

Упражнения и задачи

1. Геометрическая интерпретация ЗЛП

1-11. Решить следующие ЗЛП графически или убедиться в их неразрешимости.

1. $f = x_1 + x_2 \rightarrow \max$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2. $f = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3. $f = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

4. $f = x_1 + x_2 \rightarrow \max$

5. $f = x_1 - x_2 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ 2x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ 2x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 2 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \geq 1/2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

6. $f = x_1 + x_2 \rightarrow \min$

7. $f = x_1 - x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 0 \leq x_1 \leq 1 \\ 0 \leq x_2 \leq 2 \\ 0 \leq x_1 + x_2 \leq 3 \\ -1 \leq x_1 - x_2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \leq x_1 + x_2 \leq 2 \\ 2 \leq x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ 1 \leq 2x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$8. \quad f = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$9. \quad f = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leq 6 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$10. \quad f = 7x_1 + 5x_2 \rightarrow \min$$

$$11. \quad f = -x_1 + 2x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 + 5x_2 \geq 5 \\ 2x_1 + x_2 \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \geq 0 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ 2x_1 - x_2 = 4 \end{cases}$$

12-15. Используя метод исключения неизвестных и графический способ, найти решения следующих ЗЛП:

$$12. \quad f = 8x_1 - 2x_2 - 3x_3 \rightarrow \max \quad 13. \quad f = x_1 + x_3 - 7x_4 + x_5 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 4 \\ 7x_1 - 2x_3 \leq 16 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 6x_4 - 2x_5 = -7 \\ x_2 - x_3 - 4x_4 + 6x_5 = 24 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 32 \\ x_j \geq 0, \quad j \in 1:5 \end{cases}$$

$$14. \quad f = -x_1 + x_2 + x_4 + 3x_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 5x_4 + 2x_5 = -5 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 5x_5 = -2 \\ -2x_2 + x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$15. \quad f = x_1 + x_2 + 2x_3 - 9x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 \leq 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 5 \\ 5x_1 + x_2 - 3x_4 = 11 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 7 \\ x_j \geq 0, \quad j \in 1:4 \end{cases}$$

2. Базисные решения. Метод полного перебора вершин.

16-23. Найти базисы решений систем, приведенных в условиях (в случае вырожденности решения найти все его базисы).

$$16. \begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$X_0 = (1, 0)$$

$$17. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$X_0 = (0, 1/2)$$

$$18. \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$X_0 = (0, 0)$$

$$19. \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$X_0 = (1, 1)$$

$$20. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ x_i \geq 0, i \in 1:3 \end{cases}$$

$$X_0 = (1/2, 0, 1/2)$$

$$21. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_i \geq 0, i \in 1:3 \end{cases}$$

$$X_0 = (0, 0, 0)$$

$$22. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_i \geq 0, i \in 1:4 \end{cases}$$

$$X_0 = (1, 0, 0, 0)$$

$$23. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_i \geq 0, i \in 1:4 \end{cases}$$

$$X_0 = (0, 0, 0, 0)$$

24-27. Найти решения следующих ЗЛП методом полного перебора вершин.

24. $f = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 \leq 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \leq -3 \end{cases}$$

25. $f = x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 \leq 6 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 12 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_j \geq 0, \quad j \in 1:4 \end{cases}$$

26. $f = x_1 + 2x_2 - 3x_3 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

27. $f = x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -4 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 \leq -3 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 4 \\ x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0 \end{cases}$$

3. Прямой алгоритм симплекс-метода.

28-45. Решить ЗЛП, рассматривая в качестве начального базисного решения приведенное в условии.

28. $f = x_1 - 2x_2 + x_3 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \\ X_0 = (1, 1, 0) \end{cases}$$

29. $f = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \\ X_0 = (0, 1, 1) \end{cases}$$

$$30. \quad f = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \rightarrow \max \quad 31. \quad f = 6x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_j \geq 0, \quad j \in 1:4 \\ X_0 = (0, 0, 1, 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 5x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_j \geq 0, \quad j \in 1:4 \\ X_0 = (1, 0, 0, 1) \end{cases}$$

$$32. \quad f = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \max \quad 33. \quad f = x_1 - 3x_2 - 5x_3 - x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_j \geq 0, \quad j \in 1:4 \\ X_0 = (0, 1, 1, 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 9 \\ x_j \geq 0, \quad j \in 1:4 \\ X_0 = (1, 0, 1, 0) \end{cases}$$

$$34. \quad f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max \quad 35. \quad f = x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_j \geq 0, \quad j \in 1:4 \\ X_0 = (0, 1, 0, 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_j \geq 0, \quad j \in 1:4 \\ X_0 = (0, 0, 1, 1) \end{cases}$$

$$36. \quad f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 19 \\ x_1 - x_2 + x_4 + 2x_5 = 2 \\ x_j \geq 0, \quad j \in 1:5 \\ X_0 = (0, 0, 1, 2, 0) \end{cases}$$

$$37. \quad f = -2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 4x_5 + x_6 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 9x_5 + 3x_6 = 15 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 = 5 \\ x_j \geq 0, \quad j \in 1:6 \\ X_0 = (1, 0, 0, 0, 0, 4) \end{cases}$$

$$38. \quad f = x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 - x_6 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 + 4x_5 + x_6 = 6 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_6 = 2 \\ x_j \geq 0, \quad j \in 1:6 \\ X_0 = (0, 0, 0, 0, 1, 2) \end{cases}$$

$$39. \quad f = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - x_6 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 2x_6 = 7 \\ x_1 - x_3 + x_5 - x_6 = -2 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 2x_6 = 5 \\ x_j \geq 0, \quad j \in 1:6 \\ X_0 = (0, 0, 2, 0, 1, 1) \end{cases}$$

$$40. \quad f = 5x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

$$41. \quad f = x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 5 \\ x_j \geq 0, \quad j \in 1:4 \\ X_0 = (0, 0, 1, 5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_j \geq 0, \quad j \in 1:4 \\ X_0 = (0, 0, 1, 3) \end{cases}$$

$$42. \quad f = 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 2x_5 + 2x_6 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + 3x_6 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 + x_5 - 7x_6 = -2 \\ x_j \geq 0, \quad j \in 1:6 \\ X_0 = (0, 0, 1, 0, 1, 0) \end{cases}$$

$$43. \quad f = x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 - 2x_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 - 2x_4 = -2 \\ x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_4 + x_5 = 7 \\ x_j \geq 0, \quad j \in 1:5 \\ X_0 = (3, 1, 1, 0, 0) \end{cases}$$

$$44. \quad f = 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ -4x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 - 3x_5 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 3 \\ x_j \geq 0, \quad j \in 1:5 \\ X_0 = (1, 0, 0, 0, 0) \end{cases}$$

$$45. \quad f = x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 + 3x_6 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + x_6 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 - 3x_6 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 1 \\ x_j \geq 0, \quad j \in 1:6 \\ X_0 = (0, 1, 0, 0, 0, 0) \end{cases}$$

46-48. Решить следующие ЗЛП, предварительно преобразовав их к канонической форме.

$$46. \quad f = -x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 \leq 3 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \leq 1 \\ x_j \geq 0, \quad j \in 1:5 \end{cases}$$

$$48. \quad f = x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 \rightarrow \min$$

$$47. \quad f = x_1 + 2x_2 - 4x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \leq 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 3 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 \leq 2 \\ x_j \geq 0, \quad j \in 1:4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 \leq 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \leq 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 1 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 \leq 1 \\ x_j \geq 0, \quad j \in 1:4 \end{cases}$$

4. Искусственные переменные.

49-58. Решить ЗЛП, используя метод искусственных переменных.

$$49. \quad f = x_1 + 4x_2 + x_3 \rightarrow \max$$

$$50. \quad f = x_1 - 10x_2 + x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - 5x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 13 \\ x_1 + 14,5x_2 + 7x_3 = 15 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$51. \quad f = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \rightarrow \max$$

$$52. \quad f = x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 10x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 14x_2 + 10x_3 - 10x_4 = 24 \\ x_j \geq 0, \quad j \in 1:4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 14x_2 + 10x_3 - 10x_4 = 11 \\ x_j \geq 0, \quad j \in 1:4 \end{cases}$$

$$53. \quad f = x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 = 4 \\ x_j \geq 0, \quad j \in 1:4 \end{cases}$$

$$54. \quad f = x_1 + 10x_2 - x_3 + 5x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ x_j \geq 0, \quad j \in 1:4 \end{cases}$$

$$55. \quad f = -2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 4 \\ -x_1 + x_2 - x_5 = 4 \\ x_j \geq 0, \quad j \in 1:5 \end{cases}$$

$$56. \quad f = 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 + x_5 + 2x_6 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 + x_6 = 1 \\ -3x_1 + x_2 + x_4 - x_5 + x_6 = 2 \\ -5x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_6 = 3 \\ x_j \geq 0, \quad j \in 1:6 \end{cases}$$

$$57. \quad f = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 3x_5 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 1 \\ -2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_j \geq 0, \quad j \in 1:5 \end{cases}$$

$$58. \quad f = 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - 2x_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 9x_4 + 9x_5 = 30 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 19 \\ x_1 + x_2 + 3x_4 = 3 \\ x_j \geq 0, \quad j \in 1:5 \end{cases}$$

5. Теория двойственности.

59-71. Построить двойственные задачи к ЗЛП, заданным в условиях.

$$59. \quad f = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$60. \quad f = x_1 - x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 \leq 0 \end{cases}$$

$$61. \quad f = x_1 + 10x_2 - x_3 \rightarrow \max$$

$$62. \quad f = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 \leq 2 \\ x_2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 \geq 1 \\ x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

$$63. \quad f = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \rightarrow \min$$

$$64. \quad f = x_1 + 4x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \geq 2 \\ x_1 - x_3 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 \leq 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \geq 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 5 \\ x_1 \leq 0, x_2 \leq 0 \end{cases}$$

$$65. \quad f = x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 \leq 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - x_5 \leq 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \geq 0 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0, x_4 \leq 0,$$

$$66. \quad f = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 0 \\ x_1 + x_4 + x_5 \leq 0 \\ x_1 + x_5 = 1 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_5 \leq 0$$

$$67. \quad f = x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 - x_5 + x_6 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 2 \\ x_2 - x_3 - x_4 \leq 3 \\ x_3 + x_4 - x_5 \geq 4 \\ x_5 + x_6 = 7 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_4 \leq 0, x_5 \leq 0$$

$$68. \quad f = 17x_1 - 5x_2 + x_3 + x_4 - 8x_5 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 + 7x_5 \leq 11 \\ x_1 - 5x_2 - 5x_3 + x_4 + 2x_5 \geq -8 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 = 4 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_4 \geq 0$$

$$69. \quad f = 4x_1 - 6x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 \geq -5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 \geq 1 \\ -2x_1 - x_2 - x_4 - x_5 \leq 3 \end{cases}$$

$$70. \quad f = 3x_2 - 2x_3 + x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 - x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 \leq 7 \\ x_j \geq 0, j \in 1:4 \end{cases}$$

$$71. \quad f = 4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \geq 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 6x_5 = 10 \\ -x_1 - 3x_2 + 5x_3 \leq 1 \\ x_j \geq 0, j \in 1:5 \end{cases}$$

72-76. Используя теорию двойственности и графический метод, найти решения следующих ЗЛП.

$$72. \quad f = 3ax_1 + 11x_2 + 5bx_3 + x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + (2+b)x_3 - x_4 \geq c \\ (2+a)x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 3x_4 \geq 7 \\ x_j \geq 0, j \in 1:4 \end{cases}$$

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	1	1	4	6	2	1	1	11	3	1	3	16	4	1	2
2	1	2	1	7	2	2	3	12	3	2	2	17	4	2	4
3	1	3	3	8	2	3	2	13	3	3	4	18	4	3	1
4	1	4	2	9	2	4	4	14	3	4	1	19	4	4	3
5	1	5	4	10	2	5	1	15	3	5	3	20	4	5	2

73. $f = 7x_1 + x_3 - 4x_4 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \leq -1 \\ x_j \geq 0, j \in 1:4 \end{cases}$$

74. $f = x_1 + x_3 + x_5 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 \leq 6 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 \leq 5 \\ x_j \geq 0, j \in 1:5 \end{cases}$$

75. $f = 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1 \\ -4x_1 - 6x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 = -1 \\ x_j \geq 0, j \in 1:5 \end{cases}$$

$$76. \quad f = 6x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, \end{cases}$$

77. Используя теорию двойственности, графический метод и способ исключения неизвестных, найти решения следующих ЗЛП.

$$77. \quad f = 2x_1 + x_2 - (2 + 12a)x_3 + (1 + 6a)x_4 - 3bx_5 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 - x_4 - 2x_5 = 1 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - (5 + 2a - 2b)x_3 + (2 + a - b)x_4 - (b - 2)x_5 \leq -b \\ x_1 + x_2 - 14x_3 + 7x_4 + 3x_5 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

	a	b		a	b		a	b		a	b
1	4	3	6	5	3	11	6	3	16	7	3
2	5	4	7	6	4	12	7	4	17	8	4
3	6	5	8	7	5	13	8	5	18	9	5
4	7	6	9	8	6	14	9	6	19	10	6
5	8	7	10	9	7	15	10	7	20	11	7

78-80. Решить следующие ЗЛП, применив симплекс-метод к соответствующей двойственной задаче.

$$78. \quad f = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq -6 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 12 \end{cases}$$

$$79. \quad f = 19x_1 + x_2 + 16x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq -2 \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 \leq -10 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 3 \\ 3x_1 + 2x_3 \leq -1 \end{cases}$$

$$80. \quad f = 4x_1 + 6x_2 - 3x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 + x_3 \geq 2 \\ -2x_1 - 4x_2 + x_3 \geq 5 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 1 \\ -x_1 - x_2 + x_3 \geq 3 \\ 2x_2 + x_3 \leq 2 \end{cases}$$

7. Построение моделей экономических задач в виде ЗЛП.

81-88. Построить линейные модели в виде ЗЛП для задач, приведенных в условиях.

81. (задача о планировании выпуска продукции при ограниченных ресурсах)

Нефтеперерабатывающий завод производит за месяц 1 500 000 л алкилата, 1 200 000 л крекинг-бензина и 1 300 000 л изопентола. В результате смешивания этих компонентов в пропорциях 1:1:1 и 3:1:2 получается бензин сорта А и Б соответственно. Стоимость 1000 л бензина сорта А и Б соответственно равна 90 ед. и 120 ед.

Определить месячный план производства бензина сорта А и Б, максимизирующий стоимость выпущенной продукции.

82. (задача о диете)

Рацион кормления коров на молочной ферме может состоять из трех продуктов - сена, силоса и концентратов. Эти продукты содержат питательные вещества - белок, кальций и витамины. Численные данные представлены в таблице.

Продукты	Питательные вещества		
	Белок (г/кг)	Кальций (г/кг)	Витамины (мг/кг)
Сено	50	10	2
Силос	70	6	3
Концентраты	180	3	1

В расчете на одну корову суточные нормы потребления белка и кальция составляют не менее 2000 и 210 г соответственно. Потребление витаминов строго дозировано и должно быть равно 87 мг в сутки.

Составить самый дешевый рацион, если стоимость 1кг сена, силоса и концентрата равна соответственно 1,5 2 и 6 ед.

83. (матричная транспортная задача)

В области имеются два цементных завода и три потребителя их продукции - домостроительных комбината. В таблице указаны суточные объемы производства цемента, суточные потребности в нем комбинатов и стоимость перевозки 1 т цемента от каждого завода к каждому комбинату.

Заводы	Производство цемента (т/сут)	Стоимость перевозки 1 т цемента (ед.)		
		Комбинат 1	Комбинат 2	Комбинат 3
1	40	10	15	25
2	60	20	30	30
	Потребности в цементе (т/сут)	50	20	30

Требуется составить план суточных перевозок цемента с целью минимизации транспортных расходов.

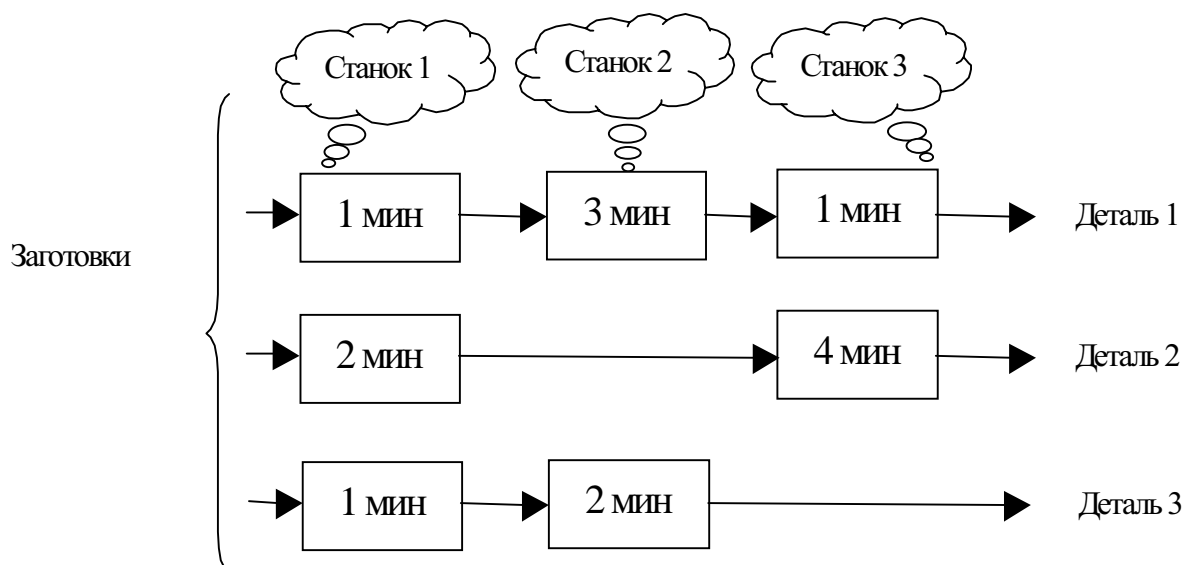
84. (задача о смесях)

В металлургический цех в качестве сырья поступает латунь (сплав меди с цинком) четырех типов с содержанием цинка 10, 20, 25 и 40 % по цене 10, 30, 40 и 60 ед. за 1 кг соответственно.

В каких пропорциях следует переплавлять это сырье в цехе, чтобы получить сплав (латунь), содержащий 30 % цинка и при этом самый дешевый ?

85. (задача о загрузке оборудования)

Цех выпускает три вида деталей, которые изготавливаются на трех станках. На рисунке показана технологическая схема изготовления детали каждого вида с указанием времени ее обработки на станках.



Суточный ресурс рабочего времени станков 1, 2 и 3 составляет соответственно 890, 920 и 840 мин. Стоимость одной детали вида 1, 2 и 3 равна соответственно 3, 1 и 2 ед.

Требуется составить суточный план производства с целью максимизации стоимости выпущенной продукции.

86. (задача о ранце с дополнительными ограничениями)

Участник экспедиции укладывает рюкзак, и ему требуется решить, какие положить продукты. В его распоряжении имеются мясо, мука, сухое молоко и сахар. В рюкзаке для продуктов осталось лишь 45 дм^3 объема, и нужно, чтобы суммарная масса продуктов не превосходила 35 кг. Врач экспедиции рекомендовал, чтобы мяса (по массе) было больше муки по крайней мере в два раза, муки не меньше молока, а молока по крайней мере в восемь раз больше, чем сахара.

Сколько и каких продуктов нужно положить в рюкзак, с тем чтобы суммарная калорийность продуктов была наибольшей? Характеристики продуктов приведены в таблице.

Характеристики	Продукты			
	Мясо	Мука	Молоко	Сахар
Объем ($\text{дм}^3/\text{кг}$)	1	1,5	2	1
Калорийность (ккал/кг)	1500	5000	5000	4000

87. (задача плоского прямоугольного раскроя)

На мебельной фабрике требуется раскроить 5000 прямоугольных листов фанеры размером 4 x 5 м каждый, с тем чтобы получить два вида прямоугольных деталей: деталь А должна иметь размер 2 x 2 м, деталь Б - размер 1 x 3 м. Необходимо, чтобы деталей А оказалось не меньше, чем деталей Б.

Каким образом следует производить раскрой, чтобы получить минимальное (по площади) количество отходов?

88. (задача одномерного раскроя)

Для серийного производства некоторого изделия требуются комплекты заготовок профильного проката. Каждый комплект состоит из двух заготовок длиной 1800 мм и пяти заготовок длиной 700 мм.

Как следует раскроить 770 полос проката стандартной длины 6000 мм, чтобы получить наибольшее количество указанных комплектов?