3.3. Алгоритм прямого симплекс-метода

Запишем алгоритм симплекс-метода в виде последовательности шагов и разберем на примере одну из его численных реализаций (так называемый прямой симплекс-метод). Итак, алгоритм состоит из следующих шагов:

ШАГ 0. ВЫБОР НАЧАЛЬНОГО БАЗИСНОГО РЕШЕНИЯ И ЗАПОЛНЕНИЕ НАЧАЛЬНОЙ СИМПЛЕКС-ТАБЛИЦЫ.
(выполняется один раз)

ШАГ 1. ПРОВЕРКА ТЕКУЩЕГО РЕШЕНИЯ НА ОПТИМАЛЬНОСТЬ.
(если решение оптимально, то конец)

ШАГ 2. ВЫБОР НАПРАВЛЕНИЯ УЛУЧШЕНИЯ РЕШЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРА θ.

ШАГ 3. ПЕРЕХОД К НОВОМУ ("ЛУЧШЕМУ") ТЕКУЩЕМУ РЕШЕНИЮ.
ВОЗВРАЩЕНИЕ К ШАГУ 1.

Переходим к подробному описанию шагов алгоритма прямого симплекс-метода, иллюстрируя их примером о планировании выпуска продукции.

Итак, пусть ЗЛП записана с ограничениями-равенствами:

$$f = 4x_1 + 5x_2 \qquad \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + x_3 & = 24 \\ 3x_1 + 2x_2 \quad + x_4 & = 12 \\ x_1 + x_2 \quad\quad + x_5 & = 8 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \quad (i \in 1:5)$$

ШАГ 0. ВЫБОР НАЧАЛЬНОГО БАЗИСНОГО РЕШЕНИЯ

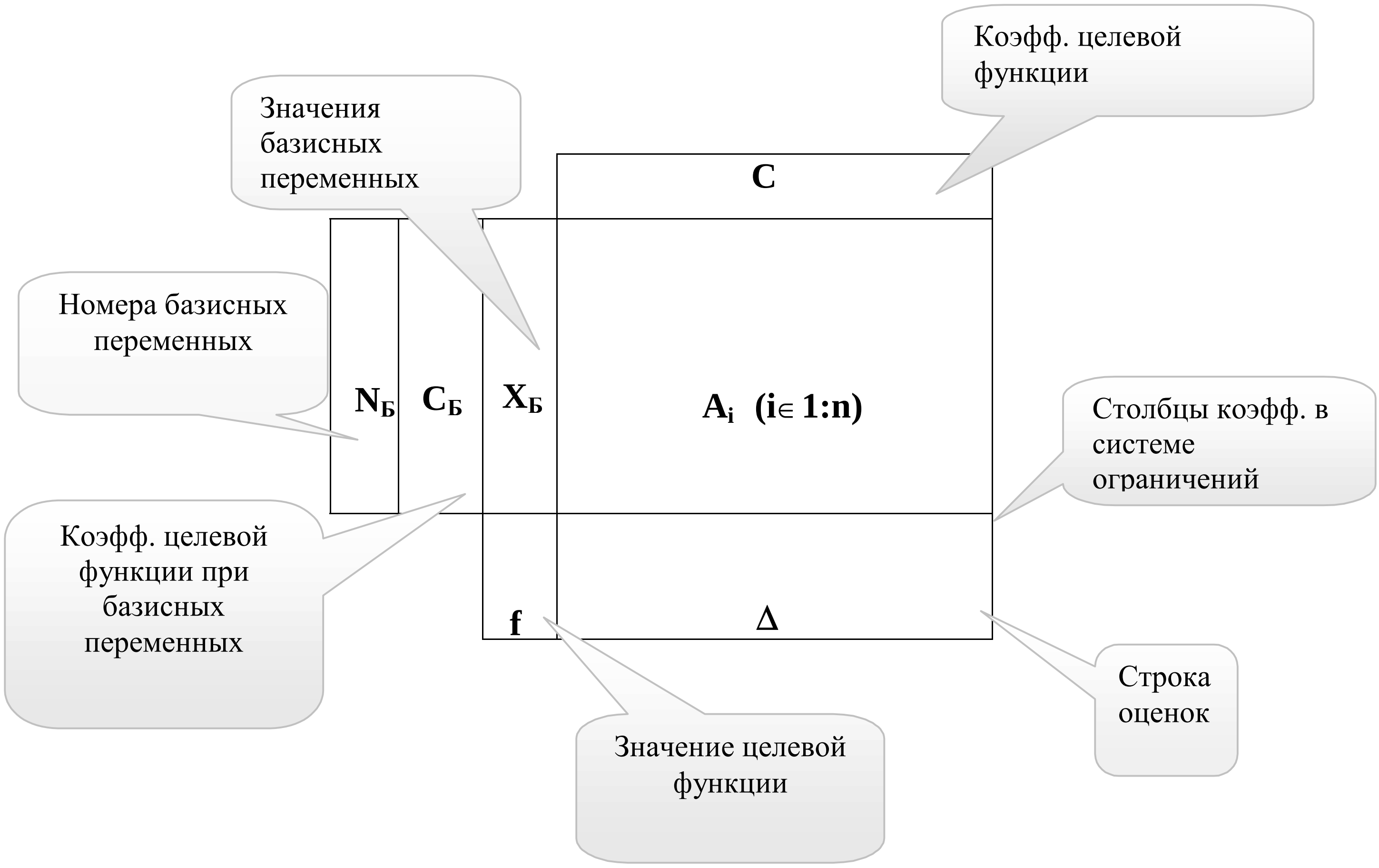
Выберем в качестве базисных переменных дополнительные переменные x_3, x_4, x_5. Тогда $x_1 = x_2 = 0$ и начальное базисное решение будет иметь вид

$$X_0 = (0,\ 0,\ 24,\ 12,\ 8)$$

• Заметим, что дополнительные переменные имеют совершенно ясное содержательное истолкование:

x_3 - это остаток сырья 1-го вида, x_4 - 2-го, а x_5 - 3-го вида. Тогда начальное решение можно интерпретировать следующим образом "если ничего не выпускать ($x_1 = x_2 = 0$), то все запасы сырья перейдут в остаток ($x_3 = 24,\ x_4 = 12,\ x_5 = 8$). При этом будет получена нулевая прибыль $\left(f(X_0) = 0 \right)$". •

Запишем исходные данные ЗЛП и информацию о начальном решении в таблицу, которая называется симплекс-таблицей (n - число переменных, m - число ограничений).



Начальная симплекс-таблица для нашего примера с базисным решением примет вид, представленный ниже. Значение целевой функции на начальном шаге определяется подстановкой решения X_0 в целевую функцию

			1	2	3	4	5
$N_Б$	$C_Б$	$X_Б$	4	5	0	0	0
3	0	24	4	6	1	0	0
4	0	12	3	2	0	1	0
5	0	8	1	1	0	0	1
		0	-4	-5	0	0	0

$$\boxed{f(X_0) = 4\cdot 0 + 5\cdot 0 + 0\cdot 24 + 0\cdot 12 + 0\cdot 8 = 0}$$

Оценки для каждого столбца (величины, служащие для проверки решения на оптимальность) на начальном шаге определяются по формуле

$$\boxed{\Delta_j = C_Б \cdot A_j - C_j}$$

Так для подсчета оценки Δ_1 нужно столбец

$$C_Б = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

скалярно умножить на столбец

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

и из результата вычесть коэффициент $c_1 = 4$
т.е.

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - 4 = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 4 = -4$$

Оценка Δ_1 записывается в первый элемент строки Δ.
Аналогично вычисляются остальные оценки.

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - 5 = -5 \quad , \quad \Delta_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 0$$

$$\Delta_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 0 \quad , \quad \Delta_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = 0$$

• Удобнее всего вычислять оценки прямо в таблице. Столбец A_j, оценку которого надо вычислить, умножается скалярно на столбец $C_Б$. Из полученного числа вычитается коэффициент целевой функции, стоящий <u>над</u> столбцом A_j. Результат записывается в строку оценок <u>под</u> столбцом A_j. Заметим, также. что на начальном шаге (т.к. $C_Б = (0,\ 0,\ 0)$) оценки равны коэффициентам целевой функции с обратным знаком •

Оценки и значение целевой функции вычисляются только на начальном шаге, а в дальнейшем пересчитываются автоматически. Заполнением начальной симплекс-таблицы завершается нулевой шаг симплекс-метода.

ШАГ 1. ПРОВЕРКА ТЕКУЩЕГО РЕШЕНИЯ НА ОПТИМАЛЬНОСТЬ

Критерием оптимальности (или условием того, что имеющаяся вершина является оптимальной) является выполнение условия

$$\Delta_j \geq 0 \qquad (j \in 1:n)$$

для всех оценок в строке Δ.

• Если решается ЗЛП на min, то знак неравенства меняется на обратный и условие принимает вид $\Delta_j \leq 0 \qquad (j \in 1:n)$ •

При работе с симплекс-таблицей проверка решения на оптимальность сводится к просмотру строки оценок Δ. Если все элементы строки оценок больше или равны нулю, то текущее решение оптимально и вычисления на этом заканчиваются. Если же среди элементов строки оценок имеется хотя бы один отрицательный, то текущее решение не оптимально и может быть улучшено.

Проверим на оптимальность текущее решение в рассматриваемом примере.

$N_Б$	$C_Б$	$X_Б$	1	2	3	4	5
		0	-4	-5	0	0	0
			$\otimes$	$\otimes$			

Просмотр элементов строки оценок Δ убеждает нас в том, что среди элементов имеются отрицательные (отмечены знаком $\otimes$), а , значит, текущее решение не является оптимальным и может быть улучшено. На этом шаг проверки решения на оптимальность завершается.

ШАГ 2. ВЫБОР НАПРАВЛЕНИЯ УЛУЧШЕНИЯ РЕШЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРА θ

$\boxed{-Z_1 \equiv A_1}$

$N_Б$	$C_Б$	$X_Б$	1	2	3	4	5
			4	6			
			3	2			
			1	1			
			-4	-5			

$\boxed{-Z_2 \equiv A_2}$

Количество возможных направлений для улучшения текущего решения опре-деляется количеством отрицательных оценок в строке Δ. Так в нашем примере имеется два направления улучшения решения. Каждой отрицательной оценке Δ_j соответствует свой вектор направ-ления $-Z_j \equiv A_j$. В приведенной таблице возможные направления задаются векторами.

$$-Z_1 \equiv A_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ и } -Z_2 \equiv A_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Для улучшения решения выбирается одна из отрицательных оценок, т.е. одно из возможных направлений. (Более точный выбор направления будет описан ниже в замечании). Выберем в примере в качестве направления то, которое отвечает оценке $\Delta_1 = -4$ (в таблице отмечено стрелкой).

После выбора направления $-Z_{j_0}$ проверяется <u>критерий неограниченности целевой функции на множестве решений</u> (см. случай неразрешимости ЗЛП в разд. 2). Он состоит в следующем:

> Если среди элементов выбранного направления $-Z_{j_0} \equiv A_{j_0}$ нет положительных, то целевая функция не ограничена на множестве решений и ЗЛП неразрешима.

Если же среди элементов A_{j_0} есть положительные, то решение по выбранному направлению можно улучшить. Для выбранного нами направления в примере

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

все компоненты положительны.

Теперь остается определить параметр θ, растягивающий (сжимающий) вектор $-Z_{j_0} \equiv A_{j_0}$. Значение этого параметра выбирается по следующему правилу:

$$\theta = \min \left\{ \frac{X_{Бi}}{A_{j_0 i}} \middle| A_{j_0 i} > 0 \right\}$$

В симплекс-таблице выбирается наименьшее из отношений элементов столбца $X_Б$ к соответствующим <u>положительным</u> элементам вектора направления. Проиллюстрируем сказанное фрагментом симплекс-таблицы.

			1	2	3	4	5
$N_Б$		$X_Б$					
3		24	4	6			
4		12	3	2			
5		8	1	1			

Минимум достигается в строке i_0 , соответствующей некото-рой базисной переменной (в примере это переменная x_4. Ее строка отмечена стрелкой). На этом ШАГ 2 завершается.

$$\theta = \min \left\{ \frac{24}{4}, \frac{12}{3}, \frac{8}{1} \right\} = \min\{6,4,8\}$$

- 1. Собственно для перехода к новому решению нам важно знать не саму величину θ, а, именно, строку i_0 , где этот минимум достигается.

2. Величина θ может быть использована для более точного выбора направления. Известно, что скачок целевой функции, при переходе к “лучшему” решению равен.

$$\Delta f = -\Delta_{j_0} \cdot \theta \qquad (*)$$

(Δ_{j_0} - выбранная оценка, θ - соответствующий ей параметр).

Естественно, хотелось бы при улучшении решения получить максимальный скачок целевой функции. Для этого необходимо:

а). Найти значения θ, соответствующие каждой из отрицательных оценок.

б). Выбрать из полученных величин Δf наибольшую. Ту оценку, которая отвечает максимальной величине скачка Δf, и надо выбирать для определения направления улучшения решения.

Рассмотрим, для нашего примера, какую из двух оценок следует выбрать:

Оценка $\Delta_1 = -4$, $\theta = \min\{24/4,\ 12/3,\ 8/1\} = 4$,
$\Delta f = -(-4) \cdot 4 = 16$

Оценка $\Delta_2 = -5$, $\theta = \min\{24/6,\ 12/2,\ 8/1\} = 4$,
$\Delta f = -(-5) \cdot 4 = 20$

Значит сделанный нами выбор был не самым удачным. Если в качестве направления мы выбрали бы то, которое отвечает оценке $\Delta_2 = -5$, значение целевой функции увеличилось бы на 20 единиц, а не на 16, как при выборе оценки $\Delta_1 = -4$. Часто в литературе можно встретить такое правило выбора оценки: ”Выбирается оценка максимальная по абсолютной величине”. Соотношение (*) показывает, что оно не всегда справедливо (хотя в нашем примере оно выполняется). Другими словами, максимальной по абсолютной величине оценке не обязательно соответствует максимальный скачок целевой функции (θ может быть очень мало). Правило выбора наилучшего направления можно сформулировать в следующем виде: “Выбирать то направление, которому соответствует максимальная абсолютная величина произведения оценки Δ на θ.

3. При реализации симплекс-метода на ЭВМ использование правил выбора направления, как по максимальному модулю оценки, так и по максимуму скачка целевой функции, требует дополнительных вычислений, приводит к дополнительным затратам и машинного времени и усложнению программы. В этом случае часто используют правило, по которому выбирают первую отрицательную оценку. •

ШАГ 3. ПЕРЕХОД К НОВОМУ РЕШЕНИЮ.

Переход к новому решению связан с заменой одних базисных переменных на другие. В симплекс-методе такая замена выглядит следующим образом:

			1	2	3	4	5
$N_Б$	$C_Б$	$X_Б$	4	5	0	0	0
3	0	24	4	6	1	0	0
→ 4	0	12	$\boxed{3}$	2	0	1	0
5	0	8	1	1	0	0	1
		0	-4	-5	0	0	0
			↑				

1. Новой базисной переменной становится переменная x_{j_0}, соответствующая выбранной отрицательной оценке Δ_{j_0} (столбец отмечен стрелкой). В примере этого переменная x_1.
2. Из базисных переменных исключается та x_{i_0}, которая соответствует строке, где определялась величина θ (строчка отмечена стрелкой). В примере это переменная x_4.

Поэтому новую симплекс-таблицу начинают заполнять с того, что в столбцах $\mathrm{N_Б}$ и $\mathrm{C_Б}$ заменяют номер i_0 на номер j_0 и элемент c_{i_0} на c_{j_0}. (В примере номер 4 заменяют на номер 1 и $c_4 = 0$ заменяют в столбце $\mathrm{C_Б}$ на $c_1 = 4$). Далее сохраняют коэффициенты целевой функции в строке C (как не изменяющиеся исходные данные).

			1	2	3	4	5
$N_Б$	$C_Б$		4	5	0	0	0
3	0						
1	4						
5	0						

Оставшуюся (выделенную) часть “старой” симплекс-таблицы пересчитывают по методу полного исключения Гаусса-Жордана с ведущим элементом, стоящим на пересечении отмеченной строки (ведущая строка) и отмеченного столбца (ведущий столбец).

Пересчет по методу Гаусса-Жордана означает выполнение следующих действий.

1. Ведущая строка делится на ведущий элемент

			1	2	3	4	5
$N_Б$	$C_Б$	$X_Б$	4	5	0	0	0
3	0	24	4	6	1	0	0
→ 1	4	12	$\boxed{3}$	2	0	1	0
5	0	8	1	1	0	0	1
		0	-4	-5	0	0	0
			↑				

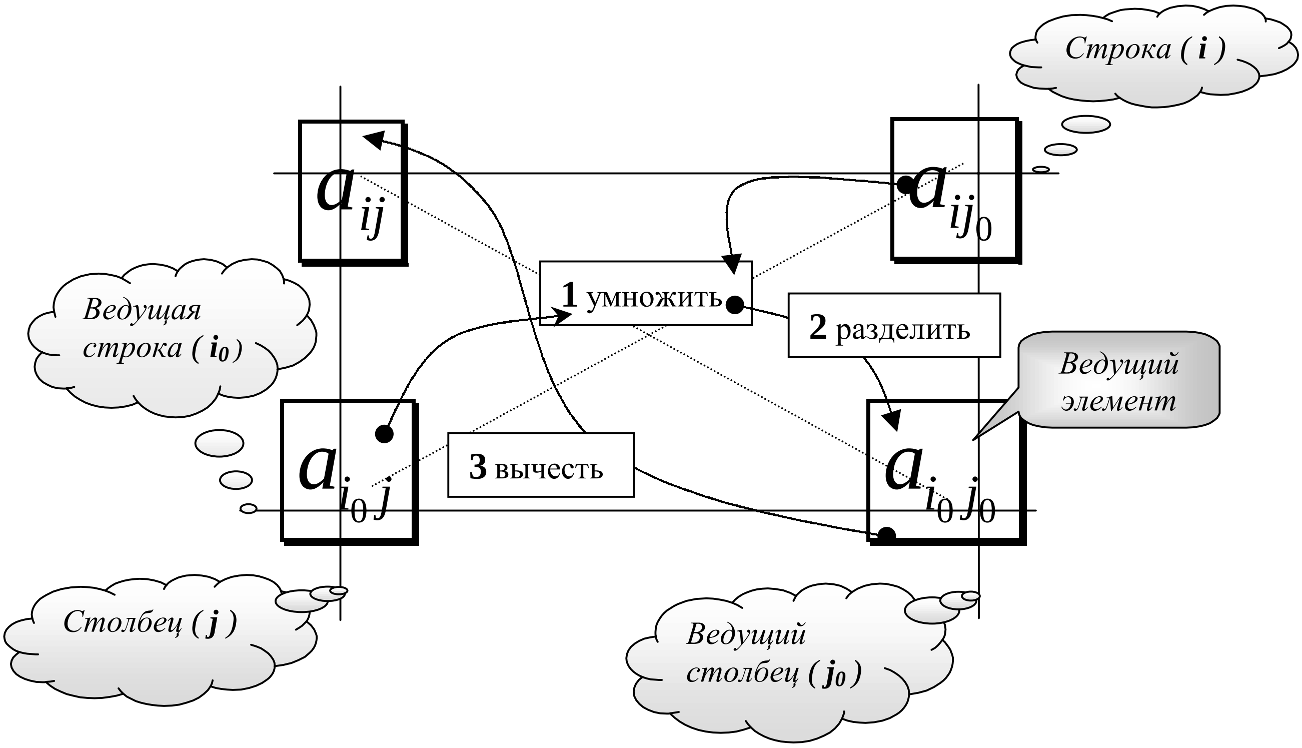
$\frac{1}{3}$ ➡

			1	2	3	4	5
$N_Б$	$C_Б$	$X_Б$					
3	0		0				
1	4	4	$\boxed{1}$	2/3	0	1/3	0
5	0		0				
			0				
			↑				

Оставшиеся элементы ведущего столбца заполняются нулями.

2. Остальные элементы пересчитываются по формуле “прямоугольника”

$$\boxed{a_{ij}^{*} = a_{ij} - \frac{a_{ij_0} \cdot a_{i_0 j}}{a_{i_0 j_0}}}$$



Здесь a^* - элемент новой симплекс-таблицы,

a - элемент "старой" симплекс-таблицы.

(Номера строк и столбцов берутся по оставшейся части таблицы).

<u>Формулу " прямоугольника"</u> легко запомнить, пользуясь приведенным рисунком. "Для того, чтобы определить элемент a_{ij}^{*} новой симплекс-таблицы, необходимо взять элемент a_{ij} в старой таблице, найти ведущий элемент и построить (мысленно) прямоугольник, как указано на рис. Затем вычесть из a_{ij} произведение элементов противоположной диагонали прямоугольника ($a_{i_0 j} \cdot a_{ij_0}$), деленное на ведущий элемент ($a_{i_0 j_0}$)".

Пересчитаем элементы первой строки в оставшейся части таблицы.

1

24	4	6	1	0	0
12	3	2	0	1	0
8	1	1	0	0	1
0	-4	-5	0	0	0

			1	2	3	4	5
$N_Б$	$C_Б$	$X_Б$	4	5	0	0	0
3	0	8	0	10/3		-4/3	
1	4	4	1	2/3	0	1/3	0
5	0		0				
			0				

$$24-\frac{12\cdot 4}{3}=8$$

2

24	4	6	1	0	0
12	3	2	0	1	0
8	1	1	0	0	1
0	-4	-5	0	0	0

$$6-\frac{4\cdot 2}{3}=\frac{10}{3}$$

3

24	4	6	1	0	0
12	3	2	0	1	0
8	1	1	0	0	1
0	-4	-5	0	0	0

$$0-\frac{4\cdot 1}{3}=-\frac{4}{3}$$

Для ускорения счета можно пользоваться двумя приемами.

1. Если в ведущей строке есть нулевые элементы, то соответствующие им столбцы переносятся в новую таблицу без изменений.

2. Если в ведущем столбце (старой таблицы) есть нулевые элементы, то соответствующие им строки переносятся в новую таблицу без изменений.

Воспользовавшись первым из этих правил, перенесем без изменений в новую таблицу старые столбцы, соответствующие 3-й и 5-й переменным. После пересчета 1-й строки новая таблица примет вид:

			1	2	3	4	5
$N_Б$	$C_Б$	$X_Б$	4	5	0	0	0
3	0	8	0	10/3	1	-4/3	0
1	4	4	1	2/3	0	1/3	0
5	0	4	0	1/3	0	-1/3	1
			0		0		0

24	4	6	1	0	0
12	3	2	0	1	0
8	1	1	0	0	1
0	-4	-5	0	0	0

$$\boxed{0-\frac{1\cdot 1}{3}=-\frac{1}{3}}$$

$$\boxed{1-\frac{1\cdot 2}{3}=\frac{1}{3}}$$

$$\boxed{8-\frac{1\cdot 12}{3}=4}$$

Аналогично пересчитываются элементы третьей строки.(см. выше)
И, наконец, элементы последней строки (значение целевой функции и оценки):

24	4	6	1	0	0
12	3	2	0	1	0
8	1	1	0	0	1
0	-4	-5	0	0	0

			1	2	3	4	5
NБ	CБ	XБ	4	5	0	0	0
3	0	8	0		1		0
1	4	4	1		0		0
5	0	4	0		0		1
		16	0	-7/3	0	4/3	0

$$0-\frac{-4\cdot 12}{3}=16$$

$$-5-\frac{-4\cdot 2}{3}=-\frac{7}{3}$$

$$0-\frac{-4\cdot 1}{3}=\frac{4}{3}$$

Пересчет закончен. Построена новая симплекс-таблица, отвечающая новому базисному решению (или новой вершине множества решений). На этом ШАГ 3, а вместе с ним и полная итерация симплекс-метода завершается.

			1	2	3	4	5	
NБ	CБ	XБ	4	5	0	0	0	**C**
3	0	8	0	10/3	1	-4/3	0	
1	4	4	1	2/3	0	1/3	0	
5	0	4	0	1/3	0	-1/3	1	
		16	0	-7/3	0	4/3	0	**Δ**

f

В полученном новом текущем решении базисными неизвестными являются неизвестные x_3, x_1 и x_5 (столбец $\mathrm{N_Б}$), их значения равны 8, 4, 4 соответственно (столбец $\mathrm{X_Б}$). Значение целевой функции на этом решении равно 16. Переходим к следующей итерации симплекс-метода, т.е. возвращаемся на ШАГ 1.

ШАГ 1. Анализ строки оценок Δ показывает, что текущее решение не является оптимальным (оценка $\Delta_2=-7/3<0$).

ШАГ 2. Так как отрицательная оценка одна ($\Delta_2<0$), ее и выбираем для определения направления (значит, в число базисных будем вводить переменную x_2). Находим θ :

$$\theta = \min\left\{\frac{8}{10/3},\ \frac{8}{10/3},\ \frac{8}{10/3}\right\} = \frac{12}{5}$$

Минимум достигается в строке, соответствующей переменной x_3 (она будет выведена из числа базисных). Отмечаем ведущую строку, ведущий столбец и ведущий элемент.

ШАГ 3. Заменяем в $N_Б$ номер 3 на номер 2, а в столбце $C_Б$ $c_3 = 0$ на $c_2 = 5$. Переписываем строку $C_Б$ в новую таблицу. Так как в ведущей строке есть два нулевых элемента, то соответствующие им столбцы переносим в новую таблицу без изменений. Делим ведущую строку на ведущий элемент и заполняем нулями ведущий столбец. Остальные элементы выделенной части пересчитываем по методу Гаусса-Жордана (по строкам).

			1	2	3	4	5
$N_Б$	$C_Б$	$X_Б$	4	5	0	0	0
2	5	12/5	0	1	3/10	-2/5	0
1	4	12/5	1	0	-1/5	1/15	0
5	0	16/5	0	0	-1/10	-1/5	1
		108/5	0	0	7/10	2/5	0

2-я строка

$$4 - \frac{8\cdot(2/3)}{10/3} = \frac{12}{5}$$

$$0 - \frac{1\cdot(2/3)}{10/3} = -\frac{1}{5}$$

$$1/3 - \frac{(2/3)\cdot(-4/3)}{10/3} = -\frac{1}{15}$$

3-я строка

$$4 - \frac{8\cdot(1/3)}{10/3} = \frac{16}{5}$$

$$0 - \frac{1\cdot(1/3)}{10/3} = -\frac{1}{10}$$

$$-1/3 - \frac{1/3\cdot(-4/3)}{10/3} = -\frac{1}{5}$$

4-я строка

$$16 - \frac{8\cdot(-7/3)}{10/3} = -\frac{108}{5}$$

$$0 - \frac{1\cdot(-7/3)}{10/3} = -\frac{7}{10}$$

$$4/3 - \frac{(-7/3)\cdot(-4/3)}{10/3} = \frac{2}{5}$$

Вторая итерация симплекс-метода завершена. Переходим к проверке полученного решения на оптимальность.

ШАГ 1.

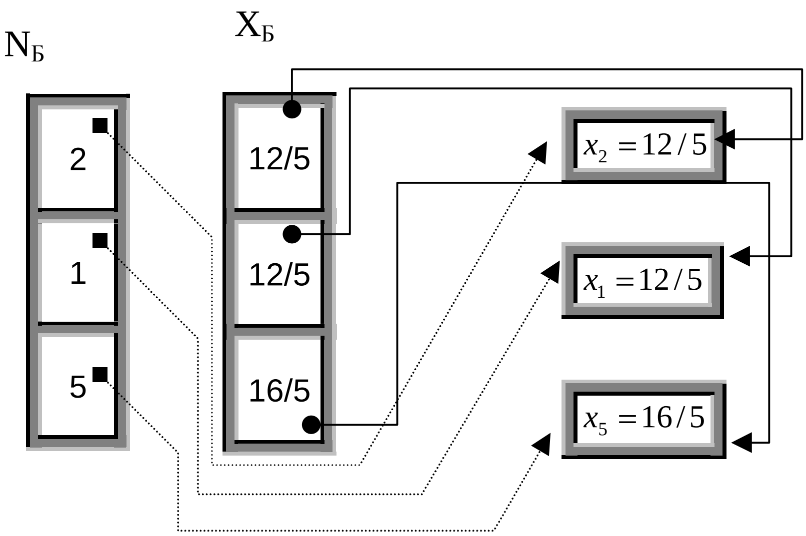
			1	2	3	4	5	
$N_Б$	$C_Б$	$X_Б$						
2	5	12/5						
1	4	12/5						
5	0	16/5						
		108/5	0	0	7/10	2/5	0	Δ
		f						

В строке Δ все оценки положительны или равны нулю. Следовательно, выполняются условия оптимальности $\Delta_j \geq 0 \quad (j \in 1{:}n)$

Таким образом, мы заключаем, что <u>текущее решение является оптимальным решением ЗЛП</u> (т.е. целевая функция достигла своего максимального значения $f_{\max} = 108/5$).

Выпишем оптимальное значение из симплекс-таблицы. В столбце $\mathrm{N_Б}$ хранятся номера базисных переменных, а в столбце $\mathrm{X_Б}$ их значения.

Получаем



Остальные переменные (небазисные) равны нулю: $x_3 = 0$, $x_4 = 0$

Значение целевой функции выписываем из клетки f

$$f = 108/5$$

Окончательно, ***данная ЗЛП имеет следующее оптимальное решение***:

$$X^* = (\frac{12}{5},\ \frac{12}{5},\ 0\ ,\ 0,\ \frac{16}{5}),\quad f(X^*) = 108/5$$

Такой же результат получен графически (см. раздел 2)

<u>ЭКОНОМИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ.</u>

1. Наиболее выгодным является выпуск табуреток и стульев в количестве по 12 шт. за 5 плановых периодов.
2. Прибыль за плановый период составит 108\5 ед.
3. Сырье 1-го и 2-го видов при этом будет израсходовано полностью ($x_3 = 0$, $x_4 = 0$),

а остаток сырья 3-го вида (x_5) составит 16\5 ед. к концу планового периода.