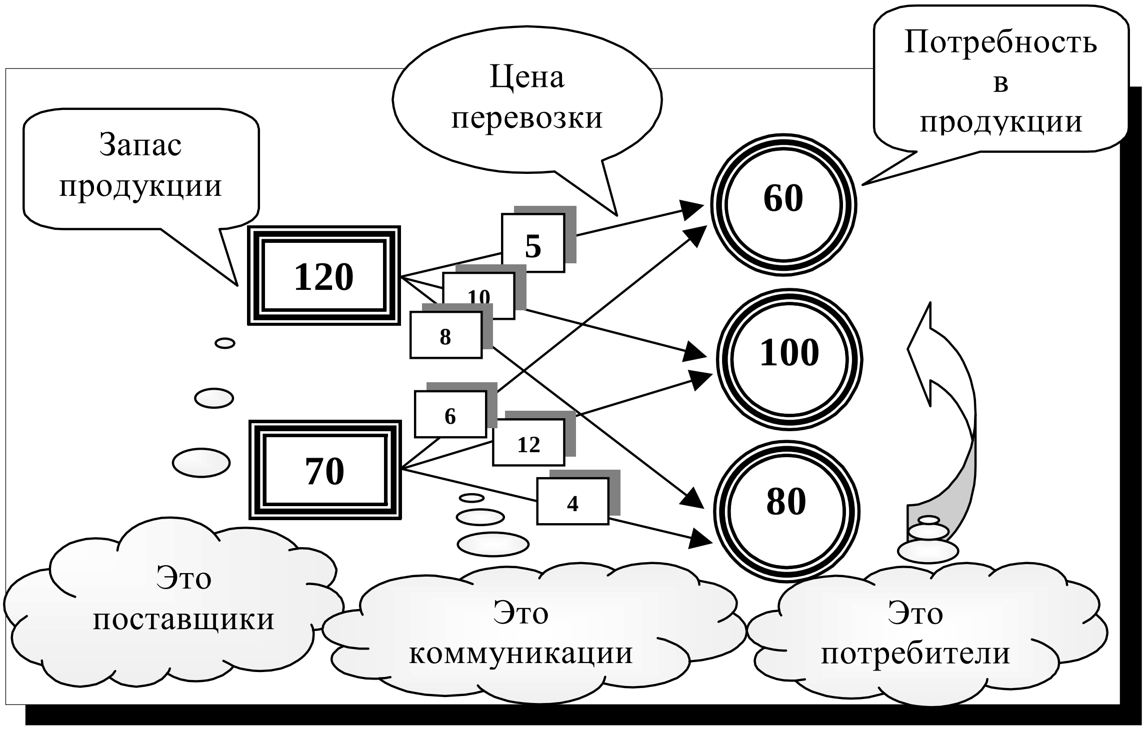
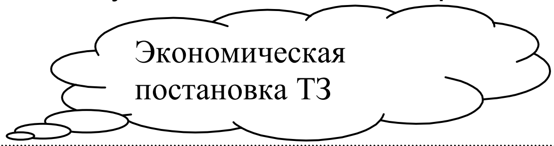
4.1 Постановка транспортной задачи.

Пусть имеется несколько поставщиков однородной продукции (каждый с определенным запасом) и несколько потребителей этой продукции (с известными потребностями у каждого). Задана также сеть коммуникаций (дорог, рек, воздушных линий и т.д.), связывающая каждого поставщика с каждым потребителем. На каждой коммуникации задана цена перевозки - стоимость перевозки единицы продукции (см. рис.).



• Если какая-либо коммуникация отсутствует, то считаем, что она есть, но цену перевозки на ней устанавливаем равной бесконечности $(+\infty)$. Это соглашение сделает невыгодным перевозку по ней и автоматически исключит данную коммуникацию из плана перевозок. •



Требуется *составить план перевозок* продукции от поставщиков к потребителям так, чтобы *потребности потребителей были бы удовлетворены* за счет *вывоза запаса от поставщиков*. *Цель* - **минимизация суммарной стоимости всех перевозок**.

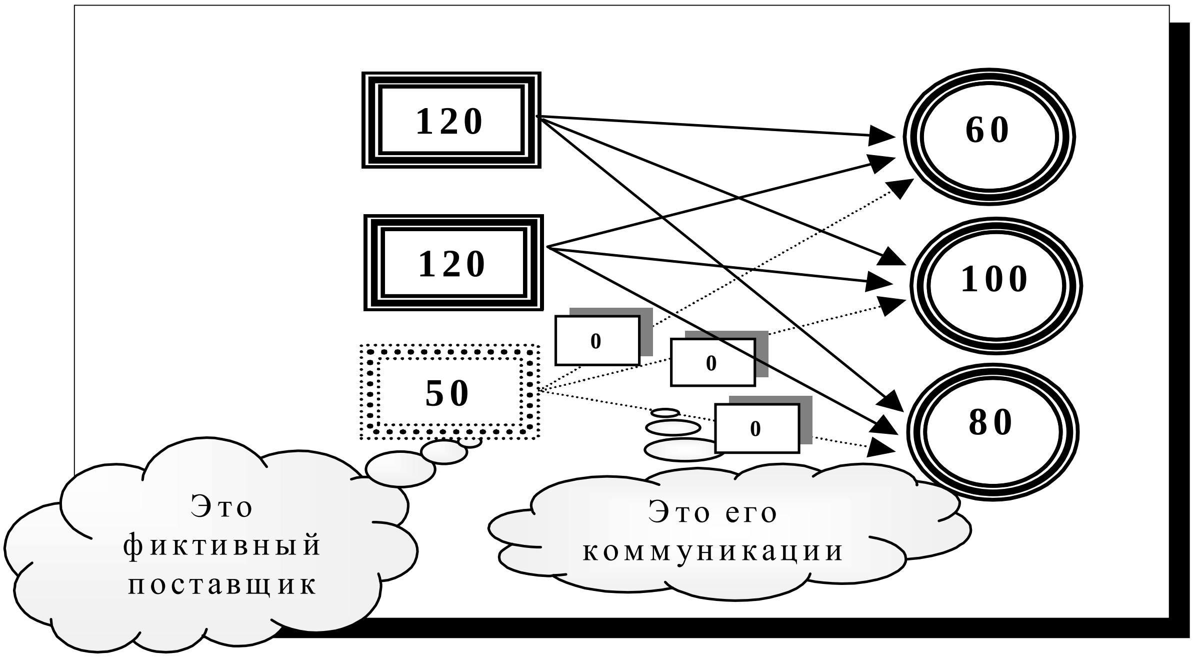
Итак, мы привели экономическую постановку транспортной задачи. Отметим один существенный момент. Если *суммарный запас* продукции, имеющейся у поставщиков, *совпадает с суммарной потребностью* в продукции у потребителей, тогда *транспортная задача считается **закрытой*** (имеет место баланс запасов и потребностей). Если же *баланс нарушается* (не хватает запасов, или запасов излишек) задача называется ***открытой.*** Имея в виду тот факт, что метод потенциалов “работает” только для закрытых ТЗ, изложим ***способ сведения открытой ТЗ к закрытой***. Суть этого способа очень проста. Так, например, *при нехватке запасов вводят* в рассмотрение *фиктивного поставщика* с запасом, равным этой нехватке, и устанавливают цену перевозки от него к каждому потребителю (на фиктивных коммуникациях) равной нулю (самый выгодный поставщик!). Так ,в приведенном примере суммарный запас равен

$$120 + 70 = 190 \text{ ед.}$$

С другой стороны суммарная потребность составляет

$$60 + 100 + 80 = 240 \text{ ед.}$$

Задача открытая. Имеет место нехватка продукции в количестве 240 - 190 = 50 ед. Вводим фиктивного поставщика с таким запасом. Проводим от него фиктивные коммуникации ко всем потребителям и устанавливаем на них нулевые цены. ТЗ становится закрытой. Аналогично, <u>*при излишке запасов*</u> <u>*вводится фиктивный*</u>



<u>*потребитель*</u>, имеющий потребность, равную этому излишку. Цены на фиктивных коммуникациях, идущих к нему от всех поставщиков, устанавливаются равными нулю.

• Несколько слов об истолковании решения <u>*открытой ТЗ.*</u> Пусть в оптимальном плане перевозок потребитель получает часть продукции от “настоящих” поставщиков, а часть от фиктивного. Тогда последняя представляет собой ту часть его потребностей, которая не удовлетворяется (недопоставка продукции). В задаче же с излишком запасов та часть продукции, которая вывозится к фиктивному потребителю, есть ни что иное, как продукция, остающаяся у поставщика невывезенной •

В дальнейшем будем рассматривать только <u>***закрытые ТЗ.***</u>

Построим математическую модель ТЗ в виде задачи линейного программирования. Исходя из того, что план перевозок определяется указанием количества перевозимого груза по каждой коммуникации (нулевое количество, если продукция по коммуникации не перевозится), обозначим через неизвестные x_{ij} количество перевозимой продукции от поставщика с номером i к потребителю с номером j (объем перевозки). В нашем примере таких неизвестных будет 3x3=9 ($x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33}$). В общем случае <u>количество неизвестных будет равно m x n</u>, где m - количество поставщиков, n - количество потребителей.

<u>Выразим через введенные неизвестные суммарную стоимость перевозок в виде линейной функции.</u> Для этого необходимо объем перевозки на каждой коммуникации умножить на цену перевозки и просуммировать полученные величины по всем коммуникациям. Для нашего примера имеем

$$f = 5x_{11} + 10x_{12} + 12x_{13} + 8x_{21} + 6x_{22} + 4x_{23} + 0x_{31} + 0x_{32} + 0x_{33} \to \min$$

или, используя знаки суммирования,

$$f = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min$$

(цель задачи - найти минимум суммарной стоимости перевозок).

Здесь c_{ij} - элементы матрицы стоимостей C

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 12 \\ 8 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(При суммировании сначала изменяются индексы (номера) у внутренней суммы при фиксированном индексе у внешней суммы, затем изменяется на единицу индекс внешней суммы).

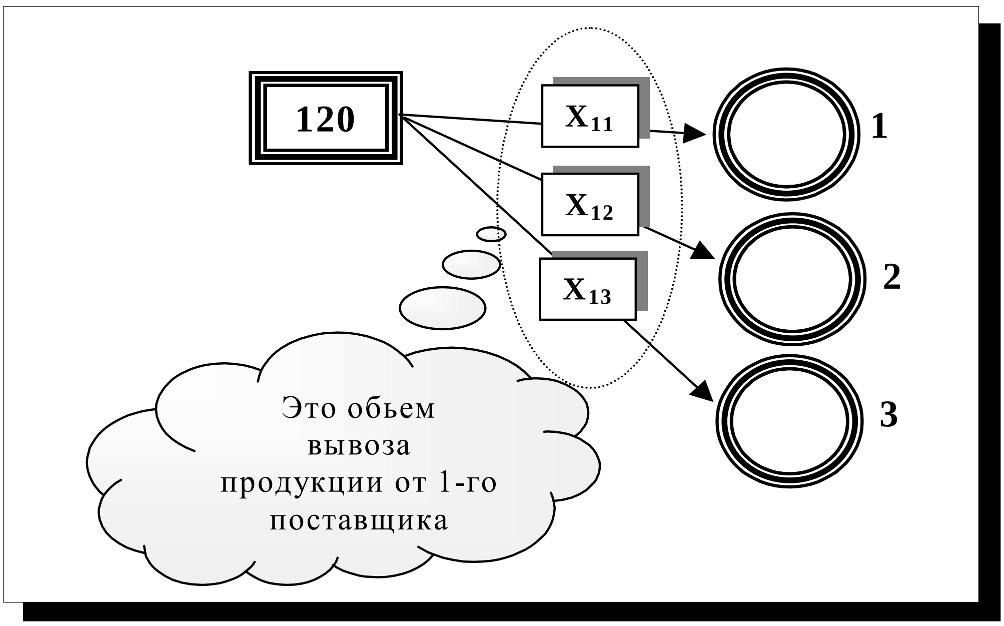
Перейдем к формулировке ограничений. Как видно из экономической постановки, ограничения делятся на 2 следующие группы:

1) *<u>Условия полного вывоза</u>* продукции *<u>от каждого поставщика</u>*. (Таких условий будет столько, сколько имеется поставщиков. У нас - 3).

2) Условия *<u>полного удовлетворения потребностей каждого потребителя</u>*. (Число условий равно числу потребителей (У нас - 3). Таким образом, в ТЗ будет ($m+n$) ограничений (в нашем примере 3+3=6). Запишем ограничения первой группы. Они будут иметь структуру

$$\boxed{\text{вывоз продукции от поставщика}} = \boxed{\text{запас}}$$

Для первого поставщика имеем (см. рисунок)



$x_{11} + x_{12} + x_{13}$ - вывоз продукции ко всем постав-щикам. Его запас равен 120 единиц. Условие полного вывоза имеет вид

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 120$$

Аналогично выглядят ограничения по вывозу для второго и третьего поставщиков

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 70$$

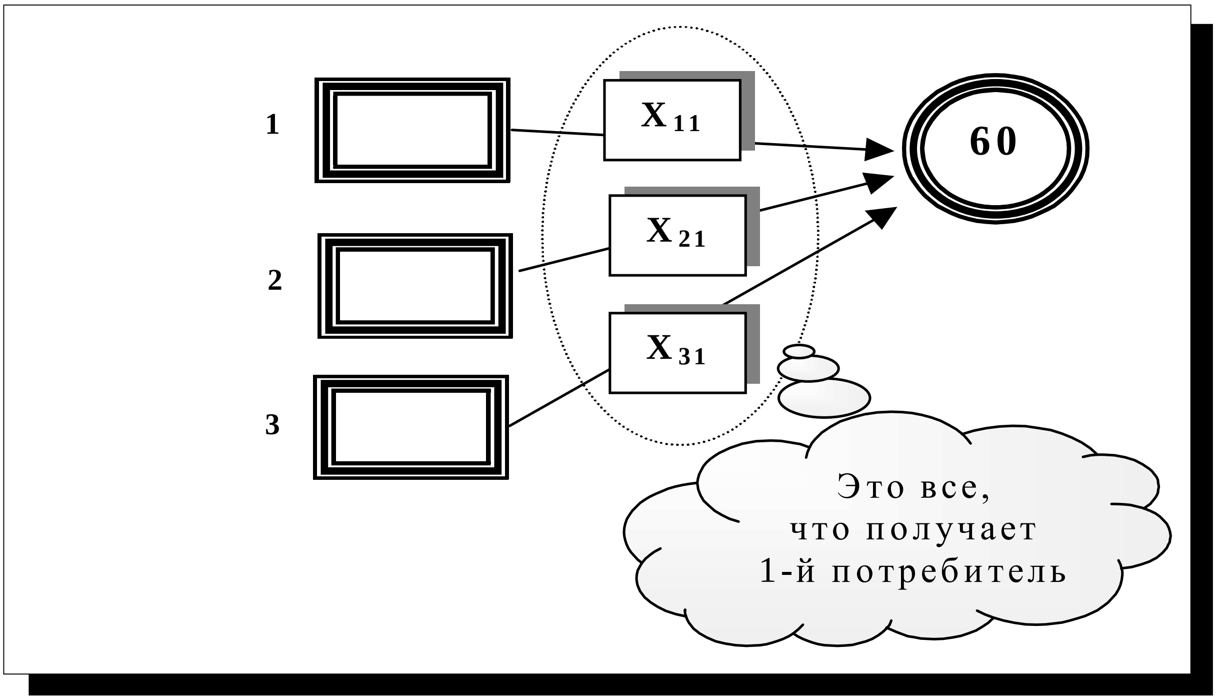
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 50$$

Ограничения второй группы можно сформулировать в виде

$$\boxed{\text{привоз продукции к потребителю}} = \boxed{\text{потребность}}$$

Привоз продукции к первому потребителю составит $x_{11} + x_{21} + x_{31}$

и ограничение примет вид $x_{11} + x_{21} + x_{31} = 60$



Аналогично для второго и третьего потребителей

$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 100$, $x_{13} + x_{23} + x_{33} = 80$ Окончательно, учитывая ограничения неотрицательности

$$x_{ij} \ge 0, \qquad i = 1,2,3, \qquad j = 1,2,3$$

запишем **математическую постановку ТЗ в виде задачи линейного программирования**:

$$f = 5x_{11} + 10x_{12} + 12x_{13} + 8x_{21} + 6x_{22} + 4x_{23} + 0x_{31} + 0x_{32} + 0x_{33} \to \min$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} & = 120 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} & = 70 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} & = 50 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} & = 60 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} & = 100 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} & = 80 \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1,2,3, \quad j = 1,2,3$$

Или, используя обозначения:

c_{ij} - для цен перевозок,

x_{ij} - для объемов перевозок,

a_i - для запасов (a_1 =120, a_2 = 70, a_3=50),

b_j - для потребностей (b_1 =60, b_2 =100, b_3 =80)

m, n - для числа поставщиков и потребителей,

приведем постановку ТЗ в виде

$$f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i & , i \in 1:m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & , j \in 1:n \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i \in 1:m, \quad j \in 1:n$$