2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЗЛП. ГРАФИЧЕСКИЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ ЗЛП С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ОГРАНИЧЕНИЯМИ- НЕРАВЕНСТВАМИ.

Графическое решение ЗЛП с двумя переменными и системой ограничений в виде линейных неравенств состоит из *2-х этапов*:

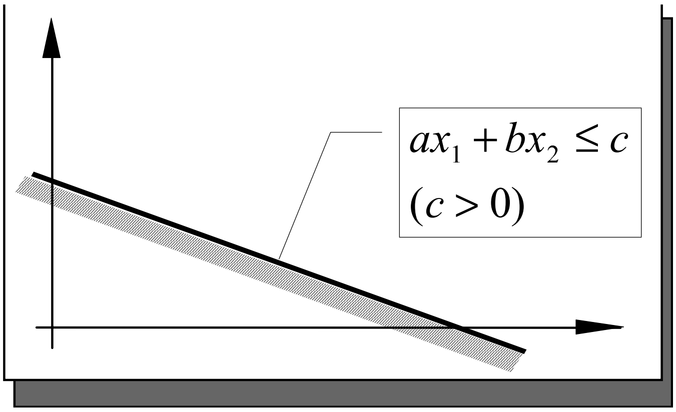
1. *Построение на плоскости множества решений системы линейных неравенств, являющегося выпуклым многогранным множеством.*

2. *Выбор в построенном множестве точки* $x^*(x_1^*,\ x_2^*)$, *доставляющей целевой функции требуемое экстремальное (max или min) значение.*

Коротко о необходимом математическом аппарате.

1) Множество точек, удовлетворяющих уравнению $ax_1 + bx_2 = c$ геометрически есть прямая (см. рис.)

2) Множество точек, удовлетворяющих линейному неравенству, представляет собой полуплоскость по одну сторону от прямой (включая саму прямую)



Способ выбора искомой полуплоскости.

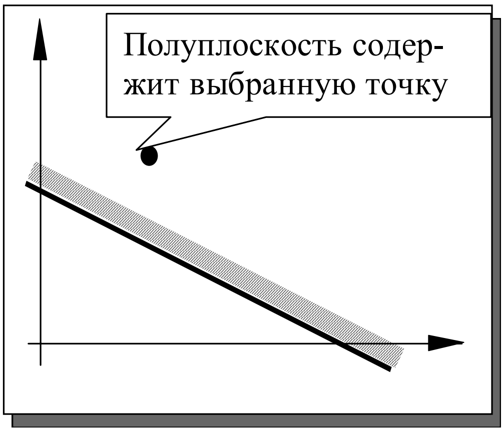
а) На плоскости выбирается точка с известными координатами, не лежащая на граничной прямой

б) Координаты выбранной точки подставляются в неравенство.

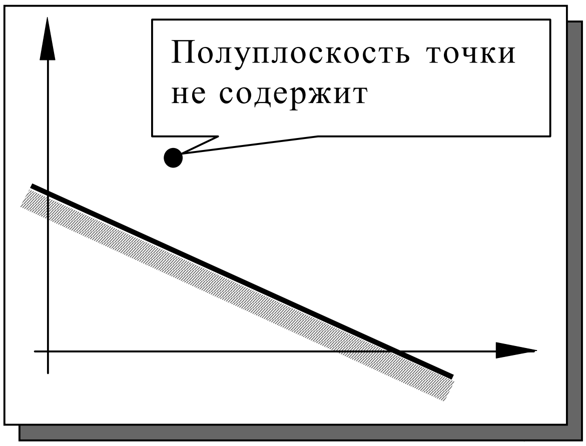
Возможны только два случая:

1. Получено ***верное числовое неравенство***.

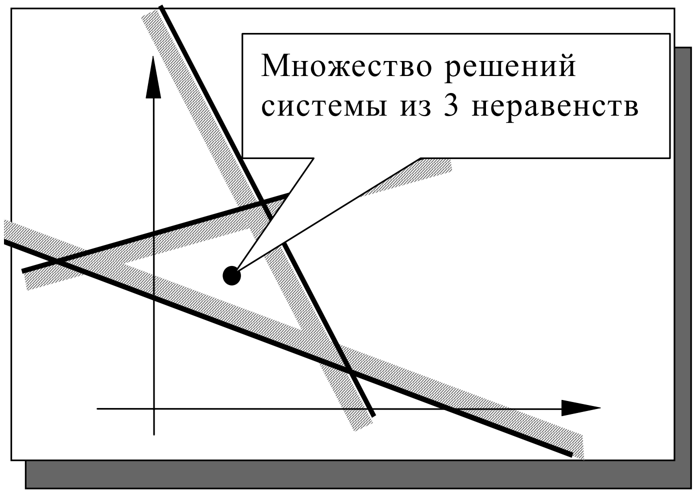
В этом случае искомой полуплоскостью будет та, в которой содержится выбранная точка.



2. Числовое ***неравенство*** - ***неверное***.

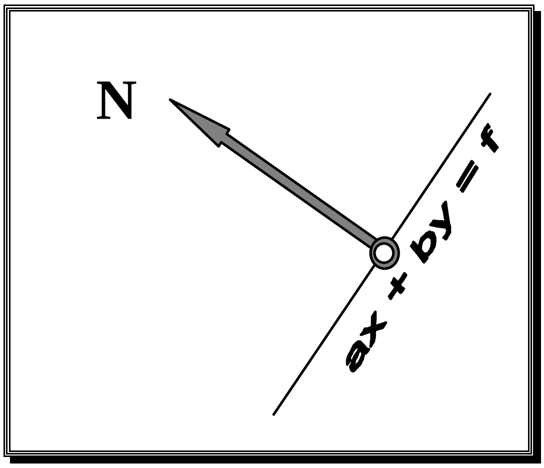


Искомая полуплоскость не содержит выбранной точки.

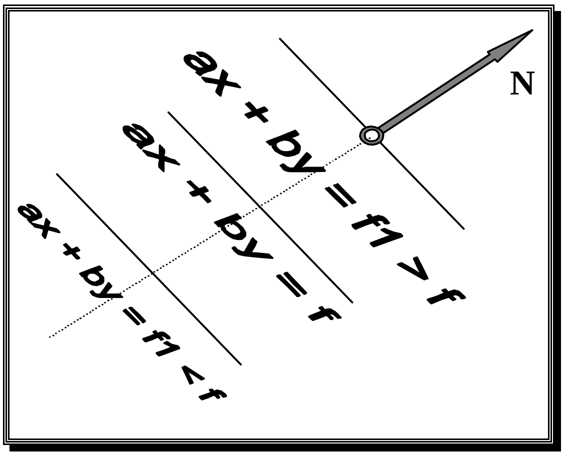


3. Множество точек, удовлетворяющих системе линейных неравенств представляет собой пересечение (общую часть) всех полуплоскостей, соответствующих каждому неравенству.

4. Нормальный вектор N прямой $ax+by=f$ задается коэффициентами при неизвестных x и y, т.е. N= $(a\ ;\ b)$



Свойство нормального вектора



а) При перемещении прямой (параллельно самой себе) в направлении вектора N значение f увеличивается.

б) При перемещении прямой (параллельно самой себе) против направления N значение f уменьшается.

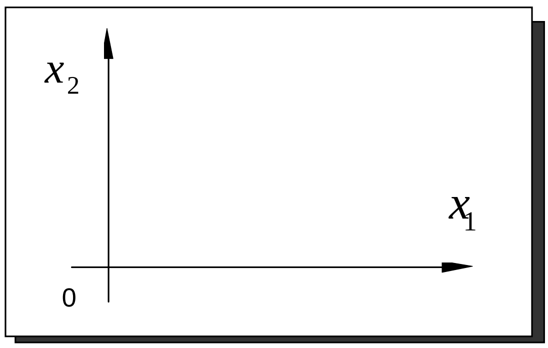
Разберем пример графического решения задачи максимизации прибыли, сформулированной выше.

$$f(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 \to \max$$

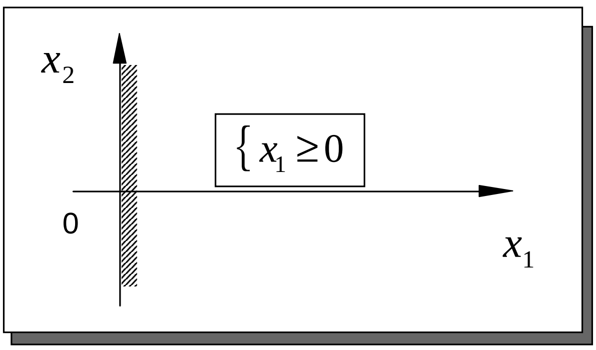
$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \le 24 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + x_2 \le 8 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

1. Изобразим на плоскости систему координат

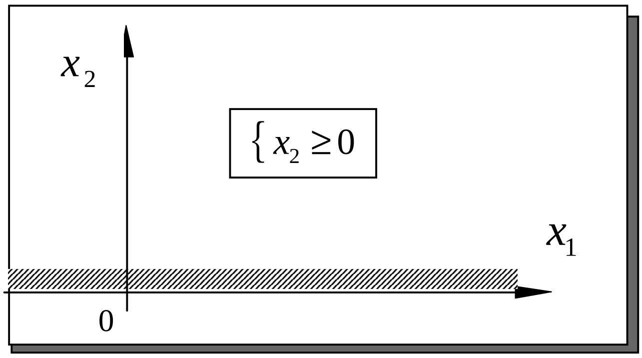


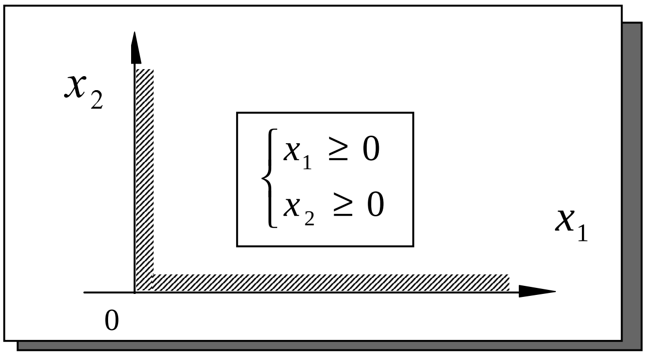
2. Рассмотрим **ограничения неотрицательности**.



а) Неравенство определяет полуплоскость, в которой все точки имеют неотрицательную первую координату.

б) Неравенству соответствует полуплоскость, где вторая координата каждой точки неотрицательна.





в) Системе неравенств соответствует 1-я четверть.

• *В дальнейшем, если заданы ограничения неотрицательности, все построения проводятся в 1-ой четверти* •

3. Строим множество точек, соответствующее множеству решений системы ограничений.

Берем первое неравенство

$$\{\, 4x_1 + 6x_2 \leq 24$$

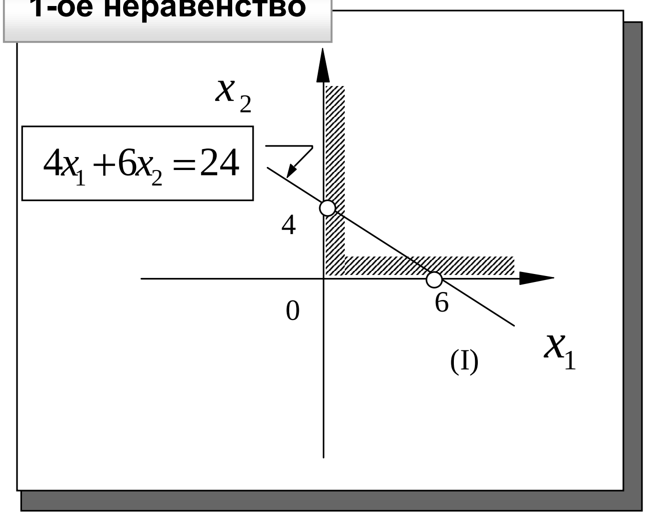
и заменим его уравнением

$$\{\, 4x_1 + 6x_2 = 24$$

Строим прямую, соответствующую этому уравнению.

(Если она не проходит через начало координат, то удобнее всего строить эту прямую по точкам пересечения с осями координат).

1-ое неравенство



Точка пересечения

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ 4 \cdot 0 + 6x_2 = 24 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

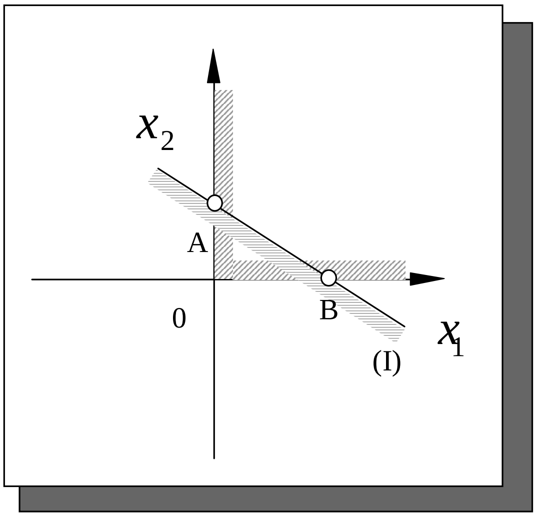
С осью OX_2

$$\left.\begin{array}{l} x_2 = 0 \\ 4x_1 + 6 \cdot 0 = 24 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 6 \end{cases}$$

С осью OX_1

Построенная прямая разбивает плоскость на 2 полуплоскости. Для выбора полуплоскости, соответ-ствующей нашему неравенству, возьмем на плоскости точку с известными координатами, не лежащую на прямой (пусть это будет точка (0,0) - начало координат). Подставим координаты этой точки в неравенство

$\{4 \cdot 0 + 6 \cdot 0 \leq 24$, $\{0 \leq 24$



Получилось верное числовое неравенство. Значит полуплоскость содержит выбранную для проверки точку (в данном случае - начало координат).

• Заметим, что для проверки не обязательно брать начало координат. Главное, чтобы точка не лежала на прямой и имела известные координаты. Например, возьмем точку M с координатами (8,0). Подставляем в неравенство

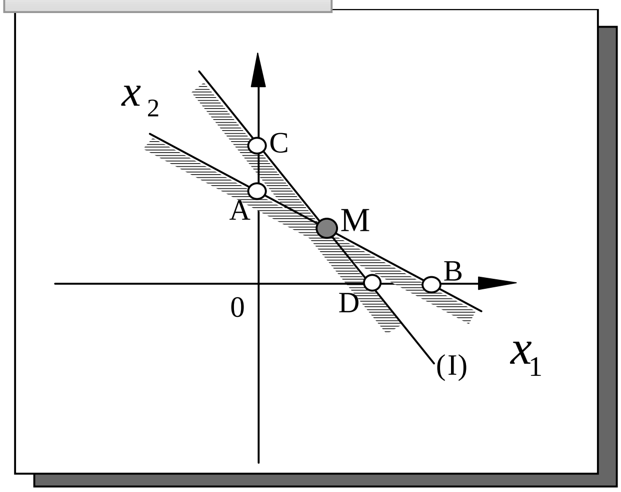
$$\{4 \cdot 8 + 6 \cdot 0 \leq 24 \Rightarrow 32 \leq 24$$

Неравенство неверное. Значит полуплоскость не содержит точки M, т.е. опять определяется та же полуплоскость. •

Таким образом, в совокупности с первой четвертью текущее множество решений представляет собой треугольник OAB. Далее аналогично строятся полуплоскости, соответствующие остальным неравенствам, и пересекаются с текущим множеством решений.

2-е неравенство

2-ое неравенство



$$3x_1 + 2x_2 \leq 12 \Rightarrow 3x_1 + 2x_2 = 12$$

$$\begin{array}{l||l} x_1 = 0 & x_2 = 0 \\ x_2 = 6 & x_1 = 4 \end{array}$$

Точка для проверки O(0,0)

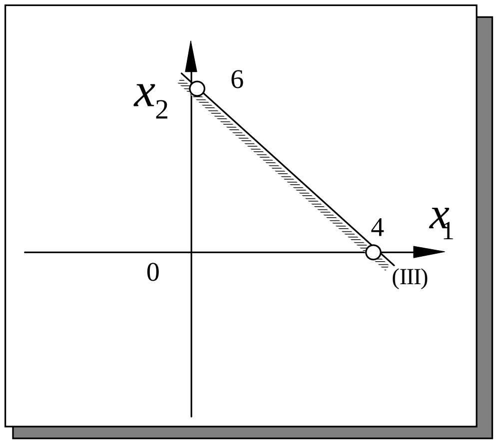
$$3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \leq 12 \Rightarrow 0 \leq 12$$

Верное неравенство. $\Rightarrow$ Полуплоскость содержит точку O. Пересекаем ее с предыдущим множеством. Получаем четырехугольник OAMD.

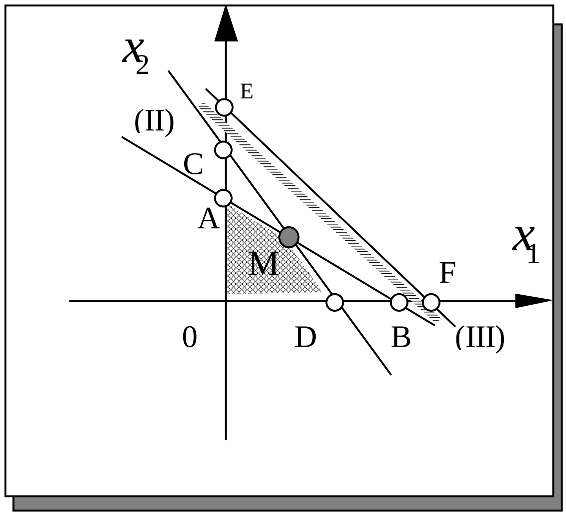
3-е неравенство

$$3x_1 + 2x_2 \le 12 \Rightarrow 3x_1 + 2x_2 = 12$$

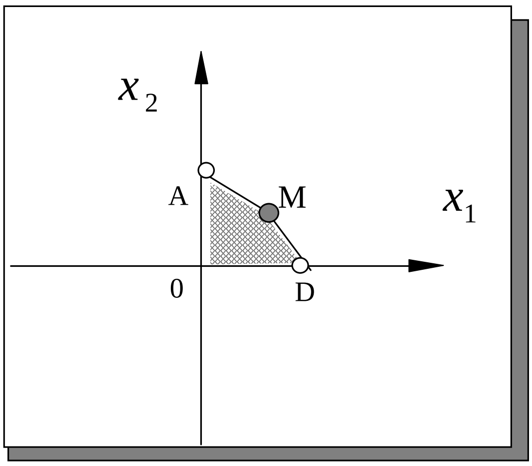
$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 6 \end{array}\right\| \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_1 = 4 \end{array}$$



Подставляя в неравенство точку начала координат, убеждаемся, что полуплоскость содержит эту точку. При пересечении с предыдущим множеством решений приходим к выводу, что четырехугольник OAMD целиком содержится в данной полуплоскости.



• Этот факт свидетельствует о том, что в данной задаче последнее ограничение не существенно и может быть либо отброшено, либо изменено за счет уменьшения запаса ресурса третьего вида •



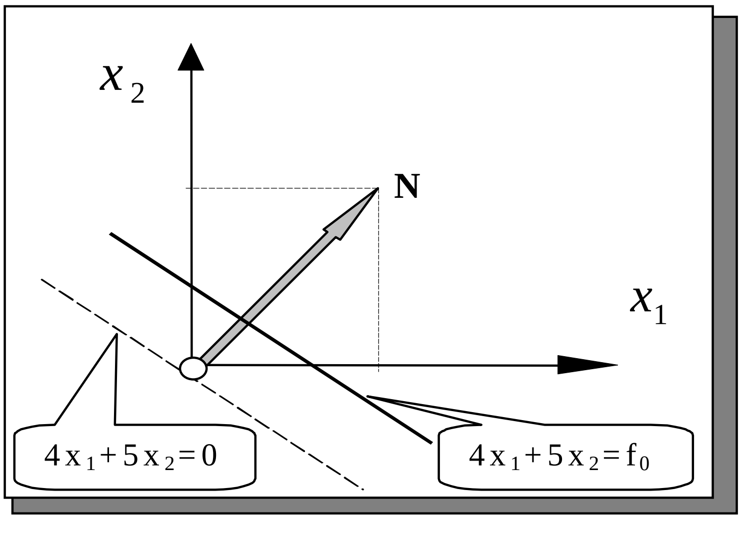
Окончательно множество решений ЗЛП представляет собой четырехугольник OAMD.

3. Займемся отысканием в множестве решений точки, которая доставляет максимум целевой функции

$$f = 4x_1 + 5x_2$$

(эта точка будет соответствовать оптимальному решению)

а) Для этого построим нормальный вектор N=(4,5). Если придать f какое-либо конкретное значение f_0, то прямая будет проходить перпендикулярно N. (При f=0 прямая проходит через начало координат).



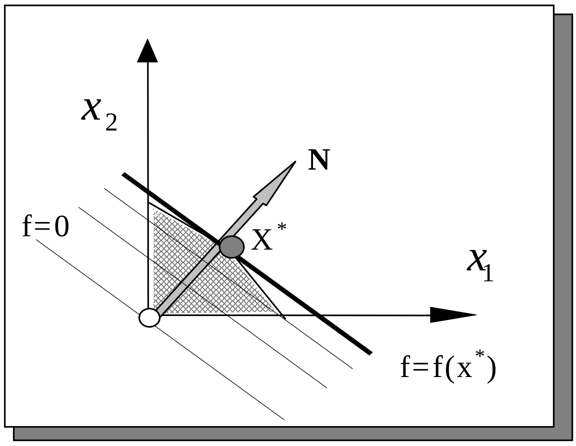
б) Перемещая прямую <u>в направлении</u> N (задача на

МАХ!!!), по которому значение целевой функции возрастает, находим последнюю точку пересечения прямой и множества решений. Эта точка и будет искомым оптимальным решением. Определяем ее компоненты как координаты точки пересечения 1-й и 2-й прямых

$$-\begin{cases}3x_1+2x_2=12\\4x_1+6x_2=24\end{cases}\left|\begin{matrix}3\\ \\ \end{matrix}\right. \Rightarrow 5x_1=12 \Rightarrow x_1=\frac{12}{5}$$

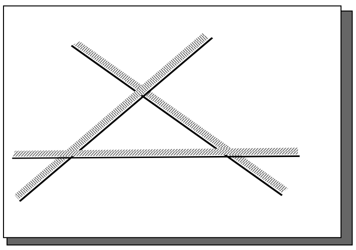
$$x_2=\left(12-\frac{3\cdot 12}{5}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{12}{5}$$

$$x^*=\left(\frac{12}{5},\frac{12}{5}\right),\quad f(x^*)=\frac{108}{5}$$



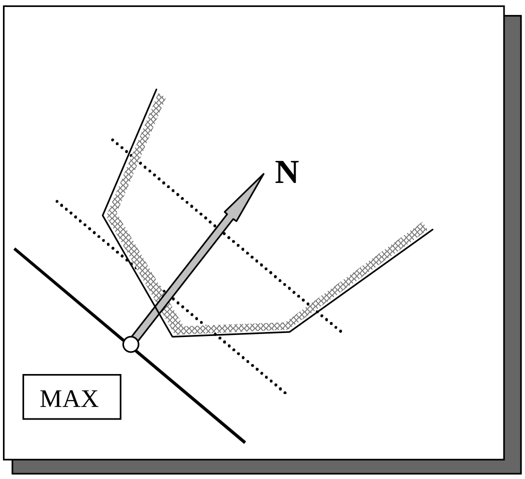
Возвращаясь к исходной экономической задаче, можно заключить, что наиболее выгодно выпускать табуретки и стулья в одинаковом количестве.

Проиллюстрируем теперь различные случаи разрешимости и неразрешимости ЗЛП.



ЗЛП неразрешима (не имеет оптимального решения)

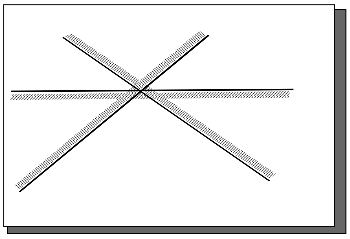
а) Из-за несовместности системы ограничений. Т.е. система не имеет ни одного решения.



б) Из-за неограниченности целевой функции на множестве решений. (В этом случае множество решений обязательно неограничено). Другими словами при решении ЗЛП на max значение целевой функции стремится к бесконечности, а в случае ЗЛП на min - к минус бесконечности.

Вектор N направлен в сторону неограниченности множества решений (при решении -задачи на МАХ). Поэтому прямую можно перемещать до бесконечности, не достигнув последней точки пересечения.

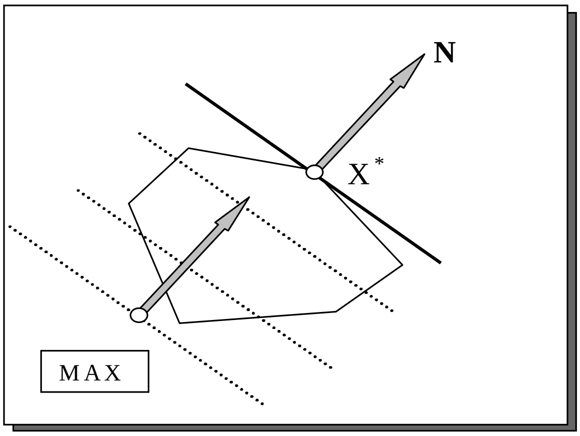
ЗЛП разрешима

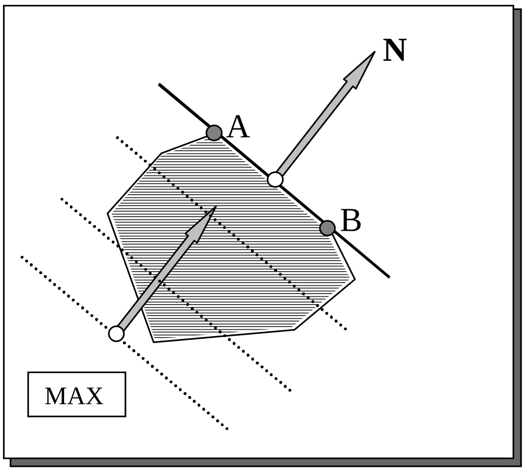


а) Множество решений состоит из одной точки. Она же и является оптимальной.

б) Единственное оптимальное решение ЗЛП

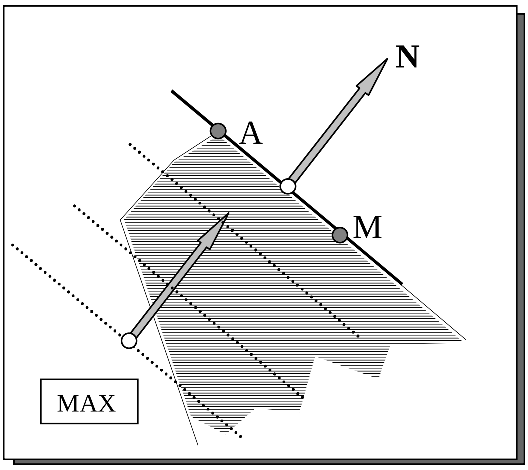
Прямая, соответствующая целевой функции в предельном положении пересекается с множеством решений в одной точке.





в) Оптимальное решение ЗЛП не единственно

Вектор N перпендикулярен к одной из сторон множества решений. В этом случае оптимальной является любая точка на отрезке AB



Здесь оптимальными решениями являются точка A и любая точка луча AM.

- Графически также могут быть решены ЗЛП и с большим числом переменных, если их удается свести к ЗЛП с 2-мя переменными и ограничениями-неравенствами. Например, ЗЛП.

$$f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \max$$

$$(*)\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 12 \\ 5x_1 - x_2 - 2x_4 = 8 \\ 7x_1 + 10x_2 + 7x_5 = 70 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Путем отбрасывания переменных x_3, x_4, x_5 из системы уравнений, замены их неравенствами и выражения отбрасываемых переменных в целевой функции через x_1 и x_2 , задача может быть приведена к виду

$$f = x_1 + x_2 + \frac{1}{5}(12 - 2x_1 - 4x_2) - \frac{1}{2}(8 - 5x_1 + x_2) + \frac{1}{7}(70 - 7x_1 - 10x_2) \rightarrow \max$$

$$(**)\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ 5x_1 - x_2 \geq 8 \\ 7x_1 + 10x_2 \leq 70 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

После графического решения (**) x_3, x_4, x_5 определяются из $(*)$ •