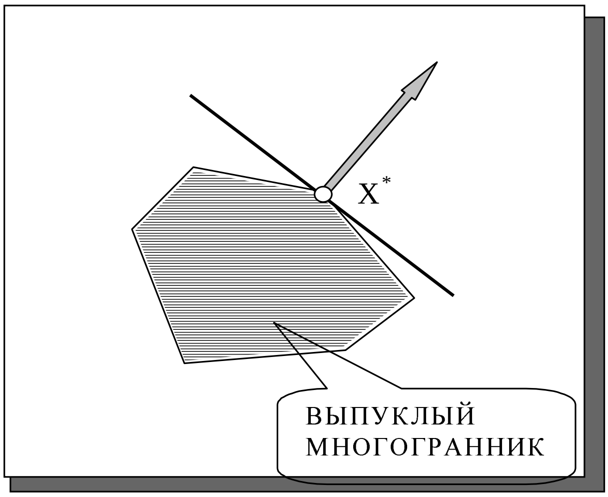
3.1.Предварительные сведения

Из предыдущего раздела мы знаем, что множество решений ЗЛП представляет собой выпуклое многогранное множество. Оно может быть или ограниченным (в этом случае его называют выпуклым многогранником. Простейший выпуклый многогранник называется симплексом)



или неограниченным.

Далее, из теории линейного программирования известны утверждения:

1. Если ЗЛП имеет оптимальное решение, то оно достигается в вершине множества решений.
2. Точка X , представляющая вершину множества решений ЗЛП, является базисным решением системы ограничений ЗЛП, записанной в виде системы линейных уравнений.

Для того, чтобы пояснить смысл понятия “базисное решение”, рассмотрим способ записи ЗЛП с ограничениями-равенствами. Возьмем пример из раздела 1, касающийся планирования выпуска продукции (задача на max).

$$f(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \le 24 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + x_2 \le 8 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

Система ограничений здесь записана в виде системы линейных неравенств. Превратим каждое из неравенств в уравнение путем введения в левую часть дополнительных переменных, равных разнице между правой и левой частью неравенства.

Например.

1-е неравенство дополнительная переменная 1-е уравнение

$$\{4x_1 + 6x_2 \le 24 \qquad x_3 = 24 - (4x_1 + 6x_2) \qquad \{4x_1 + 6x_2 + x_3 \le 24$$

2-е неравенство дополнительная переменная 2-е уравнение

$$\{3x_1 + 2x_2 \le 12 \qquad x_4 = 12 - (3x_1 + 2x_2) \qquad \{3x_1 + 2x_2 + x_4 \le 12$$

3-е неравенство дополнительная переменная 3-е уравнение

$$\{x_1 + x_2 \le 8 \qquad x_5 = 8 - (x_1 + x_2) \qquad \{x_1 + x_2 + x_5 \le 8$$

Окончательно получаем ЗЛП с пятью переменными

$$f = 4x_1 + 5x_2 \qquad \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + x_3 & = 24 \\ 3x_1 + 2x_2 \quad + x_4 & = 12 \\ x_1 + \ x_2 \qquad\quad + x_5 & = 8 \end{cases}$$

$$x_i \ge 0 \quad (i \in 1:5) \qquad (*)$$

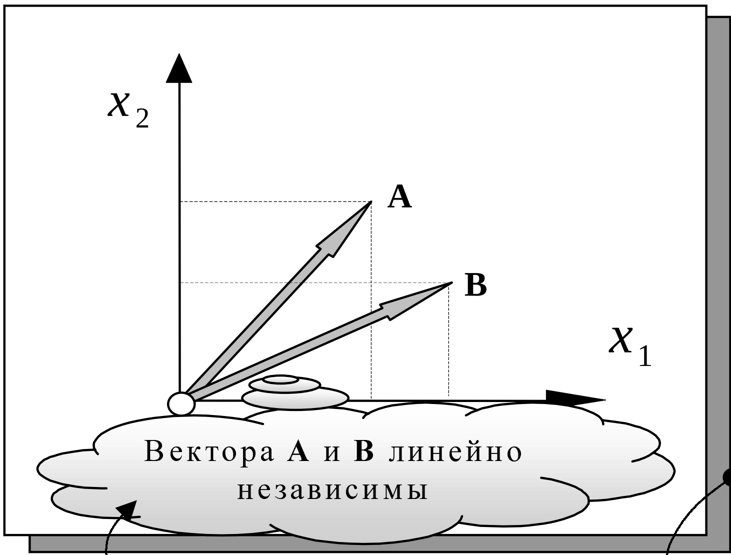
“Заплатить” за ограничения-равенства пришлось увеличением числа неизвестных (на число введенных дополнительных переменных x_3, x_4, x_5). Отсутствие дополнительных переменных в целевой функции означает, что они входят туда с коэффициентами, равными нулю. Каждой переменной в системе ограничений соответствует столбец коэффициентов.

Например,

$$x_1 \sim \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_2 \sim \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_3 \sim \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_4 \sim \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_5 \sim \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Если столбцы коэффициентов, соответствующие положительным значениям переменных, в решении ЗЛП образуют базис (они линейно независимы и число их равно числу уравнений), то такое решение называется **базисным**.

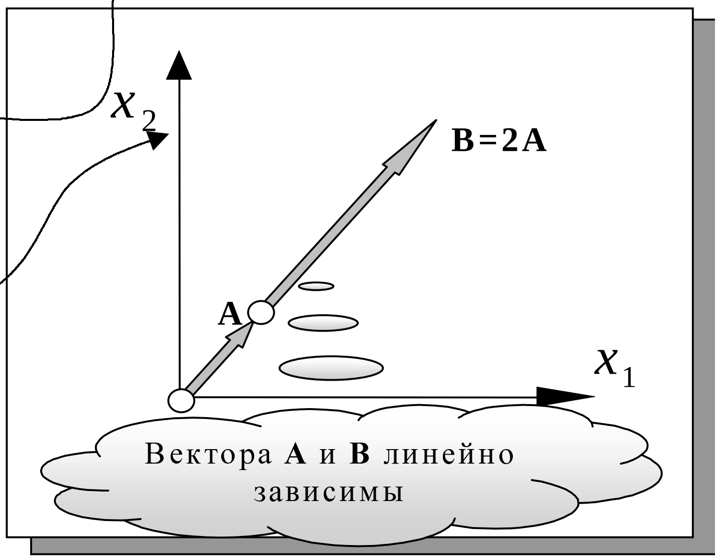
• Если один из векторов набора можно выразить через остальные, то это набор линейно-зависимых векторов. В противном случае вектора набора линейно независимы. •



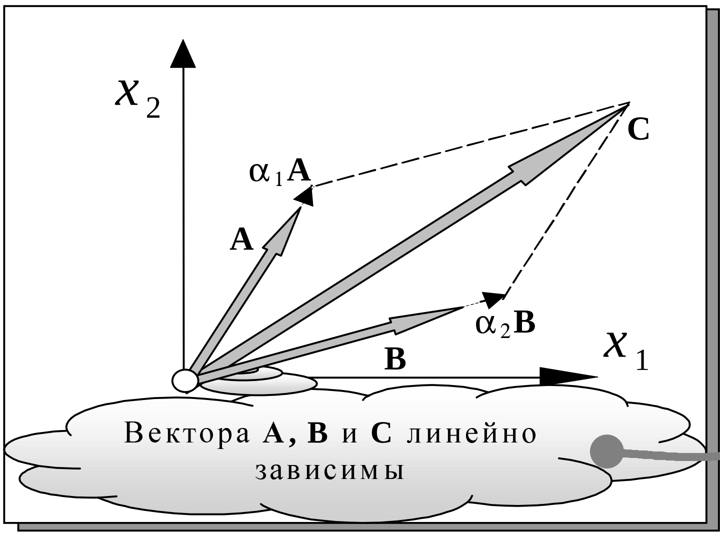
$$A=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix},$$

Ни при каких числовых коэффициентах α невозможно равенство

$$A=\alpha\cdot B$$



Здесь указанное равенство возможно



т.к. $C=\alpha_1 A+\alpha_2 B$

Например, решение ЗЛП (*)

$$x_1 = x_2 = 0, \quad x_3 = 24, \quad x_4 = 12, \quad x_5 = 8$$

или

$$X = (0,\ 0,\ 24,\ 12,\ 8)$$

<u>будет базисным</u>, т.к. столбцы, отвечающие положительным переменным x_3, x_4, x_5

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

образуют, так называемый, *единичный базис*.
(Во-первых, эти столбцы линейно независимы, т.е. ни один из них нельзя выразить в виде линейной комбинации остальных, и, во-вторых, их число равно числу уравнений).
С другой стороны, <u>решение</u>

$$X = (1,\ 1,\ 14,\ 7,\ \ 6)$$

<u>не является базисным</u>, т.к. число столбцов, отвечающих положительным неизвестным больше числа уравнений.

Еще один пример небазисного решения

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 & = 7 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 & = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_5 & = -1 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \quad (i \in 1:5)$$

<u>Решение</u> $X = (3,\ 1,\ 5,\ 0,\ \ 0)$

<u>не является базисным</u>, т.к., хотя число положительных неизвестных и равно числу уравнений, однако, отвечающие им столбцы

$$\begin{array}{ccc} A_1 & A_2 & A_3 \\ x_1 \sim \begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}, & x_2 \sim \begin{bmatrix}-4\\-2\\2\end{bmatrix}, & x_3 \sim \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \end{array}$$

линейно зависимы, (хотя бы потому, что второй столбец выражается через первый, т.е.

$$A_2 = -2A_1$$

или

$$\begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = -2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad).$$

Теперь достаточно просто оценить <u>число базисных решений ЗЛП</u> с *m* ограничениями относительно *n* переменных (или, что тоже самое, число вершин множества решений). Так как столбцов коэффициентов в системе *n* штук, а любой базис состоит из *m* столбцов, то максимальное число базисных решений (при условии, что любое сочетание из *m* столбцов образует базис и значения переменных, отвечающие им,

Число вершин множества решений ЗЛП $\leq$ $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$

($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots (n-1) \cdot n$)

положительны) будет равно числу сочетаний из *n* элементов по *m* элементов. Или, иначе,

Так, для нашего примера (*n* = 5, *m* = 3) множество решений содержит

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} = 10$$ вершин

Казалось бы, что самым простым методом решения ЗЛП является перебор всех базисных решений или вершин (ведь мы знаем, что оптимальное решение находится среди них!). И, действительно, в случае нашего примера нетрудно десять раз решить систему из трех уравнений с тремя неизвестными (две переменные, не отвечающие базисным столбцам, полагаются равными нулю). Однако уже для такой средней ЗЛП, которая имеет 20 переменных и 10 ограничений, оценка для числа базисных решений равна

$$C_{20}^{10} = \frac{20!}{10!(20-10)!} = 184756$$

Как говорится: “Хотя и конечно, но очень велико!”.