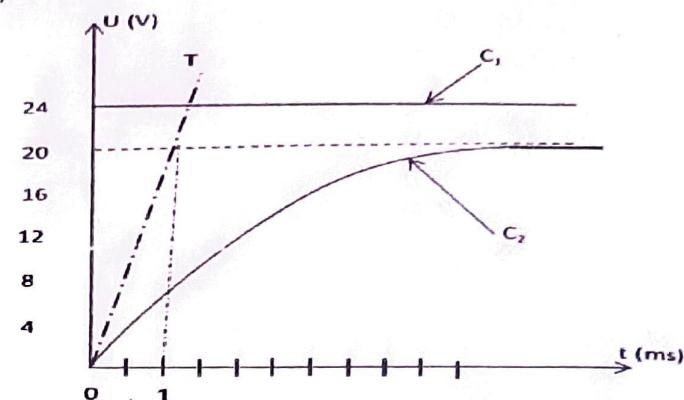


Figure 2

**Exercice n°3 : TS<sub>1</sub>**

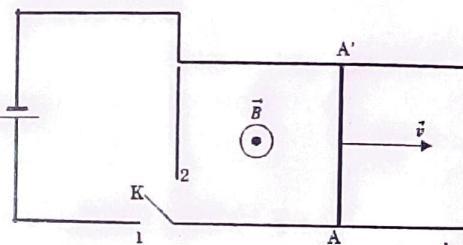
On considère le système de la figure 4 : deux rails parallèles et horizontaux peuvent être branchés soit un générateur de f.e.m  $E=2V$  (interrupteur en position 1), soit être mis en court-circuit (K en position 2). Les rails sont distants de  $l=0,25 \text{ m}$  et baignent dans un champ magnétique uniforme vertical dirigé vers le haut d'intensité  $B=0,5 \text{ T}$ .

Une tige métallique AA' de masse  $m=10 \text{ g}$  peut glisser sans frottement sur les deux rails et sa résistance entre les rails vaut  $R=0,5 \Omega$ . Toutes les autres résistances sont négligeables. Il en est de même de l'auto-inductance du circuit.

1 Calculer l'intensité  $I$  du courant qui traverse AA', la d.d.p entre les points A et A', et l'intensité de la force électromagnétique qui s'exerce sur la tige métallique dans les deux cas suivants :

- K est en position 1 et la tige est immobile ;
- K est en position 2 et la tige se déplace avec la vitesse  $v=10 \text{ m.s}^{-1}$ .

2 L'interrupteur K étant en position 1, la tige AA' a une vitesse constante et imposée  $v$  (en  $\text{m.s}^{-1}$ ) dont la direction et le sens sont indiqués sur la figure.



2.1 Déterminer la fonction  $i=f(v)$ .

2.2 Représenter l'allure du graphe  $i=f(v)$

2.3 Calculer la valeur de  $i$  pour  $v=10 \text{ m.s}^{-1}$  et  $v=22 \text{ m.s}^{-1}$ .

3 La date  $t=0$ , la tige est immobile et on place l'interrupteur en position 1.

3.1 A une quelconque, montrer que la vitesse obéit à l'équation suivante :  $\frac{dv}{dt} + \frac{l^2 B^2}{mR} v = \frac{EIB}{mR}$

3.2. Vérifier que  $v=C(1-e^{-\alpha t})$  est solution de cette équation, avec  $C$  et  $\alpha$  des constantes que l'on exprimera.

3.3. Calculer la vitesse limite atteinte par la tige puis montrer que cette vitesse peut se déduire de la question 2.

**Exercice n°4 :**

On réalise un circuit électrique en série comportant un résistor de résistance  $R_i$  variable, une bobine d'inductance  $L$  et de résistance  $r$  et un interrupteur K (figure 2). L'ensemble est alimenté par un générateur de tension de f.e.m  $E$ . Un oscilloscope bicourbe permet de visualiser l'évolution au cours du temps des tensions  $u_{AM}$  aux bornes de la branche du circuit AM et  $u_{R1}=u_{BM}=R_1 i$ , la tension aux bornes du résistor lorsque sa résistance est à une valeur  $R_1$ . A l'instant  $t=0$ , on ferme l'interrupteur K. Les courbes traduisant l'évolution au cours du temps de  $u_{AM}$  et  $u_{BM}$  sont données par la figure 3.

1. Reproduire le schéma du montage et faire les connexions nécessaires permettant de visualiser la tension  $u_{AM}$  sur la voie 1 et la tension  $u_{BM}$  sur la voie 2.

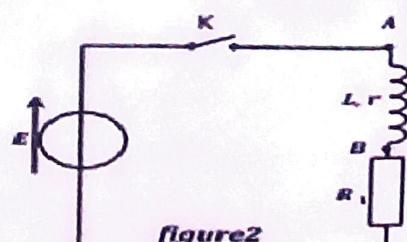
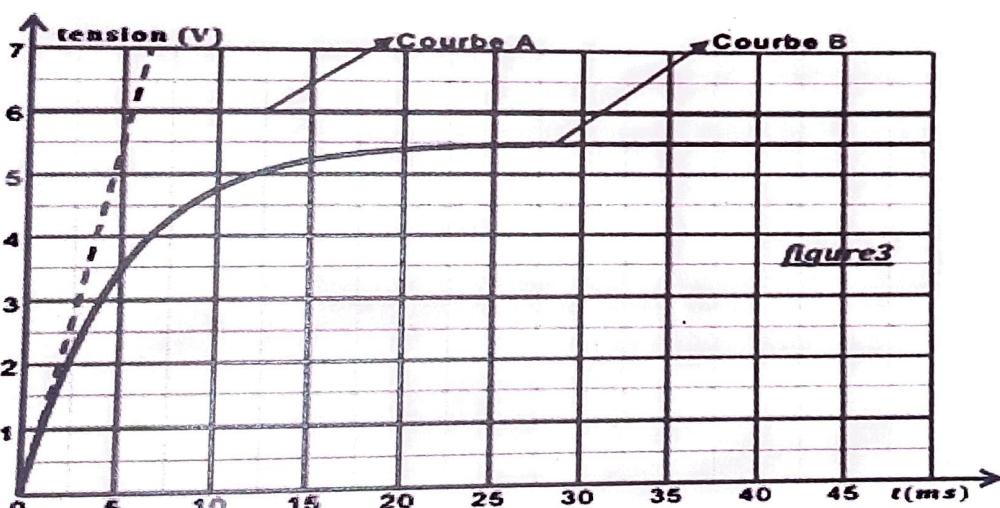


figure2

- 2 Faire correspondre chaque courbe à la tension visualisée tout en justifiant la réponse.
3. Etablir l'équation différentielle qui régit l'intensité  $i$  du courant dans le circuit.
4. Montrer que l'équation différentielle qui régit l'évolution de la tension  $u_{R1}$  au cours du temps s'écrit :
 
$$\tau_1 \frac{du_{R1}}{dt} + u_{R1} = \frac{R_1}{R_1+r} E \text{ avec } \tau_1 = \frac{L}{R_1+r} \text{ constante de temps.}$$
5. La solution de l'équation différentielle établie précédemment s'écrit :  $u_{R1}(t) = U_{Rm}(1 - e^{-t/\tau_1})$  avec  $U_{Rm}$  la valeur de  $u_{R1}(t)$  en régime permanent.
  - Montrer que la courbe (B) correspond à  $u_{R1}(t)$ .
  - Donner la valeur de la f.e.m  $E$  du générateur.
6. Lorsque le régime permanent est établi, l'ampèremètre indique la valeur  $I_{01}=50 \text{ mA}$ .
  - Déterminer la résistance  $R_1$  du résistor.
  - Montrer que l'expression de la résistance  $r$  de la bobine s'écrit :  $r = (\frac{E}{U_{Rm}} - 1)R_1$ . Calculer  $r$ .
  - Déterminer graphiquement la valeur de la constante de temps  $\tau_1$  et en déduire la valeur de l'inductance  $L$  de la bobine.
7. Maintenant on règle la valeur de la résistance  $R_1$  à une valeur  $R_2$ .
  - Dans le but d'atteindre plus lentement le régime permanent, dire si l'on doit augmenter ou diminuer la valeur de la résistance par rapport à  $R_1$ .
  - Pour cette valeur de  $R_2$  de la résistance  $R_1$ , la constante de temps  $\tau_2=2\tau_1$ . Déterminer, dans ce cas, la valeur de l'intensité du courant  $I_{02}$  en régime permanent.



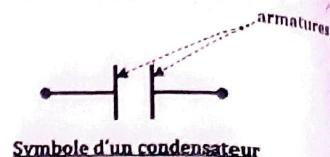
Cours à domicile : 77 550 04 15

## Chapitre IX: Condensateurs, étude du dipôle RC

### I. Généralités :

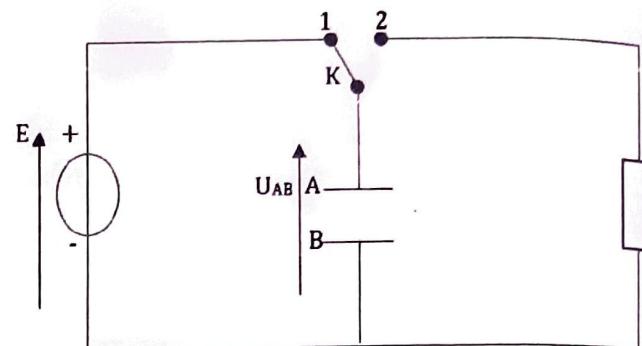
#### 1. Définition d'un condensateur :

Un condensateur est constitué de deux conducteurs dont les surfaces sont placées en regard l'une de l'autre et séparées par un isolant électrique appelé diélectrique.  
Les surfaces en regard sont les armatures du condensateur.



#### 2. Circuit de charge et circuit de décharge d'un condensateur :

- Si le commutateur K est en position 1, on a le phénomène de charge du condensateur, à la fin de la charge la tension aux bornes du condensateur est maximale :  $U_{AB} = E$  (tension de charge).
- Si le commutateur K est en position 2, on a le phénomène de décharge du condensateur, à la fin de la décharge la tension aux bornes du condensateur est nulle.



#### Remarque : charge q d'un condensateur

La charge  $q$  d'un condensateur est la quantité d'électricité portée par l'une de ses armatures.

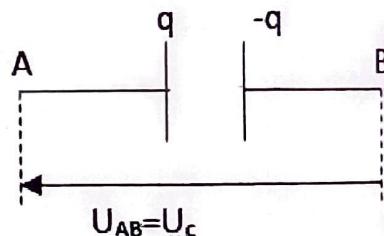
$$|q_A| = |q_B| = q \Rightarrow \begin{cases} q_A = q \\ q_B = -q \end{cases}$$

#### 3. Capacité C d'un condensateur :

La capacité  $C$  d'un condensateur est le coefficient de proportionnalité entre sa charge  $q$  et la tension  $U_C$  à ses bornes.

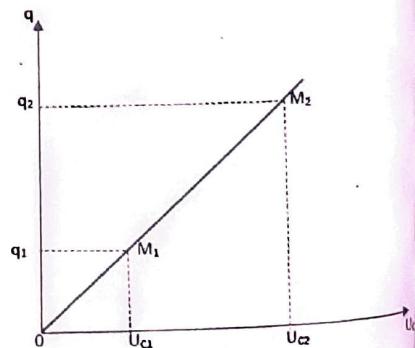
$$C = \frac{q}{U_C} \Rightarrow \begin{cases} q = CU_C \\ U_C = \frac{q}{C} \end{cases}$$

$q$  en coulombs,  $U_C$  en volts, la capacité  $C$  est exprimée en Farads (F).



#### Remarque :

- La courbe  $q = f(U_C)$  est une droite linéaire d'équation  $q = a \cdot U_C$  avec  $a = C = \frac{\Delta q}{\Delta U_C} = \frac{q_2 - q_1}{U_{C2} - U_{C1}}$ .
- Capacité d'un condensateur plan :  $C = \frac{\epsilon S}{e}$  avec
  - ✓  $S$  : surface de l'une des armatures du condensateur,
  - ✓  $e$  : épaisseur du condensateur
  - ✓  $\epsilon$  : permittivité du diélectrique (pour le vide  $\epsilon = \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$ ).

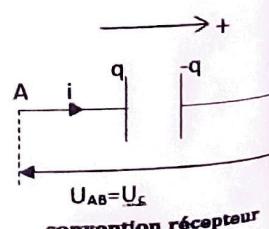


#### 4. Relation entre la charge $q$ et l'intensité $i$ du courant :

##### a) Cas où le condensateur fonctionne en convention récepteur :

Le courant arrive sur l'armature portant la charge positive  $q$  :

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dU_C}{dt}$$



b) Cas où le condensateur fonctionne en convention générateur :

Le courant quitte sur l'armature portant la charge positive q :

$$i = -\frac{dq}{dt} = -C \frac{dU_c}{dt}$$

5. Energie électrostatique emmagasinée dans un condensateur :

L'énergie électrostatique emmagasinée aux bornes d'un condensateur de capacité C s'écrit :

$$E_e = E_c = \frac{1}{2} \times \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} CU_c^2 = \frac{1}{2} qU_c$$

6. Association de condensateurs :

a) Association en parallèle :

Considérons trois condensateurs de capacités  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  associés en parallèle.

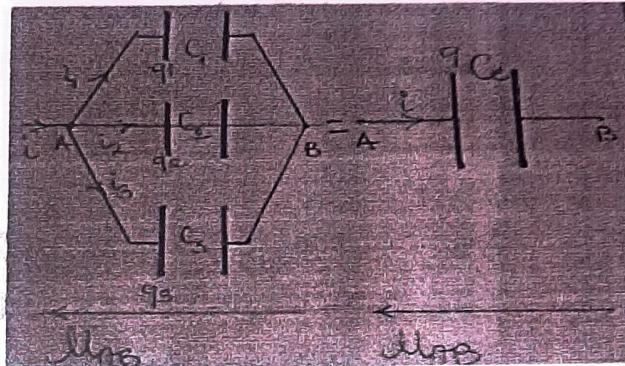
$$i = i_1 + i_2 + i_3 \Rightarrow q = q_1 + q_2 + q_3 \Rightarrow$$

$$C_e U_{AB} = C_1 U_1 + C_2 U_2 + C_3 U_3 \text{ or } U_{AB} = U_1 = U_2 = U_3$$

$$C_e U_{AB} = (C_1 + C_2 + C_3) U_{AB} \Rightarrow C_e = C_1 + C_2 + C_3$$

Conclusion :

La capacité du condensateur équivalent à l'association de plusieurs condensateurs en parallèle est égale à la somme des capacités.



b) Association en série :

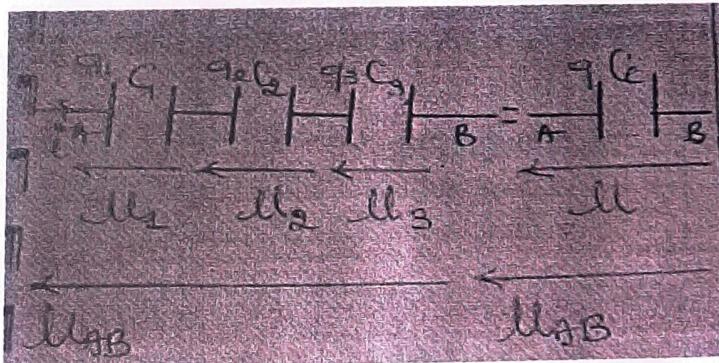
Considérons trois condensateurs de capacités  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  associés en série.

$$U_{AB} = U_1 + U_2 + U_3$$

$$\Rightarrow \frac{q}{C_e} = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} + \frac{q_3}{C_3}$$

$$\text{or } i = i_1 = i_2 = i_3 \Rightarrow q = q_1 = q_2 = q_3 \text{ d'où}$$

$$\frac{q}{C_e} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \frac{q}{C_3} \Rightarrow \frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$



Conclusion :

L'inverse de la capacité du condensateur équivalent à l'association de plusieurs condensateurs en série est égal à la somme des inverses des capacités.

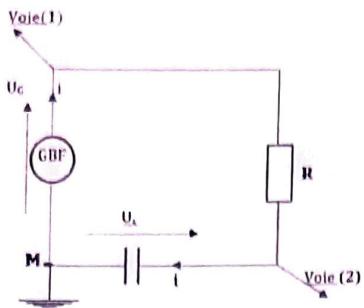
II. Etude du dipôle RC :

1. Etude expérimentale :

Considérons le circuit constitué d'un générateur basse fréquence (GBF) qui délivre une tension en créneau, d'un condensateur de capacité C et d'un conducteur ohmique de résistance R. Grace à un oscilloscope on visualise les tensions aux bornes des différents dipôles.

### Visualisation de $U_G$ et $U_C$ :

#### Schéma du montage:

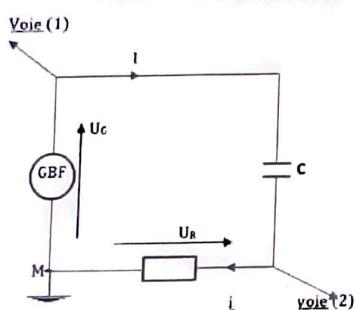


- la voie (1) visualise  $U_G$
- La voie (2) visualise  $U_C$

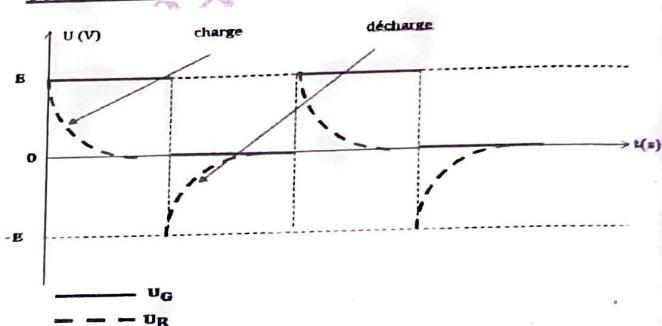
La courbe  $U_C = f(t)$  est une fonction continue. Pendant la charge  $U_C$  augmente et tend vers  $U_{C\max} = E$  (tension de charge). Pendant la décharge  $U_C$  diminue et tend vers zéro.  
 La période correspond à la durée d'une charge et d'une décharge du condensateur.

#### ➤ Visualisation de $U_G$ et $U_R$ (donc de $i \frac{1}{R}$ à près):

#### Schéma du montage :



#### courbes observées :



La courbe  $U_R = f(t)$  est une fonction discontinue. Pendant la charge, l'intensité diminue et tend vers zéro tout en restant positive. Pendant la décharge l'intensité augmente et tend vers zéro tout en restant négative.

#### 2. Etude théorique :

##### 2.1 Equations différentielles régissant les grandeurs :

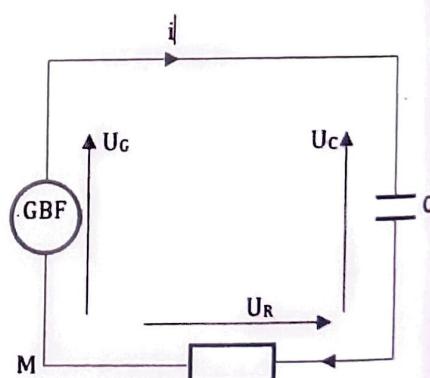
###### a) Equation différentielle régissant la tension $U_C$ :

D'après la loi des mailles on a :  $U_R + U_C - U_G = 0$  avec

$$U_R = Ri \text{ or } i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dU_C}{dt} \Rightarrow U_R = RC \frac{dU_C}{dt} \text{ d'où}$$

$$RC \frac{dU_C}{dt} + U_C = U_G, \text{ soit en divisant par } RC \text{ on a :}$$

$$\frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{RC} U_C = \frac{U_G}{RC} \quad (1)$$



###### b) Equation différentielle régissant la charge $q$ du condensateur :

D'après la loi des mailles on a :  $U_R + U_C - U_G = 0$  avec  $\begin{cases} U_C = \frac{q}{C} \\ U_R = Ri = R \frac{dq}{dt} \end{cases} \Rightarrow R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = U_G$ , soit en divisant par R on a :

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC} q = \frac{U_G}{R} \quad (2).$$

c) Equation différentielle régissant l'intensité i du courant :

D'après la loi des mailles on a :  $U_R + U_C = U_G \Rightarrow \frac{dU_R}{dt} + \frac{dU_C}{dt} = \frac{dU_G}{dt}$  avec  $U_G = \text{cste}$   $\frac{dU_G}{dt} = 0$

$\Rightarrow \frac{dU_R}{dt} + \frac{dU_C}{dt} = 0$  avec  $\begin{cases} U_R = Ri \Rightarrow \frac{dU_R}{dt} = R \frac{di}{dt} \\ i = C \frac{dU_C}{dt} \Rightarrow \frac{dU_C}{dt} = \frac{i}{C} \end{cases}$   $R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$ , soit en divisant par R on a :

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{RC} i = 0 \quad (3)$$

d) Equation différentielle régissant la tension  $U_R$  :

D'après la loi des mailles on a :  $U_R + U_C = U_G \Rightarrow \frac{dU_R}{dt} + \frac{dU_C}{dt} = \frac{dU_G}{dt}$  avec  $U_G = \text{cste}$   $\frac{dU_G}{dt} = 0$

$\Rightarrow \frac{dU_R}{dt} + \frac{dU_C}{dt} = 0$ ,  $i = C \frac{dU_C}{dt} = \frac{U_R}{R} \Rightarrow \frac{dU_C}{dt} = \frac{U_R}{RC}$  d'où  $\frac{dU_R}{dt} + \frac{1}{RC} U_R = 0 \quad (4)$

2.2. Evolution des grandeurs électriques pendant la charge :

- Expression de la tension  $U_C$  :

Pendant la charge, la tension aux bornes du générateur est maximale :  $U_G = U_{G\max} = E$ .

L'équation différentielle (1) devient :  $\frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{RC} U_C = \frac{E}{RC} \quad (1')$ .

(1') admet une solution de la forme  $U_C = U_{Cm} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$  avec

$\begin{cases} U_{Cm} = E : \text{tension maximale ou tension de charge} \\ \tau = RC : \text{la constante de temps du circuit} \end{cases} \Rightarrow U_C = E \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$

- Expression de la charge q :

On a  $q = CU_C \Rightarrow q = CE \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = Qm \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$  avec  $Qm = CE$  : la charge maximale.

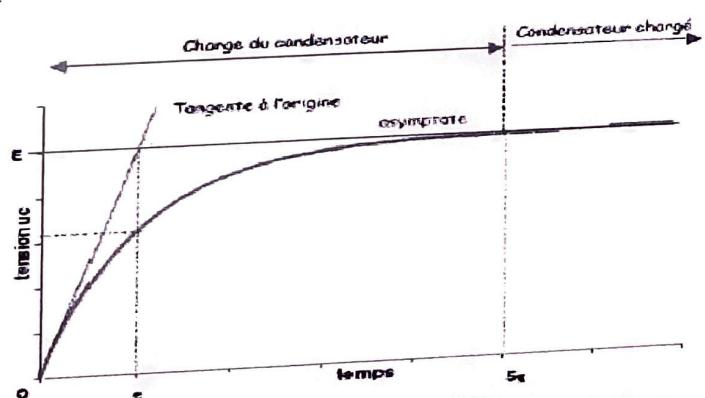
- Expression de i :

$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ CE \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \right] = CE \frac{d}{dt} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = \frac{CE}{RC} \left(e^{-\frac{t}{RC}}\right) \Rightarrow i = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = I_m e^{-\frac{t}{RC}}$  avec

$I_m = \frac{E}{R}$  : intensité maximale

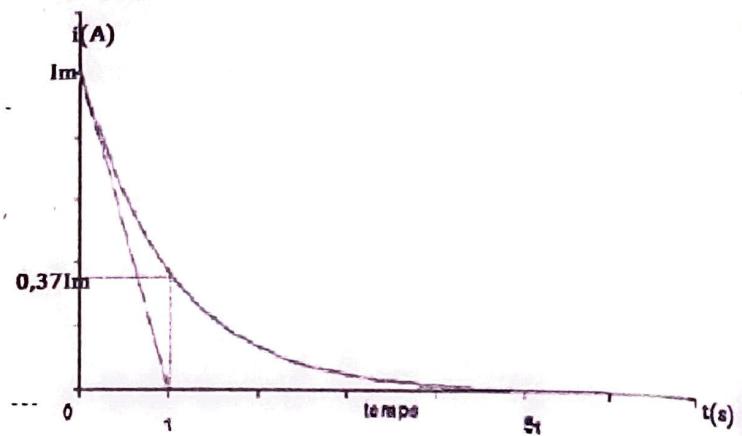
- Représentation graphique de  $U_C = f(t)$  :

$$U_C = U_{Cm} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \Rightarrow \begin{cases} \text{si } t = 0, U_C = 0 \\ \text{si } t \rightarrow +\infty, U_C = U_{Cm} = E \end{cases}$$



Représentation graphique de  $i=f(t)$  :

$$i = I_m e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow \begin{cases} \text{si } t = 0, i = I_m \\ \text{si } t \rightarrow +\infty, i = 0 \end{cases}$$



2.3. Evolution des grandeurs électriques au cours de la décharge :

• Expression de  $U_C$  :

Pendant la décharge la tension aux bornes du générateur est nulle. L'équation différentielle (1) devient :  $\frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{RC} U_C = 0$  (1'').

(1'') admet une solution de la forme  $U_C = U_{Cm} e^{-\frac{t}{\tau}}$  avec  $\frac{U_{Cm}}{\tau} = \frac{1}{RC} \Rightarrow U_C = E e^{-\frac{t}{RC}}$

• Expression de q :

On a  $q = CU_C \Rightarrow q = CE e^{-\frac{t}{RC}} = Qm e^{-\frac{t}{RC}}$  avec  $Qm = CE$

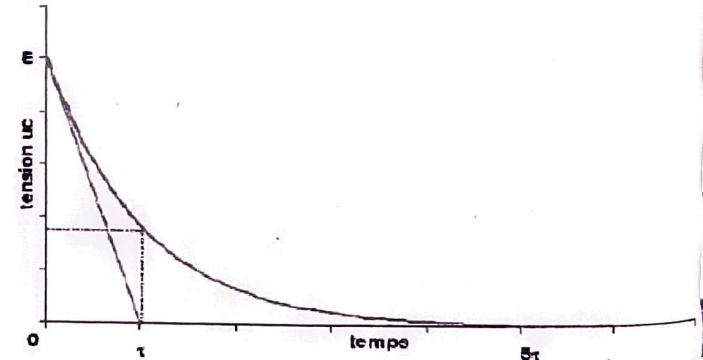
• Expression de i :

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ CE e^{-\frac{t}{RC}} \right] = -\frac{CE}{RC} \left( e^{-\frac{t}{RC}} \right) \Rightarrow i = -\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = -I_m e^{-\frac{t}{RC}} \text{ avec}$$

$I_m = \frac{E}{R}$  : intensité maximale.

• Représentation graphique de  $U_C=f(t)$  :

$$U_C = U_{Cm} e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow \begin{cases} \text{si } t = 0, U_C = U_{Cm} \\ \text{si } t \rightarrow +\infty, U_C = 0 \end{cases}$$



• Représentation graphique de  $i=f(t)$  :

$$i = -I_m e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow \begin{cases} \text{si } t = 0, i = -I_m \\ \text{si } t \rightarrow +\infty, i = 0 \end{cases}$$

Remarque : unité de  $\tau$

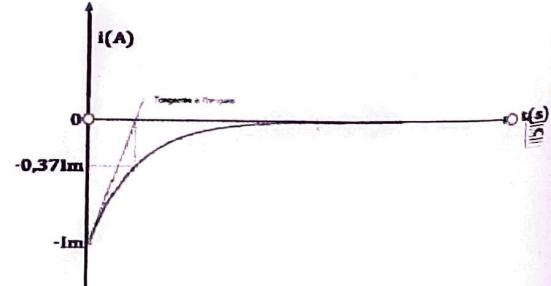
$$[RC] = [R]. [C] \text{ or } R = \frac{U}{I} \Rightarrow [R] = [U]. [I]^{-1}$$

$$\text{et } C = \frac{q}{U} \Rightarrow [C] = [Q]/[U] \Rightarrow [C] = [I]. [t]/[U]$$

$$[RC] = [U]. [I]^{-1}. [I]. [t]. [U]^{-1} \Rightarrow [RC] = [t] = s$$

$\tau$  a bien la dimension d'un temps

Fin du chapitre



Bakhoum Pc: Exercices sur condensateur – étude d'un dipôle RC

**Exercice n°1 :**

**I- Première partie**

Afin de déterminer la valeur de la capacité d'un condensateur, on réalise le montage de la figure - 3- comportant un générateur de courant (G) débitant un courant d'intensité constante et fixée à une valeur  $I = 18 \mu\text{A}$ , deux interrupteurs  $K_1$  et  $K_2$ , un condensateur de capacité  $C$ .

1. A  $t=0\text{s}$  on l'interrupteur  $K_1$  est ouvert et on ferme  $K_2$ .

Justifier l'utilité d'une telle opération.

2. A  $t = 0\text{s}$  on ferme  $K_2$  puis on ouvre  $K_1$  un système d'acquisition peut suivre l'évolution de la tension  $U_C(t)$  aux bornes du condensateur. Les résultats des mesures ont permis de tracer la courbe de la figure 4.

3. D'après la courbe de la figure 3, donner l'expression de la tension  $U_C$  aux bornes du condensateur en fonction de la durée de charge  $t$ .

4.

- a) Etablir l'expression de la tension  $U_C$  aux bornes du condensateur en fonction de sa capacité  $C$ , de  $I$  et de  $t$ .
- b) Définir la capacité  $C$  d'un condensateur.
- c) En déduire la valeur de la capacité  $C$  du condensateur.

3. Le condensateur est plan et formé de deux armatures séparées par une mince couche d'un diélectrique d'épaisseur  $e = 0,4 \text{ mm}$  et de permittivité absolue  $\epsilon = 6.10^{-7} \text{ F/m}$ . Déterminer l'aire de la surface des armatures en regard.

5. Calculer l'énergie  $E_C$  emmagasinée dans le condensateur pour  $t = 8\text{s}$ .

**II- Deuxième partie :**

On réalise le circuit électrique schématisé par la figure 4, qui comporte, associés en série un résistor de résistance  $R = 1 \text{ k}\Omega$ , un condensateur de capacité  $C'$ , un interrupteur  $K$ .

L'ensemble est alimenté par un générateur idéal, de f.e.m.  $E$ .

A l'instant  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur  $K$  et un oscilloscope bicourbe convenablement branché au circuit, a permis de visualiser simultanément  $U_C$  et  $U_G$  respectivement aux bornes du condensateur et du générateur. On obtient les oscillogrammes de la figure 5.

1. Reproduire le schéma de la figure 4 et faire le branchement nécessaire pour visualiser la tension  $U_C(t)$ .

2.

- a) Montrer que l'équation différentielle en  $U_C$  s'écrit :  $\frac{dU_C(t)}{dt} + \frac{U_C(t)}{\tau} = \frac{E}{\tau}$ ;  $\tau = RC$ .
- b) Vérifier que  $U_C(t) = A(1 - e^{-\alpha t})$  est une solution de l'équation différentielle, où  $A$  et  $\alpha$  sont des constantes à déterminer.
- c) Définir la constante de temps  $\tau$ . Préciser sa dimension.
- d) Déterminer graphiquement la valeur de la tension de  $U_C(t)$ .
- e) En déduire graphiquement la valeur de  $\tau$ . En déduire la valeur de la capacité  $C'$  du condensateur.

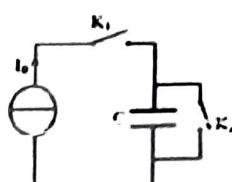


Figure-3-

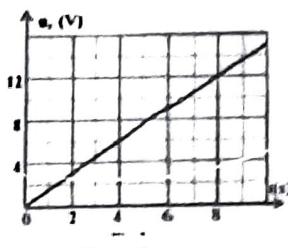


Figure-4-

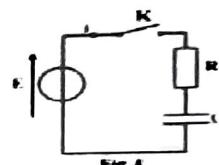
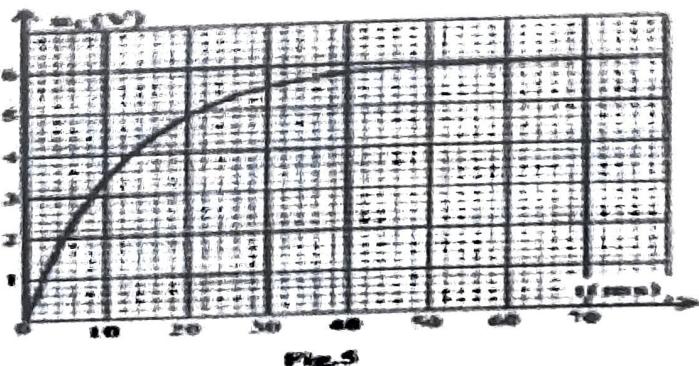


Figure-4



**Exercice n°2 :**

Pour étudier la charge d'un condensateur initialement déchargé, on réalise le circuit de la figure -3- comportant :

- le condensateur de capacité  $C = 2 \cdot 10^{-6} F$
- un échelon de tension  $E = 6V$  produit par un générateur de tension idéal

- quatre conducteurs ohmiques identiques de résistance commune  $R$ .

On place le commutateur(K) dans la position (1) et on visualise les chronogrammes de la figure -4-.

- 1) Justifier que la courbe II représente le chronogramme de la tension  $u_C$  aux bornes du condensateur.
- 2-a) Etablir l'équation différentielle régissant l'évolution de la tension  $u_C(t)$ .
- b) La solution de l'équation différentielle peut s'écrire sous la forme :  $u_C(t) = A_1 [1 - \exp(-t/B_1)]$  où  $A_1$  et  $B_1$  sont des constantes à déterminer leurs expressions. Déterminer graphiquement les valeurs de  $A_1$  et  $B_1$ .
- c) Déterminer la valeur de la résistance  $R$  du circuit.

- 4) Montrer que  $(\frac{du_C}{dt})_{t=0} = \frac{A_1}{B_1}$ . En déduire qu'à cet instant origine, la valeur  $I_0$  de l'intensité

5) Le condensateur étant chargé, on bascule le commutateur (K) sur la position (2). Sachant qu'en phase de décharge, la tension aux bornes du condensateur obéit à la loi horaire suivante  $u_C(t) = A_1 \exp(-t/\tau_2)$ .

- a) Déterminer à partir de la courbe ci-contre  $\ln(u_C) = f(t)$ , la constante de temps  $\tau_2$  du circuit.
- b) Déduire la résistance équivalente à l'association des résistors.
- c) Montrer que la durée de la décharge du condensateur est 4 fois plus petite que la durée de sa charge.

**Exercice n°3 :**

**A. Charge du condensateur par un générateur de courant :**

On réalise un circuit électrique comprenant :

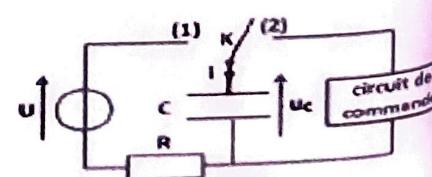
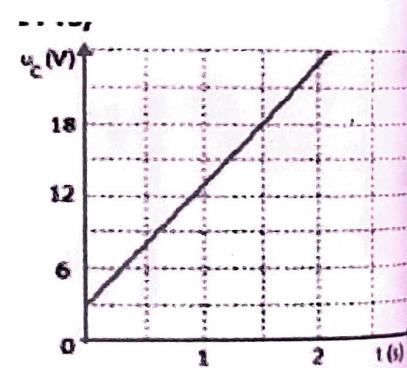
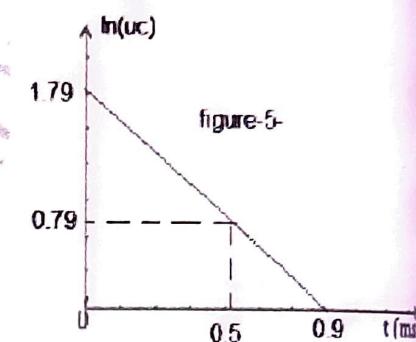
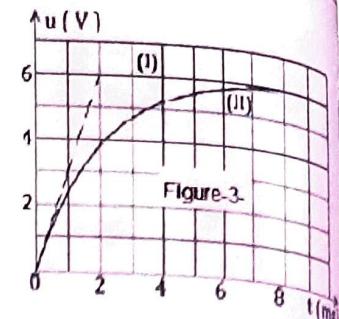
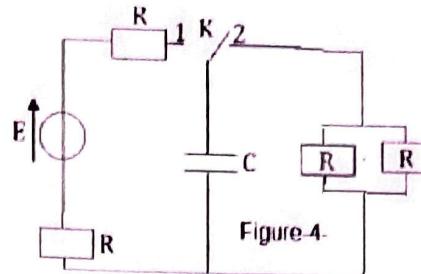
- Un générateur qui débite un courant d'intensité constante  $I = 25 \mu A$ .
- Un condensateur de capacité  $C$ . La particularité de ce condensateur est qu'il ne peut pas se vider complètement : il présente une tension à vide  $U_0$ .

- 1) Comment se rendre compte expérimentalement que le condensateur est déchargé ?
- 2) La mesure à différents instants, de la tension  $u_C$  aux bornes du condensateur, a permis de tracer la courbe de la figure ci-contre modélisant l'évolution temporelle de cette tension :  $u_C = f(t)$ .
  - a) Déterminer graphiquement la valeur de la tension à vide  $U_0$ .
  - b) Montrer que la capacité du condensateur vaut  $2,5 \text{ V}$ .

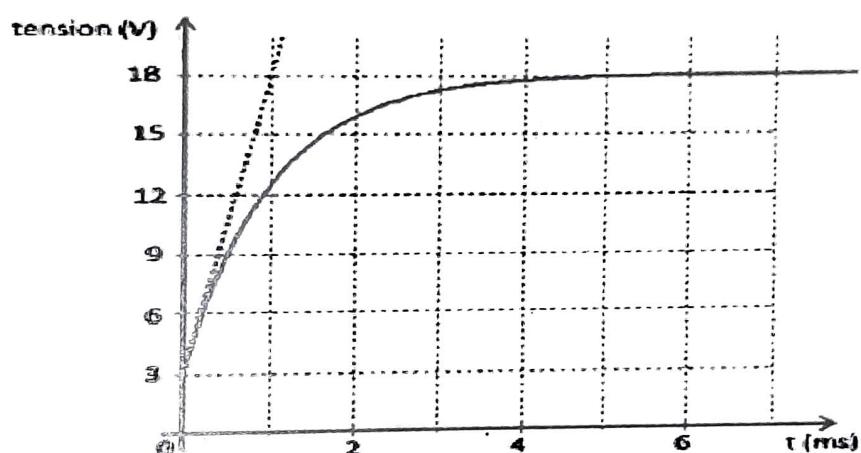
**B. Circuit RC-SERIE**

A l'aide du condensateur précédent de capacité  $C = 2,5 \mu F$ , on réalise un circuit RC-série aux bornes duquel on applique un échelon de tension de valeur  $U$  comme l'indique le schéma de la figure ci-contre. La courbe de la figure ci-après représente le chronogramme de la tension instantanée  $u_C$  aux bornes du condensateur. L'axe des temps est gradué en millisecondes.

- 1) Préciser s'il s'agit d'une courbe de charge ou de décharge. En déduire la position dans laquelle l'interrupteur est placé.
- 2) Par application de la loi des mailles, établir l'équation différentielle :  $u_C + RC \frac{du_C}{dt} = U$ .



- 3) La solution de l'équation différentielle est de la forme :  $u_C(t) = A + [B - A]e^{-\alpha t}$ . Déterminer A, B et  $\alpha$  en fonction de  $U_0$ , U, R et C.
- 4) En exploitant la courbe, déterminer la valeur de :
  - a) La tension U.
  - b) La constante de temps du circuit RC-série et déduire la valeur de la résistance R.
- 5) Calculer les valeurs initiale  $i(0)$  et finale  $i(f)$  de l'intensité du courant  $i(t)$ .
- 6) On modélisera simplement le circuit de commande de la sirène par un résistor de résistance  $R_1 = 4,7 \text{ M}\Omega$ . A la fin de la charge, l'interrupteur K a basculé en position (2), à un instant pris comme nouvelle origine des temps. La sirène ne se déclenche que si la tension aux bornes de son circuit de commande est supérieure à  $U_{min} = 9V$ .  
 Déterminer la durée minimale qui s'écoule à partir de l'instant du basculement de l'interrupteur dans la position (2), pour que la sirène retentisse (sonne).  
 N.B : On admet que l'expression générale de  $u_C(t)$  en phase de charge est valable en phase de décharge.



Fin de la série

## Chapitre X : Oscillations mécaniques libres

### I- Généralités :

#### 1. Définition :

Un oscillateur mécanique est tout système mécanique qui, écarté de sa position d'équilibre puis abandonné effectue des oscillations autour de sa position d'équilibre.

#### 2. Équation différentielle :

L'équation différentielle d'un oscillateur mécanique s'écrit sous la forme :  $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f(t)$ .

- Si  $f(t) \neq 0$ , on dit que les oscillations mécaniques sont forcées.
- Si  $f(t) = 0$ , on dit que les oscillations mécaniques sont libres.
- 3. Les types d'oscillations mécaniques libres :
- Si  $b = 0$ , l'équation devient :  $a\ddot{x} + cx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{c}{a}x = 0$  : on dit que les oscillations mécaniques libres sont non amorties. L'équation horaire du mouvement s'écrit sous la forme  $x = X_m \cos(w_0 t + \varphi)$ , avec  $w_0 = \sqrt{\frac{c}{a}}$  : la pulsation propre,  $X_m$  : l'amplitude du mouvement et  $\varphi$  la phase à l'origine.
- Si  $b \neq 0$ , l'équation s'écrit :  $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$ , on a des oscillations mécaniques amorties.

### II- Oscillations mécaniques libres non amorties : exemple du pendule élastique horizontal

Considérons un pendule élastique constitué d'un ressort de constante de raideur  $K$ , de longueur à vide  $l_0$  et d'un solide  $S$  de masse  $m$  qui repose sans frottement sur un plan horizontal. On écarte le solide d'une longueur  $x_0$  puis on l'abandonne (voir figure)

#### 1. Etude dynamique :

##### a) Équation différentielle du mouvement :

- Système : solide  $S$
- R.T.S.G
- B.F :  $\begin{cases} \vec{P} \text{ poids du solide} \\ \vec{T} \text{ tension du solide} \\ \vec{R} \text{ réaction du plan} \end{cases}$
- T.C.I :  $\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = m\vec{a}$

Suivant  $x'x$  :  $P_x + R_x + T_x = ma_x \Rightarrow 0 + 0 - T = ma_x$

Avec  $\begin{cases} T = Kx \\ a_x = \ddot{x} \end{cases} \Rightarrow -Kx = m\ddot{x} \Rightarrow m\ddot{x} + Kx = 0 \Rightarrow$

$$\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0$$

Cette équation différentielle est celle d'un oscillateur harmonique.

##### b) Équation horaire du mouvement :

L'équation différentielle est celle d'un mouvement rectiligne sinusoïdal. Son équation horaire s'écrit sous la forme :  $x = X_m \cos(w_0 t + \varphi)$

##### c) Vérification :

$$\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0 \quad (1)$$

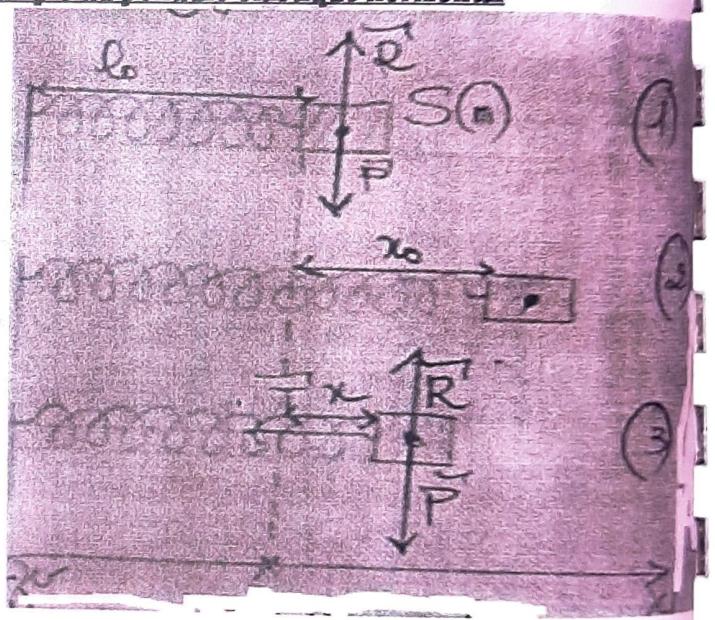
$$x = X_m \cos(w_0 t + \varphi) \quad (2) \Rightarrow \dot{x} = -w_0 X_m \sin(w_0 t + \varphi) \Rightarrow \ddot{x} = -w_0^2 X_m \cos(w_0 t + \varphi) \quad (3)$$

$$(2) \text{ et } (3) \text{ dans } (1) \Rightarrow -w_0^2 X_m \cos(w_0 t + \varphi) + \frac{K}{m} X_m \cos(w_0 t + \varphi) = 0 \Rightarrow \left(-w_0^2 + \frac{K}{m}\right) X_m \cos(w_0 t + \varphi) = 0$$

$$\text{Or } X_m \cos(w_0 t + \varphi) = x \neq 0 \text{ donc } -w_0^2 + \frac{K}{m} = 0 \Rightarrow w_0^2 = \frac{K}{m} \Rightarrow w_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

**Conclusion** :  $x = X_m \cos(w_0 t + \varphi)$  est solution de l'équation différentielle si et seulement si  $w_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ .

**Remarque** :  $X_m$  et  $\varphi$  sont des constantes qu'on détermine à partir des conditions initiales.



d) Vitesse du solide :

$x = X_m \cos(w_0 t + \varphi)$  et  $V = V_x = \dot{x}$  : la valeur algébrique de la vitesse

$$\Rightarrow V = -w_0 X_m \sin(w_0 t + \varphi) = w_0 X_m \cos\left(w_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

On a donc :  $\varphi_x = \varphi$  et  $\varphi_v = \varphi + \frac{\pi}{2} = \varphi_x + \frac{\pi}{2}$  : on dit que  $x$  et  $V$  sont en quadrature de phase c'est à dire :

- ✓ Si  $x = \mp X_m$  alors  $V=0$ .
- ✓ Si  $V = \mp V_m$  alors  $x=0$ , avec  $V_m = \omega X_m$  : la vitesse maximale.

Remarque :

- ✓  $V > 0$  si le mobile se déplace dans le sens positif.
- ✓  $V < 0$  si le mobile se déplace dans le sens négatif.

e) Accélération :

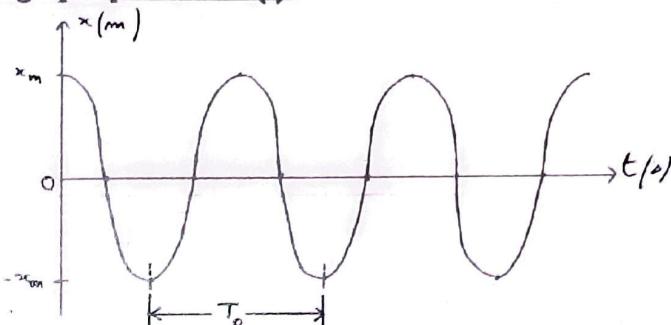
$x = X_m \cos(w_0 t + \varphi) \Rightarrow \ddot{x} = -w_0^2 X_m \sin(w_0 t + \varphi)$

$$\Rightarrow \ddot{x} = -w_0^2 X_m \cos(w_0 t + \varphi) = w_0^2 X_m \cos(w_0 t + \varphi + \pi)$$

$\varphi_a = \varphi + \pi = \varphi_x + \pi$  : l'accélération et l'élongation sont en opposition de phase

$a_m = w_0^2 X_m$  : accélération maximale.

f) Représentation graphique de  $x = f(t)$  :



- ✓ Nature des oscillations : On a des oscillations non amorties car l'amplitude reste constante au cours du temps.
- ✓ Régime des oscillations : On a un régime périodique
- ✓ Période propre  $T_0$  : la période propre correspond à la durée d'une oscillation :

$$T_0 = \frac{2\pi}{w_0} \text{ avec } w_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{K}{m}}} \Rightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$$

- ✓ Fréquence propre  $N_0$  : c'est le nombre d'oscillations effectuées pendant l'unité de temps.

$$N_0 = \frac{1}{T_0} \Rightarrow N_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}}$$

2. Etude énergétique :

a) Expression de l'énergie mécanique :

Système : pendule

$$E_m = E_c + E_{pe} \text{ avec } \begin{cases} E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \\ E_{pe} = \frac{1}{2} K(x^2 - x_{ref}^2) \end{cases} \text{ en choisissant la position d'équilibre comme position de référence}$$

des énergies potentielles élastiques alors  $x_{ref} = 0$  d'où  $E_{pe} = \frac{1}{2} Kx^2 \Rightarrow E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} Kx^2$ .

b) Conservation de l'énergie mécanique :

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} Kx^2 \text{ avec } \begin{cases} x = X_m \cos(w_0 t + \varphi) \\ \dot{x} = -w_0 X_m \sin(w_0 t + \varphi) \end{cases} \Rightarrow$$

$$E_m = \frac{1}{2} m(-w_0 X_m \sin(w_0 t + \varphi))^2 + \frac{1}{2} K(X_m \cos(w_0 t + \varphi))^2 = \frac{1}{2} m w_0^2 X_m^2 \sin^2(w_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} K X_m^2 \cos^2(w_0 t + \varphi)$$

$$\text{Avec } w_0^2 = \frac{K}{m} \Rightarrow m w_0^2 = K \Rightarrow E_m = \frac{1}{2} K X_m^2 [\sin^2(w_0 t + \varphi) + \cos^2(w_0 t + \varphi)] \Rightarrow E_m = \frac{1}{2} K X_m^2 = \text{cte.}$$

**Lycee IImamou Laye**  
**Sciences Physiques**

c) Détermination de l'équation différentielle par la méthode énergétique :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Kx^2 = \text{cte} \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Kx^2\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}m(2\ddot{x}\dot{x}) + \frac{1}{2}K(2\dot{x}x) = 0 \\ \Rightarrow m\ddot{x}\dot{x} + K\dot{x}x = 0 \Rightarrow \dot{x}(m\ddot{x} + Kx) = 0 \text{ or } \dot{x} \neq 0 \Rightarrow m\ddot{x} + Kx = 0 \text{ ou } \dot{x} + \frac{K}{m}x = 0$$

d) Expression de  $E_{pe}$  et  $E_c$ :

— Expression de  $E_{pe}$ :

$$E_{pe} = \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}KX_m^2 \cos^2(w_0 t + \varphi) \text{ avec } \cos^2(w_0 t + \varphi) = \frac{1+\cos 2(w_0 t + \varphi)}{2} \\ \Rightarrow E_{pe} = \frac{1}{2}KX_m^2 \left[ \frac{1+\cos 2(w_0 t + \varphi)}{2} \right] \Rightarrow E_{pe} = \frac{1}{4}KX_m^2 [1 + \cos(2w_0 t + 2\varphi)]$$

L'énergie potentielle élastique est une fonction sinusoïdale du temps de pulsation  $w = 2w_0 = 2\sqrt{\frac{K}{m}}$  et de période

$$T = \frac{T_0}{2} = \pi \sqrt{\frac{m}{K}}.$$

— Expression de  $E_c$ :

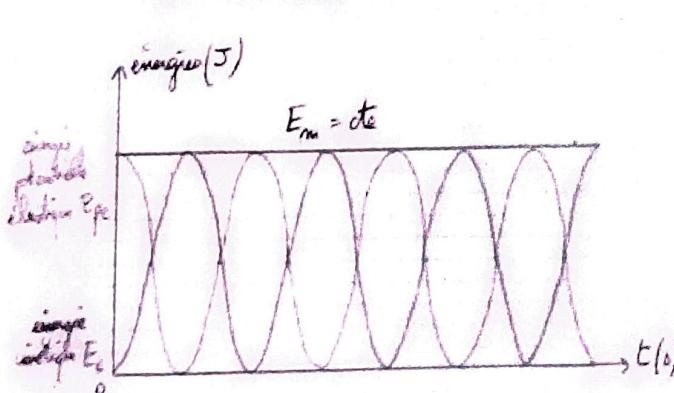
$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}mw_0^2 X_m^2 \sin^2(w_0 t + \varphi) \text{ avec } mw_0^2 = K \text{ et } \sin^2(w_0 t + \varphi) = \frac{1-\cos 2(w_0 t + \varphi)}{2} \\ E_c = \frac{1}{4}KX_m^2 [1 - \cos(2w_0 t + 2\varphi)]$$

L'énergie cinétique est une fonction sinusoïdale du temps de pulsation  $w = 2w_0 = 2\sqrt{\frac{K}{m}}$  et de période

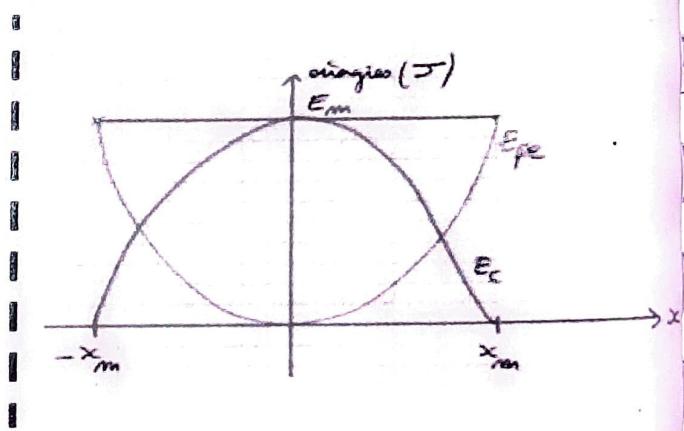
$$T = \frac{T_0}{2} = \pi \sqrt{\frac{m}{K}}.$$

e) Diagramme des énergies

- Diagramme des énergies en fonction du temps

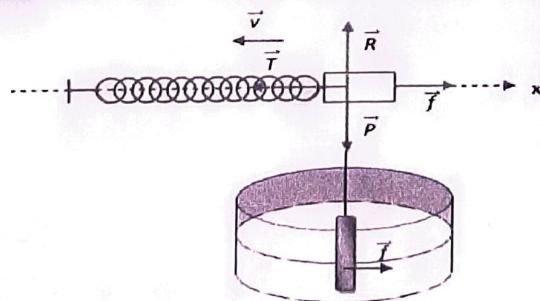


- Diagramme des énergies en fonction de  $x$



**III- Oscillations mécaniques libres amorties :**

Supposons que le pendule élastique précédent est soumis à une force de frottement fluide  $\vec{h} = -h\vec{V}$ , où  $h$  est une constante positive appelée coefficient de frottement et  $\vec{V}$  le vecteur vitesse instantanée du mobile.



1. Équation différentielle du mouvement :

$$\text{T.C.I : } \vec{P} + \vec{T} + \vec{R} + \vec{f} = m\vec{a}$$

$$\text{Suivant } x'x : P_x + R_x + T_x + f_x = ma_x \Rightarrow 0 + 0 - T + f = ma_x$$

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + Kx = 0 \text{ où } \ddot{x} + \frac{h}{m}\dot{x} + \frac{K}{m}x = 0$$

Cette équation différentielle correspond à des oscillations mécaniques libres amorties. L'amortissement dépend des valeurs du coefficient de frottement. On distingue trois régimes d'oscillation :

- Si  $h$  est faible ( $h < 2\sqrt{Km}$ ), on a le régime pseudo-périodique où l'amplitude du mouvement diminue progressivement avant de s'annuler (figure a).
- Si  $h$  est élevé ( $h > 2\sqrt{Km}$ ), on a le régime apériodique où l'amplitude du mouvement s'annule directement sans osciller (figure b).
- Si  $h$  est moyen ( $h = 2\sqrt{Km}$ ), on a le régime critique (état limite entre les états) où l'amplitude du mouvement s'annule pendant la durée la plus courte en effectuant le minimum d'oscillations (figure c).

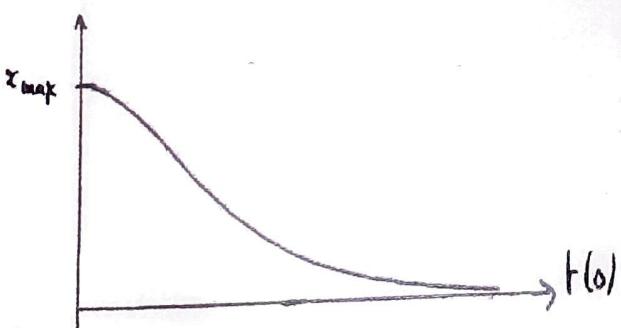
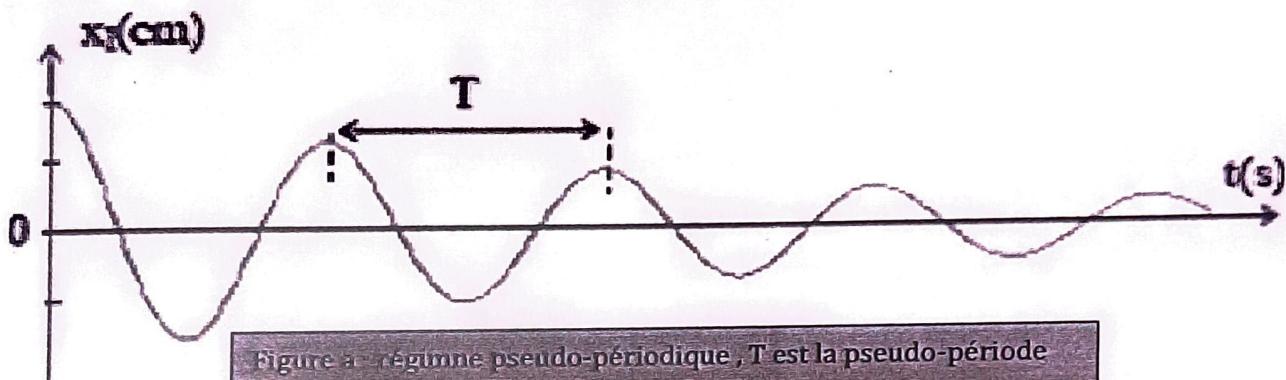


Figure b : régime apériodique

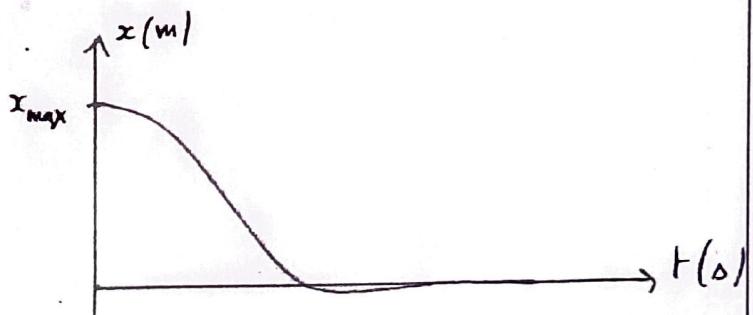


Figure c : régime critique

## 2. Etude énergétique :

### a) Sens de variation de l'énergie :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Kx^2 \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Kx^2 \right) = \frac{1}{2}m(2\ddot{x}\dot{x}) + \frac{1}{2}K(2\dot{x}x) = m\ddot{x}\dot{x} + K\dot{x}x = \dot{x}(m\ddot{x} + Kx)$$

$$\text{Or } m\ddot{x} + h\dot{x} + Kx = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + Kx = -h\dot{x}$$

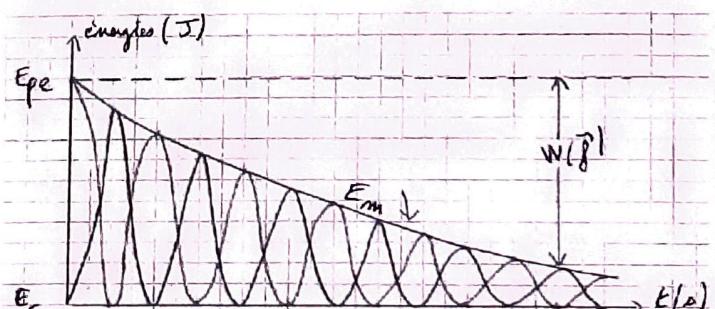
$$\Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = -h\dot{x}^2 < 0 : \text{Em diminue au cours du temps.}$$

### b) Variation de l'énergie mécanique :

$$\frac{dE_m}{dt} = -h\dot{x}^2 \quad (1)$$

$$P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} = -h\vec{v} \cdot \vec{v} = -h\dot{x}^2 \quad (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = P_f : \text{puissance instantanée de } f.$$



$$0 \cdot \vec{P} = \frac{dW_f}{dt} \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = dW_f \Rightarrow dE_m = dW_f \Rightarrow \Delta E_m = \sum dW_f = W_f : \text{travail de la force de frottement}$$

#### IV. Autres exemples d'oscillateurs

##### 1. Le pendule élastique vertical :

###### a) Etude dynamique :

— Position d'équilibre :  $\vec{P} + \vec{T}_0 = \vec{0}$

$$\text{Suivant } x'x : mg - kx_0 = 0 \Rightarrow mg = kx_0$$

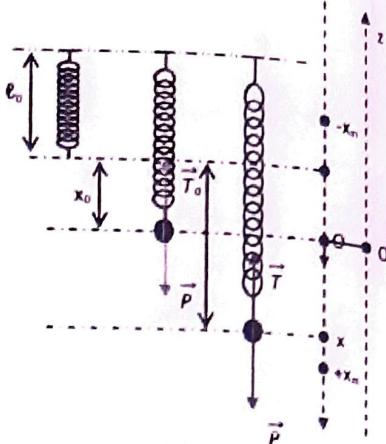
— Position en mouvement : équation différentielle

$$\text{T.C.I. : } \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

$$\text{Suivant } x'x : P_x + T_x = ma_x \Rightarrow P - T = ma_x \Rightarrow mg - k(x_0 + x) = m\ddot{x}$$

$$mg - kx_0 - kx = m\ddot{x} \text{ avec } mg = kx_0 \text{ on a}$$

$$m\ddot{x} + kx = 0 \text{ ou } \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$



###### b) Etude énergétique :

###### — Expression de l'énergie mécanique :

Système : pendule - terre

En choisissant comme position de référence pour l'énergie potentielle de pesanteur la position d'équilibre et pour l'énergie potentielle élastique la position de détente du ressort on a :

$$E_m = E_c + E_{pp} + E_{pe} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgz_S + \frac{1}{2}k(x_0 + x)^2 \text{ avec } z_S = -x$$

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 + kx_0x - mgx = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 + x(kx_0 - mg) \text{ or } kx_0 - mg = 0 \Rightarrow$$

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}kx_0^2$$

###### — Conservation de l'énergie mécanique :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 \text{ avec } \begin{aligned} x &= X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ \dot{x} &= -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi) \end{aligned} \quad \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kX_m^2 \Rightarrow E_m = \frac{1}{2}kX_m^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 = \text{cte}$$

###### — Détermination de l'équation différentielle par la méthode énergétique :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 = \text{cte} \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 \right) = 0 \Rightarrow m\ddot{x}\dot{x} + K\dot{x}x + 0 = 0$$

$$m\ddot{x} + kx = 0 \text{ ou } \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

## 2. Le pendule simple :

Un pendule simple constitué d'un fil fin de longueur l, de masse négligeable et d'un solide ponctuel de masse m est écarté de sa position d'équilibre d'un angle  $\theta_0$  puis abandonné.

Système : pendule - terre : conservatif  $\Rightarrow E_m = \text{cte}$

$$E_m = E_c + E_{pp} = \frac{1}{2}mv^2 + mg(z - z_r), \text{ en choisissant comme origine des altitudes et comme position de référence de l'énergie potentielle de pesanteur la position d'équilibre alors } z_r = 0$$

$$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2}mv^2 + mgz \text{ avec } \begin{cases} v = lw = l\dot{\theta} \\ z = l(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

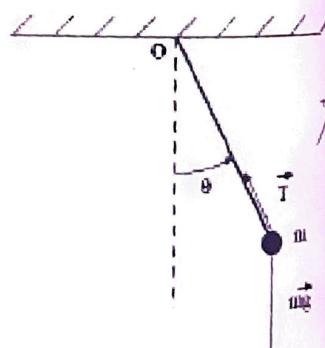
$$E_m = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + mgl(1 - \cos\theta) = \text{cte} \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + mgl(1 - \cos\theta) \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}ml^2(2\dot{\theta}\ddot{\theta}) + mgl\dot{\theta}\sin\theta = 0 \Rightarrow ml\dot{\theta}(l\ddot{\theta} + g\sin\theta) = 0 \text{ or } ml\dot{\theta} \neq 0 \Rightarrow l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

Cette équation différentielle n'admet pas de solution sinusoïdale : le pendule simple n'est pas un oscillateur linéaire (harmonique)

Cas particulier : Pour de faibles déviations  $\sin\theta \approx \theta$ , l'équation devient :  $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$ , la solution est de la forme

$$\theta = \theta_m \cos(w_0 t + \varphi) \text{ avec } w_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} : \text{ pulsation propre, } \Rightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \text{ la période propre.}$$



Un pendule pesant est tout système capable d'osciller sous l'action de la pesanteur.

a) Etude dynamique :

- Système : pendule
- R.T.SG
- B.F :  $\begin{cases} \vec{P} : \text{poids du pendule} \\ \vec{R} : \text{réaction de l'axe } \Delta \end{cases}$
- T.A.A :  $\sum M_{\vec{F}_{ext}/\Delta} = J_\Delta \ddot{\theta} \Rightarrow M_{\vec{P}/\Delta} + M_{\vec{R}/\Delta} = J_\Delta \ddot{\theta}$

$$\Rightarrow -mgd \sin \theta + 0 = J_\Delta \ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_\Delta} \sin \theta = 0$$

Cas particulier : Pour de faibles déviations  $\sin \theta \approx \theta$ , l'équation devient :  $\ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_\Delta} \theta = 0$ , la solution est de la forme  $\theta = \theta_m \cos(w_0 t + \varphi)$  avec  $w_0 = \sqrt{\frac{mgd}{J_\Delta}}$  : pulsation propre,  $\Rightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_\Delta}{mgd}}$  la période propre.

b) Etude énergétique :

$$E_m = E_c + E_{pp} = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 + mgd(1 - \cos \theta) \text{ pour de faibles oscillations } \cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \Rightarrow$$

$$E_m = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} mgd \theta^2 = \text{cte} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} mgd \theta^2 \right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} J_\Delta (2\ddot{\theta}\dot{\theta}) + \frac{1}{2} mgd (2\dot{\theta}\theta) = 0 \Rightarrow J_\Delta \ddot{\theta}\dot{\theta} + mgd\dot{\theta}\theta = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}(J_\Delta \ddot{\theta} + mgd\theta) = 0 \text{ or } \dot{\theta} \neq 0 \Rightarrow J_\Delta \ddot{\theta} + mgd\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_\Delta} \sin \theta = 0.$$

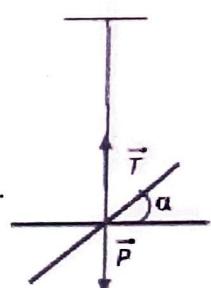
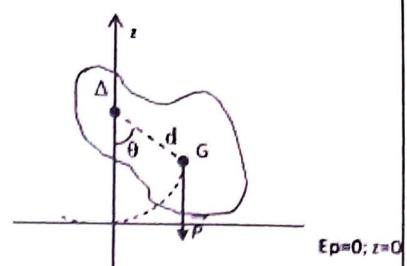
4. Le pendule de torsion : (TS1) :

$$\text{T.A.A : } \sum M_{\vec{F}_{ext}/\Delta} = J_\Delta \ddot{\alpha} \Rightarrow M_{\vec{P}/\Delta} + M_{\vec{T}/\Delta} + M_{c/\Delta} = J_\Delta \ddot{\alpha}$$

$$\Rightarrow 0 + 0 - C\alpha = J_\Delta \ddot{\alpha} \Rightarrow J_\Delta \ddot{\alpha} + C\alpha = 0 \Rightarrow \ddot{\alpha} + \frac{C}{J_\Delta} \alpha = 0$$

La solution est de la forme  $\alpha = \alpha_m \cos(w_0 t + \varphi)$  avec  $w_0 = \sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}$  :

pulsation propre,  $\Rightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_\Delta}{C}}$  la période propre.



Fin du chapitre

**Exercice n°1:**

On considère un pendule élastique formé par un solide de masse  $m$  et un ressort ( $R$ ) à spires non jointives et de raideur  $k$ . Le solide ( $S$ ) peut se déplacer sans frottement sur un plan horizontal. On note  $x(t)$  l'abscisse du centre d'inertie  $G$  du solide. (figure 1).

1. Etablir l'équation différentielle à laquelle obéit  $x(t)$ .
2. La courbe de la figure 2 représente l'évolution de l'élargissement en fonction du temps  $x=f(t)$ .

- a) Quelle est la nature des oscillations ?
- b) Quel est le régime des oscillations
- c) En exploitant cette courbe, écrire la loi horaire de l'élargissement  $x(t)$ .
- d) En déduire l'expression numérique de la vitesse  $v(t)$ .

3. Montrer que l'énergie mécanique est constante au cours du temps.

4. Retrouver l'équation différentielle par la méthode énergétique.

5. La courbe de la figure 3 représente l'énergie potentielle  $E_p$  en fonction de l'élargissement  $x$ .

- a) Par exploitation de cette courbe, déterminer la raideur  $k$  du ressort. En déduire la valeur de  $m$ .
- b) Déterminer la valeur de la vitesse  $v_1$  lorsqu'il passe par la position  $x_1 = 4\text{ cm}$  en se dirigeant dans le sens négatif.

6. Maintenant le solide  $S$  est soumis à des forces de frottement dont la résultante  $= -h$ ,  $h$  est une constante qui représente le coefficient de frottement.

- a) L'équation différentielle du mouvement du solide  $S$  est

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4,96 \frac{dx}{dt} + 158,7 x = 0.$$

Déterminer la valeur de  $h$ .

Montrer que l'énergie mécanique diminue au cours du temps.

- b) La courbe d'évolution de l'élargissement  $x$  en fonction du temps est représentée par la figure 4.

- b.1) Nommer le régime d'oscillation.

- b.2) Calculer la variation de l'énergie mécanique du pendule entre les instants  $t_0 = 0$  et  $t_1 = 1\text{ s}$ .

- b.3) Déterminer la pseudo-période  $T$  du mouvement.

- c) Donner l'allure de la courbe d'évolution de l'élargissement  $x$  en fonction du temps dans le cas où  $h$  est très élevé. Nommer le régime d'oscillation.

- d) Donner l'allure de la courbe d'évolution de l'élargissement  $x$  en fonction du temps dans le cas où  $h$  est moyen. Nommer le régime d'oscillation.

**Exercice n°2:**

On considère un pendule élastique horizontal formé par un solide ( $S$ ) de masse  $m$  et un ressort de raideur  $K=20\text{ N.m}^{-1}$ . Au repos le centre d'inertie du solide  $G$  est au point  $O$ , origine du repère ( $O, x$ ) horizontal. A partir de  $O$ , on écarte le solide d'une distance  $x_0$  et on le lâche avec une vitesse initial  $v_0$  positif et non nulle. Les frottements sont supposés négligeables.

1. a) Etablir l'équation différentielle en fonction de l'élargissement  $x$  du mouvement de  $G$  et en déduire l'expression de la pulsation propre  $w_0$  de l'oscillateur.

- b) La courbe de la figure 2 représente l'accélération du solide  $\frac{d^2x}{dt^2}$  en fonction de  $x$ .

- c) Déterminer  $w_0$  et montrer que  $m = 200\text{ g}$ .

2. Donner l'expression de l'énergie mécanique  $E$  du système en fonction de  $x$ ,  $m$ ,  $k$  et  $v$  et montrer qu'elle est constante.

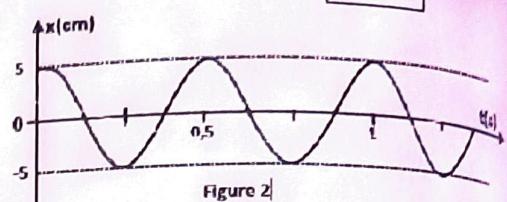
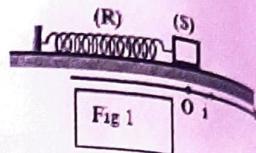


Figure 2

Figure 3

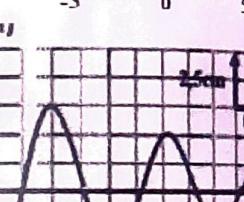
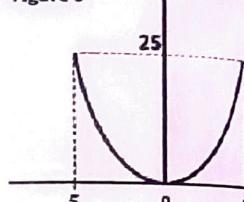


Figure 4

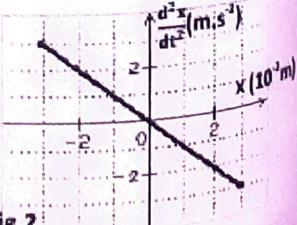
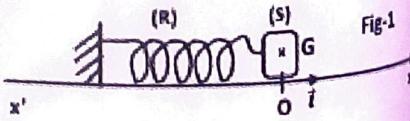


Fig.2

Le graphique de la figure 3 représente l'énergie  $E_c$  en fonction du temps. La loi horaire du mouvement est donnée par  $x(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$ .

- Montrer que l'énergie cinétique s'écrit :  $E_c(t) = \frac{1}{4} K X_m^2 (1 + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi))$ .
  - Déterminer, par exploitation de la courbe de la figure 3, les valeurs de  $X_m$  et  $\varphi$ .
4. Déterminer les valeurs de  $x_0$  et  $v_0$ .
5. L'ensemble est maintenant soumis à des forces de frottements. La courbe de la figure 4 représente l'évolution au cours du temps de l'elongation.
- Nommer le régime des oscillations.
  - Calculer la variation d'énergie mécanique  $\Delta E$  du système (solide-ressort) pendant la première période.

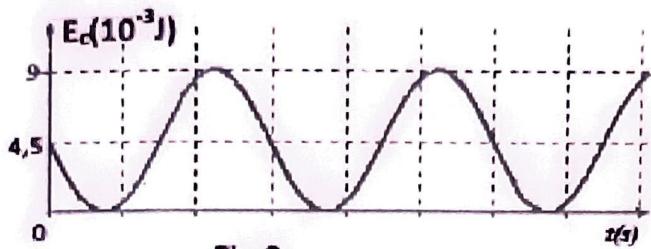


Fig.3

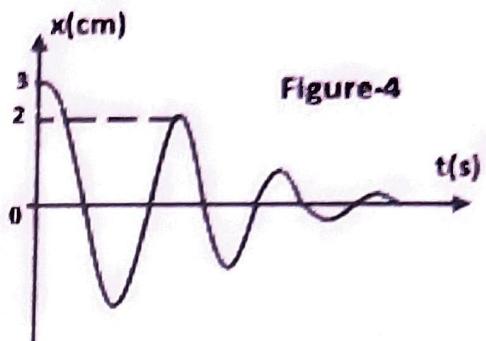


Figure-4

### Exercice n°3 : TS<sub>1</sub>

Un solide  $S_1$  de masse  $m_1$  est propulsé, le long d'une piste à coussin d'air, grâce à un choc avec un solide  $S_2$ , de masse  $m_2$ . Le solide  $S_2$  est lui-même relié à un ressort horizontal, de masse négligeable et de constante de raideur  $k$ . L'autre extrémité du ressort est fixe en  $O$ . La piste comporte une rampe  $AB$  de longueur  $L$  inclinée d'un angle  $\alpha$  sur l'horizontale. Un trou  $T$  placé sur l'horizontal permet de recevoir le solide  $S_1$  (voir figure).

A l'équilibre, la position du centre d'inertie du solide  $S_2$  est notée  $G_0$  telle que  $OG_0 = \ell_0$ .

Tous les frottements sont négligés.

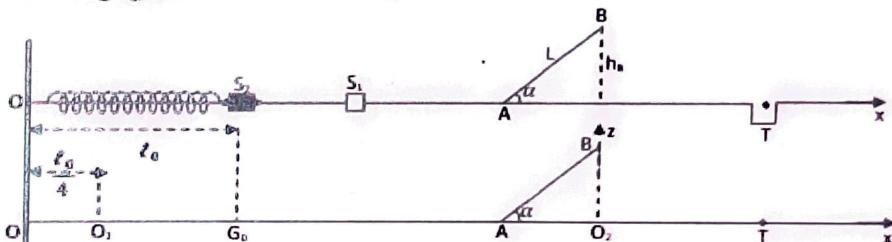


Figure 2

1.- Un joueur comprime le ressort : la nouvelle position du centre d'inertie  $G_2$  du solide  $S_2$  devient  $O_1$  telle que  $OO_1 = 0,25 \ell_0$ . Puis ce même joueur le lâche sans vitesse initiale à un instant pris comme origine des dates.

1.1- Montrer que l'équation différentielle du mouvement du centre d'inertie du palet  $S_2$  s'écrit :  $\ddot{x} + \frac{k}{m_2} x = 0$  où  $x$  est l'abscisse de  $S_2$  à un instant  $t$  sur l'axe ( $Ox$ ) dont l'origine est  $G_0$ .

1.2- L'équation horaire du mouvement de  $S_2$  peut s'écrire sous la forme :  $x(t) = Q \sin(\omega_0 t + \varphi)$  où  $x$  est l'abscisse de  $S_2$  à un instant  $t$  sur l'axe ( $Ox$ ).

1.2.1- Indiquer la nature du mouvement de  $S_2$  ?

1.2.2- Etablir l'expression littérale de la période  $T_0$  du mouvement. Calculer  $T_0$ .

On prendra  $m_2 = 200$  g et  $k = 20$  N/m

1.2.3- Déterminer les valeurs des constantes  $Q$  et  $\varphi$  et en déduire numériquement l'équation horaire  $x(t)$ .

2- Le choc entre les palets a lieu lorsque le centre d'inertie  $G_2$  du solide  $S_2$  passe en  $G_0$ .

Le solide  $S_1$  acquiert alors une certaine vitesse qui lui permet d'aborder la rampe  $AB$  avec un vecteur-vitesse  $\vec{V}_1$  colinéaire et de même sens que  $AB$  et de valeur  $V_1 = 3,6$  m/s.

2.1- Calculer la vitesse  $V_B$  du solide  $S_1$  au passage au sommet de la rampe, sachant que  $B$  est situé à une hauteur  $h_B = 25$  cm au-dessus du plan horizontal passant par  $A$ .

2.2- On se propose d'étudier la trajectoire du centre d'inertie  $G_1$  du solide  $S_1$  au-delà du point  $B$ .

L'origine des dates est choisie à l'instant où le solide  $S_1$  quitte le point  $B$  avec la vitesse  $\vec{V}_B$

On suppose que le solide  $S_1$  n'est soumis qu'à son poids.

2.2.1- Etablir l'équation de la trajectoire du centre d'inertie  $G_1$  du solide  $S_1$  au-delà de  $B$ , dans le repère ( $O_2xz$ ).

- 2.2.2- Etablir l'expression littérale, puis numérique, de la vitesse du solide  $S_1$  au sol.  
 2.2.3- A quelle distance du point  $O_2$  faut-il placer le trou  $T$ ?  
 Données :  $m_2 = 200 \text{ g}$ ;  $k = 20 \text{ N/m}$ ;  $\ell_0 = 24 \text{ cm}$ ;  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ;  $\alpha = 30^\circ$ .

#### Exercice n°4 : TS<sub>1</sub>

Deux ressorts identiques, de longueur à vide  $L_0 = 10 \text{ cm}$ , de raideur  $k = 20 \text{ N.m}^{-1}$  sont tendus et fixés à deux supports  $P_1$  et  $P_2$ , distants de  $L = 30 \text{ cm}$ , sur un plan incliné d'un angle  $\alpha = 30^\circ$

Un solide ponctuel  $S$  de masse  $m = 100 \text{ g}$  est fixé aux deux ressorts (fig 1).

1-1 Recopier la figure, puis représenter les forces qui s'exercent sur le solide ponctuel  $S$ , à l'équilibre.

3-1-2 Calculer, le solide ponctuel  $S$  étant en équilibre, les allongements respectifs des ressorts ( $R_1$ ) et ( $R_2$ ).

2 On associe à cet ensemble un repère constitué d'un axe ( $X'X$ ) orienté vers le haut et parallèle à la direction des ressorts. L'origine de ce repère coïncide avec la position du solide  $S$ , au repos. A la date  $t_0 = 0$ , le solide  $S$  est déplacé de sa position d'équilibre, le long de l'axe, vers le bas, de  $2 \text{ cm}$ , puis lâché sans vitesse initiale.

Le niveau de référence de l'énergie potentielle de pesanteur coïncide avec la position du solide  $S$  en équilibre.

2-1 En négligeant l'action de l'air, établir à partir d'une étude dynamique, l'équation différentielle du mouvement du solide  $S$ .

2-2 Préciser la nature du mouvement du solide  $S$ ; exprimer ensuite la période propre,  $T_0$ , de ce mouvement.

2-3 Etablir l'expression de l'énergie potentielle du système «ressorts, solide  $S$  et terre».

3 On néglige toujours les forces de frottement. On note la position du solide  $S$  par  $x$  et  $\dot{x}$  sa vitesse.

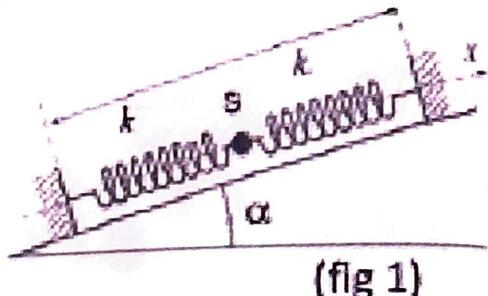
Montrer que ces deux paramètres d'évolution du solide  $S$ , la position et la vitesse, obéissent à une relation de la forme :  $\ddot{x} + Ax^2 - B = 0$ , où  $A$  et  $B$  sont des constantes positives dont on précisera les expressions.

4 Grâce à des capteurs on peut enregistrer l'évolution temporelle de la position  $x$  du solide ponctuel  $S$  puis tracer les courbes qui donnent son énergie cinétique  $E_c$  et de l'énergie potentielle  $E_p$  du système «ressort-solide ( $S$ )-terre» en fonction du temps.

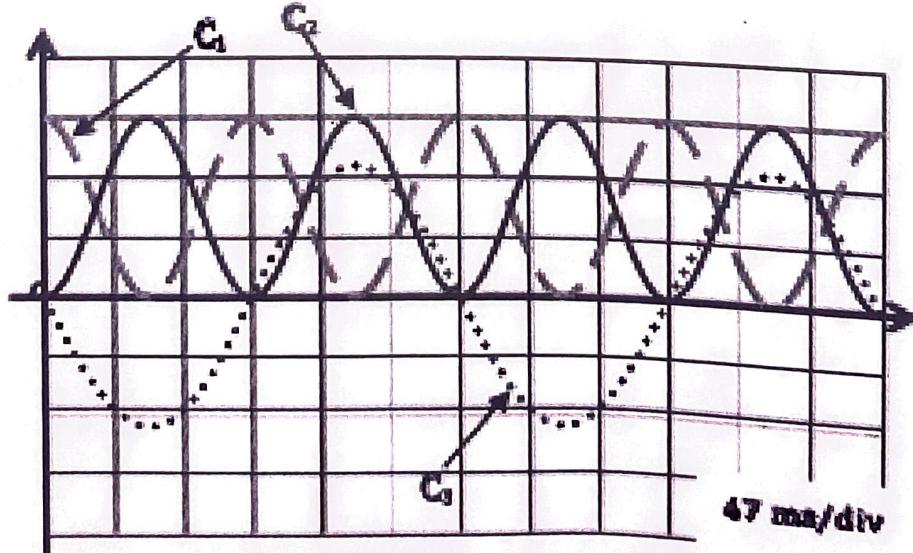
4-1 Identifier, en justifiant, la courbe relative à la vitesse du solide, celle relative à son énergie cinétique et celle relative à l'énergie potentielle du système «ressorts-solide  $S$  et terre».

4-2 Déterminer graphiquement les valeurs des périodes  $T$  et  $T_0$ , respectives, de l'énergie potentielle  $E_p$  et de la position instantanée  $x$  du solide  $S$ . Les comparer.

5 Déterminer, en millijoules, la valeur de chaque division de l'axe des énergies. En déduire la vitesse maximale du solide  $S$ .



(fig 1)



Cours à domicile : 77 550 04 15

## Chapitre XI (1<sup>ère</sup> partie) : Oscillations électriques libres

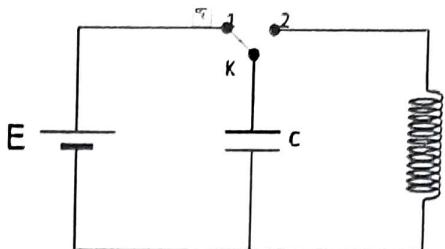
### I- Oscillations électriques libres non amorties :

#### 1. Etude expérimentale :

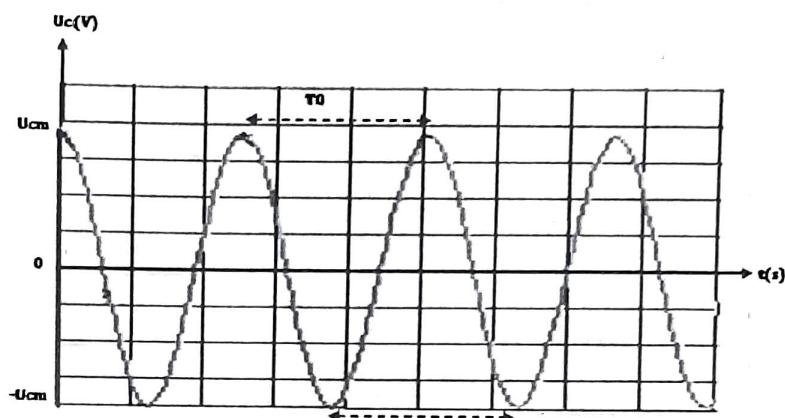
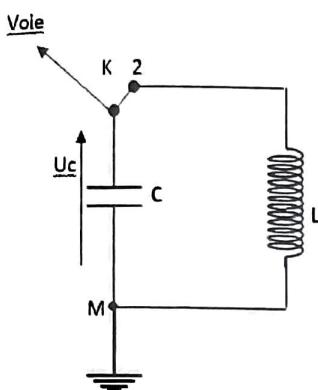
Considérons le circuit ci - contre :

- K en position 1 :** c'est l'opération de charge du condensateur. A la fin de la charge on a  $U_c = E$  (tension de charge). L'énergie électrostatique emmagasinée par le condensateur est

$$E_c = \frac{1}{2} C E^2.$$



- K en position 2 :** c'est l'opération de décharge du condensateur. Grâce à un oscilloscope on visualise la tension  $U_c$  au cours de la décharge.



La courbe  $U_c = f(t)$  est une fonction sinusoïdale du temps qui conserve la même amplitude : on dit que les oscillations électriques sont libres non amorties. Le régime des oscillations est périodique de période  $T_0$  qui correspond à la durée d'une oscillation.

#### 2. Etude théorique :

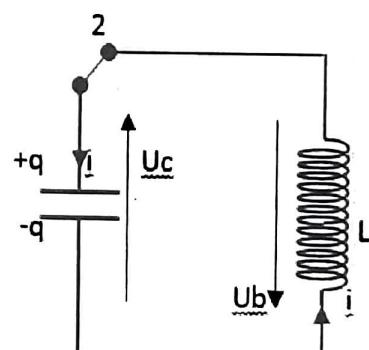
##### a) Équation différentielle régissant la charge $q$ :

- Cas où le condensateur fonctionne en mode récepteur :**

D'après la loi des mailles :  $U_b + U_c = 0$  avec  $\begin{cases} U_c = \frac{q}{C} \\ U_b = L \frac{di}{dt} \end{cases}$

en convention récepteur  $i = \frac{dq}{dt} = \dot{q} \Rightarrow \frac{di}{dt} = \ddot{q} \Rightarrow U_b = L \ddot{q}$ , en remplaçant  $U_b$  et  $U_c$  dans l'expression précédente on a :

$$L \ddot{q} + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow \ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0$$

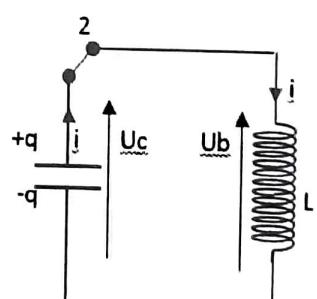


- Cas où le condensateur fonctionne en mode générateur :**

D'après la loi des mailles :  $U_c = U_b$  avec  $\begin{cases} U_c = \frac{q}{C} \\ U_b = L \frac{di}{dt} \end{cases}$

en convention générateur  $i = -\frac{dq}{dt} = -\dot{q} \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\ddot{q} \Rightarrow U_b = -L \ddot{q}$ , en remplaçant  $U_b$  et  $U_c$  dans l'expression précédente on a :  $\frac{q}{C} = -L \ddot{q} \Rightarrow$

$$L \ddot{q} + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow \ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0$$



Cette équation admet une solution de la forme :  $q = Q_m \cos(w_0 t + \varphi)$  avec

- ✓  $Q_m$  la charge maximale ou l'amplitude des oscillations
- ✓  $w_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$  la pulsation propre du circuit ;
- ✓  $T_0 = \frac{2\pi}{w_0} = 2\pi\sqrt{LC}$  : la période propre ;
- ✓  $N_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$  : la fréquence propre.

### Remarque : Équation différentielle régissant $U_c$ :

D'après la loi des mailles :  $U_b + U_c = 0$  (1) avec  $U_b = L \frac{di}{dt}$  or  $i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dU_c}{dt}$   $\Rightarrow U_b = LC \frac{d^2 U_c}{dt^2}$  (2)

(2) dans (1) donne  $LC \frac{d^2 U_c}{dt^2} + U_c = 0 \Rightarrow \frac{d^2 U_c}{dt^2} + \frac{1}{LC} U_c = 0$  ou  $\ddot{U}_c + \frac{1}{LC} U_c = 0$

Cette équation admet une solution de la forme :  $U_c = U_{cm} \cos(w_0 t + \varphi)$

#### b) Etude énergétique :

- Expression de l'énergie totale du dipôle LC :

L'énergie du dipôle LC est égale à la somme de l'énergie magnétique de la bobine et de l'énergie électrostatique du condensateur :

$$E = E_b + E_c \text{ avec } \begin{cases} E_b = \frac{1}{2} L i^2 \\ E_c = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \end{cases} \text{ or } i^2 = \dot{q}^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2} L \dot{q}^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

- Conservation de l'énergie totale du dipôle LC :

$$E = \frac{1}{2} L \dot{q}^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \text{ avec } \begin{cases} q = Q_m \cos(w_0 t + \varphi) \\ \dot{q} = -w_0 Q_m \sin(w_0 t + \varphi) \end{cases} \Rightarrow$$

$$E = \frac{1}{2} L w_0^2 Q_m^2 \sin^2(w_0 t + \varphi) + \frac{1}{2C} Q_m^2 \cos^2(w_0 t + \varphi) \text{ avec } w_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow L w_0^2 = \frac{1}{C} \text{ d'où}$$

$$E = \frac{1}{2C} Q_m^2 \sin^2(w_0 t + \varphi) + \frac{1}{2C} Q_m^2 \cos^2(w_0 t + \varphi) = \frac{Q_m^2}{2C} [\sin^2(w_0 t + \varphi) + \cos^2(w_0 t + \varphi)] \text{ avec}$$

$$[\sin^2(w_0 t + \varphi) + \cos^2(w_0 t + \varphi)] = 1, \text{ on a } E = \frac{Q_m^2}{2C} = \text{constante}$$

- Détermination de l'équation différentielle par la méthode énergétique :

$$E = \frac{1}{2} L \dot{q}^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \text{constante}, \text{ donc } \frac{dE}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L \dot{q}^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} (2L \ddot{q} \dot{q}) + \frac{1}{2C} (2q \dot{q}) = 0$$

$$\Rightarrow L \ddot{q} \dot{q} + \frac{1}{C} q \dot{q} = 0 \Rightarrow \dot{q} (L \ddot{q} + \frac{1}{C} q) = 0, \dot{q} \neq 0 \text{ donc } L \ddot{q} + \frac{1}{C} q = 0 \Rightarrow \ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0$$

- Expression de  $E_c$  et  $E_b$  en fonction du temps :

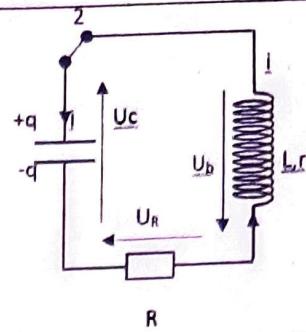
$$E_c = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \text{ avec } q = Q_m \cos(w_0 t + \varphi), E_c = \frac{1}{2C} Q_m^2 \cos^2(w_0 t + \varphi) \text{ or } \cos^2(w_0 t + \varphi) = \frac{1 + \cos(2w_0 t + 2\varphi)}{2}$$

$$E_c = \frac{Q_m^2}{4C} [1 + \cos(2w_0 t + 2\varphi)]$$

$$E_b = \frac{1}{2} L \dot{q}^2 \text{ avec } \dot{q} = -w_0 Q_m \sin(w_0 t + \varphi),$$

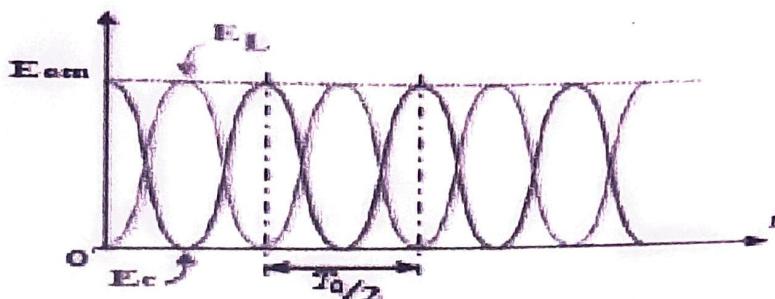
$$E_b = \frac{1}{2} L w_0^2 Q_m^2 \sin^2(w_0 t + \varphi) \text{ avec } \begin{cases} L w_0^2 = \frac{1}{C} \\ \sin^2(w_0 t + \varphi) = \frac{1 - \cos(2w_0 t + 2\varphi)}{2} \end{cases}$$

$$E_b = \frac{Q_m^2}{4C} [1 - \cos(2w_0 t + 2\varphi)]$$



Ec et Eb sont des fonctions sinusoïdales du temps de pulsation  $w=2w_0=2\sqrt{\frac{1}{LC}}$  et de période  $T=\frac{T_0}{2}=\pi\sqrt{LC}$ .

- Représentation graphique de E, Ec et Eb en fonction du temps :



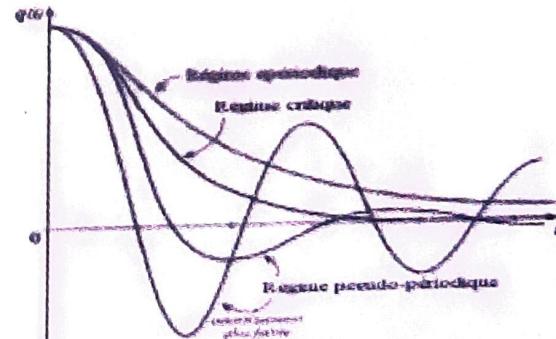
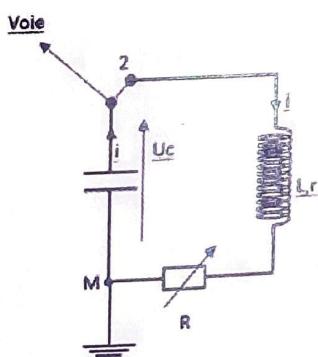
## II- Oscillations électriques libres amorties :

### 1. Etude expérimentale :

Considérons le circuit constitué d'un condensateur initialement chargé, d'une bobine résistive et d'une résistance variable. Grâce à un oscilloscope on visualise Uc pour différentes valeurs de  $R_T=R+r$ . On obtient les courbes suivantes.

#### Schéma du montage

#### Allure des courbes



On a des oscillations électriques libres amorties. L'amortissement dépend des valeurs de  $R_T$ .

✓ Si  $R_T$  est faible : on a le régime pseudo - périodique où l'amplitude du mouvement diminue progressivement avant de s'annuler.

✓ Si  $R_T$  est élevée : on a le régime apériodique où l'amplitude des oscillations s'annulent directement sans osciller.

✓ Si  $R_T = R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$  : on a le régime critique où l'amplitude des oscillations s'annule pendant la durée la plus courte.

### a) Equation différentielle régissant la charge q.

D'après la loi des mailles :  $U_C + U_R + U_b = 0$  avec

$$\left\{ \begin{array}{l} U_b = ri + L \frac{dq}{dt} = r\dot{q} + L\ddot{q} \\ U_R = Ri = R\dot{q} \\ U_C = \frac{q}{C} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{q}{C} + R\dot{q} + r\dot{q} + L\ddot{q} = 0$$

$$L\ddot{q} + (R+r)\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0 \quad (1) \quad \text{ou} \quad \ddot{q} + \frac{(R+r)}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0 \quad (2)$$

L'équation caractéristique de (2) est :  $r^2 + 2\lambda r + w_0^2 = 0$  avec  $2\lambda = \frac{(R+r)}{L} = \frac{R_T}{L}$  et  $w_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

On peut résoudre l'équation caractéristique en passant par le discriminant  $\Delta$ .

$$\Delta = 4\lambda^2 - 4w_0^2 = 4(\lambda^2 - w_0^2)$$

- Si  $\Delta < 0$  alors  $\lambda < w_0 \Rightarrow R_T < R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$  : on a le régime pseudo-périodique. La solution de l'équation différentielle est de la forme  $q = Q_m e^{-\lambda t} \cos(wt + \varphi)$  avec

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_m e^{-\lambda t} : \text{amplitude des oscillations} \\ w = \sqrt{w_0^2 - \lambda^2} : \text{la pseudopulsation} \\ T = \frac{2\pi}{\sqrt{w_0^2 - \lambda^2}} : \text{la pseudopériode} \end{array} \right.$$

- Si  $\Delta = 0$  alors  $\lambda = w_0 \Rightarrow R_T = R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$  : on a le régime critique. La solution de l'équation différentielle est de la forme :  $q = (At + B)e^{-\lambda t}$ , où A et B sont des constantes qui sont déterminées à partir des conditions initiales.

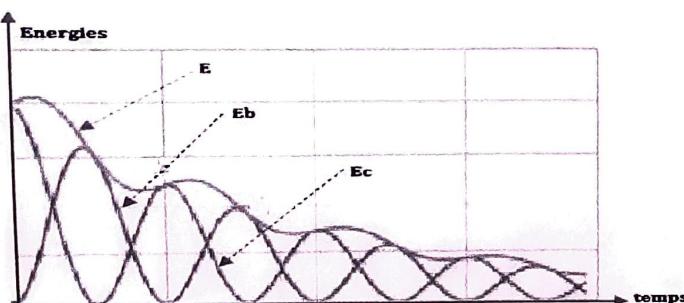
- Si  $\Delta > 0$  alors  $\lambda > w_0 \Rightarrow R_T > R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$  : on a le régime apériodique. La solution de l'équation différentielle est de la forme :  $q = Ae^{(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - w_0^2})t} + Be^{(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - w_0^2})t}$ , où A et B sont des constantes qui sont déterminées à partir des conditions initiales.

### b) Sens de variation de l'énergie du circuit :

$$E = E_b + E_c = \frac{1}{2}L\dot{q}^2 + \frac{1}{2}Cq^2 \Rightarrow \frac{dE}{dt} = \dot{q}(L\ddot{q} + \frac{1}{C}q) \text{ or } L\ddot{q} + R_T\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0 \Rightarrow L\ddot{q} + \frac{1}{C}q = -R_T\dot{q} \text{ d'où}$$

$$\frac{dE}{dt} = \dot{q}(-R_T\dot{q}) \Rightarrow \frac{dE}{dt} = -R_T\dot{q}^2 < 0 : \text{l'énergie diminue au cours du temps à cause de } R_T \text{ (effet joule).}$$

- Représentation graphique de E, Ec et Eb :



### III- Analogie grandeurs électriques, grandeurs mécaniques :

#### Grandeurs mécaniques.....

#### Grandeurs électriques

- $m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = 0$ ..... $L\ddot{q} + R_T\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0$
- Masse : m.....inductance : L
- Coefficient de frottement : h.....résistance : R<sub>T</sub>
- Constante de raideur : k.....capacitance : 1/C
- Abscisse : x.....charge : q
- Vitesse : v =  $\dot{x}$ .....intensité : i =  $\dot{q}$
- Energie potentielle électrostatique :  $\frac{1}{2}kx^2$  .....énergie électrostatique :  $\frac{1}{2C}q^2$
- Energie cinétique :  $\frac{1}{2}mv^2$  .....énergie magnétique :  $\frac{1}{2}Li^2$

Fin du chapitre

## Bakhoum Pc: Exercices sur oscillations électriques libres

### Exercice n°1 :

On considère le circuit électrique comportant un générateur de tension continue de fem  $E = 6 \text{ V}$ , un condensateur de capacité  $C$ , une bobine d'inductance  $L$  et de résistance propre négligeable, deux conducteurs ohmiques de même résistance  $R$  et deux interrupteurs  $K$  et  $K'$  (figure-2).

Un oscilloscope associé à un système d'acquisition a permis de visualiser sur la voie 1 la tension  $u_C$  aux bornes du condensateur en fonction du temps.

1. Dans une première expérience on ferme  $K$  en maintenant  $K'$  ouvert.

Le dipôle (RC) est alors soumis à une tension continue.

Sur la voie 1 on obtient la courbe de la figure-3 de la page 4.

1.1 Reproduire sur la copie la partie du circuit concernée et indiquer le sens du courant et les signes des charges de chacune des armatures du condensateur.

1.2 Quel est le nom du phénomène observé sur la voie 1 à la fermeture de  $K$  ?

1.3 Déterminer graphiquement la constante de temps  $\tau$  du dipôle (RC). Expliciter la méthode utilisée.

1.4 Sachant que  $R = 20 \Omega$ , en déduire la valeur de la capacité  $C$ .

1.5 Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la tension  $u_C$  aux bornes du condensateur est :

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E$$

1.6 Vérifier que  $u_C(t) = E(1 - e^{-t/RC})$  est solution de cette équation différentielle.

2. Une fois la première expérience terminée, on ouvre  $K$  et on ferme  $K'$ . Le circuit est alors le siège d'oscillations électriques. La figure 4 indique la variation de la tension aux bornes du condensateur en fonction du temps.

2.1 Préciser le régime des oscillations obtenues

2.2 Déterminer la pseudo-période  $T$  des oscillations.

2.3 Reproduire sur la copie la partie du circuit concernée.

2.4 Etablir l'équation différentielle vérifiée par  $u_C$ .

2.5 A partir de la figure-4, que peut-on dire de l'énergie totale du circuit ? Quel est le dipôle responsable de ce phénomène ?

Montrer que la variation au cours du temps de l'énergie totale du circuit peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{dE}{dt} = -2R \left( C \frac{du_C}{dt} \right)^2$$

2.6 On suppose que l'énergie initiale du circuit est contenue dans le condensateur.

Calculer les énergies électriques  $EC$  et magnétiques  $EL$  aux instants  $t_1 = 0$ ;  $t_2 = 3T$ .

2.7 Calculer l'énergie dissipée dans le circuit pendant  $3T$ .

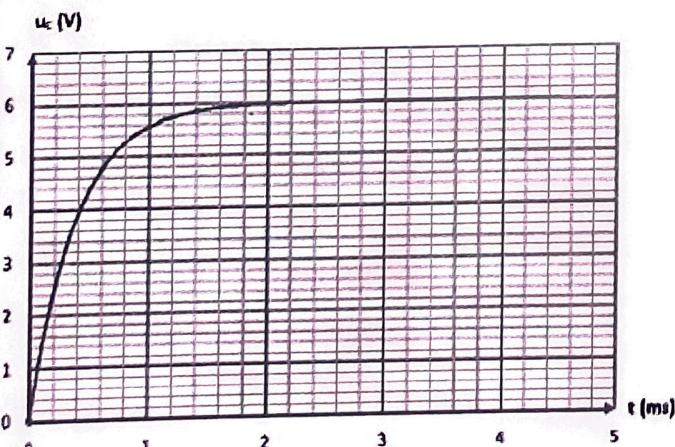
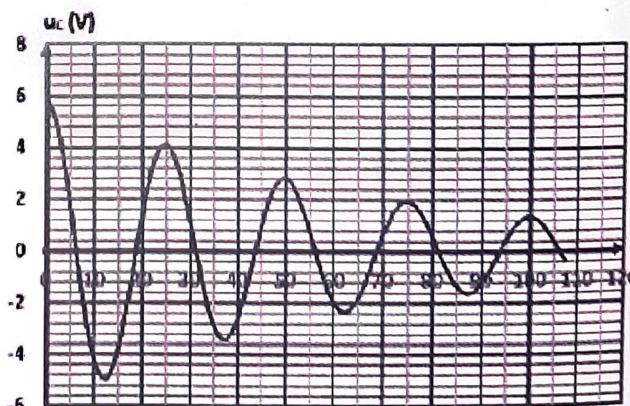


Figure 4



Un groupe d'élèves, sous la supervision de leur professeur, se propose de déterminer la valeur de l'inductance ( $L$ ) d'une bobine et celle de la capacité ( $C$ ) d'un condensateur de leur laboratoire puis d'étudier les transformations et transferts d'énergie dans un circuit les associant.  
La bobine est assimilée à un solénoïde de longueur  $\ell = 80 \text{ cm}$ , comportant  $N = 1280$  spires de surface  $S = 314 \text{ cm}^2$  chacune.

#### 4.1 Détermination de l'inductance de la bobine.

Dans un premier temps, le groupe réalise le circuit électrique de la figure 2 comprenant la bobine, un générateur de tension continue ( $E = 6 \text{ V}$ ), un résistor de résistance  $R = 20 \Omega$  et un ampèremètre.

4.1.1 Donner le nom du phénomène qui se produit au niveau de la bobine lorsque l'interrupteur  $K$  est fermé.

4.1.2 Reproduire le schéma de la bobine et représenter le vecteur champ magnétique  $\vec{B}$  qu'elle crée en

4.1.3 A partir des expressions du flux magnétique à travers la bobine, montrer que l'inductance s'écrit :

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell}. \text{ Calculer } L.$$

#### 4.2 Détermination de la capacité du condensateur et considérations d'énergie.

Dans un second temps, le groupe réalise le montage en série de la bobine, du condensateur et du résistor (figure 3). Le condensateur est initialement chargé (le circuit de charge n'est pas représenté sur la figure).

A la date  $t = 0$ , l'interrupteur  $K$  est fermé. A l'aide d'un oscilloscope le groupe visualise l'évolution des tensions  $u_{AM}$  aux bornes du condensateur et  $u_{DM}$  aux bornes du résistor en fonction du temps (figure 4).

4.2.1 Attribuer à chaque courbe la grandeur associée en justifiant. Quel phénomène explique la décroissance de l'amplitude de la courbe 1 ?

4.2.2 Donner la relation qui lie à chaque instant l'intensité  $i(t)$  et la charge  $q(t)$  ainsi que celle qui lie à chaque instant l'intensité  $i(t)$  et la tension  $u_{DM}(t)$ . Le sens arbitraire choisi pour l'orientation du circuit est sortant par rapport à l'armature du condensateur portant la charge  $q$ .

4.2.3 A partir des expressions des tensions aux bornes des trois dipôles, montrer que l'équation différentielle vérifiée par  $u_{AM}(t)$  s'écrit :  $\frac{d^2(u_{AM})}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{d(u_{AM})}{dt} + \frac{u_{AM}}{LC} = 0$ .

Déterminer graphiquement la valeur de la pseudo-période  $T$ .

En déduire la valeur de la capacité  $C$  du condensateur sachant que  $T$  est pratiquement égale à la période propre du dipôle ( $R L C$ ).

4.2.4 Donner l'expression de l'énergie électromagnétique  $E_{e,m}$  du circuit en fonction de  $L$ ,  $C$ ,  $q$  et  $i$ . En déduire son expression en fonction des tensions  $u_{AM}$  et  $u_{DM}$ .

4.2.5 A partir de l'expression établie précédemment et en utilisant la figure

4, calculer la valeur de  $E_{e,m}$  à la date  $t_2 = 14,7 \text{ ms}$ . En déduire la valeur de l'énergie dissipée entre les instants  $t_0 = 0 \text{ ms}$  et  $t_2 = 14,7 \text{ ms}$ .

**Fin de la série**

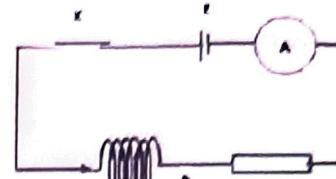


Figure 2

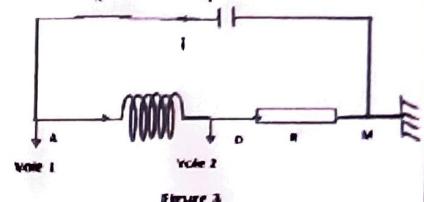


Figure 3



Figure 4

## Chapitre XI (2<sup>ème</sup> partie) : Oscillations électriques forcées

### I- Généralités :

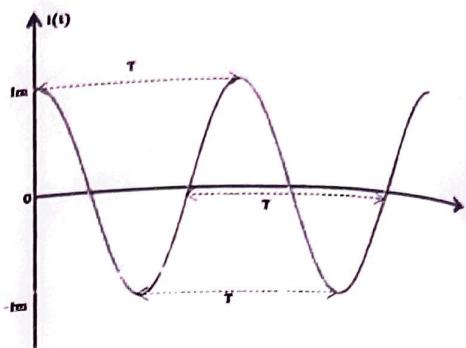
#### 1. Courant alternatif, tension alternative :

##### a) Courant alternatif sinusoïdal :

C'est un courant périodique qui change deux fois de signe par période et qui transporte alternativement dans un sens comme dans l'autre la même quantité d'électricité. Il est représenté par une fonction sinusoïdale du type :

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$$

- ✓  $I_m$  : intensité maximale
- ✓  $\omega$  : pulsation ;
- ✓  $\omega t + \varphi_i$  : phase instantanée
- ✓  $\varphi_i$  : phase à l'origine des dates



##### Remarque : Intensité efficace $I$ ou $I_{eff}$

L'intensité efficace d'un courant alternatif sinusoïdal d'intensité  $i(t)$  de période  $T$  est définie comme étant l'intensité  $I$  du courant continu qui traversant le même résistor pendant l'intervalle de temps  $T$  produirait le même dégagement d'énergie thermique par effet joule que le courant alternatif sinusoïdal soit  $W = RI^2T$

$$RI^2T = \int_0^T R i^2 dt \text{ avec } i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$RI^2T = \int_0^T R I_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi_i) dt \text{ avec } \cos^2(\omega t + \varphi_i) = \frac{1}{2}[1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_i)] \text{ on a}$$

$$RI^2T = \int_0^T \frac{1}{2} R I_m^2 dt + \int_0^T \frac{1}{2} R I_m^2 \cos(2\omega t + 2\varphi_i) dt \text{ soit en simplifiant par } R, \text{ on a}$$

$$I^2T = \int_0^T \frac{1}{2} I_m^2 dt + \int_0^T \frac{1}{2} I_m^2 \cos(2\omega t + 2\varphi_i) dt = \frac{1}{2} I_m^2 T + \frac{1}{2} I_m^2 \left[ \frac{\sin(2\omega t + 2\varphi_i)}{2\omega} \right]_0^T \text{ or}$$

$$\left[ \frac{\sin(2\omega t + 2\varphi_i)}{2\omega} \right]_0^T = 0 \text{ car la fonction sin est périodique de période } T.$$

$$\text{Ainsi } I^2T = \frac{1}{2} I_m^2 T \Rightarrow I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

##### b) Tension alternative sinusoïdale :

C'est une tension représentée par une fonction sinusoïdale du type :  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$

Remarque : la tension efficace de la tension alternative  $u(t)$  s'écrit :  $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$ . On la mesure avec un voltmètre.

#### 2. Déphasage entre $i(t)$ et $u(t)$ :

##### a) Expression :

Considérons que  $\begin{cases} i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \text{ noté (1)} \\ u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) \text{ noté (2)} \end{cases}$

- ✓ Le déphasage entre  $i(t)$  et  $u(t)$  est égal à la valeur absolue de la différence des phases initiales :  $|\varphi_u - \varphi_i|$ .
- ✓ Le déphasage de  $u(t)$  par rapport à  $i(t)$  est :  $\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \varphi_u/i = \varphi$

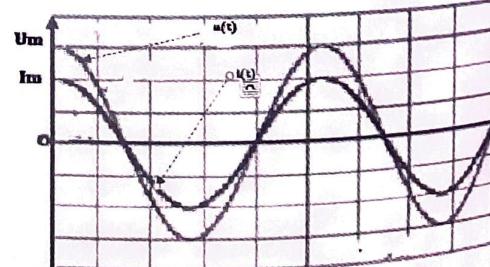
Si on prend  $i(t)$  comme origine des phases alors  $\varphi_i = 0 \Rightarrow \varphi_u = \varphi$

Les relations (1) et (2) s'écrivent alors :  $\begin{cases} i(t) = I_m \cos \omega t \\ u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$

- Si  $\varphi > 0$  : la tension est en avance sur l'intensité
- Si  $\varphi < 0$  : la tension est en retard sur l'intensité.

Remarque : Cas particuliers

- Si  $\varphi = 0$  : la tension et l'intensité sont en phase c'est - à - dire qu'elles s'annulent en même temps et atteignent en même temps leurs valeurs maximales et minimales. (voir figure).



Si  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$  : la tension et l'intensité sont en quadrature de phase c'est - à - dire si l'une des fonctions est maximale ou minimale, l'autre est nulle.

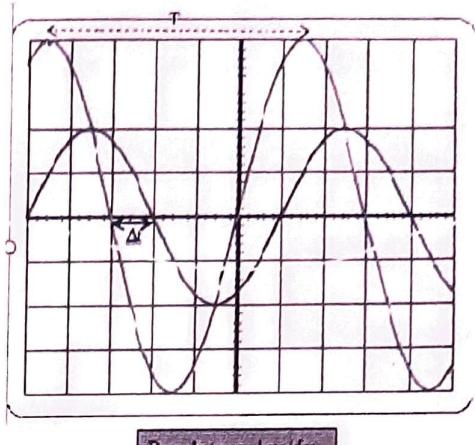
- Si  $\varphi = \pm \pi$  : la tension et l'intensité sont en opposition de phase c'est - à - dire qu'elles s'annulent en même temps mais si l'une est maximale, l'autre est minimale.

### b) Détermination graphique de $\varphi$

On obtient graphiquement  $\varphi$  à partir des oscillogrammes :

$$|\varphi| = w \cdot \Delta t = \frac{2\pi}{T} \Delta t : \text{on l'exprime en rad}$$

- ✓  $w$  : pulsation (rad/s)
- ✓  $T$  : période (s)
- ✓  $\Delta t$  : décalage horaire entre  $u$  et  $i$  (s).



Soit  $N$  le nombre de divisions correspondant à une période :  $T = N \cdot S_B$

Soit  $n$  le nombre de divisions correspondant à  $\Delta t$  :  $\Delta t = n \cdot S_B$

$$|\varphi| = w \cdot \Delta t = \frac{2\pi}{T} \Delta t = \frac{2\pi n}{N}$$

- Si  $u$  est en avance sur  $i$  alors  $\varphi = \frac{2\pi}{T} \Delta t > 0$  ;
- Si  $u$  est en retard sur  $i$  alors  $\varphi = -\frac{2\pi}{T} \Delta t < 0$ .

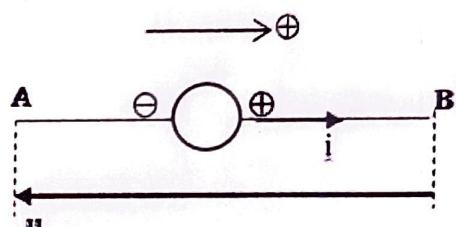
**Remarque :** Entre deux fonctions sinusoïdales, celle qui est en avance est la fonction qui s'annule la première ou qui atteint la première sa valeur maximale ou minimale après la date  $t=0$  (c'est - à - dire celle qui correspond à la courbe qui est toujours derrière.)

### 3. Impédance d'un dipôle :

Considérons le dipôle AB ci - contre :

Avec :  $\begin{cases} i(t) = I_m \cos wt \\ u(t) = U_m \cos(wt + \varphi) \end{cases}$

On définit l'impédance  $Z$  du dipôle AB par :  $Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{i}$ , on l'exprime en ohm ( $\Omega$ ).



### Applications : impédance de quelques dipôles

Dipôles	$U_m$	$Z$	$\varphi$	$u(t)$
Conducteur Ohmique (R)	$U_{m_R} = RI_m$	$Z_R = R$	0	$u_R(t) = U_{m_R} \cos wt$
Condensateur (C)	$U_{m_C} = \frac{I_m}{Cw}$	$Z_C = \frac{1}{Cw}$	$-\frac{\pi}{2}$	$u_C(t) = U_{m_C} \cos(wt - \frac{\pi}{2})$
Bobine pure (L)	$U_{m_L} = LwI_m$	$Z_L = Lw$	$\frac{\pi}{2}$	$u_L(t) = U_{m_L} \cos(wt + \frac{\pi}{2})$
Bobine resistive (L,r)	$U_{m_b} = I_m \sqrt{r^2 + (Lw)^2}$	$Z_b = \sqrt{r^2 + (Lw)^2}$	$\varphi_b = \tan^{-1} \left( \frac{Lw}{r} \right)$	$u_b(t) = U_{m_b} \cos(wt + \varphi_b)$

### Remarque :

- Aux bornes d'un conducteur ohmique, la tension et l'intensité sont en phase ( $\varphi = 0$ ).
- Aux bornes d'un condensateur la tension est en retard sur l'intensité ( $\varphi < 0$ ).
- Aux bornes d'une bobine la tension est en avance sur l'intensité ( $\varphi > 0$ ).

### 4. Vecteur de Fresnel :

A toute fonction sinusoïdale  $x = A \cos(wt + \varphi)$ , on associe un vecteur de Fresnel  $\vec{V}$  de norme  $A$  et qui fait avec l'axe des phases un de  $\varphi$ .

#### — Représentation graphique :



### Exemples :

$$\begin{cases} x_1 = 4 \cos(10\pi t + \frac{\pi}{4}) \rightarrow \vec{V}_1(4; \varphi_1 = \frac{\pi}{4}) \\ x_2 = 6 \cos(10\pi t - \frac{\pi}{2}) \rightarrow \vec{V}_2(6; \varphi_2 = -\frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

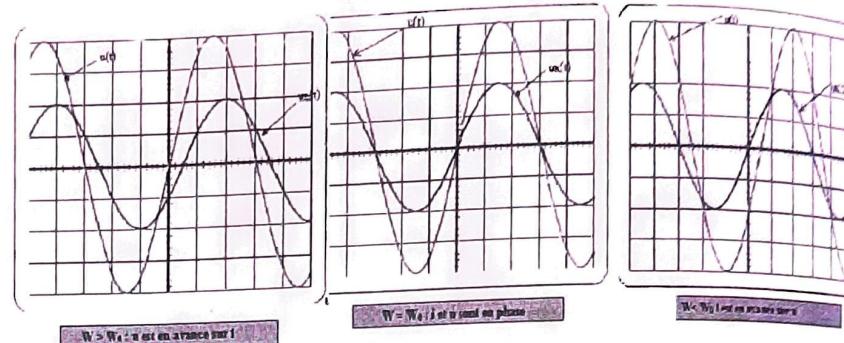
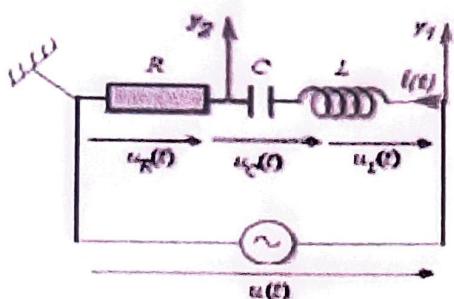
### II- Etude du dipôle RLC série

#### 1. Etude expérimentale :

Considérons le circuit constitué d'un GBF qui délivre une tension alternative, d'un conducteur ohmique et d'une bobine résistive.

Grâce à un oscilloscope, on visualise la tension aux bornes du générateur sur la voie Y<sub>1</sub> et celle aux bornes du conducteur ohmique sur la voie Y<sub>2</sub>.

#### Schéma du montage :



$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi); i(t) = I_m \cos \omega t; U_R = R I_m \cos \omega t$$

Le générateur impose au dipôle RLC la pulsation  $\omega$  avec laquelle il oscille : on dit que les oscillations électriques sont forcées.

- ✓ Si  $\omega > \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$  : la tension est en avance sur l'intensité : on dit que le circuit est à **effet inductif**.
- ✓ Si  $\omega = \omega_0$  : la tension et l'intensité sont en phase : le circuit est purement résistif, on dit qu'on est à la résonance.
- ✓ Si  $\omega < \omega_0$  : la tension est en retard sur l'intensité : on dit que le circuit est à **effet capacitif**.

#### 2. Etude théorique :

##### a) Équation différentielle régissant l'intensité i(t) :

$$\begin{cases} i(t) = I_m \cos \omega t \\ u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

D'après la loi des mailles on a :  $u_R + u_b + u_c = u(t)$  (1) avec

$$u_R = Ri; u_b = ri + L \frac{di}{dt}; u_c = \frac{q}{C} \text{ or } i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow q = \int idt \Rightarrow$$

$$u_c = \frac{1}{C} \int idt$$

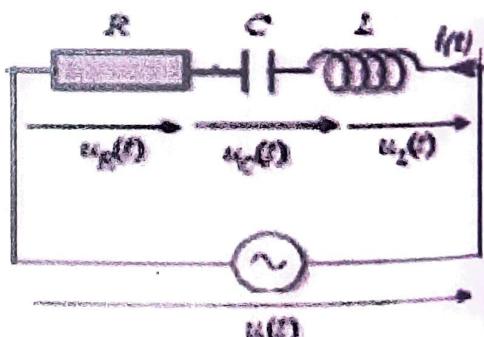
$$(1) \text{ devient : } Ri + ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt = U_m \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow R_i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt = U_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (2)$$

##### b) Résolution de l'équation différentielle :

$$i(t) = I_m \cos \omega t \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\omega I_m \sin \omega t = wi(t) = \omega I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\int idt = \int I_m \cos \omega t dt = \frac{I_m}{\omega} \sin(\omega t) = \frac{I_m}{\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

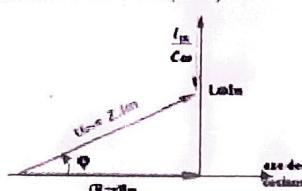
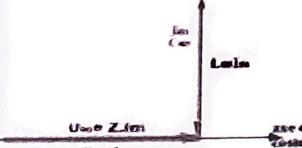
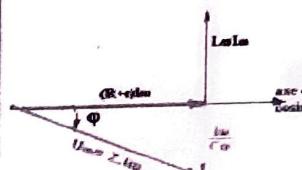
$$(2) \text{ devient : } R_i I_m \cos \omega t + Lwi(t) + \frac{I_m}{\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$$



- $R_T I_m \cos \omega t \rightarrow \vec{V}_1(R_T I_m; 0)$
- $\checkmark LwI_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \rightarrow \vec{V}_2(LwI_m; \frac{\pi}{2})$
- $\checkmark \frac{I_m}{C\omega} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \rightarrow \vec{V}_3(\frac{I_m}{C\omega}; -\frac{\pi}{2})$
- $\checkmark U_m \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow \vec{V}(U_m; \varphi)$

$$\Rightarrow \vec{V}_1(R_T I_m; 0) + \vec{V}_2(LwI_m; \frac{\pi}{2}) + \vec{V}_3(\frac{I_m}{C\omega}; -\frac{\pi}{2}) = \vec{V}(U_m; \varphi)$$

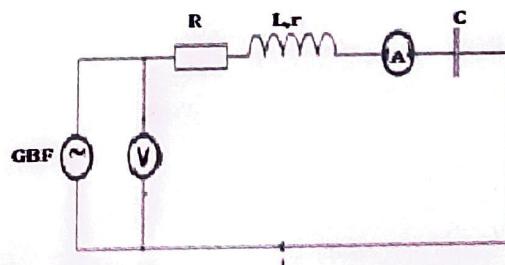
Pour déterminer  $U_m$  et  $\varphi$ , on envisage 3 cas :

Premier Cas : effet inductif dominant	Deuxième cas : effet résistif dominant	Troisième cas : effet capacitatif dominant
<p>Le dipôle R.L.C se comporte comme une bobine d'inductance <math>L</math> et de résistance <math>(R+r)</math></p>  $U^2_m = (RI_m)^2 + (L\omega I_m - \frac{I_m}{C\omega})^2 \Rightarrow U_m = I_m \sqrt{(R+r)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$ $Z = \sqrt{(R+r)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$ <p>Or l'effet inductif domine sur l'effet capacitif donc</p> $L\omega > \frac{1}{C\omega} \Rightarrow L\omega - \frac{1}{C\omega} > 0$ $\omega^2 > \frac{1}{CL} = \omega_0^2$ <p><math>\tan \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R+r} &gt; 0</math> donc</p> <p>Or la pulsation propre <math>\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}</math> donc</p> $\tan \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} < 0$ <p>U et i sont déphasés. U est en avance sur I (ou encore sur <math>U_R</math>)</p>	<p>Le dipôle R.L.C se comporte comme un résistor de résistance <math>(R+r)</math>.</p> <p>La réactance <math>(L\omega - \frac{1}{C\omega})</math> du circuit RLC est nulle.</p>  $U = I_m \sqrt{(R+r)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$ $Z = \sqrt{(R+r)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$ <p>Or <math>L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \Rightarrow L\omega = \frac{1}{C\omega}</math></p> $\omega^2 = \frac{1}{CL} = \omega_0^2$ $\Rightarrow Z = (R+r)$ <p><math>\tan \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R+r} = 0 \Rightarrow \varphi = 0</math></p> <p>U et i sont en phase.</p>	<p>Le dipôle R.L.C se comporte comme un condensateur de capacité <math>C</math> en série avec un résistor</p>  $U^2_m = (RI_m)^2 + (L\omega I_m - \frac{I_m}{C\omega})^2 \Rightarrow U_m = I_m \sqrt{(R+r)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$ $Z = \sqrt{(R+r)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$ <p>Or <math>L\omega &lt; \frac{1}{C\omega} \Rightarrow L\omega - \frac{1}{C\omega} &lt; 0</math></p> $\omega^2 < \frac{1}{CL} = \omega_0^2 \text{ donc}$ <p><math>\tan \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R+r} &lt; 0 \Rightarrow \varphi &lt; 0</math></p> <p>U et i sont déphasés. U est en retard sur I (ou encore sur <math>U_R</math>) l'effet</p>

**Remarque :**  $\cos \varphi = \frac{R_T}{Z}$ ;  $\sin \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{Z}$

3. Phénomène de résonance :  
a) Schéma du dispositif :

Le voltmètre permet de mesurer la tension efficace  $U$  du générateur et l'ampèremètre l'intensité efficace  $I$  du courant. Pour  $U$  fixée, on fait varier la fréquence  $N$  ou la pulsation  $w$  du GBF en relevant à chaque fois la valeur de  $I$ .





### b) Allure de la courbe de résonance :

C'est la courbe  $I = f(w)$  ou  $I = f(I)$  traduisant les variations de l'intensité efficace en fonction de la pulsation ou de la fréquence de la tension délivrée par le GBF.

La courbe de résonance est une courbe en cloche qui passe par un maximum pour  $w=w_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$  : on dit qu'on est à la résonance d'intensité.

### c) Propriétés du circuit à la résonance :

- ✓ A la résonance l'intensité efficace est maximale :  $I_{effmax} = I_0 = \frac{U}{R_T}$ .
- ✓ A la résonance  $w=w_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \Rightarrow LCw^2 = 1$ .
- ✓ A la résonance, l'impédance du circuit est minimale :  $Z = Z_{min} = R_T$ .
- ✓ A la résonance, la tension et l'intensité sont en phase :  $\phi=0$ .

### d) Influence de la résistance totale :

La résistance amortie les oscillations. L'intensité efficace atteint toujours sa valeur maximale pour  $w=w_0$  mais la courbe est plus ou moins pointue suivant les valeurs de  $R_T$ .

#### e) Bande passante :

- **Définition** : c'est l'ensemble des valeurs de la pulsation ou de la fréquence pour lesquelles  $I \geq \frac{I_0}{\sqrt{2}}$
- **Largeur de la bande passante** : la bande passante est délimitée par deux valeurs de la pulsation ou de la fréquence. La différence entre ces deux valeurs est la largeur de la bande passante
  - ✓ En pulsation :  $\Delta w = w_2 - w_1 = \frac{R_T}{L}$ .
  - ✓ En fréquence :  $\Delta N = N_2 - N_1 = \frac{R_T}{2\pi L}$

#### Démonstration: (pour TS<sub>1</sub>)

$$I(w_1) = I(w_2) = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \text{ or } I_0 = \frac{U}{R_T} \Rightarrow I(w_1) = I(w_2) = \frac{U}{R_T\sqrt{2}} \text{ par ailleurs } I(w_1) = I(w_2) = \frac{U}{\sqrt{R_T^2 + (Lw - \frac{1}{Cw})^2}} \text{ d'où}$$

$$\frac{U}{\sqrt{R_T^2 + (Lw - \frac{1}{Cw})^2}} = \frac{U}{R_T\sqrt{2}} \Rightarrow R_T^2 + \left(Lw - \frac{1}{Cw}\right)^2 = 2R_T^2 \text{ ce qui donne : } Lw - \frac{1}{Cw} = R_T \quad (1) \text{ ou } Lw - \frac{1}{Cw} = -R_T \quad (2)$$

L'équation (1) donne  $LCw^2 - R_T Cw - 1 = 0$  donc  $\Delta = (R_T C)^2 + 4LC > 0$  d'où

$$w'_1 = \frac{R_T C - \sqrt{\Delta}}{2LC} < 0 \text{ (à rejeter) et } w''_1 = \frac{R_T C + \sqrt{\Delta}}{2LC} > 0$$

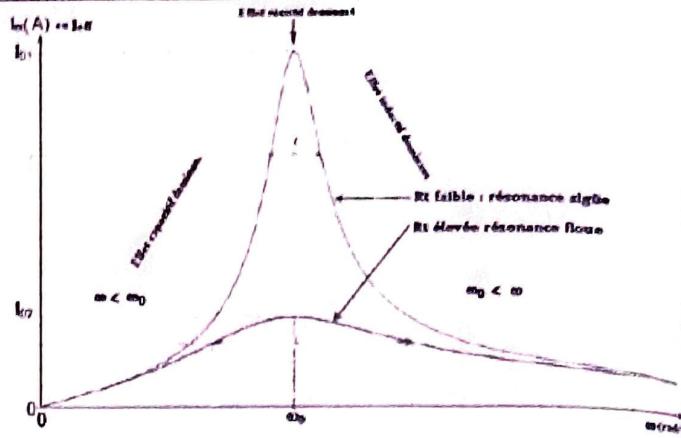
L'équation (2) donne  $LCw^2 + R_T Cw - 1 = 0$  donc  $\Delta = (R_T C)^2 + 4LC > 0$  d'où

$$w'_2 = \frac{-R_T C - \sqrt{\Delta}}{2LC} < 0 \text{ (à rejeter) et } w''_2 = \frac{-R_T C + \sqrt{\Delta}}{2LC} > 0$$

Les deux valeurs de la pulsation sont donc :  $w_1 = w''_2 = \frac{-RC + \sqrt{\Delta}}{2LC}$  et  $w_2 = w''_1 = \frac{RC + \sqrt{\Delta}}{2LC} \Rightarrow \Delta w = w_2 - w_1 = \frac{R_T}{L}$

$$\Delta w = 2\pi\Delta N \Rightarrow \Delta N = \frac{R_T}{2\pi L}$$

- ✓ Si  $R_T$  est faible la largeur de la bande passante est très petite : on dit que le circuit est très sélectif car il ne répond qu'aux alentours de la fréquence propre.
- ✓ Si  $R_T$  est très élevée la largeur de la bande passante très grande : on dit que le circuit est sélectif car il répond notablement sur un grand intervalle de fréquence.



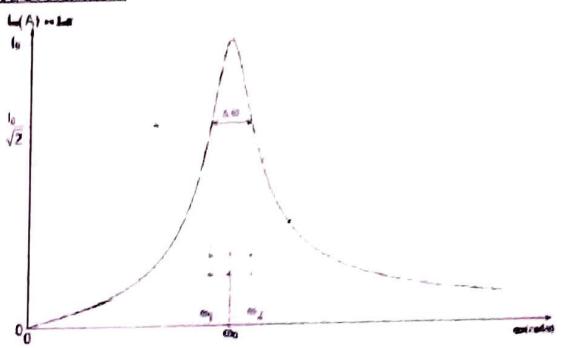
Détermination graphique : (voir figure)

f) Facteur de qualité Q :

Le facteur de qualité caractérise l'acuité de la résonance. Un circuit est d'autant plus sélectif que son facteur de qualité Q est élevé.

$$Q = \frac{w_0}{\Delta w} = \frac{N_0}{\Delta N} \text{ avec } \Delta w = \frac{R_T}{L}$$

$$Q = \frac{Lw_0}{R_T} = \frac{1}{R_T C w_0} = \frac{1}{R_T} \sqrt{\frac{L}{C}}$$



g) Phénomène de surtension :

On parle de surtension lorsque la tension du condensateur  $U_c$  ou de la bobine  $U_b$  est supérieure à celle du générateur  $U$ . On définit le facteur de surtension par :  $\sigma = \frac{U_c}{U}$  ou  $\sigma = \frac{U_b}{U}$

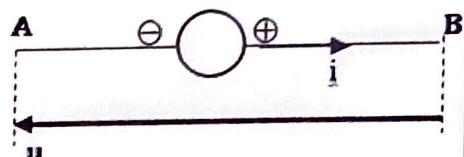
- ✓ Si  $\sigma > 1$  il y a surtension :
- ✓ Si  $\sigma < 1$  il n'y a pas surtension
- ✓ A la résonance  $\sigma = Q$  : facteur de qualité.

4. Puissance en régime alternatif sinusoïdal (r.a.s.) :

$$\text{En r.a.s on a : } \begin{cases} i(t) = I_m \cos \omega t \\ u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

On définit la puissance moyenne du dipôle AB par  $P_{moy} = UI \cos \varphi$

- ✓  $P_a = UI$  : la puissance apparente
- ✓  $\cos \varphi$  : le facteur de puissance



Conséquences :

- Pour une bobine pure :  $\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow P_{moy} = 0$ , une bobine pure ne consomme pas d'énergie.
- Pour un condensateur :  $\varphi = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow P_{moy} = 0$ , un condensateur ne consomme pas d'énergie.
- Pour un conducteur :  $\varphi = 0 \Rightarrow P_{moy} = UI = RI^2 = P_J$ , un conducteur ohmique transforme toute l'énergie qu'il reçoit en énergie thermique par effet joule.

Démonstration : (pour TS)

$$\text{La puissance instantanée du dipôle AB s'écrit : } p(t) = u(t) \cdot i(t) \text{ avec } \begin{cases} i(t) = I_m \cos \omega t \\ u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

$$p(t) = U_m I_m \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} [\cos(2\omega t + \varphi) + \cos(\varphi)]$$

$$p(t) = \frac{1}{2} U_m I_m [\cos(2\omega t + \varphi) + \cos(\varphi)]$$

On définit la puissance moyenne par :

$$P_{moy} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} U_m I_m [\cos(2\omega t + \varphi) + \cos(\varphi)] dt$$

$$P_{moy} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} U_m I_m [\cos(2\omega t + \varphi)] dt + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} U_m I_m [\cos(\varphi)] dt$$

$\int_0^T \frac{1}{2} U_m I_m [\cos(2\omega t + \varphi)] dt = 0$  car la fonction cos est périodique de période T.

$$\int_0^T \frac{1}{2} U_m I_m [\cos(\varphi)] dt = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi = \frac{1}{2} U \sqrt{2} I \sqrt{2} \cos \varphi = \frac{2UI}{2} \cos \varphi = UI \cos \varphi.$$

$$P_{moy} = UI \cos \varphi$$

Fin du chapitre

## Bakhoum Pc: Exercices sur oscillations électriques forcées

### Exercice n°1 :

Le circuit schématisé sur la figure 1 comporte les éléments suivants :

- Un générateur basses fréquences (GBF) délivrant une tension sinusoïdale  $u(t)$  de fréquence  $N$  variable et d'amplitude  $U_m$  constante.
- Un condensateur de capacité  $C$ .
- Une bobine d'inductance  $L$  et de résistance interne  $r$ .
- Un résistor de résistance  $R_0$ .
- Un ampèremètre de résistance interne négligeable.

On se propose d'étudier la réponse de l'oscillateur ( $R = R_0 + r, L, C$ ) pour différentes valeurs de  $N$ .

#### Expérience 1:

Pour une valeur de  $N_1$  de la fréquence, un oscilloscope bicourbe, convenablement branché permet de visualiser simultanément les deux tensions  $U(t)$  et  $U_{R0}(t)$ , respectivement aux bornes du GBF et aux bornes du résistor  $R_0$ ; on obtient les oscillogrammes de la figure 2. Les sensibilités verticale et horizontale, pour les deux voies A et B utilisées, sont respectivement 2V/div et 1ms/div

1/

a/ Montrer que la courbe  $C_1$  visualisées sur la voie A de l'oscilloscope correspond à la tension  $u(t)$  aux bornes de GBF.

b/ Lequel des points E, F, G ou H de la figure 1 est relié à la voie A de l'oscilloscope.

2/ En exploitant l'oscillogramme de la figure 2.

a/ Déterminer le déphasage  $\Delta\varphi = \varphi_i - \varphi_u$  et justifier son signe, sachant que  $\varphi_u$  est la phase initiale (à  $t=0$ ) de  $U(t)$  et  $\varphi_i$  est la phase initiale de  $U_{R0}(t)$ .

b/ Sachant que  $U(t) = U_m \sin(2\pi N_1 t)$ , compléter le tableau suivant, en précisant les valeurs des grandeurs physiques:

	Valeur maximale	Phase initiale	Fréquence $N_1$
$U_{R0}(t)$			
$U(t)$			

c/ Quelle est l'indication de l'ampèremètre sachant que l'impédance du dipôle RLC est  $Z = 90\Omega$ .

d/ Calculer la valeur de  $R_0$ .

#### Expérience 2:

On fait varier la fréquence  $N$ , pour une valeur  $N_2$ . De cette fréquence les oscillogrammes obtenus sont représentés sur la figure 3. La sensibilité horizontale des oscillogrammes est 2ms/div. La sensibilité verticale est 2V/div pour la voie A qui visualise  $u(t)$  et 5V/div sur la voie B qui visualise  $u_{R0}(t)$ .

1/ Justifier le fait que l'oscillateur est en état de résonance d'intensité.

2/ La valeur de  $R_0$  étant  $R_0 = 60\Omega$ . Quelle est la nouvelle indication de l'ampèremètre ?

3/ Montrer que la valeur de la résistance  $r$  de la bobine est environ  $12\Omega$ .

4/ Sachant que  $L = 1H$ , calculer la valeur de la capacité  $C$  du condensateur.

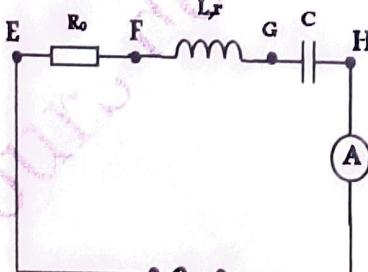


Figure 1

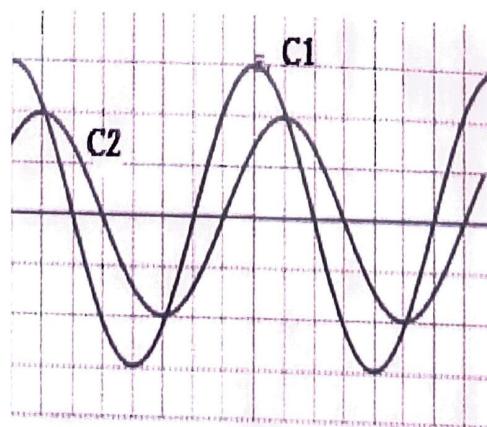


Figure 2

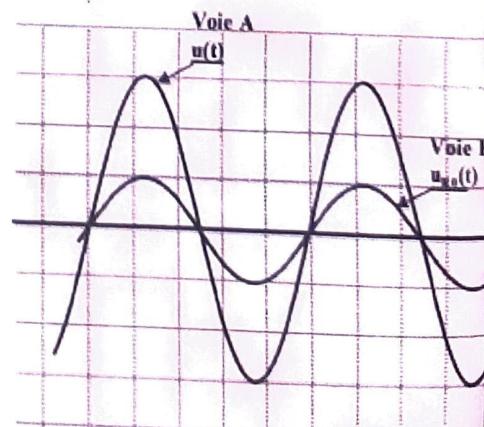


Figure 3

Pour étudier le phénomène de résonance au laboratoire, un groupe d'élèves réalise un circuit ( $R$ ,  $L$ ,  $C$ ) série. Pour cela, ils disposent d'un GBF qui fournit une tension alternative sinusoïdale de fréquence  $N$  réglable, un conducteur ohmique de résistance  $R = 50 \Omega$ , un condensateur de capacité  $C = 5 \mu F$ , une bobine de résistance  $r$  et d'inductance  $L$ .

**4.1** Les élèves visualisent sur la voie  $Y_1$  de l'oscilloscope la variation au cours du temps de la tension  $u_G(t)$  aux bornes du générateur et sur la voie  $Y_2$  la variation au cours du temps de la tension  $u_R(t)$  aux bornes du résistor.

**4.1.1** Faire le schéma du montage qu'ils ont réalisé en y indiquant clairement les connexions à faire à l'oscilloscope pour visualiser  $u_G(t)$  et  $u_R(t)$ .

**4.1.2** Expliquer pourquoi la variation de la tension  $u_R(t)$  leur donne en même temps l'allure de la variation de l'intensité  $i(t)$  du courant dans le circuit.

**4.2** Sur l'écran de l'oscilloscope, sont observés les oscillogrammes reproduits sur le document 1 avec les réglages suivants : Sensibilité verticale voie  $Y_1$ : 5V/div ; voie  $Y_2$  : 0,5V/div.; Sensibilité horizontale : 1ms/div.

**4.2.1** Déterminer :

- la fréquence  $N$  de la tension délivrée par le générateur ;
- la tension maximale  $U_m$  aux bornes du générateur ;
- l'intensité maximale  $I_m$  du courant.

**4.2.2** Déterminer le déphasage de la tension aux bornes du générateur sur l'intensité du courant.

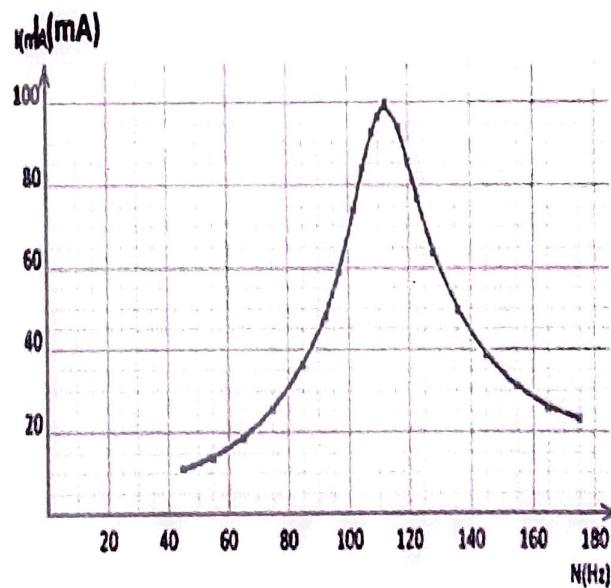
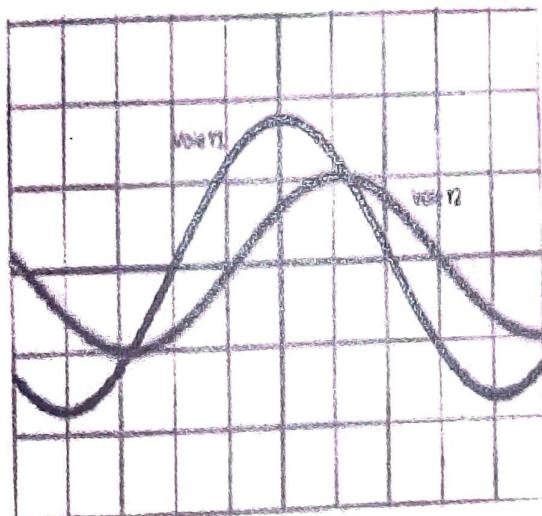
**4.2.3** Sur un schéma représentant l'aspect de l'écran, montrer comment se positionnerait la courbe 1 visualisée sur la voie ( $Y_1$ ) par rapport à la courbe 2 visualisée sur la voie ( $Y_2$ ) à la résonance d'intensité (On tracera l'allure des deux courbes).

**4.3** En maintenant la tension maximale aux bornes du générateur constante, les élèves ont fait varier la fréquence  $N$  du GBF et relevé l'intensité efficace  $I$  du courant à l'aide d'un ampèremètre. Les mesures ainsi réalisées leur ont permis de tracer la courbe  $I = f(N)$  du document 2.

**4.3.1** Déterminer graphiquement la fréquence  $N_0$  et l'intensité efficace  $I_0$  à la résonance d'intensité.

En déduire l'inductance  $L$  de la bobine.

**4.3.2** Déterminer la bande passante des fréquences et le facteur de qualité. Donner la signification physique du facteur de qualité.



**Document 2**

## Chapitre XII : Aspects ondulatoire et corpusculaire de la lumière

### I- Aspect ondulatoire de la lumière :

#### 1- Notion d'onde :

- Définition :

Une onde est la propagation d'un mouvement vibratoire dans un milieu homogène et indéfini.

- Caractéristiques d'une onde :

Une onde est caractérisée par une double périodicité :

- La période temporelle ( $T$ ) : c'est le temps mis par l'onde pour se répéter.
- La période spatiale ou longueur d'onde ( $\lambda$ ) : c'est la distance parcourue par l'onde pendant une période temporelle :  $\lambda = C \cdot T = \frac{C}{v}$ ,  $v$  représente la fréquence de l'onde et  $C$  est la célérité ou vitesse de l'onde ( $C=3.10^8$  m/s celle de la lumière dans le vide).

- Propriétés d'une onde :

- Pour que deux  $M_1$  et  $M_2$  d'un milieu de propagation unidirectionnel soumis à une onde progressive vibrent en phase, il faut et il suffit que la distance qui les sépare soit égale à un nombre entier de longueur d'onde :  $d(M_1, M_2) = k\lambda$ .
- Pour que deux  $M_1$  et  $M_2$  d'un milieu de propagation unidirectionnel soumis à une onde progressive vibrent en opposition de phase, il faut et il suffit que la distance qui les sépare soit égale à un nombre entier de demi-longueur d'onde :  $d(M_1, M_2) = (k + \frac{1}{2})\lambda$ .

#### Remarque :

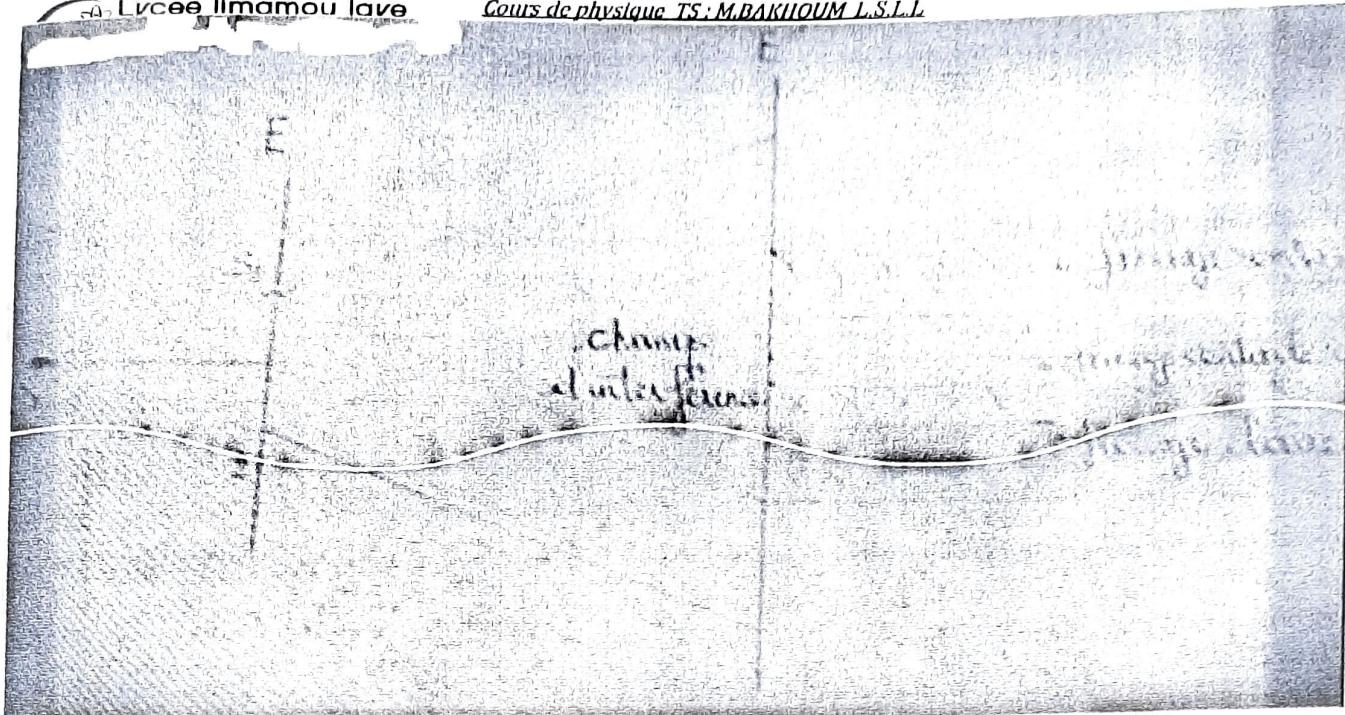
Avec les ondes, on peut avoir le phénomène de la diffraction et les interférences qui peuvent être constructives (si les ondes vibrent en phase) ou destructives (si les ondes vibrent en opposition de phase).

### 2-Interférences lumineuses :

#### a) Expérience de Young :

- Expérience :

On étudie la lumière issue d'un laser qui vient frapper un écran  $E$  percé de deux trous  $S_1$  et  $S_2$  très proches l'un de l'autre appelées sources secondaires. La lumière est diffractée par les trous  $S_1$  et  $S_2$  et les deux faisceaux diffractés se superposent en partie au-delà de l'écran  $E$ . Plaçons un autre écran  $E'$  parallèle à  $E$  sur le trajet de la lumière à une distance  $D$  de  $E$ .



### • Observations :

Sur l'écran on observe E' on note la présence de bandes alternatives qui sont équidistantes, **claires** et **sombres** appelées **franges d'interférence**. Elles sont observables uniquement dans la zone où les deux faisceaux se superposent appelée **champ d'interférence**.

### • Interprétation :

Les franges obtenues sont issues de la superposition de la lumière venant de  $S_1$  et  $S_2$ .

- L'éclairement d'un point M de E' est maximal si les mouvements vibratoires des deux lumières provenant de  $S_1$  et  $S_2$  sont en phase. La frange obtenue est alors claire, on parle **d'interférences constructives**.
- L'éclairement d'un point M de E' est nul si les mouvements vibratoires des lumières provenant de  $S_1$  et  $S_2$  sont en opposition de phase. La frange obtenue est sombre, on parle **d'interférences destructives**.

### • Conclusion :

Cette expérience met en évidence le caractère ondulatoire de la lumière. La lumière peut se comporter comme une onde et est caractérisée par une longueur d'onde ( $\lambda$ ) et une période temporelle (T).

#### Remarque :

- ✓ **Lumière monochromatique** : c'est une lumière formée d'une seule radiation ou couleur donc elle est caractérisée par une seule longueur d'onde. Exemple la lumière rouge
- ✓ **Lumière polychromatique** : c'est une lumière formée de plusieurs radiations ou couleurs : exemples la lumière blanche.
- ✓ **Lumière visible** :  $400 \text{ nm} \leq \lambda \leq 800 \text{ nm}$

Cours à domicile : 77 550 04 15

## Condition d'obtention des interférences :

Une expérience d'interférence nécessite deux sources cohérentes et synchrones : deux sources synchrones et cohérentes ont même fréquence, leurs mouvements ont la même amplitude et présentent le même décalage dans le temps.

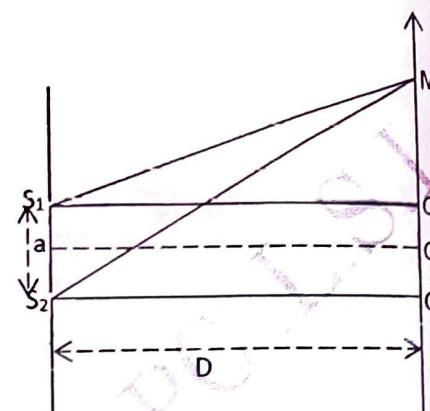
### b) Différence de marche $\delta$ :

On considère un point M de la zone d'interférence ; le rayon lumineux issu de  $S_1$  parcourt le chemin  $S_1M = d_1$  plus court que le chemin  $S_2M = d_2$  parcouru par le rayon lumineux issu de  $S_2$ .

On appelle différence de marche, la différence des deux chemins  $d_1$  et  $d_2$  notée  $\delta = d_2 - d_1$ .

Posons :  $S_1S_2 = a$  et  $OM = x \Rightarrow O_1M = x - \frac{a}{2}$  et  $O_2M = x + \frac{a}{2}$ .

En considérant les triangles rectangles ( $S_1O_1M$ ) et ( $S_2O_2M$ ) respectivement en  $O_1$  et en  $O_2$ , d'après le théorème de Pythagore on a :



$$d_1^2 = D^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \text{ et } d_2^2 = D^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow d_2^2 - d_1^2 = 2ax \Rightarrow (d_2 - d_1)(d_2 + d_1) = 2ax$$

Or  $a \ll D \Rightarrow d_2 + d_1 = 2D \Rightarrow d_2 - d_1 = \delta = \frac{ax}{D}$  en m  $\Rightarrow \delta(m)$ .

### c) Position des franges:

- Cas des franges claires :

Un point M appartient à une frange brillante, si la différence de marche  $\delta$  entre les deux ondes qui parviennent en M est :  $\delta = k\lambda$  avec  $\delta = a \cdot x / D \Rightarrow a \cdot x / D$

Soit  $x = k \cdot \frac{\lambda D}{a}$  avec  $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$  (ou  $-1, -2, -3, \dots, -n$ ).

- Si  $k = 0$ , alors  $x = 0$  : milieu de la frange centrale
- Si  $k = 1$ , alors  $x = \lambda D / a$  : milieu de la première frange brillante au dessus de la frange centrale.
- Si  $k = -1$ , alors  $x = -\lambda D / a$  : milieu de la première frange claire en dessous de la frange centrale.
- .....
- Si  $k = n$ , alors  $x = n \cdot \lambda D / a$  : milieu de la  $n^{\text{ème}}$  frange brillante au dessus de la frange centrale.

- Cas des franges sombres :

Un point M appartient à une frange sombre, si la différence de marche  $\delta$  entre les deux ondes qui parviennent en M est :  $\delta = \frac{ax}{D} = (k + \frac{1}{2})\lambda$ .

Soit  $x = (k + \frac{1}{2}) \frac{\lambda D}{a}$  avec  $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$  (ou  $-1, -2, -3, \dots, -n$ ).

- Si  $k = 0$ , alors  $x = \frac{1 \cdot \lambda D}{2 \cdot a}$  : milieu de la première frange obscure au dessus de la frange centrale.
- Si  $k = 1$ , alors  $x = \frac{3 \cdot \lambda D}{2 \cdot a}$  : milieu de la deuxième frange obscure au dessus de la frange centrale.
- Si  $k = -1$ , alors  $x = -\frac{1 \cdot \lambda D}{2 \cdot a}$  : milieu de la première frange obscure en dessous de la frange centrale.
- .....

- Si  $k = n$ , alors  $x = (n + \frac{1}{2}) \frac{\lambda D}{a}$  : milieu de la  $(n + 1)$  frange obscure au dessus de la frange centrale.

### d) Interfrange i :

- Définition :

L'interfrange  $i$  est la distance qui sépare deux milieux de deux franges consécutives de même nature.

- Détermination de  $i$  :

- Cas de deux franges claires :

on a :

$$x_k = k \frac{\lambda D}{a} \text{ et } x = (k + 1) \frac{\lambda D}{a}$$

$$i = x_{k+1} - x_k = (k + 1) \frac{\lambda D}{a} - k \frac{\lambda D}{a} = \frac{\lambda D}{a}$$



- Cas de deux franges sombres

on a :

$$x_k = (k + \frac{1}{2}) \frac{\lambda D}{a} \text{ et } x = (k + 1 + \frac{1}{2}) \frac{\lambda D}{a}$$

$$i = x_{k+1} - x_k = (k + 1 + \frac{1}{2}) \frac{\lambda D}{a} - (k + \frac{1}{2}) \frac{\lambda D}{a} = \frac{\lambda D}{a}$$

$$i = \frac{\lambda D}{a}$$

#### Remarque :

La mesure de l'interfrange  $i$  permet de déterminer la valeur de  $\lambda$  de la lumière monochromatique utilisée. Pour plus de précision, on mesure la longueur correspondant à plusieurs interfranges (par exemple  $n$  interfranges) soit  $L = ni$  d'où :

$$i = \frac{L}{n} = \frac{\lambda D}{a}$$

### e) Ordre d'interférence $p$ :

L'ordre d'interférence nous permet de connaître la nature (obscur ou brillante) d'une frange en un point M d'abscisse  $x$  :  $p = \frac{x}{i} = \frac{ax}{\lambda D} = \frac{\delta}{\lambda}$

• Si  $p$  est entier relatif ( $p = k$ ) alors la  $k^{\text{ème}}$  frange correspondante après la frange centrale est brillante.

• Si  $p$  est un demi-entier relatif ( $p = k + \frac{1}{2}$ ) alors la  $k^{\text{ème}}$  frange correspondante après la frange centrale est sombre.

La valeur de  $p$  nous renseigne sur le numéro de la frange considérée, comptée à partir de la frange centrale pour laquelle son numéro  $p=0$  et pour  $x=0$ .

## 3- Interférence en lumière polychromatique :

### a) Cas d'une lumière dichromatique :

Considérons maintenant une source S de lumière dichromatique constituée des longueurs d'onde  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  qui éclaire les deux sources  $S_1$  et  $S_2$  simultanément. Chaque longueur d'onde provoque un système

d'interférence ; nous constatons que les franges centrales brillantes des deux systèmes coïncident d'abord au centre de l'écran et cette coïncidence se répète périodiquement de part et d'autre du centre de l'écran (voir figure ci-contre).

Ceci se traduit par la relation :  $x_{k_1} = x_{k_2} \Leftrightarrow k_1 \frac{\lambda_1 D}{a} = k_2 \frac{\lambda_2 D}{a} \Rightarrow \frac{k_1}{k_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{n_2}{n_1}$

Ce rapport irréductible permet de trouver les numéros  $k_1=n_2$  et  $k_2=n_1$  des franges claires des deux longueurs d'onde qui se superposent. Cette superposition se répète périodiquement dans toute la zone d'interférence.

**Exemple :** Si  $\lambda_1 = 500 \text{ nm}$  et  $\lambda_2 = 700 \text{ nm}$  alors  $\frac{k_1}{k_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{700}{500} = \frac{7}{5} \rightarrow \begin{cases} k_1 = 7 \\ k_2 = 5 \end{cases}$ . L'abscisse de la première coïncidence est alors  $x = x_1 = 7 \frac{\lambda_1 D}{a}$  ou  $x = x_2 = 5 \frac{\lambda_2 D}{a}$ .

**Remarque :** Pour la deuxième coïncidence  $k_1 = 2 \times 7 = 14$  et  $k_2 = 2 \times 5 = 10$ .

## b) Cas de la lumière blanche :

La figure d'interférence présente :

- Au centre de l'écran(E), une frange centrale brillante blanche.
- De part et d'autre de celle-ci, on observe des franges aux bords colorés dites franges irisées.
- Enfin, plus loin d'elle, une coloration uniforme blanchâtre pour les franges brillantes : coloration appelée blanc d'ordre supérieure.

- **Détermination du nombre de franges manquantes en un point M d'abscisse x :**

$$x = (k + 1) \frac{\lambda D}{a} \Rightarrow \lambda = \frac{ax}{(k + \frac{1}{2})D}$$

Pour la lumière visible :  $0,4 \cdot 10^{-6} \text{ m} \leq \lambda \leq 0,8 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ .

$$\begin{aligned} & \Rightarrow 0,4 \cdot 10^{-6} \leq \frac{ax}{(k + \frac{1}{2})D} \leq 0,8 \cdot 10^{-6} \\ & \Rightarrow \frac{0,4 \cdot 10^{-6} D}{ax} \leq \frac{1}{(k + \frac{1}{2})} \leq \frac{0,8 \cdot 10^{-6} D}{ax} \\ & \Rightarrow \frac{ax}{0,8 \cdot 10^{-6} D} \leq k + \frac{1}{2} \leq \frac{ax}{0,4 \cdot 10^{-6} D} \\ & \Rightarrow \frac{ax}{0,8 \cdot 10^{-6} D} - \frac{1}{2} \leq k \leq \frac{ax}{0,4 \cdot 10^{-6} D} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

**Exemple :** Si  $2,3 \leq k \leq 7,6$  alors  $k = 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 \Rightarrow$  il y'a 5 radiations manquantes au point M.

## II- Aspect corpusculaire de la lumière :

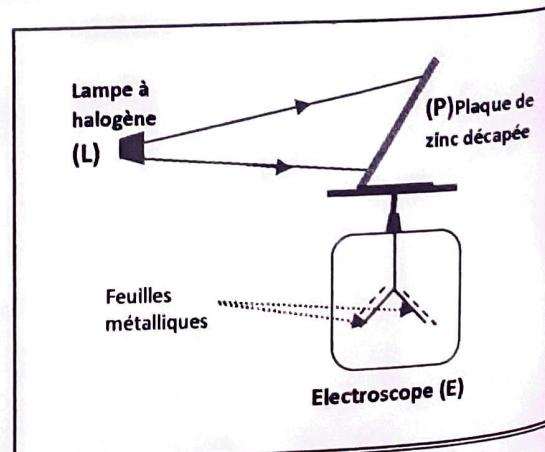
### 1-Expérience de Hertz :

Considérons un électroscoppe initialement chargé négativement qui supporte une plaque de zinc également chargée négativement.

- **Expérience 1 :**

On éclaire la plaque de zinc avec une lampe à halogène qui fournit une lumière riche en rayons UV.

On constate que l'électroscoppe se décharge.



(E) et (P) sont à nouveau chargés négativement. On interpose entre (E) et (P) un verre en plexiglas qui absorbe les rayons U.V mais laisse passer les autres radiations du visible : (E) ne se décharge pas quel que soit la durée de son exposition.

• Interprétation :

Expérience 1 : la lumière émise par la lampe (L) arrache à (P) des électrons. Les électrons expulsés laissent des charges positives. Ces charges positives attirent les électrons en excès et se recombinent à eux : ce qui entraîne la décharge de (E).

Expérience 2 : les U.V, rayonnement de longueurs d'onde inférieures à celles des rayons visibles, provoquent l'émission d'électrons par (P). Dans cette expérience les U.V étant absorbés, (E) ne se décharge pas.

L'émission d'électrons sous l'effet de la lumière peut se produire avec d'autres métaux tels que le Pt, Ag, Cu, K, Na, Ca ...

Remarque : l'extraction des électrons n'est pas possible avec n'importe quelle longueur d'onde.

## 2-Définition de l'effet photoélectrique :

L'effet photoélectrique est l'émission d'électrons par un métal lorsqu'il est éclairé par un rayonnement convenable.

## 3-Lois de l'effet photoélectrique :

### a) Loi du seuil photoélectrique :

Pour un métal pur, l'effet photoélectrique ne se produit que si la fréquence  $\nu$  de la radiation incidente est au moins égale à une certaine valeur  $\nu_0$  caractéristique de ce métal et appelée fréquence seuil notée  $\nu_0$  ou  $\nu_s$  : ( $\lambda_s = \frac{c}{\nu_s}$  : longueur d'onde seuil).

➤ Si  $\nu \geq \nu_0$  ou  $\lambda \leq \lambda_0 \Rightarrow$  il y a effet photoélectrique.

➤ Si  $\nu < \nu_0$  ou  $\lambda > \lambda_0 \Rightarrow$  pas d'effet photoélectrique.

### b) Loi d'instantanéité de l'effet photoélectrique :

L'émission photoélectrique est instantanée : si  $\nu > \nu_0$  il y a pas de retard entre l'illumination du métal et l'émission des électrons. L'émission cesse dès que cesse l'éclairement du métal.  
Si  $\nu < \nu_0$  il n'y a pas d'effet photoélectrique quelque soit la durée d'exposition du métal pur au rayonnement.

### c) Loi relative à l'énergie cinétique maximale des électrons

L'énergie cinétique maximale des électrons émis à l'extraction croît avec la fréquence de la radiation incidente.

## 4-Interprétation :

Pour interpréter l'effet photoélectrique, Albert Einstein donne à la lumière un aspect corpusculaire la lumière : la lumière est formée de corpuscules appelés photon (particule de masse nulle qui se déplace avec la vitesse de la lumière). Chaque photon transporte un quantum d'énergie  $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$  avec  $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$  : constante de Planck.

L'effet photoélectrique est une interaction entre un photon et un électron du réseau métallique. Pour extraire un électron, il faut lui fournir une énergie minimale appelée énergie de sortie ou travail d'extraction.

$$W_S = W_0 = h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_0}$$

• Si l'énergie du photon  $E = h\nu$  est inférieur à  $W_0$ , il n'y a pas effet photoélectrique.

- Si  $E = W_0$ , il y a extraction mais pas émission d'électrons.
- Si  $E > W_0$ , il y'a extraction et émission d'électron.

Dans les deux derniers cas, il y'a effet photoélectrique.

#### Remarque :

Si  $E > W_0$ , l'électron émis utilise l'excédent d'énergie sous forme cinétique.

$$E_{\text{Cmax}} = E - W_0 = h\nu - h\nu_0 = hC\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right) \text{ énergie cinétique maximale de l'électron émis.}$$

$$E_{\text{Cmax}} = \frac{1}{2} m \cdot V^2 = h\nu - h\nu_0 \Rightarrow V = \sqrt{\frac{2h}{m} (\nu - \nu_0)} = \sqrt{\frac{2hC}{m} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right)} \text{ vitesse maximale de l'électron émis}$$

## III- Dualité onde - corpuscule :

La lumière a un comportement ondulatoire et un comportement corpusculaire

- Pour interpréter les interférences lumineuses et la diffraction, on utilise la théorie ondulatoire.
- Pour interpréter l'effet photoélectrique on utilise la théorie corpusculaire.

Ces deux théories se complètent dans l'interprétation des phénomènes provoqués par la lumière : pour les unifier les physiciens ont utilisé le terme de dualité onde - corpuscule.

## Fin du chapitre

### Bakhoum Pc: Exercices sur Interférences lumineuses – effet photoélectrique

#### Exercice n°1 :

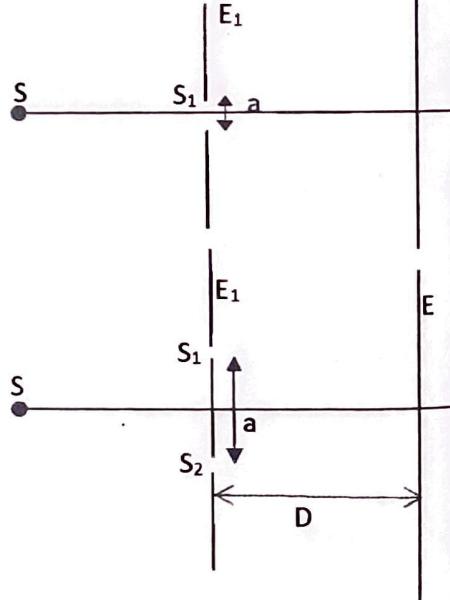
On réalise l'expérience montrée par la figure ci-contre. S est une lumière monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$

$S_1$  est un trou circulaire de diamètre  $d \approx \lambda$  percé sur l'écran  $E_1$  et E est l'écran d'observation.

1. Quel phénomène se produit à la traversée de la lumière en  $S_1$ ? Recopier le schéma et dessiner le faisceau émergent de  $S_1$ .
2. On perce un deuxième trou  $S_2$  identique à  $S_1$  sur  $E_1$ . Voir figure ci-contre :
  - 2.1. Quelle est la condition que doivent satisfaire a et D ?
  - 2.2. Décrire ce qu'on observe sur l'écran sur E.
  - 2.3. La longueur occupée par 10 interfranges est  $\ell = 5,85\text{mm}$ . Calculer la longueur d'onde  $\lambda$  émise par la source S.  
Données :  $a = S_1S_2 = 2\text{ mm}$  et  $D = 2\text{ m}$ .
  - 2.4. Déterminer la distance entre la 4<sup>ème</sup> frange claire et la 6<sup>ème</sup> frange obscure de part et d'autre de la frange centrale.
3. On remplace S par S' qui émet des radiations de longueur d'onde  $\lambda_1 = 0,655\text{ }\mu\text{m}$  et  $\lambda_2$ . Les deux systèmes coïncident pour une première fois pour la 5<sup>ème</sup> frange claire de  $\lambda_1$  et la 4<sup>ème</sup> frange claire de  $\lambda_2$ . Calculer  $\lambda_2$ .
4. On dispose d'une cellule photoémissive avec cathode au césum dont le seuil photoélectrique est  $\lambda_0 = 0,66\text{ }\mu\text{m}$ . On éclaire la cathode successivement avec les deux radiations lumineuses de longueur d'onde  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Préciser pour chacune des expériences, s'il y a eu émission d'électrons. Si oui avec quelle vitesse maximale ces électrons sortent-ils de la cathode ?

**On donne :** célérité de la lumière dans le vide  $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ ;  $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$ .

**Exercice n°2 :** On réalise les interférences lumineuses en utilisant le dispositif des fentes de Young. Deux fentes fines et parallèles  $S_1$  et  $S_2$  distantes de  $a = 1\text{ mm}$ , sont éclairées par une fente lumineuse S parallèle aux



Précédentes et située à égale distance de chacune d'elles. On observe les interférences sur l'écran E parallèle au plan des fentes  $S_1$  et  $S_2$  et situé à la distance  $D = 2 \text{ m}$  du plan de ces fentes.

1)

- La lumière utilisée est monochromatique. Calculer sa longueur d'onde  $\lambda$  sachant que la largeur  $l$  de 10 interfranges est égale à 13,2 mm.
  - On éclaire la fente S simultanément avec la radiation de longueur d'onde  $\lambda$  et une autre radiation de longueur d'onde  $\lambda'$ . La 7<sup>ème</sup> frange brillante de la radiation  $\lambda'$ , coïncide avec la 5<sup>ème</sup> frange brillante de la radiation  $\lambda$ . Calculer la longueur d'onde  $\lambda'$ .
- 2) On éclaire une cellule photoélectrique par des radiations lumineuses de longueur d'onde  $\lambda = 633 \text{ nm}$ . Le travail d'extraction est  $W_s = 1,8 \text{ eV}$ .
- Déterminer la longueur d'onde seuil  $\lambda_s$  de la cathode. Comparer avec la longueur d'onde  $\lambda$  des radiations éclairant la cellule. Conclure.
  - Déterminer en eV l'énergie cinétique maximale de sortie d'un électron extrait de la cathode de la cellule et calculer sa vitesse.

Données : masse de l'électron  $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ Kg}$ ;  $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$ ;  $C = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ ;  $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ .

### Exercice n°3 : TS<sub>1</sub>

**5.2.1** La radiation monochromatique utilisée a une fréquence  $v = 5,77 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$

**5.2.1.1** Quelle est la couleur de la lumière utilisée ? (le spectre de la lumière blanche figure dans les données fournies à la fin de l'exercice). Célérité de la lumière dans le vide :  $C = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$  (0,5 point)

**5.2.1.2** Qu'observe-t-on sur l'écran (E) ? (0,5 point)

**5.2.1.3** Comment appelle-t-on ce phénomène ? Quel caractère de la lumière est ainsi mis en évidence ? (0,75 point)

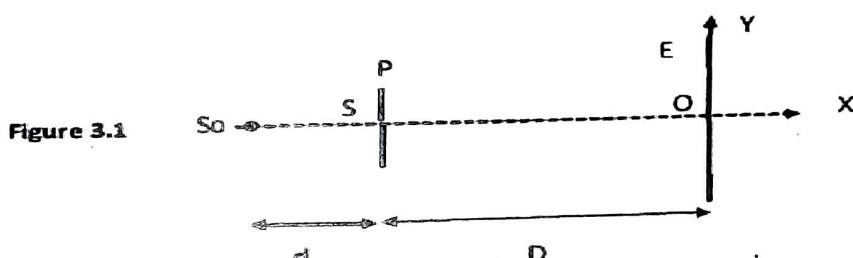


Figure 3.1

**5.2.1.4** Le milieu de la cinquième (5<sup>ème</sup>) frange brillante est situé à une ordonnée  $y = 2,6 \text{ mm}$  (l'origine O est le point de rencontre entre l'axe de symétrie ( $S_0$ -x) et l'écran (E)). L'ordre de la frange centrale est zéro (0).

- Déterminer la distance  $b$  séparant les deux sources secondaires ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ). (0,5 point)
- Définir puis calculer l'interfrange  $l$ . (0,5 point)

- Quelle est la nature de la frange située à  $y = 1,3 \text{ mm}$  et celle située à  $y = 2,08 \text{ mm}$ ? Justifier (0,5 point) votre réponse.

**5.2.2** On remplace la source  $S_0$  par une lampe spectrale émettant deux radiations  $\lambda_1 = 750 \text{ nm}$  et  $\lambda_2 = 480 \text{ nm}$ .

**5.2.2.1** Quelle est la couleur de la frange observée sur l'écran à  $y = 0$ ? Justifie (0,5 point)

**5.2.2.2** A quelle distance minimale  $h$  de l'origine O sur l'écran va-t-on observer à nouveau l'aspect décrit à la question 5.2.2.1? (0,1 point)

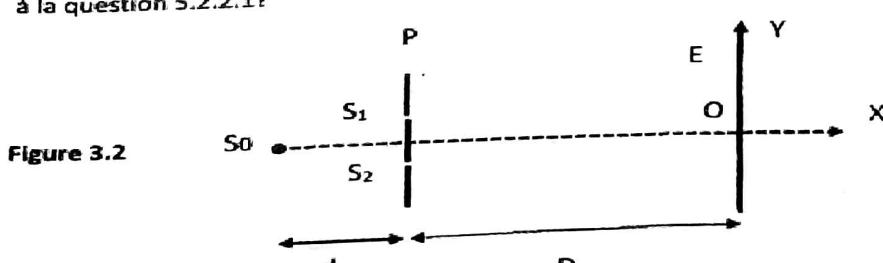


Figure 3.2

### Données

- Spectre de la lumière blanche :

	rouge	orange	jaune	vert	bleu	indigo	violet
$\lambda (\text{nm})$	800	700	600	550	500	450	400

- Résultats de la superposition de quelques couleurs :

$$\text{Rouge} + \text{bleu} = \text{magenta}; \quad \text{bleu} + \text{vert} = \text{cyan}; \quad \text{rouge} + \text{vert} = \text{Jaune}$$

## Chapitre XIV : Niveaux d'énergie d'un atome

### I- Hypothèses de Bohr :

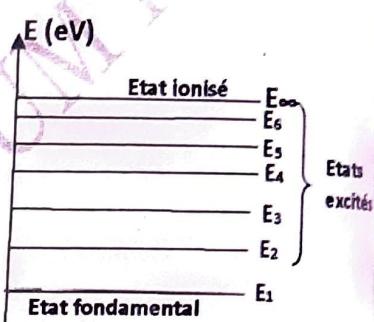
Pour interpréter la **discontinuité des spectres atomiques d'émission et d'absorption**, Bohr postule que :

- L'énergie d'un atome est **quantifiée** c'est - à - dire qu'elle ne peut prendre certaines valeurs bien déterminées ;
- Les variations d'énergie d'un atome sont également quantifiées ;
- A chaque disposition des électrons d'un atome autour du noyau correspond une valeur de l'énergie ou à un **niveau d'énergie** ;
- Le passage d'un niveau d'énergie à un autre se fait par absorption ou émission de photons.

### II- Diagramme énergétique d'un atome :

Le diagramme énergétique d'un atome regroupe les différents niveaux d'énergie de l'atome. Il est formé :

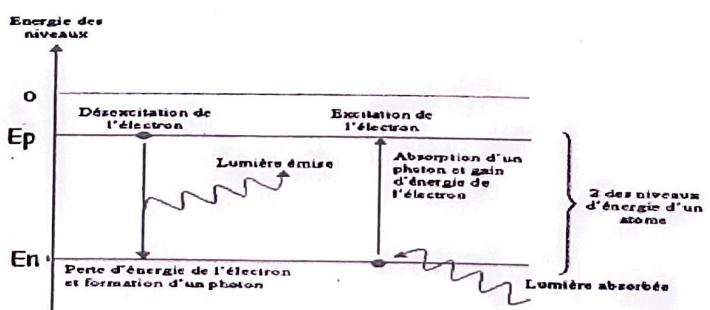
- De l'état fondamental qui correspond à la valeur de l'énergie la plus petite. C'est le niveau le plus stable ;
- Des états excités : parmi ces états on a l'état ionisé pour laquelle l'énergie est nulle.



#### Remarque : transition électronique

Une transition est le passage d'un niveau d'énergie à un autre :

- Si l'atome passe d'un niveau d'énergie  $E_n$  à un niveau d'énergie supérieur  $E_p$  : on a une **absorption**
- Si l'atome passe d'un niveau d'énergie  $E_p$  à un niveau d'énergie inférieur  $E_n$  : on a une **émission**



Dans les deux cas, l'énergie du photon émis ou absorbée s'écrit :

$$E_{\text{photon}} = E_p - E_n = h\nu_{np} = \frac{hc}{\lambda_{np}}$$

## 1-Cas de l'atome d'hydrogène :

Les énergies de l'atome d'hydrogène vérifient la relation :

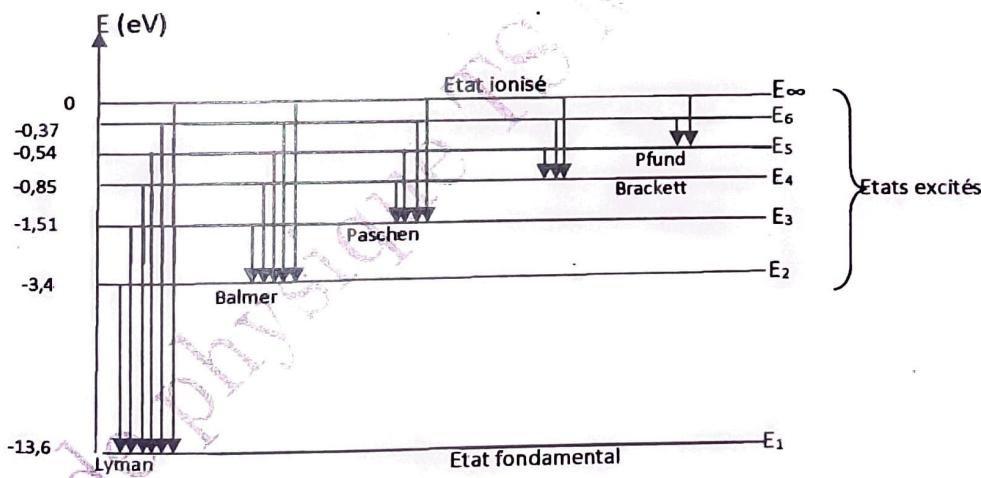
$$E_n = -\frac{E_0}{n^2}$$

$E_0 = 13,6 \text{ eV}$ ;  $n \in \mathbb{N}^*$ ;  $n$  est le nombre quantique principal, il désigne le numéro de la couche électronique dans laquelle se situe l'électron.

Exemples :

$n = 1$	Niveau fondamental, le plus stable car d'énergie la plus basse	$E_1 = -\frac{13,6 \text{ eV}}{1^2}$	$E_1 = -13,6 \text{ eV}$
$n = 2$	Premier niveau excité	$E_2 = -\frac{13,6 \text{ eV}}{2^2}$	$E_2 = -3,4 \text{ eV}$
$n = 3$	Deuxième niveau excité	$E_3 = -\frac{13,6 \text{ eV}}{3^2}$	$E_3 = -1,51 \text{ eV}$
$n = 4$	Troisième niveau excité	$E_4 = -\frac{13,6 \text{ eV}}{4^2}$	$E_4 = -0,85 \text{ eV}$
$n = 5$	Quatrième niveau excité	$E_5 = -\frac{13,6 \text{ eV}}{5^2}$	$E_5 = -0,54 \text{ eV}$
$\underset{\infty}{\longrightarrow}$	Etat ionisé	$E=0$	$E=0$

### a) Diagramme énergétique de l'atome d'hydrogène :



### b) Energie d'ionisation de l'atome d'hydrogène :

L'énergie d'ionisation est l'énergie minimale qu'il faut fournir à un atome d'hydrogène à un atome d'hydrogène pour l'ioniser c'est - à - dire le faire passer du niveau  $E_n$  au niveau ionisé  $E_\infty$ .

$$E_i = E_\infty - E_n \Rightarrow E_i = \frac{13,6}{n^2}$$

Cours à domicile : 77 550 04 15

- Si  $n=1$ ,  $E_i = -E_1 = 13,6 \text{ eV}$  : c'est l'énergie de première ionisation (énergie minimale qu'il faut fournir à un atome d'hydrogène pris dans son état fondamental pour l'ioniser).
- Si  $n=2$ ,  $E_i = -E_2 = 3,4 \text{ eV}$  : c'est l'énergie de deuxième ionisation.

### c) Expression des longueurs d'onde :

Lors de l'émission ou de l'absorption d'un photon d'un niveau d'énergie  $E_p$  à un niveau d'énergie  $E_n$  avec  $p > n$  on a :

$$E_p - E_n = h.v_{n,p} \Rightarrow -\frac{E_0}{p^2} + \frac{E_0}{n^2} = h.v_{n,p} \Rightarrow h.v_{n,p} = E_0 \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right) \Rightarrow \frac{h.c}{\lambda} = E_0 \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{E_0}{h.c} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right) \text{ avec } p > n$$

En posant  $R_h = \frac{E_0}{h.c}$  appelé constante de Rydberg :  $R_h = 1,09776 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$  ;

$$\frac{1}{\lambda} = R_h \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right)$$

Remarque :  $\frac{1}{\lambda} = \bar{\lambda}$  : l'inverse de la longueur d'onde est appelée nombre d'onde.

### d) Expression des fréquences :

$$E_p - E_n = h.v_{n,p} \Rightarrow -\frac{E_0}{p^2} + \frac{E_0}{n^2} = h.v_{n,p} \Rightarrow h.v_{n,p} = E_0 \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right) \Rightarrow$$

$$v_{np} = \frac{E_0}{h} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right)$$

### e) Spectre d'émission de l'atome d'hydrogène :

Un spectre d'émission est formé d'un ensemble de séries de raies. Une série est l'ensemble des transitions aboutissant à un même niveau.

#### Exemples :

- Série de Lyman : transition de  $p$  vers  $n=1$ .
- Série de Balmer : transition de  $p$  vers  $n=2$ .

#### ❖ Etude de la série de Lyman :

- Expression des longueurs d'onde de la série de Lyman :

On a  $\frac{1}{\lambda_{n,p}} = \frac{E_0}{h.c} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right) = R_h \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right)$  pour la série de Lyman  $n=1 \Rightarrow$

$$\frac{1}{\lambda_{1,p}} = R_h \left( 1 - \frac{1}{p^2} \right)$$

- Détermination des longueurs d'onde limites :

✓  $\frac{1}{\lambda_{1,2}} = R_h \left( 1 - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3R_h}{4} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{4}{3R_h} = 122 \text{ nm} = \lambda_{\max}$

✓  $\frac{1}{\lambda_{1,\infty}} = R_h \left( 1 - \frac{1}{\infty} \right) = R_h \Rightarrow \lambda_{1,\infty} = \frac{1}{R_h} = 91,4 \text{ nm} = \lambda_{\min}$

✓ Largeur de la série :  $\Delta\lambda = \lambda_{1,2} - \lambda_{1,\infty} = 122 - 91,4 = 30,6 \text{ nm}$

Les longueurs d'onde de la série de Lyman appartiennent au domaine des U.V.

#### ❖ Etude de la série de Balmer :

- Expression des longueurs d'onde de la série de Balmer :

On a  $\frac{1}{\lambda_{n,p}} = \frac{E_0}{h.c} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right) = R_h \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right)$  pour la série de Balmer  $n=2 \Rightarrow$

$$\frac{1}{\lambda_{2,p}} = R_h \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{p^2} \right)$$

- Détermination des longueurs d'onde limites :

$$\checkmark \frac{1}{\lambda_{2,3}} = R_h \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) = \frac{3R_h}{4} \Rightarrow \lambda_{2,3} = \frac{36}{5R_h} = 658 \text{ nm} = \lambda_{\max}$$

$$\checkmark \frac{1}{\lambda_{1,\infty}} = R_h \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{\infty} \right) = \frac{1}{4} R_h \Rightarrow \lambda_{1,\infty} = \frac{4}{R_h} = 366 \text{ nm} = \lambda_{\min}$$

$$\checkmark \text{Largeur de la série : } \Delta\lambda = \lambda_{2,3} - \lambda_{1,\infty} = 658 - 366 = 322 \text{ nm}$$

Les longueurs d'onde de la série de Balmer appartiennent en partie au domaine du visible.

## 2-Cas des ions hydrogénoides :

Ce sont des ions qui ont la même structure électronique que l'atome d'hydrogène, ils possèdent un seul électron qui gravite autour de leur noyau :  ${}_2\text{He}^+$ ,  ${}_3\text{Li}^{2+}$ ,  ${}_4\text{Be}^{3+}$ .

Ces ions ont des spectres lumineux analogues à celui de l'atome d'hydrogène. Les niveaux d'énergie de ces ions sont donnés par la relation :

$$E_n = -\frac{Z^2 E_0}{n^2} \text{ avec } Z \text{ numéro atomique ou nombre de charge.}$$

**Fin du chapitre :**

### Bakhoum Pc. Exercices sur niveaux d'énergie de l'atome

#### Exercice n°1 :

L'idée d'une quantification de l'énergie transportée par la lumière a été développée par Albert Einstein en 1905. Les photons sont assimilés à des « paquets » d'énergie élémentaire, ou quanta d'énergie qui sont échangés lors de l'absorption ou l'émission de la lumière par la matière. Le photon est considéré comme une particule de masse nulle et d'énergie  $E = h\nu$ .

##### 1. Excitation et désexcitation de l'atome d'hydrogène.

L'énergie d'un niveau  $n$  de l'atome d'hydrogène est donnée par la relation  $E_n = -\frac{E_0}{n^2}$  avec  $E_0 = 13,6 \text{ eV}$ .

Le diagramme ci-contre donne des transitions possibles de l'électron de l'atome d'hydrogène (figure 3). Des photons d'énergie 1,51 eV et 12,09 eV arrivent respectivement sur deux tubes  $T_1$  et  $T_2$  contenant des atomes d'hydrogène dans leur état fondamental.

1.1- Dans lequel des deux tubes peut-on avoir une absorption des photons ? Justifier.

1.2- Calculer la longueur d'onde  $\lambda_1$  du rayonnement émis lors de la transition de l'électron du niveau d'énergie  $n = 2$  au niveau d'énergie  $n = 1$ .

1.3- La longueur d'onde  $\lambda_2$  du rayonnement émis lors de la transition du niveau énergétique  $p$  au niveau énergétique  $n = 2$  est  $\lambda_2 = 489 \text{ nm}$ . Déterminer  $p$ .

##### 2- Interaction entre la lumière et le zinc

2.1- Les radiations précédentes de longueur d'onde  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont utilisées pour éclairer la cathode en zinc d'une cellule photoémissive. Le travail d'extraction d'un électron du métal zinc est  $W_0 = 3,3 \text{ eV}$ .

a) Calculer la fréquence seuil et la longueur d'onde seuil du métal zinc.

b) Calculer l'énergie cinétique maximale d'éjection des électrons et leur vitesse.

2.2- On éclaire la cathode en zinc par la lumière blanche. Un effet photoélectrique est-il observé ? Justifier. Données Pour la lumière blanche on a  $400 \text{ nm} \leq \lambda \leq 800 \text{ nm}$ . Constante de Planck  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ ; vitesse de la lumière dans le vide  $C = 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$ ;  $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ ; masse de l'électron :  $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ .

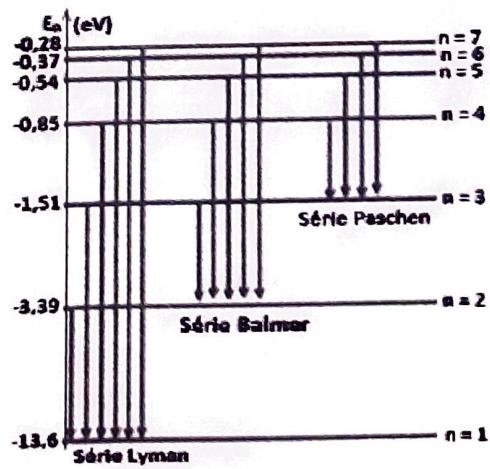


Figure 3

En s'appuyant sur ses hypothèses, Bohr établit la formule donnant les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène.

$$E_n(\text{eV}) = -\frac{E_0}{n^2}; \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*.$$

1) Citer les hypothèses de Bohr.

2) Déterminer en fonction de  $E_0$  :

- a) l'énergie  $E_f$  associée à l'état fondamental ;
- b) l'énergie  $E_e$  associée au premier niveau excité ;
- c) l'énergie  $E_i$  d'ionisation.

3) Sachant que l'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène est  $E_i = 21,76 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ , déterminer la valeur, en eV, du terme d'énergie  $E_0$ .

4) On considère les transitions suivantes :

- transition.1 : l'électron passe du niveau d'énergie  $E_f$  au niveau d'énergie  $E_e$ .
- transition.2 : l'électron passe du niveau d'énergie nulle au niveau d'énergie  $E_e$ .

Déterminer pour chacune des transitions la valeur de la variation d'énergie  $\Delta E$  échangée avec l'extérieur tout en précisant s'il s'agit d'une absorption ou émission.

5) On fournit à l'atome d'hydrogène pris dans son état d'énergie la plus faible, le quantum d'énergie :  $W = 10,2 \text{ eV}$ . L'atome pourra-t-il absorber cette énergie. En déduire l'état dans lequel se trouve l'atome.

6) On classe les raies du spectre de l'atome d'hydrogène en séries, les premières étant appelées respectivement séries de Lyman, de Balmer et de Paschen. Pour chacune de ces séries, la fréquence reste inférieure à une fréquence donnée par les valeurs suivantes :

Lyman :  $v_L = 32,903 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$  ; Balmer :  $v_B = 8,226 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$  ; Paschen :  $v_P = 3,556 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ .

On désigne par :

- $E_n$  et  $E_m$  respectivement les énergies des niveaux  $n$  et  $m$  tel que  $n > m$ .
- $v_{n,m}$  la fréquence du photon émis lors de la transition de  $n$  vers  $m$ .

a) Etablir l'expression suivante :  $v_{n,m} = \frac{E_0}{h} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$ .

b) Déterminer pour la fréquence limite  $v_L$ , la valeur du nombre quantique  $m$ . En déduire les valeurs des nombres quantiques pour les deux autres fréquences  $v_B$  et  $v_P$ .

c) Déterminer pour la série de Lyman, la plus petite fréquence émise en fonction de  $v_L$ . La calculer.

### Exercice n°3 :

Données : Célérité de la lumière  $C = 3,10^8 \text{ m.s}^{-1}$ ; constante de Planck  $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$ ; Charge élémentaire  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ; masse de l'électron  $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ; Nombre de charge ( $Z$ ) des éléments chimiques : H(1); He(2); Li(3); Be(4); B(5); Na(11).

Partie A : Niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène.

Les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène sont donnés par la relation  $E_n = -$

$\frac{E_0}{n^2}$  où  $n$  est un nombre entier positif et  $E_0 = 13,6 \text{ eV}$ .

5.1. Quelle est l'énergie de l'atome d'hydrogène à l'état stable ? Donner le nom de cet état.

5.2. Une transition d'un niveau  $n = 4$  à un niveau  $n' = 2$  peut-elle se faire par absorption ou par émission d'un photon ? Quelle est la quantité d'énergie du photon mis en jeu au cours de cette transition ?

5.3. Lorsque l'atome d'hydrogène est dans son état fondamental, quelles sont les longueurs d'onde limites ( $\lambda_{\max}$  et  $\lambda_{\min}$ ) des radiations qu'il peut absorber ? A quel domaine spectral appartiennent-elles ?

Partie B : l'atome de sodium.

Le sodium, comme l'hydrogène, possède un électron sur son dernier niveau. La figure 7 représente le diagramme simplifié des niveaux d'énergie de l'atome de sodium.

5.4. Comment peut-on expliquer la discontinuité des niveaux d'énergie de l'atome de sodium ?

5.5. Calculer l'énergie d'ionisation de l'atome de sodium, à partir de son état fondamental.

5.6. Calculer, en eV, la variation d'énergie qui correspond à l'émission, par l'atome de sodium, de la raie jaune de longueur d'onde  $\lambda_1 = 589 \text{ nm}$ . Quels sont les états d'énergie concernés par la transition correspondant à l'émission de cette radiation menant au niveau fondamental ?

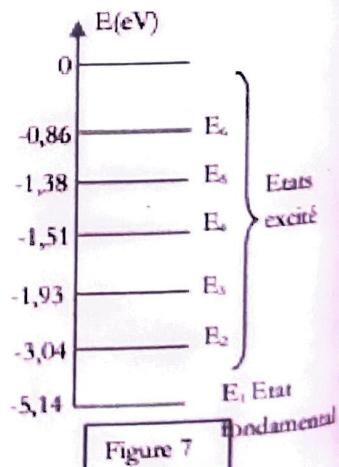


Figure 7

On fournit successivement à l'atome de sodium, pris dans son état fondamental, les quanta d'énergie suivants  $E_{ph1} = 3 \text{ eV}$ ;  $E_{ph2} = 3,21 \text{ eV}$ ;  $E_{ph3} = 7 \text{ eV}$ . Dans quel état d'énergie se retrouvera l'atome de sodium dans chacun des trois cas ?

#### Exercice n°4 : TS<sub>1</sub>

Le spectre d'émission d'un élément permet de reconnaître celui-ci partout où il se trouve même à l'état de traces. C'est le principe de l'analyse spectrale qui, en astrophysique, fournit des renseignements précieux sur les astres.

On considère un « hydrogénoidé » contenant Z protons dans son noyau autour duquel gravite un seul électron appelé « électron optique », de masse m et de charge - e. La masse du noyau est M et sa charge +Z e. On admet que le noyau N est fixe, tandis que l'électron décrit une orbite circulaire de centre N, de rayon r

1.1 Donner l'expression de la force d'attraction électrostatique qui agit sur l'électron et montrer que le mouvement de l'électron est uniforme.

1.2 Montrer que l'énergie cinétique de l'électron sur une orbite de rayon r est donnée par l'expression  $E_C = \frac{ze^2}{8\pi\epsilon_0 r}$  et que l'énergie potentielle est donnée par  $E_P = -\frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ .

1.3 En déduire que l'énergie totale de l'électron donc l'atome (N fixe)  $E = -\frac{ze^2}{8\pi\epsilon_0 r}$ .

2. Pour interpréter le spectre de raies de la série de Balmer. Bohr introduit la condition de quantification du moment cinétique :  $E = m.v.r = n \frac{\hbar}{2\pi}$ .

2.1 Quels sont alors les rayons  $r_n$  d'orbites possibles de l'électron ?

2.2 Calculer  $r_1 = a_0$  : rayon de la première orbite de Bohr ( $n = 1$ ;  $Z = 1$ )

3. En tenant compte de la quantification des rayons  $r_n$  et de l'expression de l'énergie E du système atomique proposé, donner l'expression de  $E_n$  en fonction, Z, m, e, h,  $\epsilon_0$  et n et montrer que  $E_n$  est quantifiée.

4 Le calcul de constantes figurant dans l'expression de  $E_n$  établit conduit à écrire  $E_n = \frac{13,6Z^2}{n^2}$

Calculer l'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène ( $Z = 1$ ), de l'hélium ionisé  $\text{He}^+$  ( $Z = 2$ ) et du Lithium ionisé  $\text{Li}^{2+}$  ( $Z = 3$ ) ; à partir de l'état fondamental  $n = 1$ .

5. Les radiations monochromatiques émises dans le visible et le proche ultraviolet par l'atome d'hydrogène, constituent la série de Balmer. Les longueurs d'onde de ces raies sont (exprimées en angström) vérifient la relation suivante :  $\lambda = \frac{\lambda_0 n^2}{n^2 - 4}$ ; étant un entier et  $\lambda_0 = 3645 \text{ \AA}^\circ$ .

5.1 Indiquer la plus petite valeur possible de n et en déduire la longueur d'onde de la raie correspondante.  
5.2 Quels sont le nombre et les longueurs d'onde des raies visibles de ce spectre, si ce dernier est limité du côté de l'ultraviolet par la longueur d'onde  $\lambda_v = 4000 \text{ \AA}$  du violet ?

fin de la série

## Chapitre XV : Noyau atomique – réactions nucléaires

### I. Noyau atomique :

#### 1.1 Constituant du noyau d'un atome:

Le noyau d'un atome est composé de particules appelées nucléons pouvant être des protons et/ou des neutrons.

- Les protons : leur nombre dans un noyau est noté Z et appelé **nombre de charge ou numéro atomique** ; chaque proton a une masse  $m_p = 1,0073u = 1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$  et une charge  $q_p = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- Les neutrons : leur nombre dans un noyau est noté N. La masse d'un neutron est  $m_n = 1,0087 u = 1,675 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ , la charge d'un neutron est nulle.

Le nombre total de nucléons d'un noyau noté A est appelé **nombre de masse** :  $A = Z + N$ .

► L'unité de masse atomique notée u est le douzième de la masse d'un atome de carbone 12 ; ce qui donne :  $1 \text{ u} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ .

#### 1.2 Nucléides :

On désigne par nucléide l'ensemble des noyaux des atomes d'un même élément ayant la même valeur de Z et la même valeur de A. On le note par  ${}_Z^A X$ . Exemples :  ${}_{12}^6 C$ ;  ${}_{92}^{238} U$ ;  ${}_{1}^1 H$ .

#### 1.3 Relation d'Einstein : équivalence masse-énergie :

En 1905, Einstein a postulé : " Une particule de masse m, au repos, possède l'énergie  $E = mc^2$  avec C la vitesse de la lumière dans le vide de valeur  $C = 3,10^8 \text{ m.s}^{-1}$ .

#### ► Unités usuelles :

- d'énergie : l'électronvolt :  $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$
- de masse : l'énergie de masse de l'unité de masse atomique est :  $1 \text{ u.c}^2 = 931,5 \text{ MeV} \Rightarrow 1 \text{ u} = 931,5 \text{ MeV/C}^2$ .

#### 1.4 Stabilité d'un noyau :

##### 1.4.1 - défaut de masse du noyau :

La masse m d'un noyau est toujours inférieure à la somme des masses de ses différents nucléons  $\{Z.m_p + (A-Z).m_n\} > m$ . La différence de masse est appelée **défaut de masse** et notée :

$$\Delta m = [Z.m_p + (A-Z).m_n - m]$$

##### 1.5.2 - énergie de liaison d'un noyau :

Au défaut de masse  $\Delta m$  correspond une énergie de masse appelée **énergie de liaison du noyau** et notée

$$E_L = \Delta m \cdot C^2 = [Z.m_p + (A-Z).m_n - m] \cdot C^2$$

Définition : L'énergie de liaison d'un noyau est l'énergie libérée lors de la formation de ce noyau au repos à partir de ses nucléons initialement séparés au repos.

##### 1.5.3 - énergie de liaison par nucléon :

Pour comparer la stabilité des noyaux on définit leur énergie de liaison par nucléon :

$$\frac{E_L}{A} = \frac{\Delta m \cdot C^2}{A} = \frac{[Z.m_p + (A-Z).m_n - m] \cdot C^2}{A}$$

Un noyau est d'autant plus stable que son énergie de liaison par nucléon est élevée :

- Pour les noyaux stables  $\frac{E_L}{A} \geq 8 \text{ MeV/nucléon}$ ;
- Pour les noyaux instables  $\frac{E_L}{A} < 8 \text{ MeV/nucléon}$ .

### II. Réactions nucléaires spontanées:

#### 2.1 - Définition :

La radioactivité est la propriété spécifique d'un noyau instable d'émettre un rayonnement (constitué de particules) au cours de sa transformation appelée désintégration.

#### 2.2 Equation bilan des réactions nucléaires :

##### 2.2.1 - lois de conservation :

- Lois de Soddy : Lors d'une désintégration nucléaire, il y a conservation du nombre de charge Z et du nombre de nucléons A.

La désintégration d'un noyau X (appelé noyau père) conduit à un noyau Y (appelé noyau fils) et à l'expulsion d'une particule

L'équation de la désintégration s'écrit :  ${}_Z^A X \rightarrow {}_{Z_1}^{A_1} Y + {}_{Z_2}^{A_2} P$

Les lois de conservation de Soddy s'écrivent :

\* Loi de conservation du nombre de masse :  $A = A_1 + A_2$

\* Loi de conservation du nombre de charge :  $Z = Z_1 + Z_2$

- Lors d'une désintégration nucléaire il y'a conservation de la quantité de mouvement et conservation de l'énergie totale du système.

Remarque : On distingue 4 types de rayonnement :

- Un rayonnement de particules  $\alpha$  chargées positivement si  ${}_{Z_2}^{A_2} P = {}_2^4 He$  (noyau d'hélium)  
 ${}_Z^A X \rightarrow {}_{Z-2}^{A-4} Y + {}_2^4 He$ , exemples :  ${}_{92}^{238} U \rightarrow {}_{90}^{234} Th + {}_2^4 He$ ;  ${}_{86}^{222} Rn \rightarrow {}_{84}^{218} Po + {}_2^4 He$ .
- Un rayonnement de particules  $\beta^-$  chargées négativement si  ${}_{Z_2}^{A_2} P = {}_{-1}^0 e$  (électron)  
 ${}_Z^A X \rightarrow {}_{Z+1}^{A-1} Y + {}_{-1}^0 e + {}_0^0 \bar{\nu}$  avec  ${}_0^0 \bar{\nu}$  antineutrino, exemple :  ${}_{27}^{60} Co \rightarrow {}_{28}^{60} Ni + {}_{-1}^0 e + {}_0^0 \bar{\nu}$ ; l'électron émis provient de la transformation d'un neutron du noyau en proton :  ${}_0^1 n \rightarrow {}_1^1 p + {}_{-1}^0 e$
- Un rayonnement de particules  $\beta^+$  chargées positivement  ${}_{Z_2}^{A_2} P = {}_1^0 e$  (positon).  
 ${}_Z^A X \rightarrow {}_{Z-1}^{A-1} Y + {}_{+1}^0 e + {}_0^0 \nu$  avec  ${}_0^0 \nu$  neutrino. Exemple :  ${}_{15}^{30} P \rightarrow {}_{14}^{30} Si + {}_{+1}^0 e + {}_0^0 \nu$ , le positon provient de la transformation d'un proton du noyau en neutron :  ${}_1^1 p \rightarrow {}_0^1 n + {}_{+1}^0 e$
- Un rayonnement d'ondes électromagnétiques qui accompagne les autres rayonnements si le noyau fils est dans un état excité. Son retour à l'état fondamental se fait par émission d'un photon  $\gamma$

### 2.2.2- Energie libérée ou énergie de désintégration d'un noyau radioactif :

l'énergie disponible dans la désintégration est  $Ed = \Delta m \cdot C^2 = (\text{masses réactifs} - \text{masses produits})C^2$ .

Cette énergie est emportée par le noyau fils Y et la particule P sous forme cinétique :  $E_{CY} + E_{C_P} = Ed$ .

Exemple : désintégration  $\alpha$  d'un noyau de radium 226 en noyau de radon 222

$m({}_{88}^{226} Ra) = 225,9770 u$ ,  $m({}_{86}^{222} Rn) = 221,9702 u$ ,  $m({}_2^4 He) = 4,0015 u$ , ( $1 u = 931,5 \text{ MeV}/c^2$ )

${}_{88}^{226} Ra \rightarrow {}_{86}^{222} Rn + {}_2^4 He$ ;  $Ed = [m({}_{88}^{226} Ra) - m({}_2^4 He) - m({}_{86}^{222} Rn)] \cdot c^2$

$Ed = (225,9770 - 4,0015 - 221,9702) \times 931,5 = 4,937 \text{ MeV}$

### 2.3 Loi de décroissance radioactive :

Si  $N_0$  représente le nombre de noyaux radioactifs à la date  $t = 0$ , le nombre de noyau restant à la date  $t$  est donnée par la relation :  $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ ,  $\lambda$  est la constante radioactive du noyau considéré, son unité est l'inverse de celui du temps.

Démonstration :  $dN = -\lambda N dt \rightarrow \int_{N_0}^{N(t)} \frac{dN}{N} = \int_0^t -\lambda dt \rightarrow N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ .

• Temps de demi-vie  $t_{1/2}$  ou T : La demi-vie ou période radioactive d'un corps radioactif est le temps au bout duquel la moitié des noyaux présents au départ s'est désintégrée. Elle s'exprime en secondes dans le système international.

• Relation entre temps de demi-vie et constante radioactive :  $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$ .

• Courbe de décroissance radioactive :

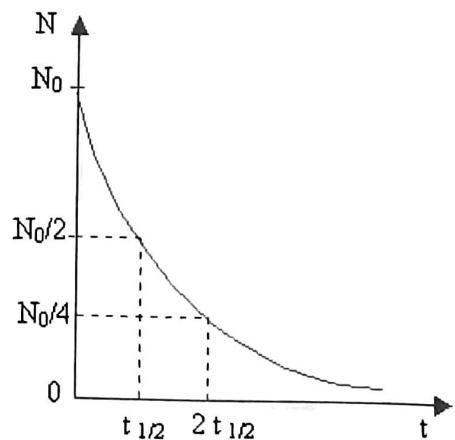
t (temps)	0	$t_{1/2}$	$2t_{1/2}$	$3t_{1/2}$	$4t_{1/2}$
N (nombre de noyaux restant)	$N_0$	$N_0/2$	$N_0/4$	$N_0/8$	$N_0/16$

Sur cette courbe, la constante de temps  $\tau$  est l'abscisse du point d'intersection de la tangente à la courbe à  $t = 0$  avec l'axe des abscisses ; on a  $\tau = \frac{1}{\lambda}$ .

La connaissance du nombre de noyaux restant à l'instant  $t$  noté  $N(t)$ , de  $N_0$  et de  $\lambda$  permet de déduire  $t$  : on a  $t = -\frac{\ln(\frac{N}{N_0})}{\lambda}$

N(t), de  $N_0$  et de  $\lambda$  permet de déduire  $t$  : on a  $t = -\frac{\ln(\frac{N}{N_0})}{\lambda}$

Cours à domicile : 77 550 04 15



### Activité d'un échantillon radioactif :

On appelle activité A d'un échantillon radioactif le nombre de désintégrations effectuées pendant l'unité de temps :  $A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = \lambda \cdot N$ . On en déduit que  $A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$  avec  $A_0 = \lambda \cdot N_0$ .

L'activité s'exprime en Becquerels (Bq). On utilise parfois le curie (Ci) : 1 Ci =  $3,7 \cdot 10^{10}$  Bq.

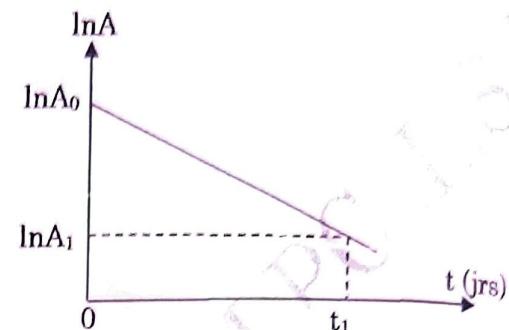
Remarque: 1 Bq correspond à une désintégration par seconde. L'activité dépend du nucléide choisi.

Remarque : les courbes  $\ln N = f(t)$  et  $\ln A = g(t)$  sont des droites de pente  $-\lambda$ .

Théoriquement :  $\ln A = -\lambda t + \ln A_0$

Graphiquement :  $\ln A = at + B$ ,

Par identification on a :  $-\lambda = a = \frac{\ln A_1 - \ln A_0}{t_1 - 0}$  et  $B = \ln A_0$



### III- Les réactions nucléaires provoquées :

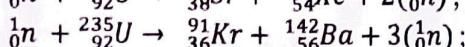
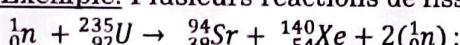
#### 3.1 Définition:

Une réaction nucléaire est dite provoquée lorsqu'un noyau cible est frappé par un noyau projectile et donne naissance à de nouveaux noyaux.

#### 3.2 Fission nucléaire :

Définition: La fission est une réaction nucléaire provoquée au cours de laquelle un noyau lourd "fissile" donne naissance à deux noyaux plus légers.

Exemple: Plusieurs réactions de fission de l'uranium 235 sont possibles:



#### 3.3 Fusion nucléaire :

Définition: La fusion nucléaire est une réunion de deux noyaux légers pour former un noyau plus lourd.

Exemple :  ${}_1^2H + {}_1^3H \rightarrow {}_2^4He + {}_0^1n$ .

#### 3.4- bilan énergétique :

Pour la fission, étudions la réaction utilisée par une centrale nucléaire :

la fission de l'uranium 235.  ${}_0^1n + {}_{92}^{235}U \rightarrow {}_{38}^{94}Sr + {}_{54}^{140}Xe + 2({}_0^1n)$

$m({}_{92}^{235}U) = 234,9935 \text{ u}$  ;  $m({}_{38}^{94}Sr) = 93,8945 \text{ u}$  ;  $m({}_0^1n) = 1,0087 \text{ u}$  ;  $m({}_{54}^{140}Xe) = 139,8920 \text{ u}$

$$Ed = [m({}_{92}^{235}U) + m({}_0^1n) - m({}_{38}^{94}Sr) - m({}_{54}^{140}Xe)] \cdot c^2 (\Delta m = 0,1983 \text{ u})$$

$$Ed = (234,9935 - 93,8945 - 139,8920 - 1,0087) \times 931,5 = 184,7 \text{ MeV}$$

Cette énergie est énorme par rapport à la combustion de pétrole.

1 kg d'uranium fournit autant d'énergie que 2 000 Tonnes de pétrole.

Pour la fusion, prenons l'exemple de 2 noyaux d'hélium 3 :  ${}_2^3He + {}_2^3He \rightarrow {}_2^4He + 2({}_1^1p)$  ;

$m({}_2^3He) = 3,0149 \text{ u}$  ;  $m({}_2^4He) = 4,0015 \text{ u}$  ;  $m({}_1^1p) = 1,0073 \text{ u}$  ;  $\Delta m = 0,00137 \text{ u}$

$$Ed = [2.m({}_2^3He) - m({}_2^4He) - 2.m({}_1^1p)].c^2 = (2 \times 3,0149 - 4,0015 - 2 \times 1,0073) \times 931,5 = 12,76 \text{ MeV}$$

Remarque : Par nucléon, la fusion libère plus d'énergie que la fission.

## Bakhoum PC: Exercices sur condensateur - étude d'un dipôle RC

### Exercice n°1 :

Il existe différents procédés pour dater des événements anciens comme la mort d'un organisme, la formation d'une roche, etc. La datation par carbone 14, de période 5700 ans, n'est valide que pour déterminer des âges absolus de quelques centaines d'années, à environ 50 000 ans au plus.

1 Dans la haute atmosphère, des neutrons cosmiques interagissent avec des noyaux d'azote 14 selon la réaction nucléaire dont l'équation est :  $^{14}_7N + {}_0^1n \rightarrow {}_Z^AX + {}_1^1P$

5.1.1 Identifier la particule X en calculant A et Z.

Données : extrait du tableau de classification périodique des éléments

Extrait du tableau de classification			
Élément	C	N	O
Numéro atomique	6	7	8
	9		

5.1.2 L'étude de l'évolution de la population moyenne d'un ensemble de noyaux radioactifs, permet d'écrire la relation :  $\Delta N = -\lambda N \Delta t$

Cette relation conduit à la loi de décroissance radioactive :  $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$

Préciser la signification des grandeurs représentées par les lettres N(t), N<sub>0</sub> et λ.

5.1.3. Définir la période radioactive T, puis établir la relation donnant λ en fonction de T

5.1.4. Etablir la relation A(t) = A<sub>0</sub> e<sup>-λt</sup> donnant l'activité A(t) en fonction de l'activité initiale A<sub>0</sub> et λ.

5.1.5. On se propose de déterminer l'âge d'une poutre en bois d'une tombe ancienne. Pour cela on mesure l'activité radioactive du carbone 14 présent dans 1 g de ce bois et dans 1 g d'un échantillon de bois fraîchement coupé. On mesure une activité de 6,68 désintégrations par minute dans le bois ancien et une activité de 13,5 désintégrations par minute dans le bois frais. Déterminer l'âge tb du bois de la tombe.

5.2 Pour dater des événements plus anciens, il existe d'autres méthodes utilisant des noyaux radioactifs de plus grande période. Le potassium 40, par exemple, de période T' = 1,3 10<sup>9</sup> ans, est utilisé pour dater des minéraux volcaniques vieux de quelques centaines de millions à quelques milliards d'années. Le potassium 40 se désintègre en donnant l'argon 40. Une roche volcanique contient du potassium dont une partie est du potassium 40. Au moment de sa formation la roche ne contenait pas d'argon et le potassium 40 disparait en même temps que l'argon 40 apparaît.

Un géologue analyse un échantillon de la roche et constate que les noyaux d'argon 40 y sont deux fois moins nombreux que les noyaux de potassium 40. Calculer l'âge tr de cette roche.

### Exercice n°2 :

Une des principales sources d'exposition de l'homme aux rayonnements ionisants est un élément radioactif naturel, désigné par les scientifiques sous le nom de "radon 222". Il se désintègre en émettant des particules α (alpha). On ne l'observerait pas dans notre environnement s'il ne s'en formait pas en permanence. Le radon est le seul des descendants de l'uranium à être gazeux, ce qui lui permet de passer dans l'atmosphère en s'échappant des roches du sous-sol. Il peut donc s'infiltrer dans la moindre fissure des constructions et s'accumuler dans les pièces non aérées, comme les caves et les sous-sols. Les sols granitiques, plus riches en uranium, libèrent davantage de radon que les sols sédimentaires.

Au danger du radon s'ajoute celui de ses descendants solides qui, inhalés avec lui sous forme de poussières, émettent des rayonnements ionisants.

Données :

Le tableau suivant donne le numéro atomique, le symbole et le nom de quelques éléments chimiques.

Z	83	84	85	86	87	88	89
symbole	Bi	Po	At	Rn	Fr	Ra	Ac
Nom	Bismuth	Polonium	Astatine	Radon	Francium	Radium	Actinium

1. En vous servant des informations du texte et de l'extrait de classification périodique, écrire l'équation de la réaction nucléaire correspondant à la désintégration du "radon 222".

On supposera que le noyau fils n'est pas produit dans un état excité.

2. Expliquer brièvement pourquoi l'état gazeux du radon le rend dangereux.

3. Pour suivre l'évolution de l'activité d'un échantillon de radon 222, on enferme à la date t = 0, dans une ampoule, un volume de 0,20 cm<sup>3</sup> de radon radioactif à la pression de 0,1 bar et à la température de 30°C.

Le gaz monoatomique est considéré comme parfait.

Données : 1 bar =  $10^5$  Pa ; constante du gaz parfait :  $R = 8,314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$  ; loi du gaz parfait :  $PV = nRT$  ; constante d'Avogadro :  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .

3.1 Calculer le nombre  $N_0$  de noyaux radon présents dans l'ampoule à l'instant initial.

3.2 On mesure l'activité A de l'échantillon à différentes dates t ; les résultats sont regroupés ci-après.

t (jours)	0	10	12	20	30	40	50	60	70
A (Bq)	$1,65 \cdot 10^{11}$	$1,15 \cdot 10^{11}$		$2,73 \cdot 10^{10}$	$4,51 \cdot 10^9$	$7,46 \cdot 10^8$	$1,23 \cdot 10^8$	$2,03 \cdot 10^7$	$3,37 \cdot 10^6$

3.2.1 Définir l'activité A d'une substance radioactive et établir l'expression donnant A à une date t en fonction de sa valeur initiale  $A_0$  et de la constante radioactive  $\lambda$ .

3.2.2 De l'examen du tableau dire dans quel sens varie l'activité A au cours du temps (il n'est pas demandé de tracer une courbe). Ce sens de variation est-il en accord avec l'expression établie à la question précédente ?

3.2.3 La courbe  $\ln A = f(t)$  est représentée ci-contre. Déterminer par exploitation de la courbe :

- la valeur de la constante radioactive  $\lambda$  du radon 222,
- l'activité initiale  $A_0$  de l'échantillon étudié

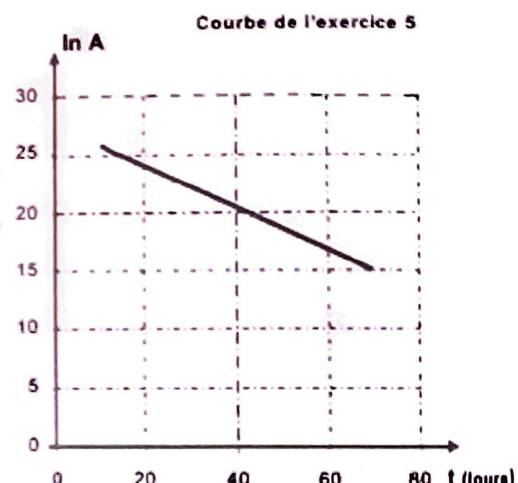
(On expliquera le mode d'exploitation mais il n'est pas demandé de rendre la courbe avec la copie)

3.2.4 Quelle valeur de  $A_0$  obtient-on par calcul à partir de  $\lambda$  et  $N_0$  ? Comparer ce résultat avec la valeur déduite de la courbe. Conclure.

3.2.5 Calculer la demi-vie du radon 222.

3.2.6 Calculer le nombre de noyaux de radon 222 présents dans l'ampoule six mois plus tard.

Quelle est alors l'activité de l'échantillon en ce moment ? Conclure.



### Exercice n°3 :

Données : masse molaire de l'iode 131 :  $M = 131 \text{ g mol}^{-1}$  ; nombre d'Avogadro :  $N = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

L'iode participe à la synthèse des hormones thyroïdiennes ; il est donc indispensable à l'organisme humain.

L'assimilation de l'iode 127, non radioactif, se fait sous forme d'ions iodure ( $I^-$ ) dans la glande thyroïde. Lors des accidents nucléaires, il y a émission dans l'atmosphère, d'iode 131, radioactif. Sa période radioactive est  $T = 8,1$  jours. Cet iode 131, ( $^{131}_{53}I$ ), donne au cours de sa désintégration, du xénon ( $^{131}_{54}Xe$ ).

1 Ecrire l'équation de la réaction de désintégration de l'iode 131. Préciser le type de radioactivité correspondant à cette désintégration.

2 La population vivant auprès d'une centrale nucléaire a reçu, sous forme d'iodure de potassium, (KI), des comprimés d'iode 127, à prendre en cas d'accident. Justifier cette mesure de prévention.

3 L'iode 131 est aussi utilisé en médecine pour l'examen des glandes surrénales par scintigraphie. Définir puis déterminer l'activité d'un échantillon d'iode 131 de masse  $m = 1,0 \text{ g}$ . (01 point)

4 Pour l'examen par scintigraphie envisagé, on utilise une solution d'iode 131 d'activité  $A_0 = 3,7 \cdot 10^7 \text{ Bq}$ . Calculer la masse  $m'$  d'iode 131 à injecter au patient.

5 Tracer la courbe de décroissance de l'activité, au cours du temps, du produit utilisé. Déterminer graphiquement la date à laquelle l'activité de ce produit sera divisée par 10.

**Fin de la série**