

pre-calculus 20

20.1: Absolute Value 绝对值

- 作用在实数上
 - 作用在函数上
1. 绝对值的定义
 2. 绝对值在数轴上的表示，绝对值和距离的关系
 3. 绝对值的计算及排序
 4. 含有绝对值的表达式计算和化简
 5. 绝对值对于函数的影响（图像的变化）
 - 已知 $f(x)$ 的图像，求 $f(x)$ 的绝对值函数的图像
 6. 含有绝对值的方程以及不等式的解
 - 绝对值不等式的解
 - 绝对值方程的解
 7. 给一个计算过程，找到错误的地方并改正
 8. 阅读和应用题
 9. 分析 $|x|$, $\sqrt{x^2}$, $|f(x)|$ 以及 $\sqrt{f(x)^2}$ 的关系

20.2: Radical 根式

- 根式的计算
 - 含有根式的方程和不等式的解
1. Entire Radical 完全根式 和 Mixed Radical 混合根式 的转换
 2. 含有根式的数组的排序
 3. 含有根式的表达式的计算和化简
 4. 当根式在分母时，如何化简
 5. binomial conjugate 二项式共轭
 6. 证明: $(-x)^2 = x^2$, $\sqrt{x^2} = |x|$, $\sqrt{x^2} \neq \pm x$
 7. 和根式相关的应用题
 8. 求根式的非允许值 (non-permissible value) 和根式方程的解
 9. 分辨和解释方程中出现的外根 (extraneous root), 如何验证方程的解是否正确

20.3: Rational expression and equation 有理式和方程

- 有理式的到其他式子的转换
- 有理式的变换
- 解有理式的方程和不等式

1. 寻找有理式的最简形式
2. 含有有理数的大小比较和排序
3. 寻找有理式的允许和不可能值
4. 解释为什么化简后的有理式必须专门声明不可能值
5. 给一个有理式化简的过程，找到错误的地方并改正
6. 有理式的四则运算，以及寻找不可能值
7. 应用题和解方程

20.4: Trigonometric Functions 三角函数

1. 角度和象限的关系
2. 参照角的概念
3. 通过数字画角，通过角的图像计算角度以及点的坐标
4. 给一个参照角的角度，计算所有可能象限上的角度以及点的坐标
5. 已知点的坐标，求三角函数的值和角度
6. 特殊角度的三角函数值($0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$)
7. 解含有三角函数的方程和不等式
8. $30^\circ - 60^\circ - 90^{circ}$ 三角形和 $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ 三角形的特征和性质
9. 计算参照角是特殊数值的角度 ($0, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$) 时候的三角函数值 (不用计算器)
10. sine, cosine, tangent 之间的关系
11. 找到tangent的不存在值

20.5: Sine Law and Cosine Law 正弦定理和余弦定理

- 正弦定理: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$
- 余弦定理: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$

1. 运用三角函数，解一个不是直角三角形的三角形
2. 正弦和余弦定理的推导和证明
3. 出现两个解的情况的处理方法
4. 证明: *For every possible pair of angles whose sum is less than 180° , and line segment, there is a unique triangle with those angles and line segment as sides.*
5. 在直角三角形的情况下，两个定理的意义

20.6: Polynomial Factoration 多项式的因式分解

- $a^2 \cdot x^2 - b^2 \cdot y^2, a \neq 0, b \neq 0$
- $a \cdot (f(x))^2 - b \cdot (f(x))^2 + c, a \neq 0$
- $a \cdot (f(x)) - b \cdot (g(y))^2, a \neq 0, b \neq 0$

1. 化简这类多项式
2. 验证一个二项式是否是一个多项式的因数

20.7: Quadratic Functions 二次函数

- $y = ax^2 + bx + c$
- 函数图像特征: *vertex* 顶点, *domain and range* 定义域和值域, *direction of opening* 开口方向, *axis of symmetry* 对称轴, *x- and y-intercepts* 横纵轴的交点

1. 解释 $y = a(x - p)^2 + q$ 中, a, p, q 的意义。对于顶点, 定义域值域, 开口方向, 对称轴, 横纵轴的交点的作用
2. 已知函数图像特征 求 a, p, q 参数的值
3. 判断和解释一个二次函数有一个、两个或者无根的情况
4. 把 $y = ax^2 + bx + c$ 转换成 $y = a(x - p)^2 + q$ 的形式
 - 给一个转换过程, 找到错误的地方并改正
5. 通过 $y = ax^2 + bx + c$ 的函数, 判断函数的图像特征, 找到 a, p, q 参数的值并且画出函数图像
6. 应用题和解方程

20.8: Quadratic Equations 二次方程

- Single variable quadratic equation: $ax^2 + bx + c = 0$
- Systems of linear-quadratic or quadratic-quadratic equations:

$$\begin{cases} a_1 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + c_1 = 0 \\ a_2 \cdot y^2 + b_2 \cdot y + c_2 = 0 \end{cases}$$

1. 描述方程的解和图像上的交点的关系
2. 推导出二次方程的解的公式

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

3. 运用一下方式解二次方程
 - 找到平方根

- 因式分解
 - 补全平方
 - 运用公式
 - 画图
4. 验证一个二次方程的解是否正确
 5. discriminant 判别式和解的数量的关系
 - $b^2 - 4ac > 0$ 有两个解
 - $b^2 - 4ac = 0$ 有一个解
 - $b^2 - 4ac < 0$ 无解
 6. 给一个解方程的过程，找到错误的地方并改正
 7. 给一个方程组，描述这个方程组在现实中被运用到的场景
 8. 解方程组：
 - 代数法
 - 画图法
 - 用计算器
 9. 解释方程组的图像中交点和方程组的解的关系
 10. 解释方程组无解、一个解、两个解和无穷多解的情况
 11. 应用题

20.9: Quadratic Inequalities 二次不等式

- One variable quadratic inequality: $ax^2 + bx + c \leq 0$
- Two variable linear and quadratic inequalities:

$$\begin{cases} a_1 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + c_1 \leq 0 \\ a_2 \cdot y^2 + b_2 \cdot y + c_2 \leq 0 \end{cases}$$

1. 计算不等式的解（解的范围）
2. 如何使用测试点计算不等式的解
 - 当取x值使函数值为0时
 - 当取x值使函数不成立时
3. 在数轴上画出解的范围，画实线和空点的区别
4. 应用题，以及对于不等式的解的解释

20.10: Arithmetic and Geometric Sequences 等差数列和等比数列

- Arithmetic sequence: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

$$t_n = a_1 + (n - 1)d$$

- Geometric sequence: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

$$t_n = a_1 r^{n-1}$$

- Arithmetic series: $\sum_{i=1}^n a_i$

$$\sum_{i=1}^n a_i = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

- Geometric series: $\sum_{i=1}^n a_i$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \frac{a_1}{1 - r}$$

1. 描述等差数列和等比数列的特征，判断一个数列是等差数列还是等比数列
2. 通过已知信息，写一个等差数列或者等比数列
3. 通过已知信息，写出等差数列或者等比数列的前n项
4. 通过等差数列或者等比数列的前n项，写出等差数列或者等比数列的通项公式（求参数 a_1, d, r ）
5. 应用题
6. 判断一个数列是否收敛，如果收敛，求和

20.11: Reciprocal functions 倒数函数

- of linear functions: $y = \frac{1}{x}$
- of quadratic functions: $y = \frac{1}{x^2}$

1. 描述倒数函数的特征，以及和原函数的关系
2. 判断一个倒数函数的不可能的值，以及和纵渐近线的关系
3. 已知原函数 $f(x)$ 是一个最高次数为2的多项式，求 $f(x)$ 的倒数函数，以及函数图像
4. 反之，已知 $f(x)$ 的倒数函数，求 $f(x)$ 的原函数和函数图像
5. 描述函数和倒数函数的端点行为（end behavior）