4.2. Метод потенциалов для решения ТЗ

Коль скоро ТЗ сформулирована в виде задачи линейного программирования, сразу появляется мысль решать ее симплекс-методом. В принципе, делать это можно, но не нужно. Чтобы пояснить почему, выпишем матрицу коэффициентов системы ограничений в рассматриваемом примере. В этой матрице преобладают нулевые элементы, поэтому большинство операций при решении задачи симплекс-методом ЭВМ будет выполнять впустую, “пережевывая” нули.

неизвестные

ограничения

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	**1**	**1**	**1**	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	**1**	**1**	**1**	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	**1**	**1**	**1**
4	**1**	0	0	**1**	0	0	**1**	0	0
5	0	**1**	0	0	**1**	0	0	**1**	0
6	0	0	**1**	0	0	**1**	0	0	**1**

Далее, подсчитаем как будет расти размерность симплекс-таблицы в зависимости от числа поставщиков и потребителей. Возьмем среднюю по размерам ТЗ с 20 поставщиками и 20 потребителями. Тогда ЗЛП будет содержать 20х 20=400 переменных и 20+20=40 ограничений, т.е. симплекс-таблица будет содержать около 40х400=16000 чисел. В то же время таблица для решения ТЗ методом потенциалов, который будет описан ниже, содержит всего $m+n$=400 чисел, что в 40 раз меньше, чем при решении симплекс-методом.

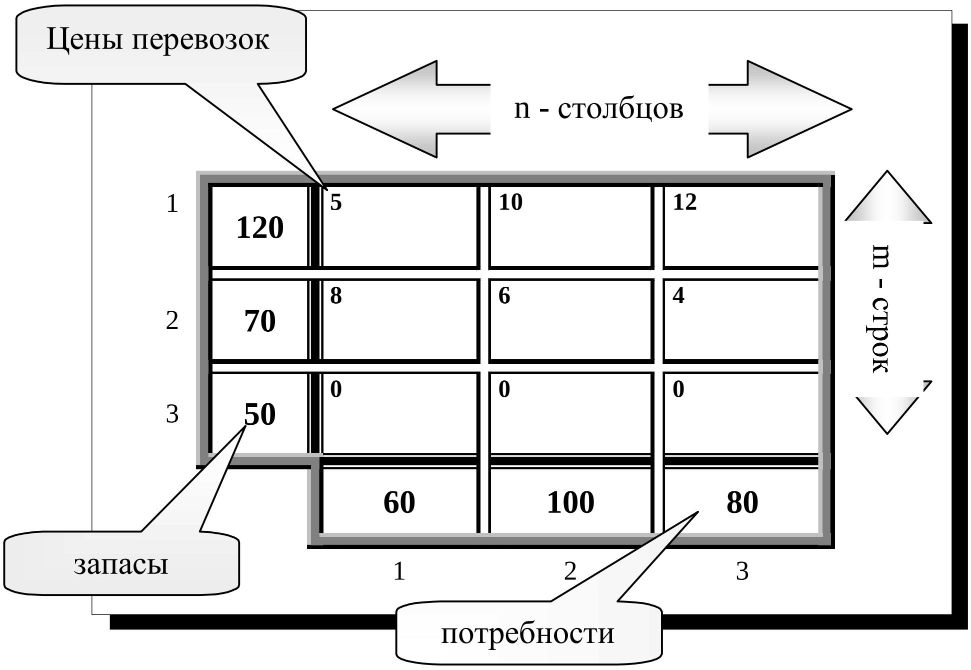
Метод потенциалов представляет из себя модификацию симплекс-метода, учитывающую специфику транспортной задачи, поэтому его алгоритм не отличается от алгоритма симплекс-метода, за исключением шага проверки целевой функции на неограниченность на множестве решений. Отсутствие указанного шага в методе потенциалов обусловлено теоремой о том, что ***закрытая ТЗ всегда разрешима***. Итак, алгоритм метода потенциалов для решения ТЗ состоит из следующих шагов:

ШАГ 1. Построение начального плана перевозок.
ШАГ 2. Проверка текущего плана на оптимальность.
Если план оптимален, то алгоритм завершен.
ШАГ 3. Улучшение плана перевозок. Переход к шагу 1.

Опишем алгоритм по шагам, иллюстрируя каждый шаг на примере ТЗ, сформулированной выше.

ШАГ 0. Посроение начального плана перевозок.

Построение начального решения (как и последующие расчеты) проводят в таблице, имеющей следующий вид:



Клетка (i , j) таблицы соответствует коммуникации, связывающей i-го поставщика с j-м потребителем.

Построить начальный план перевозок означает - назначить объемы перевозок в клетки таблицы таким образом, чтобы:
а) число заполненных клеток было (m+n-1). (Тогда план перевозок будет отвечать базисному решению ЗЛП);
б) сумма перевозок в любой строке должна быть равна запасу соответствующего поставщика, а сумма перевозок в каждом столбце равна потребности потребителя. (Условие выполнения ограничений ТЗ).
Существует несколько способов нахождения начального решения, которые отличаются только выбором клетки, в которую назначается очередная перевозка. Так, ***в способе северо-западного угла (СЗУ)*** для очередного назначения перевозки выбирается левая верхняя клетка таблицы (при этом никак не учитываются цены перевозок). Наоборот, ***в способе минимальной стоимости (МС)*** для заполнения выбирается клетка текущей таблицы с минимальной ценой перевозки, что в большинстве случаев (но не всегда) приводит к более дешевому (а значит и более близкому к оптимальному) начальному плану перевозок. Изложим теперь **алгоритм нахождения начального решения**.

ШАГ 1. Определенным способом (СЗУ, МС или каким-либо другим) выбираем клетку *в текущей таблице.* Пусть она имеет индексы (i, j) (i - номер поставщика, j - номер потребителя).
ШАГ 2. В качестве перевозок в эту клетку назначаем наименьшую из величин запаса a_i и потребности b_j, т.е.

$$x_{ij} = \min\{ a_i , b_j \}$$

ШАГ 3. Уменьшим запас a_i и потребность b_j на величину перевозки x_{ij} , т.е.

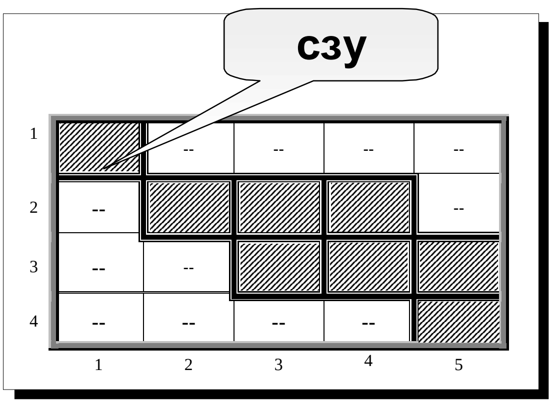
$$a_i^{'} = a_i - x_{ij} ,$$

$$b_j^{'} = b_j - x_{ij}$$

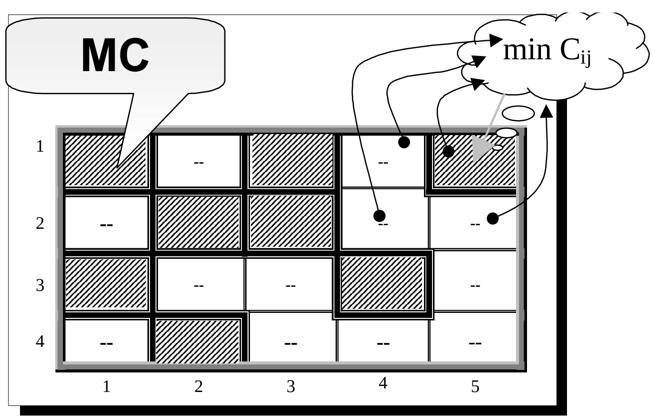
ШАГ 4. При исчерпании запаса ($a_i^{'} = 0$) запрещаем к перевозке оставшиеся свободные клетки i-ой строки, а при исчерпании потребности ($b_j^{'} = 0$) запрещаем такие же клетки в *j*-ом столбце.

• В случае одновременного исчерпания запасов и потребностей ($a_i^{'} = b_j^{'} = 0$) запрещаем перевозки или в строке (тогда считаем, что у потребителя осталась потребность в количестве равном нулю, которую необходимо удовлетворить), или в столбце (в этом случае считаем, что у поставщика остается запас равный нулю, который необходимо вывезти). Это делается для того, чтобы при одновременном запрещении перевозок в строке и столбце количество заполненных клеток таблицы не стало меньшим, чем *m*+*n*-1 •

Получим новую текущую таблицу, в которую не входят заполненные и запрещенные клетки. Если таблица не пуста, переходим ***к шагу 1.*** (При исчерпании таблицы - конец).



• В способе СЗУ строится начальный план перевозок в виде “лесенки”. Т.е. последовательно распределяются запасы очередного поставщика до их исчерпания, без учета того, какова цена перевозок на коммуникациях. В способе МС выбор перевозки между поставщиком и потребителем определяется самой дешевой (на данный момент) коммуникацией •



Найдем теперь начальные планы в нашем примере способами СЗУ и МС.

Способ северо-западного угла.

1. Выбираем С-З клетку (1,1)

120	5 ●	10	12
70	8	6	4
50	0	0	0
	60	**100**	**80**

2. Назначаем перевозку

$$x_{11} = \min\{120{,}60\} = 60$$

		1	2	3
1	**120**	60		
2	**70**			
3	**50**			
		60	**100**	**80**

3. Уменьшаем запасы 1-го поставщика и потребности 1-го потребителя на величину перевозки.

		1	2	3
1	**60**	60		
2	**70**			
3	**50**			
		×	**100**	**80**

4. Исчерпана потребность у 1-го потребителя (ему больше ничего не надо) - запрещаем перевозки в свободных клетках 1-го столбца и получаем новую текущую таблицу (без 1-го столбца). Далее (опуская пояснения) выполняем с шага 1.

		1	2	3
1	**60**	60		
2	**70**	-		
3	**50**	-		
		×	**100**	**80**

		1	2	3
1	**x**	60	60	-
2	**70**	-		
3	**50**	-		
		x	**40**	**80**

1. С-З клетка ~ (1 , 2)

2. $x_{12} = \min\{60,100\} = 60$

3. $a_1^{'} = 60 - 60 = 0, \quad b_2^{'} = 100 - 60 = 40$

		1	2	3
1	**x**	60	60	-
2	**70**	-		
3	**50**	-		
		x	**40**	**80**

4. Исчерпывается запас - запрещаем 1-ю строку. Текущая таблица не содержит 1-й строки и 1-го столбца

1. С-З клетка ~ (2 , 2)

2. $x_{22} = \min\{70,40\} = 40$

3. $a_2^{'} = 70 - 40 = 0, \quad b_2^{'} = 40 - 40 = 0$

4. Запрещаем перевозки во 2-м столбце

		1	2	3
	×	60	60	-
1	**30**	-	40	
2	**50**	-	-	
3		**×**	**×**	**80**

		1	2	3
1	**×**	60	60	-
2	**×**	-	40	30
3	**50**	-	-	
		×	**×**	**50**

1. С-З клетка ~ (2 , 3)

2. $x_{23} = \min\{30,80\} = 30$

3. $a_2^{'} = 30 - 30 = 0, \quad b_3^{'} = 80 - 30 = 50$

4. Нужно запретить перевозки в строке 2, но там уже все клетки либо заполнены, либо запрещены

×	60	60	-
×	-	40	30
×	-	-	50
	×	×	×

1. С-З клетка ~ (3 , 2)
2. $x_{33} = \min\{50{,}50\} = 50$
3. $a_3' = b_3' = 0$
4. Таблица исчерпана. Конец.

Подсчитаем стоимость полученного плана. Для этого умножим объем перевозок в заполненных клетках на цены перевозок в них:

$$f_0^{СЗУ} = 60 \cdot 50 + 60 \cdot 10 + 40 \cdot 6 + 30 \cdot 4 + 50 \cdot 0 = 1260$$

Способ минимальной стоимости.

		1	2	3
1	**120**	*5*	*10*	*12*
2	**70**	*8*	*6*	*4*
3	×	*0* -	*0* 50	*0* -
		60	**50**	**80**

1. Клетки с минимальной ценой (3,1), (3,2) и (3,3). Выбираем, например, (3,2). (Далее все шаги, как в предыдущем способе).
2. $x_{32} = \min\{50{,}60\} = 50$
3. $a_3' = 50 - 50 = 0, \quad b_2' = 60 - 50 = 10$
4. Запрещаем строку 3.

		1	2	3
1	**120**	*5*	*10*	*12*
2	×	*8* -	*6* -	*4* 70
3	×	*0* -	*0* 50	*0* -
		60	**50**	**10**

1. Клетка с min ценой ~ (2,3)
2. $x_{23} = \min\{70{,}80\} = 70$
3. $a_2' = 70 - 70 = 0, \quad b_3' = 80 - 70 = 10$
4. Запрещаем строку 2.

		1	2	3
1	**60**	*5* 60	*10*	*12*
2	×	*8* -	*6* -	*4* 70
3	×	*0*	*0* 50	*0* -
		×	**50**	**10**

1. Клетка с min ценой ~ (1,1)
2. $x_{11} = \min\{120{,}10\} = 10$
3. $a_1' = 120 - 10 = 110, \quad b_1' = 0$
4. В первом столбце запрещать уже нечего. Текущая таблица содержит две клетки (1,2) и (1,3).

1. Выбираем клетку (1,2)
2. $x_{12} = \min\{110{,}100\} = 100$
3. $a_1^{'} = 110 - 100 = 10, \quad b_1^{'} = 0$
4. Текущая таблица содержит одну клетку (1,3).

		1	2	3
1	**10**	*5* 60	*10* 50	*12*
2	×	*8* -	*6* -	*4* 70
3	×	*0* -	*0* 50	*0* -
		×	×	**10**

		1	2	3
1	×	*5* 60	*10* 50	*12* 10
2	×	*8* -	*6* -	*4* 70
3	×	*0* -	*0* 50	*0* -
		×	×	×

1. Выбираем последнюю клетку (1,3)
2. $x_{13} = \min\{10{,}10\} = 10$
3. $a_1^{'} = b_3^{'} = 0$
4. Таблица исчерпана. Конец.

Стоимость полученного плана составит

$$f_0^{MC} = 600 \cdot 5 + 50 \cdot 10 + 10 \cdot 12 + 70 \cdot 4 + 50 \cdot 0 = 1200$$

Это на 60 единиц меньше стоимости начального плана, найденного способом СЗУ. Однако, если выбрать на первом шаге вместо клетки (3,2), клетку (3,1), это приведет к более дорогому начальному плану, чем в способе СЗУ. Предлагаем убедиться в этом самостоятельно.

- Отдельно разберем пример нахождения начального плана перевозок в задаче, где имеет место вырожденный случай (одновременное исчерпание запасов и потребностей на некотором шаге). Пусть исходные данные транспортной задачи, записанные в таблицу, имеют следующий вид:

		1	2	3
1	**100**	*7*	*4*	*8*
2	**80**	*9*	*12*	*6*
3	**90**	*2*	*6*	*11*
		100	**120**	**50**

Воспользуемся, например, способом СЗУ

1. С-З клетка ~(1,1)
2. $x_{11} = \min\{100,100\} = 100$
3. $a_1' = \quad b_1' = 0$

Одновременно исчерпались запасы и потребности

		1	2	3
1	**100**	*7*	*4*	*8*
2	**80**	*9*	*12*	*6*
3	**90**	*2*	*6*	*11*
		100	**120**	**50**

.

×	100		-
80	-		
90	-		
	×	**120**	**50**

×	100	-	-
×	-	80	-
×	-	40	50
	×	×	×

Легко убедиться в том, что, если запретить перевозки одновременно в свободных клетках 1-ой строки и 1-го столбца, то придем к плану перевозок, содержащему менее чем *m*+*n*=5 заполненных клеток (см. Таблицу справа). Поэтому будем, для определенности, считать, что у первого потребителя вся потребность удовлетворена (и запретим перевозки в 1-м столбце), а у первого поставщика имеется запас в количестве равном нулю. Тогда придем к таблице:

Далее, действуя как обычно, распределяем перевозку равную нулю в С-З клетку (1,2) и окончательно получим

1	**0**	100		
2	**80**	-		
3	**90**	-		
		×	**120**	**50**

×	100	0	-
80	-		
90	-		
	×	×	×

×	100	0	-
×	-	80	
×	-	40	50
	×	×	×

Полученный план перевозок имеет уже 5 заполненных клеток •

Переходим к описанию следующего шага метода потенциалов.

ШАГ 1. **<u>Проверка текущего плана на оптимальность.</u>**

Признаком того, что текущий план перевозок является оптимальным, служит условие

$$(\text{У}_1) \qquad u_i + v_j - c_{ij} \le 0$$

которое выполняется для всех клеток таблицы. Неизвестные здесь величины u_i и v_j (называемые потенциалами) определяются из условий

$$(\text{У}_2) \qquad u_i + v_j = c_{ij}$$

(для заполненных клеток $(i\ ,\ j)$ таблицы).

• Поясним экономический смысл потенциалов. Введем обозначение $u_i' \triangleq -u_i$ Тогда u_i' можно трактовать, как цену единицы продукции у поставщика, а

$$v_j = u_i' + c_{ij} \quad (\text{см. } (\text{У}_2))$$

как цену единицы продукции у потребителя, которая возросла на цену перевозки. Условие (Y1)

$$v_j \le u_i' + c_{ij}$$

означает невозможность появления “спекулятивной” цены. Само же название “потенциалы” заимствовано из физического закона о том, что работа по перемещению заряда в электростатическом поле равна разности потенциалов в данных точках поля (У нас: “...цена перевозки единицы продукции по коммуникации равна разности цен в конце и в начале пути”) •

Так как заполненных клеток в таблице (*m*+*n*-1) штук, а неизвестных и (*m*+*n*) штук, то для их определения имеется система из (*m*+*n*-1) уравнений относительно (*m*+*n*) неизвестных. Чтобы найти решение (хотя бы какое-нибудь) такой системы, достаточно положить одно из неизвестных (произвольное) равным некоторому произвольно выбранному числу. Тогда остальные определяются единственным образом. Можно решать эту систему непосредственно (продолжаем работать с нашим “старым” примером и найдем потенциалы для начального плана, построенного способом МС).

Заполненные клетки	Уравнения
$(1,1)$	$u_1 + v_1 = 5$
$(1,2)$	$u_1 + v_2 = 10$
$(1,3)$	$u_1 + v_3 = 12$
$(2,3)$	$u_2 + v_3 = 4$
$(3,2)$	$u_3 + v_2 = 0$

Положим, например, неизвестное u_1 равным 0 (через него можно из первых трех уравнений определить v_1 , v_2 и v_3). Последовательно имеем:

$u_1 = 0$ $\Rightarrow$
Из 1-го урав. $v_1 = 5$
Из 2-го урав. $v_2 = 10$ $\rightarrow$ Из 5-го урав. $u_3 = 4 - 10 = -6$
Из 3-го урав. $v_3 = 12$ $\rightarrow$ Из 4-го урав. $u_2 = 4 - 12 = -8$

Но лучше определять u и v непосредственно в таблице, используя для их хранения клетки, где ранее записывались запасы и потребности. Предварительно перепишем условия (Y1) в двух эквивалентных формах записи

(**) $$u_i = c_{ij} - v_j$$

(***) $$v_j = c_{ij} - u_i$$

Их можно сформулировать в виде единого правила

НЕИЗВЕСТНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ НАХОДИТСЯ ВЫЧИТАНИЕМ ИЗВЕСТНОГО ИЗ ЦЕНЫ ПЕРЕВОЗКИ В ЗАПОЛНЕННОЙ КЛЕТКЕ

.

Применим это правило для определения u и v в нашем примере.

u_1	**0**	60	50	10
u_2		-	-	70
u_3		-	50	
		5	**10**	**12**
		v_1	v_2	v_3

В качестве потенциала, который полагается равным некоторому числу (у нас нулю) выбираем тот, который соответствует строке или столбцу с максимальным числом заполненных клеток (это позволит сразу определить максимальное число неизвестных потенциалов через него). В данном случае таким потенциалом является u_1 (в первой строке все клетки заполнены). По правилу в форме (***) определяем

$$v_1 = c_{11} - u_1 = 5 - 0 = 5,$$

$$v_2 = 10 - 0 = 10, \quad v_3 = 12 - 0 = 12$$

Теперь переходим к найденным потенциалам (v_1, v_2, v_3) и ищем в соответствующих им столбцах (1,2,3) заполненные клетки, которым отвечают неизвестные потенциалы . В первом столбце таких клеток нет. Во втором столбце - это клетка (3,2). Применяя правило в виде (**), находим

$$u_3 = 0 - 10 = -10$$

u_1	**0**	*5* 60	*10* 50	*12* 10
u_2		-	-	70
u_3	**-10**	-	*0* 50	
		5	**10**	**12**
		v_1	v_2	v_3

В третьем столбце находим заполненную клетку (2,3), которой соответствует неизвестный пока потенциал u_2 . Определяем u_2 через v_3 и c_{23} $u_2 = 4 - 12 = -8$ и тем самым завершаем определение системы потенциалов.

Переходим к проверке условий оптимальности (Y_2). Достаточно проверять их для незаполненных клеток, так как из (Y_1) следует, что для клеток заполненных эти условия выполняются как равенства. Для проверки берется незаполненная клетка, складываются соответствующие ей потенциалы (первый элемент строки и последний элемент столбца) и из них вычитается цена перевозки в данной клетке. Если полученное число отрицательное (или ноль), то оптимальность в данной клетке не нарушается (в случае выполнения условия (Y_2) для всех незаполненных клеток, имеем оптимальный план перевозок). Если же в таблице встретилась хотя бы одна клетка, для которой это число положительно, тогда решение не является оптимальным и может быть улучшено. Проверим на оптимальность имеющееся решение.

Клетки	Условия оптимальности
$(2,1)$	$u_2 + v_1 - c_{21} = -8 + 5 - 8 = -11 < 0$
$(2,2)$	$u_2 + v_2 - c_{22} = -8 + 10 - 6 = -4 < 0$
$(3,1)$	$u_3 + v_1 - c_{31} = -10 + 5 - 0 = -5 < 0$
$(3,3)$	$\boxed{u_3 + v_3 - c_{33} = -10 + 12 - 0 = 2 > 0}$

Условие оптимальности нарушено в клетке (3,3). Следовательно, имеющийся план перевозок можно улучшить.
Дадим описание заключительного шага алгоритма метода потенциалов.

ШАГ 2. **Улучшение плана перевозок**.

Улучшение плана происходит путем назначения перевозки $\theta > 0$ в ту клетку $(i\ ,\ j)$ таблицы, в которой нарушилось условие оптимальности. Но назначение ненулевой перевозки нарушает условия баланса вывоза продукции от поставщика i (вывозит весь запас и еще плюс $\theta > 0$) и условия баланса привоза продукции к потребителю j (получает все что можно и еще плюс $\theta > 0$). Условия баланса восстанавливают путем уменьшения вывоза от i-поставщика к какому-то другому потребителю j (уменьшают на θ перевозку в какой-то заполненной клетке $(i\ ,\ j)$ строки i). При этом нарушается баланс привоза продукции к потребителю j

(получает на θ меньше, чем ему требуется). Восстанавливают баланс в столбце j, тогда он нарушается в некоторой строке i и т.д. до тех пор, пока цикл перемещения перевозок не замкнется на клетке, в которой нарушалось условие оптимальности. Продемонстрируем эти рассуждения на нашем примере.

		1	2	3
1	**120**	60	50	10
2	**70**	-	-	70
3	**50**	-	50	$+\Theta$
		60	**100**	**80**

1. Оптимальность нарушена в клетке (3,3). Назначим в нее перевозку $\theta > 0$ ($+\theta$ означает, увеличение на θ).

		1	2	3
1	**120**	60	50	10
2	**70**	-	-	70
3	**50**	-	$50 - \Theta$	$+\Theta$
		60	**100**	**80**

2. Нарушается баланс вывоза от поставщика 3 (вывозит $50+\theta$, а это больше его запаса!). <u>Уменьшаем на θ перевозку в заполненной клетке</u> строки 3 (в незаполненной уменьшать нельзя, так как это приведет к отрицательной перевозке). Баланс в строке восстановлен.