# I часть (повторение)

# Приближенные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

## Постановка задачи

Задано уравнение y’=f(x,y) и   
начальное условие y(x0)=y0

Требуется найти с заданной степенью точности приближенное решение   
 y=y(x),  
удовлетворяющее начальному условию и уравнению на некотором отрезке [a,b], где a=x0.

О существовании и единственности этой задачи говорят следующие теоремы:

***Т. Пеано.*** Если функция f(x,y) непрерывна в окрестности т.(x,y), то решение существует

Т***. Пикара.*** Если f(x,y) и fy’(x,y) непрерывны в окрестности т.(x0,y0), то решение единственно на некотором отрезке, содержащем т. X0.

Приближенные методы делятся на 3 группы

1. *Аналитические*, позволяющие получить приближенное решение y(x) в виде формулы
2. *Графические*, дающие возможность построения графика решения y(x).
3. *Численные*, в результате применения которых получается таблица приближенных значений функции y(x).
4. **Аналитические**
   1. Метод Пикара
   2. Метод разложения в ряд Тейлора
5. **Метод Эйлера**
6. **Общая структура численных методов**
7. Делим отрезок (a, b) на n равных частей точками

a=X0 < X1 < X2 <...< Xn=b  
Xi=Xi+h, где –шаг h- интегрирования

h=

1. Последовательно, при i=0,1,2,…(n-1) осуществляем переход от точки (Xi,Yi) к точке (Xi+1,Yi+1) по формуле Yi+1 = Yi + Yi , где на каждом отрезке величина Yi вычисляется по одному и тому же закону, задающему метод решения уравнений.
   1. Метод Эйлера

Известно Y’=f(x,y)

(Xi,Yi). Найти (Xi+1,Yi+1)

Xi+1=Xi+h, Yi+1=?

tg(ϕ) =f(xi,yi)

yi+1 =yi+f(xi,yi)(x-xi)

Yi+1

Yi

Xi

Xi+1

h

ϕ

yi+1 = yi +f(xi,yi)(xi+1-xi)= yi +f(xi,yi)h

yi+1 = yi +f(xi,yi)h

Точность вычислений пропорциальна величине шага в 1-ой степени (метод первого порядка)

* 1. Методы Рунге-Кутта
     + **Четвертого порядка**

Вычисляются вспомогательные величины k1, k2, k3, k4 по следующим формулам

K1=h **f(**xi,yi)

K2= h **f(**xi+h/2,yi+k1/2)

K3= h **f(**xi+h/2,yi+k2/2)

K4= h **f(**xi+h,yi+k3)

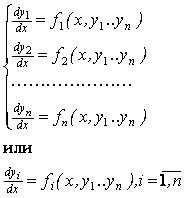
yi+1= yi+1/6(k1+2k2+2k3+k4)

Точность методов Рунге-Кутта обоих порядков вычисляется с помощью метода двойного счета

**II часть**

# Приближенные методы решения системы дифференциальных уравнений

Системой дифференциальных уравнений называется система вида



где x - независимый аргумент,

yi - зависимая функция, l18image002.png

yi(x0) =yi0 - начальные условия.

Функции yi(x), при подстановке которой система уравнений обращается в тождество, называется решением системы дифференциальных уравнений.

Численные методы решения систем дифференциальных уравнений.

**Метод Эйлера.**

yij+1=yij+hfi(xi,y1j y2j..ynj), xj+1=xj+h

l18image002.png

j - номер шага.

**Модифицированный метод Эйлера.**

ki1=h\*fi(xj,y1j,..,ynj)

ki1=h\*fi(xj+h,y1j+ki1,..,ynj+ki2)

yij+1=yij+(ki1+ki2)/2

xj+1=xj+h

**Метод Рунге-Кутта четвертого порядка.**

ki1=hfi(xj,y1j,..,ynj)

ki2=hfi(xj+h/2,y2j+ki1/2,..,ynj+kn1/2)

ki3=hfi(xj+h/2,y2j+ki2/2,..,ynj+kn2/2)

ki4=hfi(xj+h,y1j+ki2,..,ynj+kn3)

yij+1=yij+(ki1+2ki2+2ki3+ki4)/6

xj+1=xj+h

**Дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение вида F(x,y,у',y")=0** (1)

или y"=f(x,y,y'). (2)

Функция y(x), при подстановке которой уравнение обращается в тождество, называется решением дифференциального уравнения.

Численно ищется частное решение уравнения (2), которое удовлетворяет заданным начальным условиям, то есть решается задача Коши.

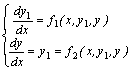
Для численного решения дифференциальное уравнение второго порядка преобразуется в систему двух дифференциальных уравнений первого порядка и приводится к машинному виду (3).

Для этого вводится новая неизвестная функция

l18image003.png

слева в каждом уравнении системы оставляют только первые производные неизвестных функций, а в правых частях производных быть не должно

y"=f(x,y,y') ⇒ = f(x,y,y') = y1’ =

 (3)

Функция f2(x, y1, y) в систему (3) введена формально для того, чтобы методы, которые будут показаны ниже, могли быть использованы для решения произвольной системы дифференциальных уравнений первого порядка.

Для решения системы из n уравнений расчетные формулы приведены выше. Для решения системы из двух уравнений расчетные формулы удобно записать без двойных индексов в следующем виде:

**Метод Эйлера.**

у1i+1=у1i+hf1(xi, y1i, yi),

уi+1=уi+hf2(xi, y1i, yi),

xi+1 = xi +h.

**Метод Рунге-Кутта четвертого порядка.**

у1i+1=у1i+(m1+2m2+2m3+m4)/6

m1=hf1(xi, у1i, yi)

m2=hf1(xi +h/2, у1i +m1/2, yi +k1/2)

m3=hf1(xi +h/2, у1i +m2/2, yi +k2/2)

m4=hf1(xi +h, у1i +m3, yi +k3)

уi+1= yi +(k1+2k2+2k3+k4)/6

k1=hf2(xi, y1i, yi)

k2=hf2(xi +h/2, у1i +m1/2, yi +k1/2)

k3=hf2(xi +h/2 у1i +m2/2, yi +k2/2)

k4=hf2(xi +h, у1i +m3, yi +k3)

xi+1= xi +h

где h - шаг интегрирования. Начальные условия при численном интегрировании учитываются на нулевом шаге: i=0, x=x0, y1=y10, y=y0.