

# P<sub>8</sub> : INDUCTION MAGNETIQUE – ETUDE D'UN DIPOLE (R, L)

## 1. INDUCTION ELECTROMAGNETIQUE

### 1.1. Définition du flux magnétique

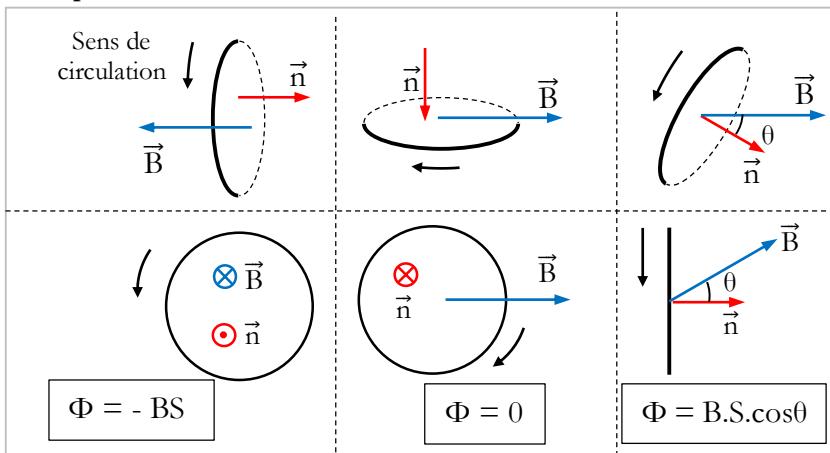
Par définition, le flux magnétique à travers un contour délimité par une surface S est le nombre de lignes de champ magnétiques qui traversent ce contour fermé.

Son expression est :  $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = S \vec{B} \cdot \vec{n} = B \cdot S \cos(\vec{B}, \vec{n})$

Le flux est une grandeur algébrique qui s'exprime dans le système international en weber (**Wb**).

$\vec{n}$  : est un vecteur unitaire normal à la surface S du contour. Le sens de  $\vec{n}$  est donné par la règle de la main droite.

#### Exemples



**NB :** Pour un contour comportant N spires, on a :  $\boxed{\Phi = N \vec{B} \cdot \vec{S}}$

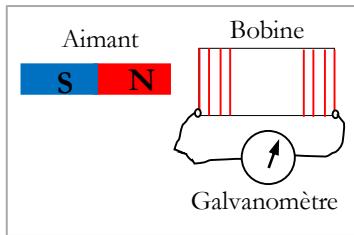
### 1.2. Règle du flux magnétique

Un circuit parcouru par un courant électrique I et placé dans un champ magnétique uniforme tant à se déplacer de façon à ce que le flux magnétique qui le traverse soit maximal.

### 1.3. Mise en évidence du phénomène d'induction électromagnétique

On dispose d'une bobine reliée à un galvanomètre à zéro central et d'un aimant droit.

- En approchant par exemple le pôle nord de l'aimant de la bobine, l'aiguille du galvanomètre dévie ; si on approche le pôle sud, l'aiguille dévie dans le sens contraire.
- On observe le même phénomène en éloignant l'un des pôles de l'aimant ou en déplaçant la bobine par rapport à l'aimant fixe.



### Interprétations

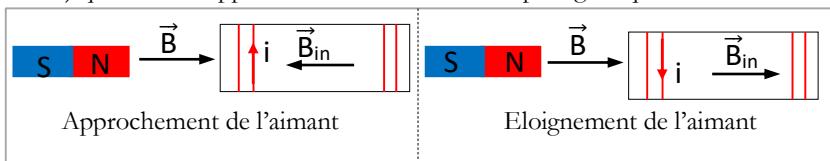
La déviation de l'aiguille montre qu'il y a passage d'un courant électrique dans le circuit. Ce courant est appelé **courant induit**. Il est dû à une **variation du flux magnétique** à travers la bobine.

La bobine dans la laquelle circule le courant est **l'induit**. L'aimant qui est à l'origine de cette variation est **l'inducteur**. Ce phénomène est appelé **induction électromagnétique**.

#### 1.4. Loi de Lenz

**Enoncé** : Le sens du courant induit est tel que par ses effets il tend à s'opposer à la cause qui lui a donné naissance.

Dans le cas précédent, la variation du flux magnétique à travers la bobine est due à la variation du champ magnétique  $\vec{B}$  de l'aimant dans la bobine. Le sens du courant induit est tel que ce courant crée un champ  $\vec{B}_{\text{ind}}$  (champ magnétique induit) qui tend à s'opposer à la variation du champ magnétique inducteur  $\vec{B}$ .



#### 1.5. Force électromotrice induite

Le courant induit est généré par une **force électromotrice induite** :

La f.e.m. induite moyenne dans un circuit est égale à l'opposé de la variation du

flux inducteur à travers ce circuit par unité de temps. 
$$e_m = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$$
 : Loi de

Faraday

La f.e.m. induite (instantanée) dans un circuit est égale à l'opposé de la dérivée par rapport au temps du flux inducteur à travers ce circuit.

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

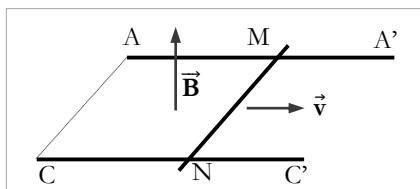
Si R est la résistance du circuit induit, en l'absence de toute autre force électromotrice dans le circuit, l'intensité algébrique du courant induit est donnée

par la relation :

$$i = \frac{e}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\phi}{dt}$$

### Application

Deux rails conducteurs AA' et CC', parallèles, de résistance négligeable, séparés par une distance  $\ell = 25 \text{ cm}$ , sont placés dans un plan horizontal. Une tige métallique rigide, de masse négligeable, perpendiculaire au plan des rails, peut glisser sans frottement dans une direction parallèle aux rails. La résistance de la tige est  $R = 0,8 \Omega$ . L'ensemble est placé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  perpendiculaire au plan des rails et d'intensité  $B = 1 \text{ T}$ . On déplace la tige à la vitesse constante  $v = 10 \text{ m.s}^{-1}$ , de gauche à droite.



1/ Choisir sur le circuit un sens de parcours arbitraire et déterminer le vecteur surface  $\vec{S}$  puis calculer le flux du champ magnétique à travers ce circuit pour une position quelconque de la tige MN. Poser  $AM = x$ .

2/ En utilisant la loi de FARADAY :

2.1/ Calculer la force électromotrice induite e qui apparaît dans le circuit.

2.2/ Calculer l'intensité du courant induit. Quel est son sens ?

3/ Retrouver le sens du courant induit en utilisant la loi de LENZ.

4/ Représenter la force électromagnétique créée au cours du déplacement de la tige.

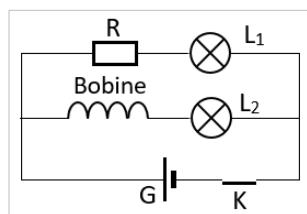
## 2. AUTO-INDUCTION

### 2.1. Mise en évidence du phénomène d'auto-induction

Considérons le circuit suivant. Les lampes  $L_1$  et  $L_2$  sont identiques, les valeurs des résistances du résistor et de la bobine sont égales.

On constate que :

- En fermant l'interrupteur K,  $L_2$  brille progressivement et  $L_1$  brille instantanément.



- En ouvrant ensuite K,  $L_2$  s'éteint progressivement et  $L_1$  s'éteint instantanément.

### Interprétations

L'installation du courant dans la bobine entraîne une variation du flux magnétique à travers la bobine. Il se produit une induction magnétique et apparition d'une f.e.m. induite aux bornes de la bobine qui tend à s'opposer à la variation du flux magnétique. La bobine est à la fois l'inducteur et l'induit c'est pourquoi le phénomène est appelé **auto-induction**.

### 2.2. Inductance d'une bobine

Lorsque qu'une bobine est parcourue par un courant, elle crée un champ  $\vec{B}$ . Le flux de ce champ magnétique à travers la bobine est appelé **flux propre**. Ce flux est proportionnel à l'intensité du courant  $i$  qui traverse la bobine.

$$\boxed{\phi = Li}$$

Le coefficient de proportionnalité  $L$  : est une constante **positive**. On l'appelle **inductance** ou **coefficient de self inductance** ou **self** de la bobine. C'est une caractéristique de la bobine. L'inductance s'exprime en **Henry (H)**.

### Expression de L pour un solénoïde

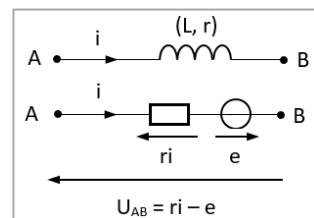
Considérons un solénoïde de rayon  $R$ , de longueur  $\ell$  comportant  $N$  spires parcouru par un courant  $i$ .

$$\phi = Li = NBS \Rightarrow L = \frac{NBS}{i} \quad \text{or } B = \mu_0 \frac{N}{\ell} i \Rightarrow L = \frac{N^2 \mu_0 \pi R^2}{\ell}$$

### 2.3. Tension aux bornes d'une bobine parcourue par un courant d'intensité variable

On peut considérer une bobine parcourue par un courant d'intensité variable  $i$  comme un dipôle AB constitué d'un générateur de tension, de f.e.m. égale à la f.e.m. d'auto-induction  $e$ , en série avec un conducteur ohmique de résistance  $r$  égale à la résistance du fil constituant la bobine.

La tension aux bornes de la bobine en convention récepteur est donnée par :  $\boxed{u = u_{AB} = ri - e}$



Si  $L$  : est l'inductance de la bobine, alors on a :  $u = ri + \frac{d\phi}{dt} = ri + L \frac{di}{dt}$

$$\Rightarrow \boxed{u = ri + L \frac{di}{dt}}$$

L'expression de la puissance instantanée échangée par la bobine est :

$$P = ui = ri^2 + Li \frac{di}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(i^2) = 2i \frac{di}{dt} \Rightarrow i \frac{di}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(i^2) \Rightarrow P = ri^2 + \frac{L}{2} \frac{d}{dt}(i^2) = P_J + P_m$$

**P<sub>m</sub>** = puissance magnétique ; **P<sub>J</sub>** = puissance perdue par effet joule

L'énergie magnétique W échangée par la bobine est telle que :

$$P_m = \frac{dW}{dt} \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(Li^2) = \frac{d}{dt}(W) \Rightarrow W = \frac{1}{2} Li^2$$

En courant continu, une bobine stocke de l'énergie à la fermeture du circuit et restitue cette énergie à l'ouverture du circuit.

### Remarques

- Dans le cas où la bobine est une inductance pure, sa résistance est nulle et la tension à ses bornes s'écrit :  $u_L = L \frac{di}{dt}$
- En régime permanent, le courant est constant ( $\frac{di}{dt} = 0$ ), la tension aux bornes de la bobine s'écrit :  $u_L = ri$ ; la bobine se comporte comme un conducteur ohmique (résistor).

### 3. ETUDE THEORIQUE DU DIPOLE (R, L)

Réalisons le circuit suivant :

#### 3.1. Etablissement du courant

En fermant K<sub>1</sub> et en ouvrant K<sub>2</sub>, le courant s'installe progressivement. C'est le régime transitoire. Lorsque le régime permanent est atteint, l'intensité du courant devient constante.

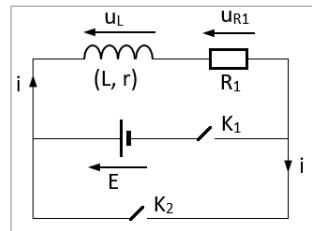
Soit i l'intensité du courant au régime transitoire. En appliquant la loi des mailles on a :  $u_{R_1} + u_L = E \Rightarrow R_1 i + ri + L \frac{di}{dt} = E \Rightarrow i(R_1 + r) + L \frac{di}{dt} = E$

En posant : R = (R<sub>1</sub> + r), on a :

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{E}{L}$$

Équation différentielle du premier ordre avec second membre.

Soit I<sub>0</sub>, l'intensité du coutant au régime permanent. On a :  $\frac{R}{L} I_0 = \frac{E}{L} \Rightarrow I_0 = \frac{E}{R}$



## Résolution de l'équation différentielle

L'équation sans second membre est  $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0$ ; La solution homogène est :

$$i_h = Ke^{-\frac{R}{L}t}$$

La solution particulière est une constante  $i_p = K_1 \Rightarrow \frac{di_p}{dt} = 0 \Rightarrow i_p = \frac{E}{R} = I_0$

$$\text{La solution } i = i_h + i_p = Ke^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R} \Rightarrow \boxed{i = Ke^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}}$$

Détermination de la constante K : à  $t = 0$ ;  $i = 0 \Rightarrow K = -\frac{E}{R} \Rightarrow$

$$\boxed{i = \frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) = I_0 \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)}$$

### 3.2. Annulation du courant

En fermant  $K_2$  et en ouvrant  $K_1$ , la bobine restitue son énergie au reste du circuit  
on a donc :  $L \frac{di}{dt} + R_1 i + ri = 0$ ; en posant :  $R = (R_1 + r)$ , on a :  $i = Ke^{-\frac{R}{L}t}$

A  $t = 0$ ; c'est-à-dire l'instant où on annule le courant, on a :

$$i = I_0 = \frac{E}{R} \Rightarrow K = \frac{E}{R} \Rightarrow \boxed{i = \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}}$$

### 3.3. Constante de temps $\tau$

La grandeur  $\boxed{\tau = \frac{L}{R}}$  est homogène à une durée. Elle est appelée constante de

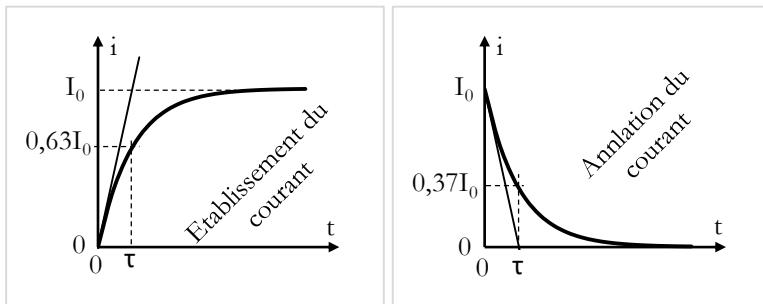
temps du dipôle ( $R, L$ ). Son unité est la seconde (s). Cette constante fournit un ordre de grandeur de la durée de la réponse d'un dipôle ( $R, L$ ).

En effet :

- Pour l'établissement du courant on a : A  $t = \tau$ ,  $i = I_0(1 - e^{-}) = 0,63I_0 = 63\%I_0$
- Pour l'annulation du courant : A  $t = \tau$ ,  $i = I_0e^{-} = 0,37I_0 = 37\%I_0$

### Détermination graphique de la constante de temps

Traçons les courbes :  $i = I_0 \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$  et  $i = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$

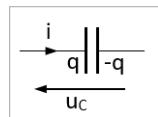


Théoriquement le courant ne s'annule jamais et que le temps d'installation ou d'annulation du courant est infiniment grand. Toutefois, en pratique, nous constatons qu'après un temps égal à 5 fois la constante de temps ( $t = 5\tau$ ), le courant d'installation vaut  **$0,99I_0$**  et le courant d'annulation vaut  **$0,007I_0$**  et donc nous pouvons considérer que l'installation (ou l'annulation) du courant est terminée.

# P<sub>9</sub> : ETUDE DU DIPOLE (R, C)

## 1. RAPPELS

Considérons un condensateur de capacité C en convention récepteur. On choisit un sens positif pour le courant i.



$$i = \frac{dq}{dt}; u_C = \frac{q}{C}$$

### Remarques :

- Les grandeurs : i, q et u<sub>C</sub> sont algébriques. La capacité C est **positive**.
- **La charge du condensateur est positive.** Elle est égale à la valeur absolue de q. Si elle augmente, le condensateur se charge et si elle diminue, le condensateur se décharge.

## 2. CHARGE D'UN CONDENSATEUR

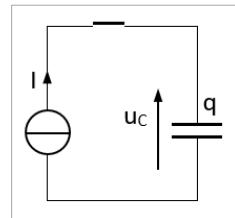
### 2.1. Charge d'un condensateur avec un générateur de courant à intensité constante

Considérons le circuit ci-contre. Le générateur de courant délivre un courant d'intensité constante et réglable. Le condensateur est initialement déchargé (q<sub>0</sub> = 0).

On fixe la valeur de l'intensité I du courant.

$$I = \frac{dq}{dt} \Rightarrow dq = Idt \Rightarrow [q = It + K];$$

$$\text{A } t = 0, q = q_0 = 0 \Rightarrow K = 0 \Rightarrow [q = It]$$



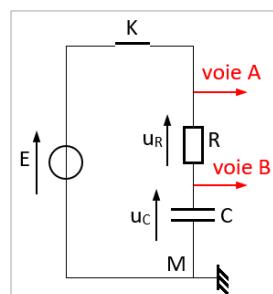
### 2.2. Charge d'un condensateur avec un générateur de tension constante

#### a) Expérience

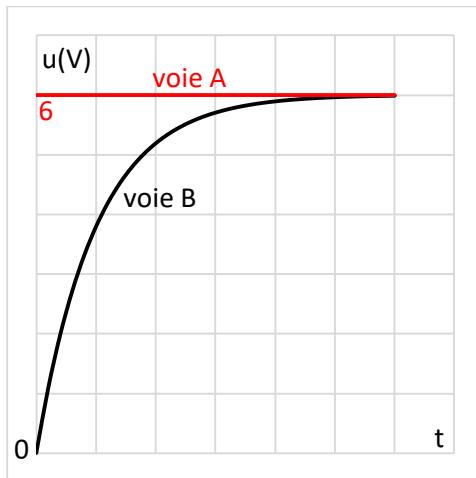
Réalisons le circuit série ci-contre constitué par :

- un générateur de tension continue constante de f.e.m. E = 6 V ;
- un résistor de résistance R ;
- un condensateur de capacité C
- un interrupteur K

On ferme l'interrupteur K à une date t = 0 et on visualise à l'aide d'un oscilloscope bicourbe les



tensions  $u_C$  aux bornes du condensateur et  $u_G$  aux bornes du générateur. On obtient l'oscillogramme ci-dessous



### b) Observations

- La tension aux bornes du condensateur croît progressivement et au régime permanent (à la fin de la charge du condensateur), la tension à ses bornes est égale à la f.e.m. du générateur.  $u_{C_{\max}} = 6 \text{ V}$  ;
- La tension aux bornes du résistor est :  $u_R = Ri = E - u_C$ . Cette tension décroît progressivement. Donc l'intensité du courant décroît. À la fin de la charge,  $u_R = 0 \Rightarrow i = 0$

## 3. ETUDE THEORIQUE DU DIPOLE ( $R, C$ )

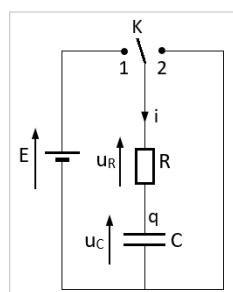
### 3.1. Charge et décharge d'un condensateur en série avec un résistor

Soit le circuit suivant permettant la charge et la décharge du condensateur.

#### ➤ Charge du condensateur

En fermant l'interrupteur sur la position 1, le condensateur se charge.

En appliquant la loi des mailles à un instant  $t$  de la charge, on obtient :  $E - u_R - R_C = 0 \Rightarrow u_C + u_R = E$   
 $\Rightarrow \frac{q}{C} + R \frac{dq}{dt} = E \Rightarrow$



$$\boxed{\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = \frac{E}{R}} : \text{équation différentielle de la charge}$$

La solution homogène s'écrit :  $q_h = Ke^{-\frac{1}{RC}t}$ ; la solution particulière est constante :  $q_p = EC$

La solution finale est :  $q = Ke^{-\frac{1}{RC}t} + EC$

$$\text{A } t = 0, q = 0 \Rightarrow K = -EC \Rightarrow q = -EC e^{-\frac{1}{RC}t} + EC = EC \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right);$$

$$\boxed{q = EC \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)}; u_C = \frac{q}{C} \Rightarrow \boxed{u_C = E \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)};$$

$$i = \frac{dq}{dt} = EC \left(\frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t}\right) \Rightarrow \boxed{i = \frac{E}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}}$$

La puissance instantanée du condensateur est :

$$P = ui = \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} = \frac{1}{C} \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(q^2) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2C}q^2\right)$$

L'énergie instantanée emmagasinée par le condensateur est telle que :

$$P = \frac{dW}{dt} \Rightarrow \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2C}q^2\right) \Rightarrow \frac{d}{dt}(W) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2C}q^2\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2}Cu_C^2 = \frac{1}{2}qu_C = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}}$$

### ➤ Décharge du condensateur

A la fin de la charge du condensateur, on bascule l'interrupteur en position 2, le condensateur se décharge sur le résistor.

La loi des mailles donne :  $u_C + Ri = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = 0} : \text{équation différentielle de la décharge}$$

$$q = Ke^{-\frac{1}{RC}t}; \text{ A } t = 0, q = CE \Rightarrow K = CE \Rightarrow \boxed{q = CEe^{-\frac{1}{RC}t}}$$

$$\boxed{i = \frac{dq}{dt} = -\frac{E}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}}; \boxed{u = \frac{q}{C} = Ee^{-\frac{1}{RC}t}}$$

### Remarque

Le courant de charge est  $i = \frac{E}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}$  et le courant de décharge est  $i = -\frac{E}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}$ .

Ces deux courants ont des signes contraires.

### 3.2. Constante de temps du dipôle (R, C)

Le produit  $\boxed{\tau = RC}$  homogène à une durée, est appelé constante de temps du dipôle (R, C) et s'exprime en seconde (s). La constante de temps  $\tau$  donne l'ordre de grandeur de l'établissement du régime permanent.

#### Détermination de la constante de temps

##### ✓ 1<sup>ère</sup> méthode

Lors de la charge, on a :  $u_C = E \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$ , à la date  $t = \tau = RC \Rightarrow$

$$u_C = E(1 - e^{-1}) = 0,63E = 63\%E$$

Pour la décharge, à la date  $t = \tau$ , on a :  $u_C = 0,37E = 37\%E$

##### ✓ 2<sup>ème</sup> Méthode

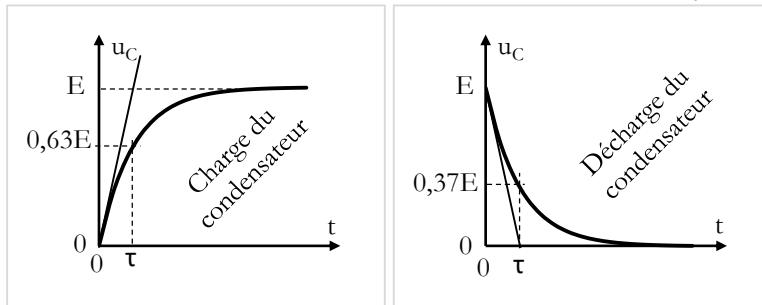
Lors de la charge on a :  $u_C = E \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right) \Rightarrow \frac{du_C}{dt} = \frac{E}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow \left(\frac{du_C}{dt}\right)_{t=0} = \frac{E}{\tau}$

L'équation de la tangente à l'origine est  $u = \left(\frac{du_C}{dt}\right)_{t=0} [t - 0] + u(0) = \frac{E}{\tau} t$

Cette tangente coupe l'asymptote  $u = E$  au point d'abscisse :  $t = \tau$ .

$$\text{En effet, on a : } \frac{E}{\tau} t = E \Rightarrow t = \tau$$

Pour la décharge l'équation de la tangente à l'origine est :  $u = -\frac{E}{\tau} t + E$



# P<sub>10</sub> : OSCILLATIONS ELECTRIQUES LIBRES ET OSCILLATIONS ELECTRIQUES FORCEES

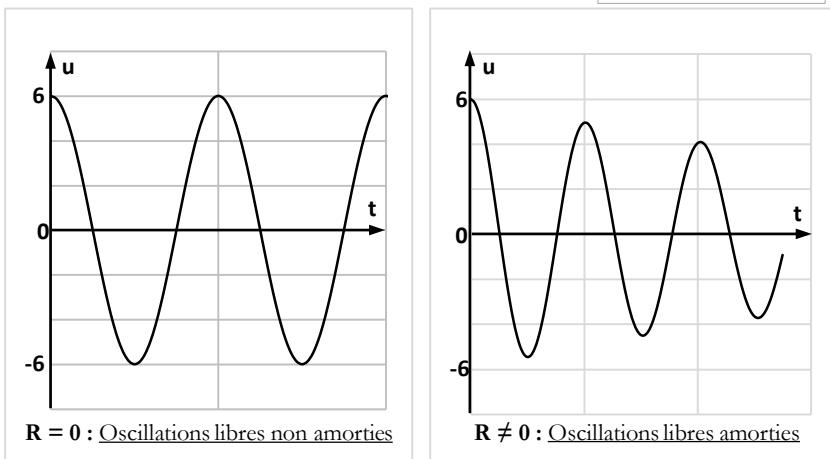
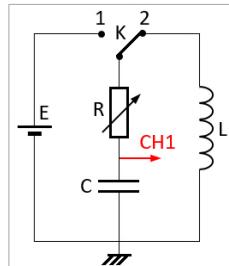
## 1. OSCILLATIONS ELECTRIQUES LIBRES

### 1.1. Etude expérimentale du circuit (L, C)

Réalisons le circuit suivant :

La f.e.m du générateur est :  $E = 6 \text{ V}$ .

Fermons l'interrupteur sur la position 1 : le condensateur se charge. Basculons ensuite l'interrupteur sur la position 2 et visualisons la tension  $u_C$  aux bornes du condensateur à l'aide d'un oscilloscope. On obtient les oscillogrammes suivants :



**NB** : la période des oscillations augmente avec les valeurs de L et de C.

### 1.2. Etude théorique du circuit (L, C)

#### a) Oscillations libres non amorties ( $R = 0$ )

##### • Equation différentielle de la tension $u_C$ du condensateur

Reprendons le circuit précédent et appliquons la loi des mailles lorsqu'on bascule l'interrupteur sur ②.

$$u_C + u_L = 0 \Rightarrow u_C + L \frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow u_C + L \frac{d}{dt} \left( \frac{dq}{dt} \right) = 0 \Rightarrow u_C + L \frac{d^2}{dt^2} (Cu_C) = 0 \Rightarrow$$

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_C = 0}$$

La solution de cette équation différentielle est de la forme :

$$u_C = U_m \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$U_m$  et  $\phi$  : sont des constantes à déterminer par les conditions initiales.

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}} : \text{est la pulsation propre du circuit (L, C)} ;$$

$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}} : \text{est la période propre}$$

$$\boxed{N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}} : \text{est la fréquence propre}$$

♦ **Energie totale dans le circuit (L, C)**

$$A t=0, u_C = E \text{ et } u_L = 0 \Rightarrow \boxed{W_0 = \frac{1}{2}CE^2}$$

$$A un instant t donné on a: W(t) = \frac{1}{2}Cu_C^2 + \frac{1}{2}Li^2$$

$$i = \frac{d}{dt}q = \frac{d}{dt}(Cu_C) = C \frac{du_C}{dt} = -CE\omega_0 \sin(\omega_0 t) \Rightarrow i^2 = C^2E^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t)$$

$$W = \frac{1}{2} [(E^2 C \cos^2(\omega_0 t) + (LE^2 C^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t))] ; \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow$$

$$\boxed{W(t) = \frac{1}{2}CE^2 = W_0 = \text{cte}}$$

Il y a échange continual d'énergie entre la bobine et le condensateur ; l'énergie totale est constante.

♦ **Equation différentielle à partir de l'énergie totale**

$$W = \frac{1}{2}Cu_C^2 + \frac{1}{2}Li^2 = \text{cte} \Rightarrow \frac{dW}{dt} = 0 \Rightarrow Cu_C \frac{du_C}{dt} + Li \frac{di}{dt} = 0 ; i = C \frac{du_C}{dt}$$

$$Cu_C \frac{du_C}{dt} + LC \frac{du_C}{dt} \frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow L \frac{di}{dt} + u_C = 0 ; LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C = 0 ; \boxed{\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_C = 0}$$

b) **Oscillations libres amorties ( $R \neq 0$ )**

♦ **Equation différentielle de la tension  $u_C$  du condensateur**

Reprendons le circuit précédent et appliquons la loi des mailles lorsqu'on bascule l'interrupteur sur ②.

$$u_C + L \frac{di}{dt} + Ri = 0 ; i = \frac{d}{dt} q = \frac{d}{dt} (Cu_C) = C \frac{du_C}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = C \frac{d^2 u_C}{dt^2} \Rightarrow$$

$$u_C + LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} = 0$$

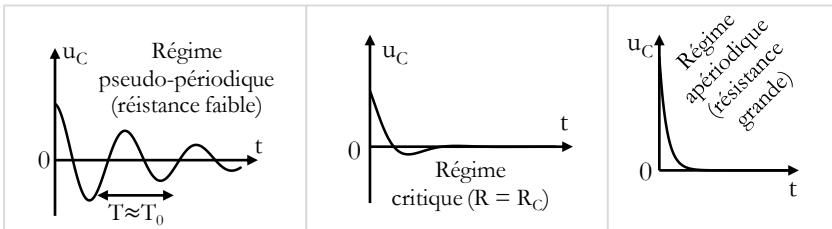
$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = 0$$

: **Équation différentielle du second degré sans second membre.**

L'équation caractéristique est :  $s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0 ; \Delta = \frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}$ , la résistance est

dite résistance critique si  $\Delta = 0 \Rightarrow R_C^2 = \frac{4L}{C} \Rightarrow R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

Suivant les valeurs de la résistance, on distingue 3 régimes pour le circuit (R, L, C)



#### ♦ Energie totale

Il y a des amortissements donc l'énergie totale diminue cours du temps.

$$E_T(t) = \frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \Rightarrow \frac{dE_T}{dt} = iL \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} = i \left( L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \right) \text{ Or } L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = - Ri \Rightarrow$$

$$\frac{dE_T}{dt} = - Ri^2$$

La diminution de l'énergie électrique est égale à la chaleur dissipée par effet joule dans le résistor.

## 2. GENERALITES SUR LE COURANT ALTERNATIF SINUSOIDAL

### 2.1. Caractéristiques d'un courant alternatif sinusoïdal

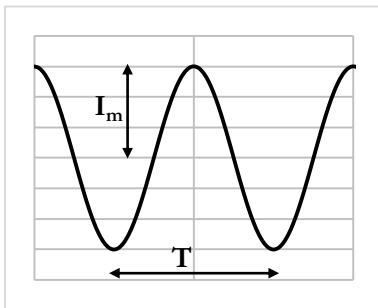
Un courant alternatif sinusoïdal est une fonction du temps de la forme :

$$i = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

Ce courant est caractérisé par :

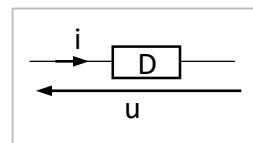
- son amplitude maximal ou intensité maximale  $I_m$  ;
- sa fréquence  $N$  ou  $f$ : 
$$N = \frac{1}{T}$$
 ;
- sa pulsation  $\omega$  imposée par un générateur basse fréquence (G.B.F) : 
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi N$$
- son intensité efficace  $I_{eff}$  ou simplement  $I$ , mesuré par un ampèremètre :

$$I_{eff} = I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$



## 2.2. Déphasage et impédance d'un dipôle

Lorsqu'un dipôle D est traversé par un courant  $i(t)$  alternatif sinusoïdal de période  $T$ , alors la tension  $u(t)$  à ses bornes est alternative sinusoïdale de même période  $T$ . Généralement, il existe une différence de phase entre le courant alternatif  $i(t)$  et la tension  $u(t)$ .



Soient :  $i = I_m \cos(\omega t + \phi_1) = I\sqrt{2} \cos(\omega t + \phi_1)$  et

$$u = U_m \cos(\omega t + \phi_2) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \phi_2)$$

- ❖ Le déphasage  $\phi$  de  $u(t)$  par rapport à  $i(t)$  est la différence de phase :

$$\phi = (\omega t + \phi_2) - (\omega t + \phi_1) = \phi_2 - \phi_1$$

Si  $\phi > 0$  :  $u(t)$  est en avance par rapport à  $i(t)$

Si  $\phi < 0$  :  $u(t)$  est en retard par rapport à  $i(t)$

Si  $\phi = 0$  :  $u(t)$  et  $i(t)$  sont en phase

- ❖ L'impédance  $Z$  du dipôle D est le rapport : 
$$Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I}$$

$U$  : est la tension efficace aux bornes du dipôle, elle est mesurée par un voltmètre.

$U_m$  : peut être mesurée par un oscilloscope.

$Z$  : s'exprime ohm ( $\Omega$ ). Elle dépend en général de la fréquence du courant alternatif traversant le dipôle.

La loi d'Ohm en courant alternatif s'écrit : 
$$U = ZI$$

### 2.3. Puissance d'un dipôle en courant alternatif

Soit un dipôle AB traversé par un courant alternatif :  $i = I\sqrt{2} \cos(\omega t)$ .

Soit  $u = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \phi)$  la tension alternative à ses bornes.

- ◆ **Puissance instantanée du dipôle AB**

$$P(t) = ui = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \phi) I\sqrt{2}\cos(\omega t) = 2UI \cos(\omega t + \phi) I \cos(\omega t)$$

En appliquant la relation :  $2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$

avec  $a = \omega t + \phi$  et  $b = \omega t$  on

$$\text{trouve : } P(t) = UI \cos(2\omega t + \phi) + UI \cos \phi$$

On constate que  $P(t)$  est la somme de deux termes : un terme sinusoïdal mais de fréquence double à la fréquence du générateur et un terme constant.

- ◆ **Puissance moyenne sur une période (ou puissance active)**

La puissance moyenne sur une période est définie par :  $P_m = \frac{1}{T} \int_0^T P dt$

$$P_m = \frac{1}{T} \int_0^T [UI \cos(2\omega t + \phi) + UI \cos \phi] dt$$

$$P_m = \frac{1}{T} \int_0^T UI \cos(2\omega t + \phi) dt + \frac{1}{T} \int_0^T UI \cos \phi dt = J_1 + J_2$$

$$\text{Or } J_1 = 0 \Rightarrow P_m = J_2 = \frac{UI \cos \phi}{T} \int_0^T dt = UI \cos \phi \Rightarrow P_m = UI \cos \phi$$

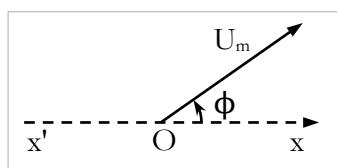
$UI \cos \phi$  : est appelé **puissance active**. Elle s'exprime en watt (**W**) ;

$UI$  : est appelé **puissance apparente**. Elle s'exprime en volt.ampère (**V.A**) ;

$\cos \phi$  : est appelé **facteur de puissance**.

### 2.4. Représentation de Fresnel d'une fonction sinusoïdale

Soit la fonction  $u = U_m \cos(\omega t + \phi)$ . Pour faire la représentation de Fresnel de cette fonction, on utilise un axe ( $x' Ox$ ). La fonction  $u$  sera représentée par un vecteur de norme  $U_m$  formant un angle  $\phi$  avec l'axe ( $x' Ox$ ).



#### Application

1) Faites sur la même figure la représentation de Fresnel pour les fonctions suivantes :

$$u_1 = 4 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right); u_2 = 3 \sin(\omega t)$$

2) Déduire la fonction :  $u = u_1 + u_2$  ; On mettra  $u$  sous la forme :

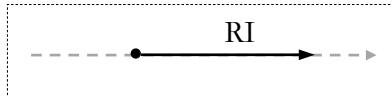
$$u = U_m \cos(\omega t + \phi), \text{ expression où } U_m \text{ et } \phi \text{ seront déterminés.}$$

## 2.5. Etude de quelques dipôles simples

### a) Le résistor

Soit  $i = I_m \cos(\omega t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t)$  le courant traversant un résistor de résistance  $R$ .

$$u_R = Ri = RI\sqrt{2} \cos(\omega t) \Rightarrow \phi = 0 ; Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{RI\sqrt{2}}{I\sqrt{2}} = R$$



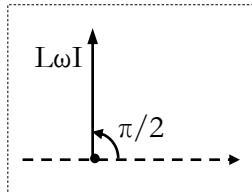
Pour un résistor, la tension  $u_C$  à ses bornes et l'intensité  $i$  qui le traverse sont en phase. L'impédance d'un résistor est égale à sa résistance  $\boxed{\phi = 0}$  et  $\boxed{Z = R}$

### b) L'inductance pure (bobine non résistive)

Soit  $i = I_m \cos(\omega t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t)$ , le courant traversant une bobine non résistive d'inductance  $L$ .

$$u_L = L \frac{di}{dt} = -LI\sqrt{2}\omega \sin(\omega t) = LI\sqrt{2}\omega \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow U_m = LI\sqrt{2}\omega ;$$

$$\phi = \left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) - \omega t = \frac{\pi}{2} ; \boxed{\phi = \frac{\pi}{2} \text{ rad}} ; Z = \frac{U}{I} = L\omega \frac{I}{I} = L\omega ; \boxed{Z = L\omega}$$



Pour une inductance pure, la tension  $u_L$  à ses bornes est en avance de  $\frac{\pi}{2}$  par rapport au courant  $i$  qui la traverse.

### c) Le condensateur

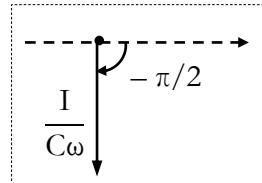
Soit  $i = I\sqrt{2} \cos(\omega t) ; u_C = \frac{q}{C} ; i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow q = \int_0^t idt = I\sqrt{2} \int_0^t \cos(\omega t) dt$

$$q = \frac{I\sqrt{2}}{\omega} \sin(\omega t) = \frac{I\sqrt{2}}{\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$u_C = \frac{I\sqrt{2}}{C\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow Z_C = \frac{U_C}{I} = \frac{\frac{1}{C\omega}}{I} = \frac{1}{C\omega}$$

Donc  $u_C$  est en retard de  $\pi/2$  par rapport à  $i$ .

$$\boxed{Z = \frac{1}{C\omega}} ; \boxed{\phi = -\frac{\pi}{2}}$$



### 3. OSCILLATIONS ELECTRIQUES FORCEES

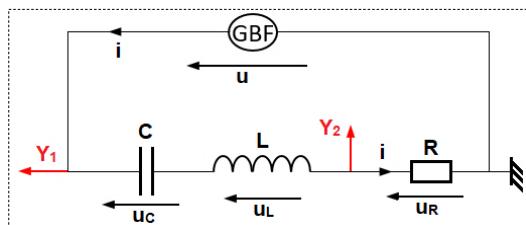
#### 3.1. Oscillations forcées

Le terme « forcées » renvoie à la présence d'un générateur basse fréquence qui alimente le dipôle ( $R$ ,  $L$ ,  $C$ ). Ce générateur impose sa fréquence aux oscillations du dipôle ( $R$ ,  $L$ ,  $C$ ), on dit que les oscillations sont forcées.

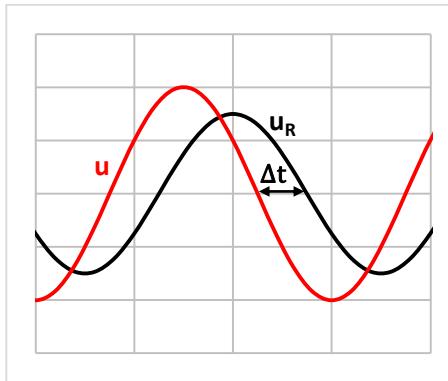
#### 3.2. Détermination expérimentale du déphasage du dipôle ( $R$ , $L$ , $C$ ) série

Réalisons le circuit suivant :

Fixons la tension efficace  $U$  du GBF et visualisons à l'aide d'un oscilloscope bicourbe la tension  $u$  du GBF qui est égale à la tension aux bornes du dipôle ( $R$ ,  $L$ ,  $C$ ) et la tension  $u_R$  aux bornes du résistor.



En fermant le circuit, on observe les oscillogrammes ci-dessous sur l'écran de l'oscilloscope pour une valeur  $N$  de la fréquence du GBF :



$\Delta t$  : est le **décalage horaire** entre  $u$  et  $u_R$ .

Soit  $\phi$  le déphasage entre  $u$  et  $u_R$ . On a :  $|\phi| = \frac{2\pi}{T} \Delta t = \omega \Delta t = 2\pi N \Delta t$

Les courbes montrent que  $u$  est en avance de  $\phi$  par rapport à  $u_R$  donc par rapport à l'intensité du courant  $i$ .

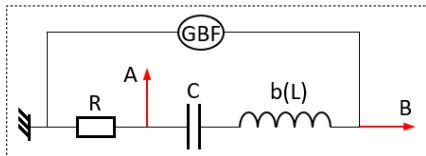
## Remarque :

Le déphasage  $\phi$  entre  $u$  et  $i$  dépend de la fréquence du GBF.

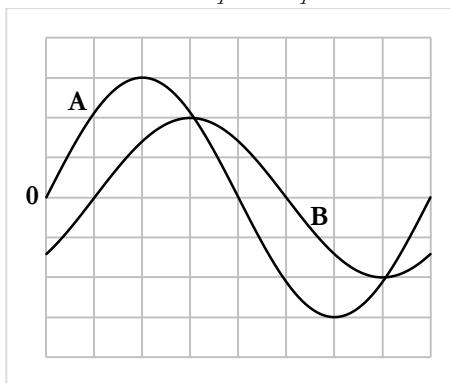
- Si  $\Delta t = 0 \Rightarrow \phi = 0$  : on dit que : **u et  $u_R$  sont en phase**
- Si  $\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow |\phi| = \frac{2\pi}{T} * \frac{T}{2} = \pi$  : on dit que : **u et  $u_R$  sont en opposition de phase**
- Si  $\Delta t = \frac{T}{4} \Rightarrow |\phi| = \frac{2\pi}{T} * \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}$  : on dit que : **u et  $u_R$  sont en quadrature**

## Application

On donne le circuit ci-contre : le générateur délivre une tension de fréquence  $f$ .  $b$  est une inductance pure  $L = 1 \text{ H.}$ ;  $C$  : est un condensateur de capacité  $C$ ; la résistance du résistor est  $R = 10 \Omega$ .



Les courbes observées sur l'écran de l'oscilloscope sont reproduites ci-dessous.



1) Déterminer la fréquence  $f$  du courant.

2) Déterminer le déphasage de la tension délivrée par le générateur par rapport à l'intensité instantanée  $i(t)$  du courant.

3) Déterminer la tension maximale  $U_m$  aux bornes du générateur et l'intensité maximale  $I_m$  du courant.

4) Déterminer l'impédance  $Z$  du dipôle  $(R, L, C)$ .

5) Donner les expressions en fonction du temps de la tension aux bornes du générateur et de l'intensité du courant.

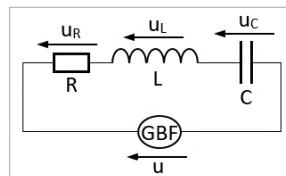
**Données :** Sensibilité verticale sur les deux voies : 5 V/div ; vitesse de balayage : 2,5 ms/div

### 3.3. Etude théorique du circuit (R, L, C) série en régime sinusoïdal forcé

#### a) Equation différentielle

Considérons le circuit suivant constitué d'un dipôle (R, L, C) série alimenté par un générateur basse fréquence de tension efficace U, de fréquence N constantes.

En appliquant la loi des mailles, on obtient :



$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = u$$

#### b) Résolution de l'équation différentielle

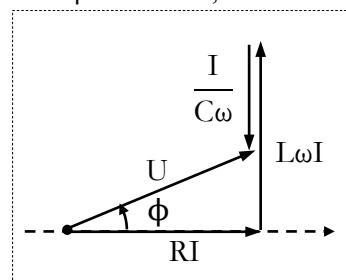
Posant :  $i = I\sqrt{2} \cos(\omega t)$  et  $u = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \phi)$ , l'équation différentielle devient :

$$RI \cos(\omega t) + L\omega I \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{I}{C\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = U \cos(\omega t + \phi)$$

Résoudre l'équation revient à déterminer U et  $\phi$ . Pour cela, on utilise la représentation de Fresnel.

$$U^2 = R^2 I^2 + I^2 \left[ \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2 \right]$$

$$Z^2 = \frac{U^2}{I^2} = R^2 + \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2 \Rightarrow$$



$$Z = \sqrt{R^2 + \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2} ; \quad \cos\phi = \frac{R}{Z} ; \quad \tan\phi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

Remarque :

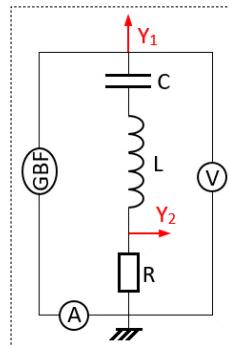
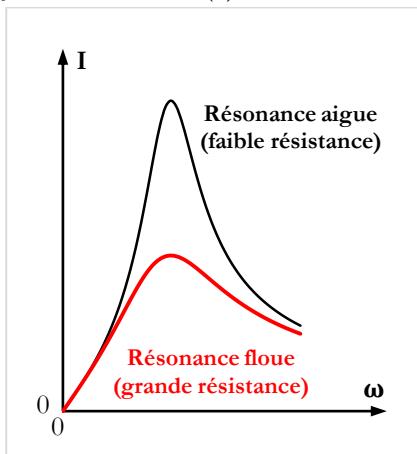
- ♦ Si  $L\omega > \frac{1}{C\omega} \Rightarrow \omega > \omega_0$ , alors l'effet d'inductance l'emporte sur l'effet de capacité :  $\tan\phi > 0 \Rightarrow \phi > 0$  : u est en avance de  $\phi$  sur i.
- ♦ Si  $L\omega < \frac{1}{C\omega} \Rightarrow \omega < \omega_0$ , alors l'effet de capacité l'emporte sur l'effet d'inductance :  $\tan\phi < 0 \Rightarrow \phi < 0$  : u est en retard de  $-\phi$  sur i.
- ♦ Si  $L\omega = \frac{1}{C\omega} \Rightarrow \omega = \omega_0$ , alors  $\tan\phi = 0 \Rightarrow \phi = 0$  : u et i sont en phase : c'est la **résonance**.

## 4. ETUDE DE LA RESONANCE EN INTENSITE

### 4.1. Etude expérimentale

Réalisons le circuit suivant :

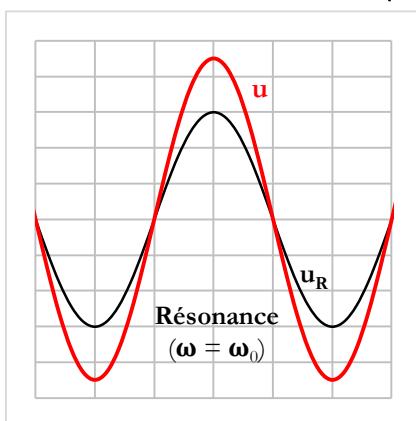
Faisons varier la fréquence  $N$  du générateur tout en maintenant sa tension efficace constante. Notons à chaque fois la valeur du courant efficace  $I$  correspondant puis traçons la courbe  $I = f(\omega)$ .



On constate que la courbe  $I = f(\omega)$  passe par un maximum pour :  $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

En ce moment, on observe sur l'écran de l'oscilloscope les courbes de variation de  $u$  et de  $u_R$ :

On voit que  $u(t)$  et de  $i(t)$  sont en phase ( $\phi = 0$ ). C'est la résonance en intensité. On dit que le dipôle (R, L, C) est un résonateur et le générateur un excitateur.



## 4.2. Etude théorique de la résonance

Prenons le circuit précédent et posons :

$$i = I\sqrt{2} \cos(\omega t) \text{ et } u = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \phi).$$

$$\text{Dans ce cas : on a } I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}$$

Comme  $U = \text{cte}$ , alors  $I$  est maximale si son dénominateur est minimal :

$$\Rightarrow \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \omega_0 \quad ; \quad Z = R ;$$

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = 1 \Rightarrow \varphi = 0.$$

$$\text{L'intensité maximale : } I_0 = \boxed{\frac{U}{R}}$$

## 4.3. Propriétés de la résonance d'intensité

A la résonance d'intensité, on a :

- L'intensité efficace du courant est maximale :  $I_0 = \frac{U}{R}$
- $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow N = N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$
- L'intensité du courant et la tension aux bornes du dipôle ( $R, L, C$ ) sont en phase ( $\phi = 0$ )
- L'impédance du dipôle ( $R, L, C$ ) est égale à  $R$  résistance **totale** du dipôle (l'effet de l'inductance annule l'effet de la capacité).

## 4.4. Détermination de la bande passante

La bande passante en pulsation est l'ensemble des pulsations pour lesquelles la réponse en intensité est supérieure à  $\frac{I_0}{\sqrt{2}}$ ;  $I_0$  étant l'intensité efficace du courant à la résonance.

Soient  $\omega_1$  et  $\omega_2$  les pulsations limites de la bande passante. Pour déterminer  $\omega_1$  et  $\omega_2$  on écrit :

$$I = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{U}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}} = \frac{U}{R\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{R^2 + \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2} = R\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$R^2 + \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2 = 2R^2 \Rightarrow \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2 = R^2 \Rightarrow$$

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = R \text{ ou } L\omega - \frac{1}{C\omega} = -R \Rightarrow$$

$$LC\omega^2 - RC\omega - 1 = 0 : \textcircled{1} \text{ ou } LC\omega^2 + RC\omega - 1 = 0 : \textcircled{2}$$

Pour les deux équations, on a :  $\Delta = R^2C^2 + 4LC$

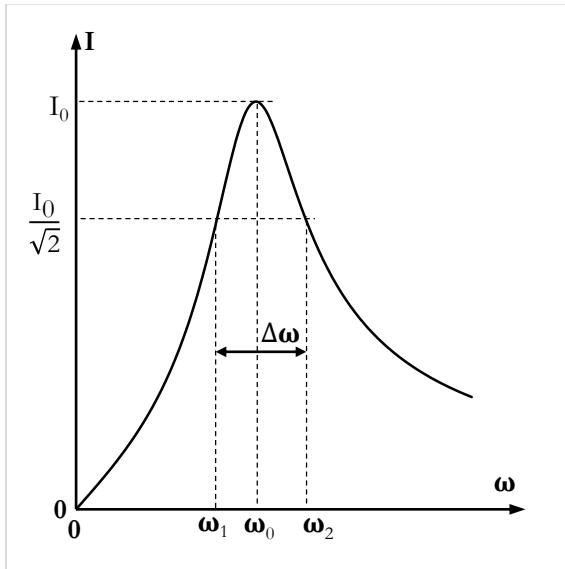
On a une racine positive pour chaque équation :

$$\text{Pour } ① : \omega = \frac{RC + \sqrt{\Delta}}{2LC} \text{ et pour } ② : \omega' = \frac{-RC + \sqrt{\Delta}}{2LC}$$

$$\omega > \omega' \Rightarrow \omega_2 = \omega \text{ et } \omega_1 = \omega' \Rightarrow \boxed{\omega_1 = \frac{-RC + \sqrt{\Delta}}{2LC} \text{ et } \omega_2 = \frac{RC + \sqrt{\Delta}}{2LC}}$$

La largeur de la bande passante est :

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L} \text{ et } \Delta N = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{R}{2\pi L}$$



#### 4.5. Facteur de qualité

L'acuité des courbes de résonances est caractérisée par le facteur de qualité Q du circuit défini par : 
$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$$

Le facteur de qualité n'a pas d'unité.

Plus Q est petit, plus la courbe est large et que le circuit est moins sélectif.

#### 4.6. Surtension à la résonance aux bornes de la bobine et du condensateur

$$U_C = Z_C I_0 = \frac{I_0}{C\omega_0} \text{ or } I_0 = \frac{U}{R} \Rightarrow U_C = \frac{U}{RC\omega_0} = QU \Rightarrow \boxed{U_C = QU}$$

$$U_L = Z_L I_0 = L\omega_0 \frac{U}{R} = \frac{1}{C\omega_0 R} \frac{U}{R} = \frac{U}{RC\omega_0} = QU \Rightarrow \boxed{U_L = QU}$$

Si  $Q > 1$ , il y a **surtension** aux bornes du condensateur et de la bobine. Cela peut entrainer le **claquage** du condensateur (destruction de l'isolant).

### ***Application***

Un dipôle ( $R$ ,  $L$ ,  $C$ ) renferme une inductance pure  $L = 0,10\text{ H}$ , une résistance  $R = 12\text{ }\Omega$  et un condensateur de capacité  $C$ . La tension délivrée par le générateur est :

$$u = 60\sqrt{2}\cos(100\pi t).$$

- 1) Quelle valeur faut-il donner à  $C$  pour qu'il ait résonance d'intensité ?
- 2) Calculer l'intensité du courant de résonance. Calculer le facteur de qualité du circuit.
- 3) Calculer à la résonance la tension efficace aux bornes du condensateur.

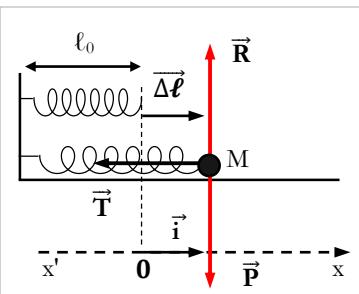
# P<sub>11</sub> : OSCILLATIONS MECANIQUES LIBRES

## 1. OSCILLATIONS MECANIQUES LIBRES NON AMORTIES: ETUDE DU PENDULE ELASTIQUE HORIZONTAL

Considérons un solide de masse  $\mathbf{m}$  accroché à l'une des extrémités d'un ressort horizontal, de constante de raideur  $\mathbf{k}$  (voir figure).

Le solide peut glisser sans frottement sur le plan horizontal.

A l'équilibre le ressort n'est ni allongé ni comprimé, la position du centre d'inertie G du solide coïncide avec l'origine de l'axe  $x'x$ . Déplaçons le solide de sa position d'équilibre suivant l'axe  $x'x$  puis abandonnons-le sans vitesse initiale. Le solide oscille autour de sa position d'équilibre.



### 1.1. Equation différentielle du mouvement du solide

Système : solide de masse

Référentiel du laboratoire supposé galiléen.

A l'équilibre du solide, on a :  $\vec{R} + \vec{P} = \vec{0}$

A un instant  $t$  du mouvement, on a d'après le T.C.I :  $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}$

$$\vec{R} + \vec{P} = \vec{0} \Rightarrow \vec{T} = m\vec{a} ; \quad \vec{T} = -k\Delta\ell ;$$

$$\overrightarrow{OM} = \vec{x} = \Delta\ell ; \quad \vec{a} = \frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{OM} = \ddot{\vec{x}} \Rightarrow -kx = m\ddot{x} \Rightarrow kx = m\ddot{x} \Rightarrow$$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0} \quad \text{Equation différentielle d'un mouvement oscillatoire non amorti.}$$

### 1.2. Solution de l'équation différentielle

Posons  $\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$  ; la solution de cette équation peut se mettre sous la forme :  $\boxed{x = x_m \cos(\omega_0 t + \Phi)}$

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}} : \text{pulsation propre} ; \quad \boxed{T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}} : \text{période propre} ;$$

$$\boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}} : \text{fréquence propre.}$$

$\mathbf{x}_m$  et  $\Phi$  : sont des constantes déterminées à partir des conditions initiales.

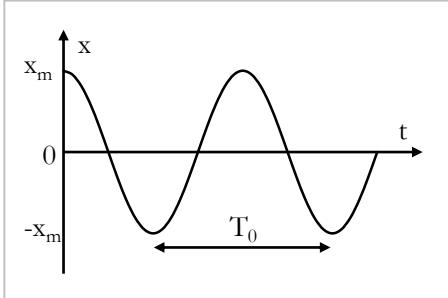
L'équation horaire de la vitesse est :

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = -\omega_0 x_m \cdot \sin(\omega_0 t + \Phi) = \omega_0 x_m \cdot \cos\left(\omega_0 t + \Phi + \frac{\pi}{2}\right)$$

L'équation horaire de l'accélération est :

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega_0^2 x_m \cdot \cos(\omega_0 t + \Phi) = -\omega_0^2 x \Rightarrow a = -\omega_0^2 x$$

Si à  $t = 0$ ,  $x = x_m$ , alors on a :  $x = x_m \cos(\omega_0 t)$



### 1.3. Conservation de l'énergie mécanique du système

L'énergie totale du système (ressort + solide) est donnée par :

$$\begin{aligned} E(t) &= E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \\ E(t) &= \frac{1}{2}m[-\omega_0 x_m \cdot \sin(\omega_0 t + \Phi)]^2 + \frac{1}{2}k[x_m \cdot \cos(\omega_0 t + \Phi)]^2 \\ E(t) &= \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \Phi) + \frac{1}{2}kx_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \Phi) = \frac{1}{2}kx_m^2 = \text{cte} \end{aligned}$$

$$E(t) = \frac{1}{2}kx_m^2 = \text{constante}$$

Le système (ressort + solide de masse m) est conservatif. Au cours du mouvement du système, il y'a transformation mutuelle et permanent d'énergie cinétique en énergie potentielle et vice versa.

**Remarque** : on peut retrouver l'équation différentielle du mouvement à partir de l'énergie mécanique instantanée. En effet, on a :

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{cte} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow m\ddot{x}\dot{x} + kx\dot{x} = 0 \Rightarrow \\ \dot{x}(m\ddot{x} + kx) &= 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 ; \text{ car } \dot{x} \neq 0 \end{aligned}$$

### 1.4. Oscillateur harmonique

On appelle oscillateur harmonique tout système physique dont un paramètre  $\theta$  (abscisse, angle, tension électrique...) vérifie une équation différentielle de type :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

Si le système oscille sur une droite, l'oscillateur est dit linéaire.

## 2. OSCILLATIONS MECANIQUES AMORTIES

Reprendons le pendule élastique horizontal précédent et supposons qu'il existe des forces de frottement représentées par une force  $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$ . ( $\lambda$  est appelé : coefficient de frottement).

### 2.1. Etablissement de l'équation différentielle

Le théorème du centre d'inertie s'écrit :

$$\vec{R}_n + \vec{P} + \vec{f} + \vec{T} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{R}_n + \vec{P} - \lambda \vec{v} + \vec{T} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{T} = -k \Delta \vec{l}; \vec{OM} = \vec{x} = \vec{\Delta l}; \vec{a} = \frac{d^2}{dt^2} \vec{OM} = \vec{x}''; \vec{f} = -\lambda \vec{x} \Rightarrow \vec{R}_n + \vec{P} - \lambda \vec{x} - k \vec{x} = m \vec{x}''$$

$$\text{En projetant dans } \vec{t}, \text{ on a: } -kx - \lambda v = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow m \ddot{x} + \lambda \dot{x} + kx = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{\lambda}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \Rightarrow$$

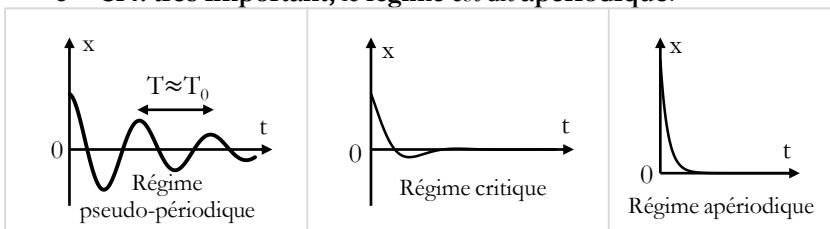
$$\boxed{\ddot{x} + \frac{\lambda}{m} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

Equation différentielle d'un système amorti.

### 2.2. Les régimes du mouvement d'oscillation amortie

En traçant la courbe  $x = f(t)$ , on constate une diminution de l'amplitude des oscillations. Cela est dû à une perte d'énergie du système. Suivant les valeurs du coefficient d'amortissement  $\lambda$ , trois cas de figure se présentent :

- Si  $\lambda$  est faible : le régime est dit **pseudo-périodique**. La pseudo-période est :  $T \approx T_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$
- Si  $\lambda$  est important : en écartant le solide, on constate qu'il revient à sa position d'équilibre sans osciller : c'est le **régime critique**.
- Si  $\lambda$  très important, le régime est dit **apériodique**.



### 2.3. Variation de l'énergie mécanique

Déterminons la variation de l'énergie mécanique du système précédent :  $\Delta E_m$

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = \frac{m}{2} \frac{d}{dt}v^2 + \frac{k}{2} \frac{d}{dt}x^2 = mv \frac{dv}{dt} + kx \frac{dx}{dt} \Rightarrow$$

$$v \left( m \frac{dv}{dt} + kx \right) = (-\lambda v)v = -fv$$

$$\Rightarrow dE_m = -fvdt \Rightarrow \Delta E_m = -fv\Delta t = -fd = W(\vec{f});$$

$$\boxed{\Delta E_m = -fd = W(\vec{f}) < 0}$$

On constate que l'énergie mécanique se dégrade au cours du temps. C'est cette perte d'énergie qui justifie la diminution d'amplitude  $x_m$  des oscillations au cours du temps et donc l'amortissement observé.

### 3. ANALOGIE GRANDEURS MECANIQUES ET GRANDEURS ELECTRIQUES

Pendule élastique	Circuit (L, C)
Energie potentielle : $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ Energie cinétique : $E_C = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$	Energie électrostatique : $E_e = \frac{1}{2C}q^2$ Energie magnétique : $E_m = \frac{1}{2}L\left(\frac{dq}{dt}\right)^2$
Equation différentielle et solution $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$ ; $x = X_m \cos(\omega_0 t + \phi)$ Avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	Equation différentielle et solution $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0$ Avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

Ces relations conduisent aux analogies entre les grandeurs mécaniques et électriques ci-dessous :

$m \leftrightarrow L$	$k \leftrightarrow \frac{1}{C}$	$x \leftrightarrow q$	$v \leftrightarrow i$
-----------------------	---------------------------------	-----------------------	-----------------------

## P<sub>12</sub> : INTERFERENCES LUMINEUSES

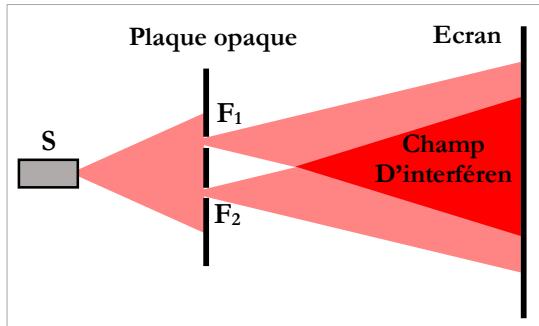
### 1. PHENOMENE D'INTERFERENCE DE LA LUMIERE

#### 1.1. Interférence en lumière monochromatique

##### a) Expérience des fentes de Young

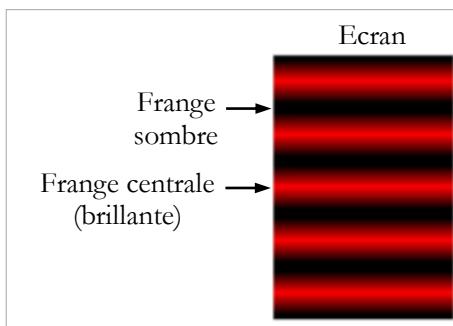
Une source S de lumière monochromatique envoie sur une plaque opaque percée de fentes très fines F<sub>1</sub> et F<sub>2</sub>.

Un écran est placé derrière la plaque. La lumière est diffractée au niveau de chacune des fentes.



##### b) Observations

Sur l'écran, on voit une zone où les deux faisceaux issus de F<sub>1</sub> et F<sub>2</sub> se superposent. Cette zone est appelée champ d'interférence. Dans ce champ on voit une alternance de fines bandes sombres et claires (brillantes), rectilignes, parallèles, équidistantes appelées franges d'interférence.



##### c) Interprétation

La présence des franges d'interférence montre que la lumière est constituée d'ondes.

- ◆ En un point M d'une frange claire se superposent les ondes lumineuses issues des fentes F<sub>1</sub> et F<sub>2</sub>, arrivant en phase : les interférences sont dites **constructives**.
- ◆ En un point M d'une frange sombre se superposent les ondes lumineuses issues des fentes F<sub>1</sub> et F<sub>2</sub> arrivant en opposition de phase : les interférences sont dites **destructives**.

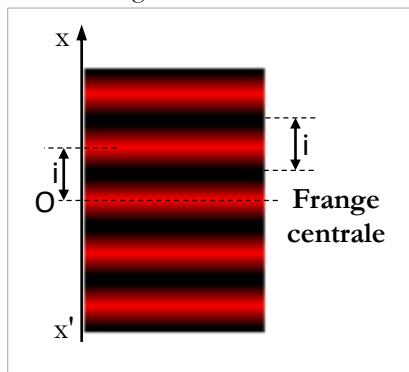
#### d) Conditions d'interférence

Pour obtenir des franges d'interférence, il faut deux sources cohérentes. Deux sources sont cohérentes si :

- elles émettent des vibrations de même période (on dit qu'elles sont synchrones) ;
- elles présentent une différence de phase constante ;
- le rapport de leurs amplitudes est constant.

#### 1.2. Etude théorique du phénomène d'interférence

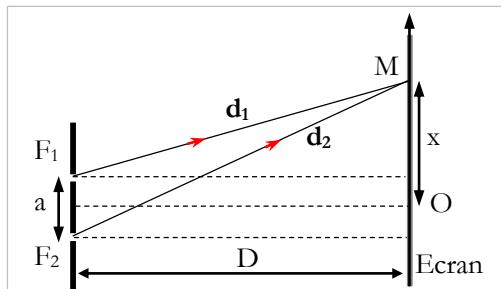
Pour déterminer les positions des franges, on utilise un axe  $x'$ Ox dont l'origine O coïncide avec le milieu de la fringe centrale.



#### a) Expression de la différence de marche

Soit un point M d'abscisse  $x$  sur la zone d'interférence. Soient deux rayons lumineux issus de  $F_1$  et  $F_2$  qui arrivent en  $M(x)$ .

La différence de marche  $\delta$  entre ces rayons lumineux représente la différence des chemins optiques parcourus par ces deux rayons pour arriver en M.



$$\delta = F_2 M - F_1 M = d_2 - d_1$$

$$d_2^2 = D^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 \text{ et } d_1^2 = D^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$d_2^2 - d_1^2 = (d_2 - d_1)(d_2 + d_1) = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = 2ax$$

$$x \ll D \text{ et } a \ll D \Rightarrow d_2 + d_1 = 2D \Rightarrow 2\delta D = 2ax \Rightarrow \boxed{\delta = \frac{ax}{D}}$$

### b) Position des milieux des franges claires

- Un point M(x) appartient au milieu d'une frange claire si la différence de marche  $\delta$  entre les ondes qui arrivent en M est :  $\boxed{\delta = k\lambda}$ ;  $k \in \mathbb{Z}$

$$\delta = \frac{ax}{D} = k\lambda \Rightarrow \boxed{x_k = k \frac{\lambda D}{a}}$$

Si  $k = 0 \Rightarrow x = 0$  : M est au milieu de la frange centrale ;

Si  $k = 1 \Rightarrow x = \frac{\lambda D}{a} > 0$  : M est au milieu de la 1<sup>ère</sup> frange claire au-dessus de la frange centrale.

Si  $k = -1 \Rightarrow x = -\frac{\lambda D}{a} < 0$  : M est au milieu de la 1<sup>ère</sup> frange claire en dessous de la frange centrale.

- Un point M(x) appartient au milieu d'une frange sombre si la différence de marche  $\delta$  entre les ondes qui arrivent en M est :

$$\boxed{\delta = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda} ; k \in \mathbb{Z} ; \delta = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda = \frac{ax}{D} \Rightarrow \boxed{x_k = \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda D}{a}}$$

Si  $k = 0 \Rightarrow x = \frac{\lambda D}{2a} > 0$  : M est au milieu de la 1<sup>ère</sup> frange sombre en haut de la frange claire

Si  $k = -1 \Rightarrow x = -\frac{\lambda D}{2a} < 0$  : M est au milieu de la 1<sup>ère</sup> frange sombre en bas de la frange sombre

### c) L'interfrange

L'interfrange  $i$  est la distance qui sépare les milieux de deux franges consécutives de même nature.

Soient deux franges consécutives de même nature de positions respectives  $x_k$  et  $x_{k+1}$ .  $\boxed{i = x_{k+1} - x_k}$ ; i s'exprime en mètre (m).

- ♦ Détermination de l'interfrange  $i$  à partir de deux franges claires consécutives

$$x_k = k \frac{\lambda D}{a} \text{ et } x_{k+1} = (k + 1) \frac{\lambda D}{a} \Rightarrow i = x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda D}{a} \Rightarrow \boxed{i = \frac{\lambda D}{a}}$$

- ♦ Détermination de l'interfrange  $i$  à partir de deux franges sombres consécutives

$$x_k = \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda D}{a} \text{ et } x_{k+1} = \left(k + 1 + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda D}{a} \Rightarrow$$

$$i = \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda D}{a} + \frac{\lambda D}{a} - \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda D}{a} = \frac{\lambda D}{a} \Rightarrow \boxed{i = \frac{\lambda D}{a}}$$

#### d) Ordre d'interférence

Les positions des franges claires sont données, en fonction de l'interfrange  $i$  par :

$$x = k \frac{\lambda D}{a} = ki ;$$

Celles des franges sombres par :  $x = \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda D}{a} = \left(k + \frac{1}{2}\right) i$

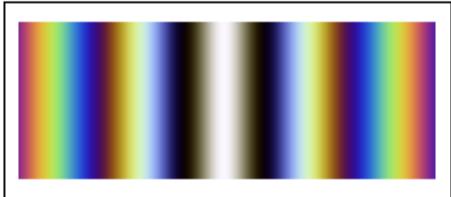
On appelle ordre d'interférence le rapport :  $\boxed{p = \frac{\delta}{\lambda}}$ ;  $p = \frac{ax}{\lambda D} = \frac{x}{i}$ ;  $\boxed{p = \frac{x}{i}}$

L'ordre d'interférence d'une frange **claire** est :  $\boxed{p = k}$

L'ordre d'interférence d'une frange **sombre** est :  $\boxed{p = k + \frac{1}{2}}$

### **1.3. Interférence en lumière blanche**

Avec le dispositif des fentes de Young, lorsqu'on remplace la source de lumière monochromatique par une source de lumière blanche, on observe sur l'écran, des franges pratiquement rectilignes. A chaque radiation monochromatique correspond un système de franges et tous ces systèmes s'ajoutent en intensité. Au niveau de la **frange centrale (blanche)**, la différence de marche est nulle pour toutes les radiations. Si on s'écarte de la frange centrale, on observe des **franges irisées (colorées)** et à chaque valeur de la différence de marche correspond une teinte déterminée.

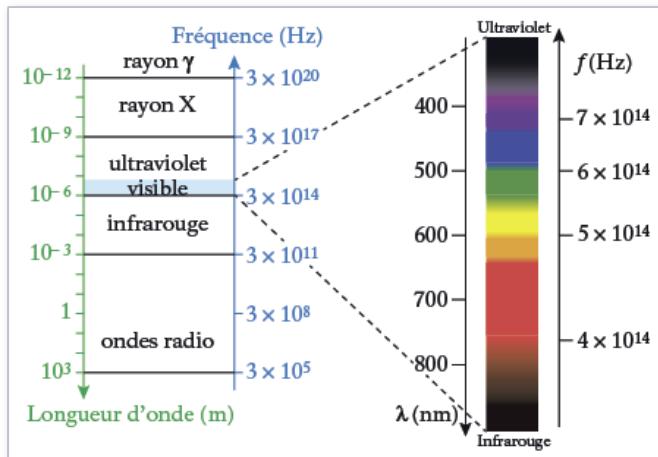


## **2. LES ONDES ELECTROMAGNETIQUES**

Les ondes électromagnétiques sont les ondes qui se propagent dans le vide à la même vitesse que la lumière.

Les ondes E.M. portent des noms différents selon le domaine de fréquence auquel elles appartiennent. Elles véhiculent d'autant plus d'énergie que leurs fréquences sont élevées. On parle de lumière ou de domaine visible pour les ondes E.M. que l'œil humain est capable de détecter.

La lumière est une onde électromagnétique, tout comme les rayons X, les rayons gammas et les ondes radios. Notre œil ne peut percevoir les ondes électromagnétiques que si elles ont une longueur d'onde entre **400 nm** et **800 nm**. Les ondes dans cette plage font donc partie du visible, les autres sont invisibles.



### Application

On considère le dispositif des fentes de Young. La distance entre les sources  $S_1$  et  $S_2$  est  $a = 1$  mm. La distance des sources à l'écran est  $D = 1,20$  m.

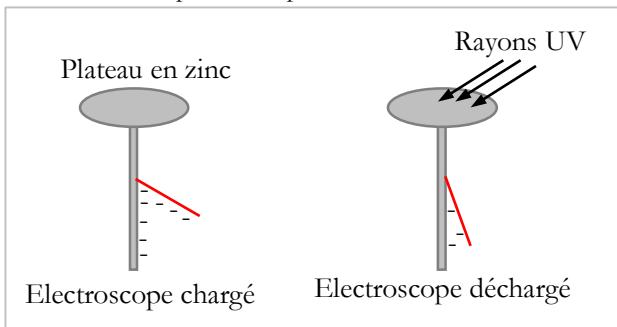
- 1) La source primaire émet une radiation monochromatique de longueur d'onde  $\lambda = 0,60 \mu\text{m}$ .
  - a) Calculer l'interfrange  $i$ .
  - b) Calculer la distance sur l'écran qui sépare les milieux des 5<sup>ème</sup> franges obscures de part et d'autre de la frange centrale.
- 2) La source émet simultanément deux radiations de longueurs d'onde respectives  $0,60 \mu\text{m}$  et  $0,45 \mu\text{m}$ . A quelle distance du milieu de la frange centrale se produit la première fois coïncidence entre deux franges brillantes correspondant aux deux radiations ?

# P<sub>13</sub> : EFFET PHOTOELECTRIQUE

## 1. MISE EN EVIDENCE DE L'EFFET PHOTONÉLECTRIQUE

### 1.1. Expérience de Hertz

Considérons un électroscoppe dont le plateau est en zinc.



On constate que :

- En chargeant négativement l'électroscoppe et en éclairant le plateau avec la lumière UV, l'électroscoppe se décharge.
- En chargeant positivement l'électroscoppe et éclairant le plateau, l'électroscoppe ne se décharge.

### 1.2. Interprétation

D'après cette expérience, on peut dire que les rayons UV attirent les charges négatives (électrons). Ce qui fait que l'électroscoppe se décharge dans le cas où il est chargé négativement.

### 1.3. Définition de l'effet photoélectrique

L'effet photoélectrique est l'émission d'électrons par un matériau convenablement éclairé.

Il a été découvert en 1889 par le physicien allemand Heinrich Rudolf Hertz.

## 2. INTERPRETATION DE L'EFFET PHOTONÉLECTRIQUE

### 2.1. Théorie d'Einstein

L'effet photoélectrique ne peut pas être expliqué par l'aspect ondulatoire de la lumière. Pour l'expliquer, **Albert Einstein** propose en 1905 la théorie

corpusculaire de la lumière : la lumière est constituée de **particules** appelées **photons de masse et de charge nulles**, se déplaçant à la vitesse à la lumière.

$$c = 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

Un photon possède de l'énergie appelée **quantum d'énergie** proportionnelle à la fréquence  $\nu$  de la radiation correspondante.

$$[E = h\nu] ; h \text{ est la constante de Planck : } h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$$

$$E = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = h\frac{c}{\lambda} ; [E = h\frac{c}{\lambda}]$$

## 2.2. Condition d'extraction des électrons

L'expérience montre que certains rayonnements ne peuvent pas extraire des électrons sur n'importe quel métal. Pour extraire des électrons il faut fournir au métal une énergie au moins égale au travail d'extraction ou de liaison de l'électron.

$$W_0 = h\nu_0 = h\frac{c}{\lambda_0}$$

$\nu_0$  et  $\lambda_0$  sont appelés respectivement la **fréquence seuil** et la **longueur d'onde seuil** du métal. Ce sont des caractéristiques du métal.

Considérons un photo d'énergie  $W = h\nu$  envoyé sur un métal d'énergie d'extraction  $W_0 = h\nu_0$ .

- ◆ Si  $W < W_0 \Rightarrow \nu < \nu_0$  ou  $\lambda > \lambda_0$ , alors il n'y a pas d'effet photoélectrique.
- ◆ Si  $W = W_0 \Rightarrow \nu = \nu_0$  ou  $\lambda = \lambda_0$ , alors il y a effet photoélectrique mais l'électron reste immobile à la surface du métal.
- ◆ Si  $W > W_0 \Rightarrow \nu > \nu_0$  ou  $\lambda < \lambda_0$ , alors il y a effet photoélectrique et les électrons acquièrent une énergie cinétique qui est égale à l'énergie supplémentaire.  $E_C = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = W - W_0 = h(\nu - \nu_0) \Rightarrow$

$$\left[ \frac{1}{2}mv_{max}^2 = h(\nu - \nu_0) \right]$$

### Application

Une cellule photoélectrique comprend une plaque métallique recouverte de césium. L'énergie d'extraction d'un électron de ce métal est  $E_0 = 1,88 \text{ eV}$ . Elle est éclairée successivement par deux radiation de longueurs d'onde  $\lambda_1 = 700 \text{ nm}$  et  $\lambda_2 = 540 \text{ nm}$ .

1) Préciser dans quel cas on a effet photoélectrique.

2) Calculer la vitesse maximale des électrons extraits du métal par la radiation permettant l'effet photoélectrique.

### **3. DUALITE ONDE CORPUSCULE DE LA LUMIERE**

Les phénomènes de réflexion, de réfraction, de diffraction et d'interférence lumineuse traduisent l'aspect ondulatoire de la lumière. La lumière est une onde électromagnétique qui se propage à la vitesse  $c = 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$  dans le vide et dans l'air.

Le phénomène d'effet photoélectrique traduit l'aspect corpusculaire de la lumière. La lumière est donc à la fois onde et corpuscule. Elle est à la fois un phénomène continu sous son aspect ondulatoire et un phénomène discontinu sous son aspect corpusculaire.

### **4. APPLICATIONS**

Détecteur de niveau, dispositif de sécurité des banques, fournir de l'électricité (cellule photovoltaïque).

# P<sub>14</sub> : NIVEAUX D'ENERGIE DE L'ATOME

## 1. SPECTRES ATOMIQUES

### 1.1. Spectre d'émission et spectre d'absorption

Les atomes d'un gaz sous faible pression peuvent émettre une lumière dont le spectre est constitué de **raies fines**. On parle de **spectre d'émission**.

Si on place le gaz précédent sur le trajet de la lumière blanche, le spectre après la traversée de la lumière, montre qu'une partie des **radiations** de la lumière blanche est absorbée. On parle de **spectre d'absorption**.

On remarque que les longueurs d'onde des radiations manquantes sont égales aux longueurs d'onde du spectre d'émission.

- ◆ Les spectres atomiques d'émission sont caractéristiques des atomes qui les produisent. Ils sont constitués de raies correspondant à des radiations monochromatiques précises.
- ◆ Les spectres d'absorption sont constitués de **raies noires** dans le spectre continu de la lumière blanche.
- ◆ Les spectres d'absorption et d'émission sont des spectres de raies. Ils sont discontinus.

### 1.2. Interprétation des spectres d'émission et d'absorption

Pour expliquer l'existence des spectres de raies bien définies, le physicien Danois **Niels Henrik David Bohr** introduit en **1913** les postulats suivants :

- ✓ L'atome ne peut exister que dans certains états d'énergie bien définis ; chaque état est caractérisé par un niveau d'énergie ;
- ✓ Les variations d'énergie de l'atome sont quantifiées ;
- ✓ Un photon de fréquence  $\nu$  est émis ou absorbé lorsque l'atome effectue une transition entre deux niveaux d'énergie ;

## 2. APPLICATION A L'ATOME D'HYDROGENE

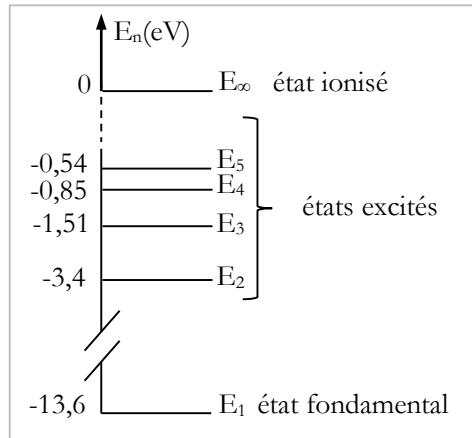
### 2.1. Niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène

L'atome d'hydrogène est le plus simple des atomes. Il est constitué d'un électron gravitant autour d'un proton pour l'isotope le plus abondant. Le niveau d'énergie d'ordre  $n$  de cet atome est donné par la relation :

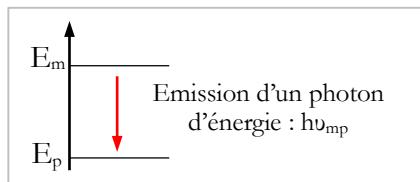
$$E_n = -\frac{13,6}{n^2} = -\frac{E_0}{n^2} \text{ (eV)} \Rightarrow E_0 = 13,6 \text{ eV}$$

**n**: est appelé nombre quantique principal, il peut prendre que des valeurs entières : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ...

- Si  $n = 1 \Rightarrow E_1 = -13,6 \text{ eV}$ : c'est le niveau d'énergie le plus bas : l'atome est à l'état fondamental, état le plus stable.
- Si  $n = \infty ; \Rightarrow E = E_{\infty} = 0$ , l'atome est ionisé.

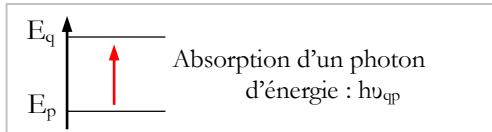


- Si l'atome passe d'un niveau m d'énergie  $E_m$  à un niveau p d'énergie  $E_p$  ( $m > p$ ), alors il émet un photon d'énergie égale à :  $h\nu_{mp}$ .



$$\Delta E = E_p - E_m = -\frac{E_0}{p^2} + \frac{E_0}{m^2} = E_0 \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{p^2} \right) < 0 \Rightarrow h\nu_{mp} = h \frac{c}{\lambda_{mp}} = |\Delta E|$$

- Si l'atome passe d'un niveau p d'énergie  $E_p$  à un niveau q d'énergie  $E_q$  ( $p < q$ ), alors il absorbe un photon d'énergie égale à :  $h\nu_{qp}$ .



$$\Delta E = E_q - E_p = -\frac{E_0}{q^2} + \frac{E_0}{p^2} = E_0 \left( \frac{1}{p^2} - \frac{1}{q^2} \right) = h\nu_{qp} = h \frac{c}{\lambda_{qp}}$$

**Remarque :**

- ✓ Pour ioniser l'atome d'hydrogène à partir de son état fondamental, il faut au moins lui fournir une énergie égale à 13,6 eV.  
En effet :  $\Delta E = E_\infty - E_1 = 0 - \left(-\frac{E_0}{1^2}\right) = E_0 = 13,6 \text{ eV}$ .
- ✓ Lorsque l'atome d'hydrogène **reçoit un photon** dont l'énergie est supérieure à l'énergie d'ionisation de l'atome à l'état où il se trouve, ce photon est absorbé : une partie de son énergie sert à ioniser l'atome, l'autre est transférée à l'électron de l'atome sous forme d'énergie cinétique.
- ✓ Lorsque l'atome d'hydrogène **reçoit un photon** dont l'énergie est inférieure à l'énergie d'ionisation de l'atome à l'état où il se trouve, ce photon ne peut être absorbé que si son énergie correspond exactement à l'énergie de transition entre le niveau  $E_m$  où se trouve l'atome d'hydrogène et un niveau d'énergie  $E_p$  ( $p > m$ ).
- ✓ Si un atome d'hydrogène de niveau d'énergie  $E_n$  **reçoit un électron** ayant une énergie cinétique  $E_C$ , l'atome peut passer à un niveau d'énergie supérieure  $E_p$  si  $E_C \geq \Delta E = E_p - E_n$ .

L'électron « rebondit » avec une énergie cinétique :  $E'_C = E_C - \Delta E$

**Application**

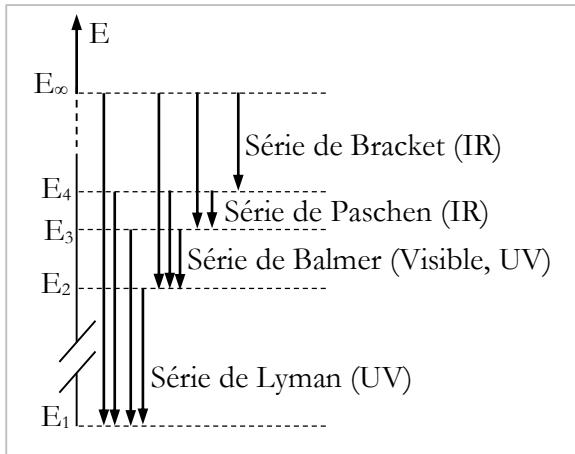
- 1) Calculer la fréquence de la lumière absorbée par l'atome d'hydrogène lorsqu'il passe du niveau fondamental au niveau excité  $n = 3$ .
- 2) Calculer l'énergie qu'il faut fournir à l'atome d'hydrogène pour l'ioniser dans les cas suivants :
  - a) l'atome se trouve à l'état fondamental ;
  - b) l'atome se trouve au niveau d'énergie  $E_3$ .
- 3) On fournit successivement à l'atome d'hydrogène pris dans son état fondamental des photons d'énergie respectives : 6 eV ; 12,75 eV et 18 eV. Dans quel(s) cas le photon est-il absorbé ? Dans le cas où l'atome est ionisé, calculer l'énergie cinétique de l'électron.
- 4) On excite un atome d'hydrogène pris dans son état fondamental par un électron ayant une énergie cinétique  $E_C = 12,53 \text{ eV}$ . Quel niveau d'énergie occupera l'hydrogène juste après le choc avec l'électron ? Calculer la vitesse de rebondissement de l'électron après le choc.

On donne masse de l'électron  $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ .

## 2.2. Série de raies d'émission de l'atome d'hydrogène

Une série de raies correspond à l'ensemble des radiations émises lorsque l'atome passe des différents niveaux excités p à un même niveau n avec ( $n < p$ ).

Pour l'hydrogène, on a entre autres, les séries de raies de **Lyman** ( $n = 1$ ), de **Balmer** ( $n = 2$ ), de **Paschen** ( $n = 3$ )...



**NB :** Dans une série, la raie ayant la plus grande fréquence dans le vide, est appelée **raie limite**, et la longueur d'onde correspondante est appelée **longueur d'onde limite** de cette série.

**Calcule des longueurs d'onde limites des séries de Lyman, Balmer et Paschen.**

$$h\nu_{\text{lim}} = \frac{hc}{\lambda_{\text{lim}}} = |E_n - E_\infty| = \left| -\frac{E_0}{n^2} \right| = \frac{E_0}{n^2} \Rightarrow \boxed{\lambda_{\text{lim}} = n^2 \frac{hc}{E_0}}$$

$$\text{Pour la série de Lyman : } n = 1 \Rightarrow \lambda_{\text{lim}} = \frac{hc}{E_0} = 91.10^{-9} \text{ m} = 91 \text{ nm}$$

$$\text{Pour la série de Balmer : } n = 2 \Rightarrow \lambda_{\text{lim}} = \frac{4hc}{E_0} = 365.10^{-9} \text{ m} = 365 \text{ nm}$$

$$\text{Pour la série de Paschen : } n = 3 \Rightarrow \lambda_{\text{lim}} = \frac{9hc}{E_0} = 821.10^{-9} \text{ m} = 821 \text{ nm}$$

### 3. APPLICATIONS

Les spectres atomiques sont utilisés pour la détermination :

- De la composition chimique des corps ;
- De la température des étoiles,
- De la composition chimique de la couronne solaire.

# P<sub>15</sub> : REACTIONS NUCLEAIRES

## 1. LE NOYAU ATOMIQUE

### 1.1. Constituants du noyau

Le noyau atomique est constitué de nucléons, particules qui sont :

- des **protons**, de masse  $m_p \approx 1,67 \cdot 10^{-27}$  kg et de charge  $e = +1,6 \cdot 10^{-19}$  C ;
- des **neutrons**, de masse  $m_n \approx 1,67 \cdot 10^{-27}$  kg ; les neutrons n'ont pas de charge.

### 1.2. Nucléide

Un nucléide est un type d'atome ou de noyau atomique caractérisé par le nombre de protons et de neutrons qu'il contient.

Un nucléide est symbolisé par  ${}^A_Z X$  :

**X** : étant le symbole de l'élément chimique correspondant au nucléide ;

**A** : le nombre de masse ou nombre de nucléons du nucléide ;

**Z** : le numéro atomique ou nombre de charge ou nombre de protons de l'élément chimique correspondant au nucléide.

Si **N** est le nombre de neutrons du nucléide, alors on a :  $N = A - Z$

### 1.3. Notion d'isotopes

On appelle isotopes des nucléides ayant le même nombre protons et des nombres de nucléons différents.

${}^{14}_6 C$ ;  ${}^{13}_6 C$  et  ${}^{12}_6 C$  : sont des isotopes du carbone.

${}^3_1 H$ ;  ${}^2_1 H$  et  ${}^1_1 H$  : sont des isotopes de l'hydrogène.

**NB** : un isotope est un noyau qui se distingue des autres noyaux d'un même élément chimique par son nombre de nucléons. Exemple : le carbone 14 est un isotope.

## 2. NOYAUX, ENERGIE ET MASSE

### 2.1. Relation d'Einstein : équivalence masse-énergie

D'après **Einstein**, la masse est une forme d'énergie. **Un système massif au repos possède une énergie due à sa masse**, appelée **énergie de masse** : Elle est donnée par :

$$E = m \cdot c^2$$

**E** : énergie de masse (J)

**m** : masse (kg)

**c** : vitesse de la lumière dans le vide :  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s

## 2.2. Unité de masse atomique

L'unité de masse atomique notée u est égale au 1/12 de la masse du carbone 12.

$$1\text{u} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

L'énergie correspondant à 1 u est environ égale à 931,5 MeV.

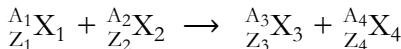
$$1\text{u} = 931,5 \text{ MeV/c}^2$$

**Remarque :** la masse d'un noyau  $_{Z}^{A}\text{X}$  est sensiblement égale à A.u

$$\text{Exemple : } m( _6^{14}\text{C}) = 14\text{u} = 2,324 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$$

## 2.3. Lois de conservation

Soit une réaction nucléaire quelconque d'équation :



- Loi de Soddy

**Enoncé :** Lors d'une transformation nucléaire, il y a conservation de la charge électrique et du nombre de masse A. Cette loi ou ces lois permettent d'équilibrer une réaction nucléaire :  $\begin{cases} A_1 + A_2 = A_3 + A_4 \\ Z_1 + Z_2 = Z_3 + Z_4 \end{cases}$

- Loi de conservation de l'énergie

L'énergie d'une particule est égale à la somme de son énergie cinétique et de son énergie de masse.

$$m_1 c^2 + E_C(X_1) + m_2 c^2 + E_C(X_2) = m_3 c^2 + E_C(m_3) + m_4 c^2 + E_C(m_4) \Rightarrow [(E_C(X_3) + E_C(X_4)) - (E_C(X_1) + E_C(X_2))] = -(m_3 + m_4) - (m_1 + m_2) c^2$$

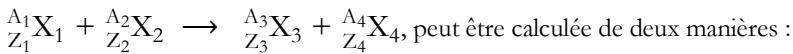
$$\Rightarrow \boxed{\Delta E_C = -\Delta mc^2}$$

- Si  $\Delta m < 0$  : il y a perte de masse, donc dégagement d'énergie : la réaction dégage de l'énergie.
- Si  $\Delta m > 0$  : il y a transformation d'énergie cinétique en masse : la réaction absorbe de l'énergie.

### Remarque

Toute désintégration s'accompagne d'une perte de masse. Lors d'une transformation nucléaire, l'énergie est libérée sous deux formes : **cinétique** et **rayonnante**.

L'énergie libérée lors de la transformation nucléaire :



- Soit en utilisant la **variation de masse  $\Delta m$**  :

$$E = \Delta mc^2 = [(m_{X_3} + m_{X_4}) - (m_{X_1} + m_{X_2})]c^2$$

- Soit en utilisant les **énergies de liaison des noyaux** :

$$[E = [E_\ell(X_1) + E_\ell(X_2)] - [E_\ell(X_3) + E_\ell(X_4)]]$$

- ♦ **Loi de conservation de la quantité de mouvement**

$$[m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_3\vec{v}_3 + m_4\vec{v}_4]$$

### **3. STABILITÉ DES NOYAUTS**

#### **3.1. Défaut de masse d'un noyau**

La masse d'un noyau  ${}^A_Z X$  est inférieure à la somme des masses de chacun de ses nucléons pris isolément. Cette différence de masse est appelée défaut de masse

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m({}^A_Z X)$$

#### **3.2. Energie de liaison d'un noyau**

L'énergie correspondant au défaut de masse  $\Delta m$  d'un noyau  ${}^A_Z X$  est appelée **énergie de liaison** ou **de cohésion**. C'est l'énergie qu'il faut fournir à un noyau au repos pour le dissocier en nucléons isolés et immobiles.

$$E_\ell = [Zm_p + (A - Z)m_n - m({}^A_Z X)]c^2 = \Delta m.c^2$$

#### **3.3. Energie de liaison par nucléon d'un noyau**

L'expression de l'énergie de liaison par nucléon notée  $E_a$  d'un noyau  ${}^A_Z X$  est :

$$E_a = \frac{E_\ell}{A}$$

Plus  $E_a$  est grande, plus le noyau est stable.

➤ Si  $E_a \geq 8$  MeV, le noyau est stable.

➤ Si  $E_a < 8$  MeV, le noyau est instable.

De deux noyaux, le plus stable est celui qui a l'énergie de liaison par nucléon la plus grande.

#### ***Application***

Calculer en MeV l'énergie de liaison par nucléon d'un noyau d'uranium 238. Conclure.

$$\begin{aligned} \text{On donne : } m({}^{238}_{92} U) &= 238,05 \text{ u} ; \quad m_p = 1,007276 \text{ u} ; \quad m_n = 1,008665 \text{ u} ; \\ 1 \quad u &= 931,5 \text{ MeV}/c^2 = 1,66 \cdot 10^{-26} \text{ kg} \end{aligned}$$

## 4. RADIOACTIVITE NATURELLE : TRANSFORMATION SPONTANÉES

En 1896, **Henry Becquerel** découvrit que l'uranium et ses composés émettaient continuellement un rayonnement capable de traverser la matière. Poursuivant les travaux de Becquerel, **Pierre et Marie Curie** ont donné à ce phénomène le nom de radioactivité.

### 4.1. Définition

La radioactivité est la transformation spontanée (**désintégration**) des noyaux atomiques instables (**radioactifs**) en d'autres noyaux plus stables avec émission de particule et de rayonnement radioactifs.

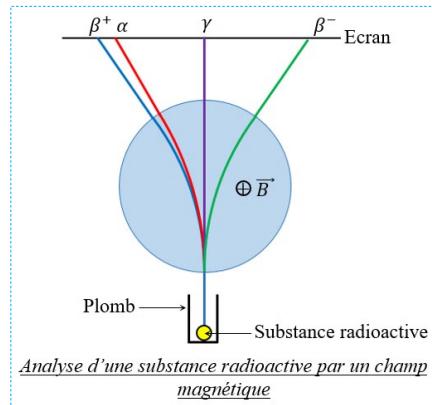
### 4.2. Caractéristiques

Les transformations radioactives sont :

- **Spontanées** : elles se produisent seules sans aucune intervention,
- **Aléatoires** : l'instant de désintégration d'un noyau ne peut pas être prévu,
- **Inéluctables** : rien ne peut empêcher ou modifier leurs déroulements,

### 4.3. Les types de particules (ou rayonnements) radioactifs

A l'aide d'un champ électrique (ou magnétique), on peut séparer les différentes particules émises par une substance radioactive (radioélément).



Les déviations observées montrent qu'il existe 4 types de particules ou 4 types de radioactivité :

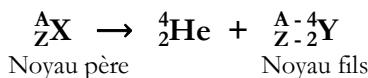
- ◆ **la particule  $\alpha$  (noyau  ${}^4_2\text{He}$ )**, il est très ionisant mais peu pénétrant (une feuille de papier peut l'arrêter) ;
- ◆ **la particule  $\beta^-$  (électron  ${}^0_{-1}\text{e}$ )**, il est peu ionisant mais très pénétrant ;

- ♦ la particule  $\beta^+$  (positon ou antiélectron  ${}^0_1e$ ), il a les mêmes propriétés que  $\beta^-$  ;
- ♦ le rayonnement  $\gamma$  : (photons), il est excitant et très pénétrant. C'est le rayonnement le plus dangereux biologiquement.

#### 4.4. Equations bilans des réactions nucléaires spontanées

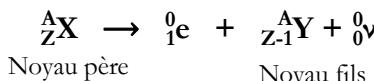
##### a) Radioactivité $\alpha$ ( ${}^4_2He$ )

Le noyau père est trop lourd, il contient trop neutrons et trop de protons ( $A > 200$ ).



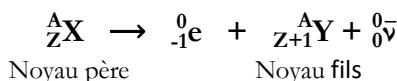
##### b) Radioactivité $\beta^+$ ( ${}^0_1e$ )

Le noyau père expulse un positon (particule de charge  $+e$  et de même masse que l'électron). Un proton du noyau se transforme en neutron et l'émission du positron s'accompagne de l'émission d'un neutrino (particule de masse nulle).



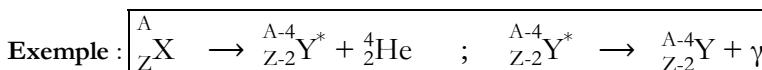
##### c) Radioactivité $\beta^-$ ( ${}^{-0}_1e$ )

Le noyau père expulse un électron. Un neutron du noyau se transforme en proton, et l'émission de l'électron s'accompagne de l'émission d'un antineutrino (particule de masse nulle).



##### d) Radioactivité $\gamma$

La radioactivité  $\gamma$  peut accompagner les radioactivités  $\alpha$ ,  $\beta^+$ ,  $\beta^-$ . Le noyau fils est émis dans un état excité, alors il revient à l'état fondamental avec émission d'un rayonnement électromagnétique  $\gamma$ .



**NB :**

Une famille radioactive est l'ensemble des nucléides issus d'un même noyau père.

Famille du Thorium : $^{232}\text{Th}$	Famille de l'Uranium : $^{238}\text{U}$
Famille de l'Actinium : $^{235}\text{U}$	Famille du Neptunium : $^{237}\text{Np}$

**Application**

Le radium  $^{226}_{88}\text{Ra}$  se désintègre spontanément en émettant une particule  $\alpha$ . Le noyau fils obtenu est un isotope du radon Rn.

1) Donner la composition du noyau de radium 226.

2) Ecrire l'équation de désintégration du noyau de radium 226.

3) Calculer en MeV puis en joule l'énergie libérée lors de la désintégration d'un noyau de radium 226.

On donne :

$$m(^{226}_{88}\text{Ra}) = 225,97786 \text{ u} ; m(\text{Rn}) = 221,97108 \text{ u} ; m(^4_2\text{He}) = 4,00151 \text{ u} ; \\ 1 \text{ u} = 931,5 \text{ MeV/c}^2 ; 1 \text{ u} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}.$$

**5. LOI DE DECROISSANCE RADIOACTIVE****5.1. Expression du nombre de noyaux radioactifs en fonction du temps**

Soit  ${}^A_Z\text{X}$  un noyau radioactif qui subit de manière spontanée une réaction nucléaire d'équation :

${}^A_Z\text{X}$	→	${}^{A_1}_{A_1}\text{Y}$	+ rayonnement ( $\alpha, \beta^+, \beta^-$ )
$t = 0$	$N_0$		0
$t \neq 0$	$N_0 - x$		x

$N_0$  : est le nombre de noyau initialement radioactifs.

$N = N_0 - x$  : est le nombre de noyau radioactifs à l'instant t.

x : est le nombre de noyaux désintégrés à l'instant t.

La variation du nombre de noyaux est proportionnelle au nombre de noyaux restants.

$$\frac{N - N_0}{t - t_0} = -\lambda N \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta N}{\Delta t} = -\lambda N}$$

$\lambda$  : est constante positive appelée constante radioactive. C'est une caractéristique du noyau  ${}^A_Z\text{X}$ .

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = -\lambda N \Rightarrow \frac{dN}{N} = -\lambda dt \Rightarrow \boxed{\ell n N = -\lambda t + K}$$

$$A t = 0, N = N_0 \Rightarrow K = \ell n N_0 \Rightarrow \ell n \left( \frac{N}{N_0} \right) = -\lambda t \Rightarrow \boxed{N = N_0 e^{-\lambda t}}$$

$\boxed{\frac{1}{\lambda} = \tau}$  : est la **durée de vie moyenne**.

### 5.2. Période radioactive ou demi-vie

La période radioactive ou demi-vie  $T$  est la durée au bout de laquelle la moitié des noyaux radioactifs initialement présents se sont désintégrés.

$$A t = T, \text{ on a : } N = \frac{N_0}{2} \Rightarrow N_0 e^{-\lambda T} = \frac{N_0}{2} \Rightarrow -\lambda T = \ell n \frac{1}{2} = -\ln 2 \Rightarrow$$

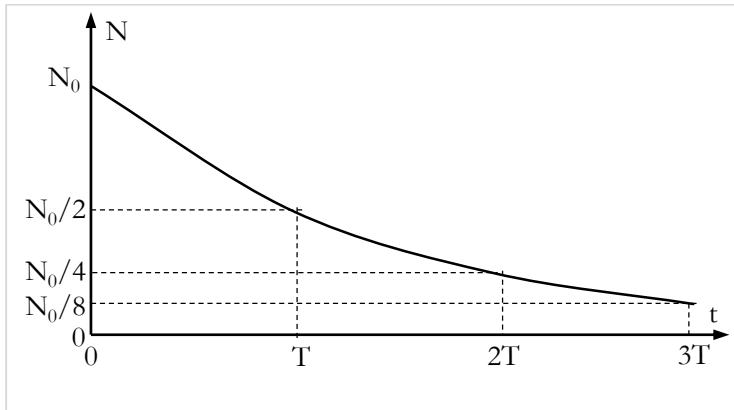
$$\boxed{T = \frac{\ell n 2}{\lambda}}$$

### 5.3. Représentation graphique de la courbe $N = f(t)$

Au bout d'un temps  $t = nT$ , on a :

$$N = N_0 e^{-\lambda nT} = N_0 e^{-\frac{\lambda n \ln 2}{\lambda}} = N_0 e^{-n \ln 2} = N_0 e^{-\ln 2^n} = \frac{N_0}{e^{\ell n 2^n}} = \frac{N_0}{2^n};$$

$$\boxed{N = \frac{N_0}{2^n}}$$



### 5.4. Activité radioactive

L'activité  $A(t)$  d'une substance radioactive est le nombre de désintégrations par unité de temps.

$$\boxed{A(t) = -\frac{d}{dt} N(t)} ; A(t) = -\frac{d}{dt} (N_0 e^{-\lambda t}) = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = \lambda N(t) \Rightarrow$$

$$\boxed{A(t) = \lambda N(t)}$$

$$A t_0, A(t) = A_0 = \lambda N_0 \Rightarrow \boxed{A(t) = A_0 e^{-\lambda t}}$$

L'activité s'exprime dans le SI en Becquerel (Bq).

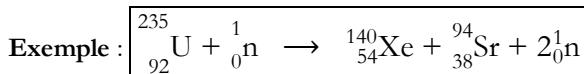
$$1 \text{ Bq} = 1 \text{ désintégration/s}$$

On utilise couramment le Curie (Ci) ;  $1 \text{ Ci} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$

## 6. REACTIONS NUCLEAIRES PROVOQUEES : RADIOACTIVITE ARTIFICIELLE

### 6.1. Fission nucléaire

La fission est la rupture d'un noyau lourd en deux noyaux plus légers sous l'action d'un neutron lent. La fission produit des neutrons.



Sr : strontium et Xe : xénon

#### NB

- ✓ Un noyau est dit **fissile** s'il peut subir une fission nucléaire.
- ✓ Un noyau est dit **fertile** s'il peut engendrer un noyau fissile.

#### Application

1/ Calculer en MeV l'énergie libérée par la fission d'un noyau d'uranium 235 suivant la réaction : 
$$\begin{array}{c} 235 \\ 92 \end{array} \text{U} + \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \text{n} \rightarrow \begin{array}{c} 140 \\ 54 \end{array} \text{Xe} + \begin{array}{c} 94 \\ 38 \end{array} \text{Sr} + 2 \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \text{n}$$

2/ En déduire l'énergie libérée par nucléon lors de cette fission.

3/ Calculer l'énergie libérée par la fission d'un gramme d'uranium 235.

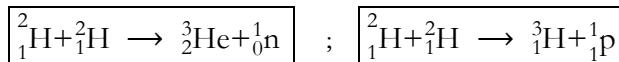
*On donne :*

$$m(\begin{array}{c} 235 \\ 92 \end{array} \text{U}) = 234,9935 \text{ u} ; m(\begin{array}{c} 94 \\ 38 \end{array} \text{Sr}) = 93,8945 \text{ u} ; m(\begin{array}{c} 140 \\ 54 \end{array} \text{Xe}) = 139,8920 \text{ u} ;$$
$$m_n = 1,0087 \text{ u} ; 1 \text{ u} = 931,5 \text{ MeV}/c^2 = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}.$$

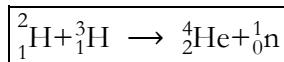
### 6.2. Fusion nucléaire

La fusion nucléaire est l'union de deux noyaux légers qui engendre un noyau plus lourd.

**Fusion de deux noyaux de deutérium :**



**Fusion d'un noyau de deutérium et d'un noyau de tritium :**



## Application

On fait la fusion d'un noyau de deutérium et d'un noyau de tritium. Il se forme de l'hélium 4 et une émission d'une autre particule.

1/ Ecrire l'équation bilan de la réaction de fusion.

2/ Calculer en MeV l'énergie libérée par cette fusion. En déduire l'énergie libérée par nucléon lors cette fusion.

*On donne :*

$$m(^2_1H) = 2,0160 \text{ u} ; m(^3_1H) = 3,0247 \text{ u} ; (^4_2He) = 4,0015 \text{ u} ; m_n = 1,0087 \text{ u}.$$

### **6.3. Comparaison des réactions de fission et de fusion nucléaires**

Pour réaliser la fission nucléaire, on fait la capture d'un neutron « lent » par un noyau fertile qui devient fissile.

La réaction de fusion nucléaire nécessite une haute température pour se produire. Les réactions de fission et de fusion nucléaires sont très exoénergétiques :

- Un noyau d'uranium 235 libère 200 MeV soit 1 MeV par nucléon ;
- Le cycle proton-proton (série de réactions thermonucléaires dans les étoiles) libère 6 MeV par nucléon.

Contrairement à la fission nucléaire, les produits de la fusion eux-mêmes (principalement de l'hélium 4) ne sont pas radioactifs, mais lorsque la réaction utilisée émet des neutrons rapides, ces derniers peuvent transformer les noyaux qui les capturent en isotopes pouvant être radioactif.

## **7. APPLICATIONS ET CONSEQUENCES DE LA RADIOACTIVITÉ**

### **7.1 Applications**

La radioactivité offre de nombreuses applications dont la datation des objets archéologiques et la radiographie en médecine. La fusion nucléaire est à l'origine de la bombe H et la fission nucléaire à celle de la bombe A.

Les réactions nucléaires ont pour application principale la production d'énergie électrique dans les centrales nucléaires.

### **7.2. Conséquences**

En traversant la matière, les particules  $\alpha$  et  $\beta$ , ainsi que le rayonnement  $\gamma$ , émis par les corps radioactifs, provoquent des ionisations responsables de destructions cellulaires pouvant entraîner la mort.

A faible dose, ils sont la cause de divers troubles, d'une augmentation des risques de cancers et peuvent engendrer des anomalies génétiques.

