Elementi di geometria dello spazio

Lo spazio e la Fisica

Lo Spazio, tra Fisica e Geometria

Molti storici della Fisica sostengono che i primi studiosi ad occuparsi di Fisica, dimostrando uno spirito scientifico metodologicamente appropriato, siano stati i filosi ellenistici della Grecia antica. Infatti, per loro, la cosidetta Geometria Euclidea era, al tempo stesso, una **teoria assiomatica** [1] e un'attività concreta di esplorazione delle proprietà dello spazio *fisico*. Per accettare la dimostrazione di un teorema i Greci *pretendevano* che il procedimento potesse essere riprodotto concretamente con l'uso di qualche strumento reale, ed erano talmente fedeli a questa regola operativa che la loro è stata chiamata anche "Geometria con riga e compasso".

Per fare un esempio, riflettiamo su una operazione molto semplice, come la ricerca della bisettrice di un angolo. Per realizzarla, i matematici greci staccavano due segmenti identici sulle semirette che delimitavano l'angolo, usando un compasso. Quindi, sempre con l'uso del compasso, determinavano il punto medio tra gli estermi dei segmenti appena trovati. Infine, chiamavano bisettrice la retta che conteneva questo punto medio e il vertice del triangolo. Solo a questo punto, **dopo** aver constatato l'esistenza fisica della bisettrice così trovata, ne studiavano le proprietà, dimostrata che divideva l'angolo in due parti uguali.
A volte, questo rigore metodologico creava delle difficoltà. Per esempio, i matematici greci non sono mai riusciti ad eseguire la divisione in tre parti uguali di un angolo arbitrario [2] e di conseguenza nutrivano dei dubbi insanabili sul concetto di divisibilità di un angolo.

Anche oggi la Fisica, si mantiene fedele allo spirito originale dei filosofi greci, cercando di stabilire un confronto tra gli enti astratti della Geometria e le proprietà dello spazio reale.
Prendiamo ad esempio un ente fondamentale della geometria, come può essere una retta. Quale può essere l'oggetto fisico più adatto a rappresentarla? Per uno scienziato moderno, si potrebbe sicuramente indicare il raggio di luce mentre viaggia nel vuoto.

Non sempre, però, il comportamento della luce si adegua alle regole della Geometria Euclidea. Esistono alcuni fenomeni nei quali la luce segue percorsi un po' sorprendenti. Consideriamo ad esempio il fenomeno dell'eclissi totale di Sole.
Durante un'eclissi totale, il disco solare non viene mai oscurato completamente, ma rimane visibile una corona luminosa molto spettacolare. Bisogna sapere, però, che il disco solare ha una dimensione più piccola di quello lunare. Ovvero, se facessimo una fotografia del sole, [3] e la confrontassimo con quella della Luna, la seconda risulterebbe più grande. Questo accade perchè i raggi solari, passando vicino alla luna, curvano assecondando la forza di gravità.

[1] elaborazione matematica fondata su un insieme di ipotesi astratte
[2] oggi sappiamo che si tratta di una operazione impossibile, con la riga e il compasso
[3] usando schermi adeguati per proteggere la vista

Riflettendo su questo fenomeno, Albert Einstein osservò che l'eclisse manifesta una ***violazione*** della natura euclidea dello spazio. Infatti, un raggio di luce che, partendo dal centro del Sole fosse diretto verso il centro della Terra durante l'eclisse, potrebbe percorrere un numero infinito di strade diverse, contro il principio fondamentale per cui, *per due punti passa una e una sola retta*.

Attualmente, la geometria euclidea è utilizzata ancora per descrivere un grande numero di fenomeni fisici e deve essere quindi ben conosciuta dagli studenti, ma è importante studiarla tenendo presente che tutte le costruzioni della matematica sono utili nel limite in cui aiutano gli uomini a descrivere in modo efficente i fenomeni osservati in concreto.

I vettori e le dimensioni dello spazio

La geometria euclidea è una teoria affascinante, perché descrive lo spazio senza usare nessuna struttura di supporto.
Nelle applicazioni fisiche, però, può essere utile costruire un linguaggio più versatile, che si adatta più facilmente alle situazioni dinamiche dei fenomeni in evoluzione. Per questo motivo, molto spesso, si usano degli oggetti particolari, chiamati vettori.

Un vettore non è molto dissimile da un semplice punto dello spazio, ma aggiunge ad esso una struttura che aiuta a riflettere sulle relazioni tra quel punto e un altro punto particolare, che funge da riferimento. Per questa ragione, ogni vettore possiede un **punto di applicazione** e un **estremo**. Un vettore si disegna come una freccia che parte nel punto di applicazione e finisce nel punto di estremo.
Nel linguaggio simbolico, il vettore è indicato da un nome soprassegnato da una freccia, in questo modo: $\vec{v}$
Molti testi, tuttavia, usano indicare abitualmente i vettori con un semplice simbolo in grassetto. Così: $\mathbf{v}$.

Ogni vettore può essere determinato indicato per mezzo di tre caratteristiche specifiche. Il **modulo**[4] , la **direzione** e il **verso**.
Il *modulo* di un vettore è la distanza tra il vertice e il punto di applicazione.
La *direzione* è la retta passante per il vertice e la coda del vettore.
Il *verso* è l'orientazione del vettore, ed è diretto dalla coda verso la punta.

Due vettori che possiedono la stessa direzione, lo stesso verso e la stessa intensità sono detti equivalenti. Per riconoscere due vettori equivalenti è sufficiente sovrapporli uno sull'altro, in modo che le rispettive punte e le rispettive code coincidano perfettamente, per mezzo di una traslazione rigida [5].

Come per ogni concetto della matematica, è fondamentale riconoscere le operazioni concrete che si possono definire sui vettori, per poter dire di aver capito in modo sufficiente l'argomento.
Queste, per la verità, sono molto numerose, ma le principali, per i nostri scopi

[4] o intensità
[5] Dunque una traslazione è rigida se conserva modulo, direzione verso del vettore

introduttivi, sono la **somma**, la **differenza** e la **scomposizione**.

Per sommare due vettori tra loro, è sufficiente trasportare, con una traslazione rigida, la coda del primo dei due sul vertice del secondo. Il vettore somma è uguale a quel vettore applicato nel punto di applicazione del secondo vettore e terminato nel punto di estremo del primo vettore [6]. Come la geometria euclidea spiega bene, l'effetto di una somma di vettori rappresenta la diagonale del quadrilatero costruito sui i due vettori addendo.

La *differenza* è l'operazione inversa della somma. In matematica, per affermare che 7 meno 3 fa 4, si deve prima verificare che 4 + 3 faccia 7. Un secondo modo molto efficente per calcolare una differenza è di applicare la tecnica del resto dal rigattiere:
Se, dovendo acquistare un prodotto che vale, ad esempio, venti euro, un cliente porge una banconota da cinquanta, il negoziante calcola il resto contando a partire da venti, fino ad arrivare a cinquanta. Allo stesso modo, per fare una differenza tra un vettore dato (diciamo $\vec{v}_1$) e un secondo ($\vec{v}_2$), è sufficiente tracciare un terzo vettore ($\vec{d}$) applicato sull'estremo di $\vec{v}_2$ e terminato su $\vec{v}_1$.
Per verificare di avere ottenuto la differenza corretta, si può sommare $\vec{v}_2$ con $\vec{d}$ e constatare che si riottiene di nuovo il vettore iniziale $\vec{v}_1$.
La differenza tra vettori è uno strumento molto efficace per rappresentare lo *spostamento* tra due punti.
Osservando il parellogramma costruito su una coppia di vettori, si può osservare che la loro differenza corriponde alla sua diagonale trasversa, e biseca vicendevolmente il vettore somma.

La *scomposizione*, invece, è l'operazione che permette ai vettori di rappresentare le dimensioni dello spazio.
Lo spazio della geometria, infatti, è un ente tridimensionale, che si estende in lunghezza, larghezza e profondità.
Tuttavia, per gli scopi di questo manuale, tutte le applicazioni saranno ridotte alle due dimensioni dello spazio piano, salvo diversa indicazione.

Date due rette incidenti, che vengono dette anche ***direttrici*** del sistema, e un vettore del piano, applicato nel punto di intersezione delle due, si dice scomposizione dei due vettori quella coppia di vettori appartenenti alla direttrice che, sommati tra loro, ricostituiscono il vettore iniziale. I vettori della coppia si dicono ***componenti*** del vettore iniziale.
La scomposizione di un vettore del piano è **unica**. Infatti, dato un sistema di rette direttrici, esiste una e soltanto una coppia di componenti per ciascun vettore del piano. Se provassimo a scomporre un vettore del piano con l'uso di tre direttrici, anziché due, ci accorgeremmo che la scompozione non è unica. Per questa ragione, si dice che il piano è un ente a due dimensioni.

Con l'aiuto dell'insegnante, mostrate che la scomposizione di un vettore del piano su tre direttrici, anziché due sole, è un operazione che non produce

[6] vedi disegno da integrare

un risultato unico, ma può essere realizzata con un numero infinito di terne differenti.

Il piano Cartesiano

Come abbiamo visto in precedenza, la scomposizione di un vettore è un operazione applicabile a qualunque sistema di assi, ma di solito è comodo usare una coppia di **rette ortogonali**. Se invece si lavora sull'insieme dei punti dello spazio, sarà necessario usare tre direttrici, che prendono il nome di **terna cartesiana** [7].
Un sistema di assi cartesiani conferisce allo spazio una struttura di riferimento, che è di grande utilità per eseguire operazioni sui vettori.
Ogni vettore $\vec{v}$ del piano, infatti, può essere scomposto in un modo unico in due componenti, in modo che sia:

$$\vec{v} = \vec{v_x} + \vec{v_y}$$

Ciascuna componente di un dato vettore è, a sua volta un vettore, la cui intensità è determinata in funzione di una corrispondente unità di misura.
Su ciascun asse cartesiano, pertanto, viene definito un vettore unitario, detto **versore**. Comunemente, i versori dello spazio tridimensionale sono indicati dalle lettere $\vec{i}$,$\vec{j}$ e $\vec{k}$. Si può scrivere dunque:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} \qquad (1)$$

Usare il piano cartesiano rende più semplici le operazioni di somma e differenza. Infatti è possibile operare separatamente sulle componenti cartesiane indipendenti, come nel seguente esempio:

$$\vec{v} \pm \vec{u} = (v_x\vec{i} \pm v_y\vec{y}) + (u_x\vec{i} \pm u_y\vec{j}) = (v_x \pm u_x)\vec{i} + (v_y \pm u_y)\vec{j}$$

Apparentemente, le operazioni di somma e differenza sui vettori lavorano come le corrispondenti operazioni sui numeri reali.
A volte, però, si possono avere delle piccole sorprese, come in questo esempio:

$$\vec{v} = 8\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\vec{u} = -8\vec{i} + 2\vec{j}$$

Determinate la somma e la differenza di questi due vettori. Cosa osservate?

In ultimo, osserviamo che, se sono note le coordinate cartesiane di un vettore, è sempre possibile ricavarne l'intensità, usando il teorema di Pitagora:

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} \qquad (2)$$

[7] oppure terna ortogonale

Le direzioni e le rette

Un'operazione molto importante, per muoversi nello spazio, è saper controllare la direzioni.
Come esercizio introduttivo, cominciamo a rappresentare sul piano cartesiano una successione di punti con la procedura sotto descritta:

1. scegliamo un punto iniziale a piacere. Per esempio il punto $(\mathbf{-2}; \mathbf{-5})$;
2. partendo dal punto precedente, spostiamoci di due unità in orizzontale, senza segnare alcun punto;
3. di seguito, spostiamoci di tre unità orizzontale e segniamo un secondo punto;
4. ripetiamo le operazioni precedenti dal passo 2.

Sarà facile verificare che, in questo modo, si ottiene una successione di punti allineati lungo una retta.

Perché proprio una retta? In verità, non è stato per caso, ma ciò che è accaduto è un fenomeno ben riproducibile.
Tracciate infatti una retta inclinata su un foglio bianco, ben squadrato.
Contrassegnate, su questa retta, cinque o sei punti, non necessariamente equidistanti e nominateli indicizzandoli opportunamente [8].
Scegliete tre o quattro coppie di questi punti, non necessariamente consecutivi.
Per ogni coppia di punti, costruite dei triangoli rettangoli, con i cateti paralleli ai bordi del foglio e l'ipotenusa aderente alla retta data.
Vi accorgerete facilmente di aver rappresentato una famiglia di triangoli simili.
Chiamate Δx_i i cateti orizzontali di ciascun triangolo e Δy_i i corrispondenti cateti verticali. Se conoscete le proprietà dei triangoli simili, potrete dedurre facilmente che risulta:

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = \frac{\Delta y_2}{\Delta x_2} = ...$$

Questo significa che il rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ è una ***propietà della retta***. Per questa ragione, viene chiamato **coefficiente angolare** e frequentemente indicato con la lettera m:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{3}$$

Come esercizio, provate a generare una successione di rette con la tecnica indicata all'inizio di questo paragrafo e a valutare il corrispondente coefficiente angolare.
Provate anche a tracciare alcune rette con valori predeterminati di m. Per esempio: $m = 1$ m= 2, $m = 3$, m= -2.
Cosa potete osservare?

Cerchiamo ora di raccogliere in un modo sistematico le conoscenze fin qui acquisite.

[8]chiamateli ad esempio $P_1 = (x_1; y_1), P_2 = (x_2; y_1), ...$

Osserviamo, innanzitutto che, per determinare una retta, è sufficiente conoscere un suo punto, che possiamo chiamare $(\mathbf{x_0}; \mathbf{y_0})$ e il coefficiente angolare $\mathbf{m}$. Desideriamo trovare un metodo automatico per individuare ogni altro punto della retta.

Riscriviamo in questo modo il concetto di coefficiente angolare:

$$\Delta_y = m\Delta_x$$

Ora, per ogni punto generico $P = (x; y)$ della retta data, risulta:

$$\Delta_y = y - y_0$$

$$\Delta_x = x - x_0$$

Quindi:

$$y = y_0 + m(x - x_0) \tag{4}$$

Quest'ultima espressione è detta equazione della retta e permette di ricavare l'ordinata di ciascun punto in funzione della propria ascissa.

Gli angoli e la goniometria

In un certo senso, il coefficiente angolare è uno strumento di misura degli angoli. Infatti, maggiore è il valore del coefficiente angolare, maggiore sarà l'inclinazione della retta corrispondente, misurata a partire dall'asse delle ascisse.

Tuttavia, se raddoppiamo il valore del coefficiente angolare di una retta, non possiamo affermare di aver raddoppiato l'ampiezza dell'angolo formato con l'asse delle ascisse. Si dice pertanto che il coefficiente angolare non rappresenta una *misura lineare* dell'angolo.
In questo paragrafo cercheremo di riflettere sui modi diversi per misurare gli angoli e sulla relazione tra queste misure e certe proprietà geometriche dello spazio, come ad esempio il coefficiente angolare.
Le calcolatrici commerciali utilizzano tre unità di misura differenti per misurare gli angoli:

- il grado sessagesimale, definito come la sessantesima parte del vertice di un triangolo equilatero;
- il grado centesimale, definito come la centesima parte dell'angolo retto;
- il radiante.

Dato un settore circolare, si definisce misura in radianti dell'angolo corrispondente il rapporto tra la lunghezza dell'arco di circonferenza sotteso e la misura del raggio. Siccome tutti i settori circolari costruiti sullo stesso angolo sono figure simili, il rapporto descritto è una costante, e quindi costituisce una proprietà caratteristica dell'angolo dato.

L'arco sotteso da un angolo piatto è lungo circa 3 volte il raggio. Pertanto misura circa 3 radianti. Esattamente $\pi\, rad$.
Un angolo di sessanta gradi sessagesimali, che corrisponde al vertice del triangolo equilatero, misura $\frac{\pi}{3}\, rad$.
L'angolo di trenta gradi, infine, misura $\frac{\pi}{6}\, rad$.

È importante riconoscere la relazione tra gli angoli e le proporzioni delle figure geometriche, almeno nei casi più comuni.
Per esempio, consideriamo la metà di un triangolo equilatero. Si tratta di un triangolo che possiede un angolo di novanta gradi, uno di sessanta [9] e uno di trenta.
Il cateto più corto, cioè quello opposto all'angolo minore, che vale trenta gradi, misura esattamente la metà dell'ipotenusa.
Il più lungo, che è adiacente all'angolo minore, può essere trovato usando il teorema di Pitagora:

$$\frac{c_{adiacente}}{ip} = \frac{\sqrt{ip^2 + c_{opposto}}}{ip} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Questo rapporto prende il nome di ***coseno dell'angolo*** $\frac{\pi}{6}$ e si scrive:

$$cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Mentre il rapporto tra il cateto opposto e l'ipotenusa prende il nome di ***seno dell'angolo***.

$$sen(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$$

Ancora, il rapporto tra il rapporto tra il cateto opposto e l'ipotenusa viene chiamato ***tangente***, e corrisponde al concetto di coefficiente angolare:

$$tg(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Il concetto di seno e coseno può essere generalizzato ad angoli di qualunque misura, costruendo una tabella come la seguente,che potete discutere con l'assistenza dell'insegnante:

deg	rad	cos(α)	sen(α)	tg(α)
0	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\nexists$
120°	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\sqrt{3}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{sqrt2}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
150°	$5\frac{\pi}{6}$	$-\frac{sqrt3}{2}$	$\frac{1}{2}$	-$\frac{\sqrt{3}}{3}$
180°	π	-1	0	0

[9] L'angolo di sessanta gradi era considerato dai filosofi greci come un angolo ***notevole***, perché corrispondeva alla divisione di un angolo piatto in tre parti uguali. Come abbiamo osservato in precedenza, la divisione in tre parti uguali era un'operazione critica, con gli strumenti fisici dei matematici greci.

Nella tabella sono riportati i valori di seno, coseno e tangente degli angoli notevoli tra 0 e π.

In generale, però, la funzione seno può essere valutata per qualunque angolo. In questo caso, però, è necessario fare uso di una calcolatrice, perché i calcoli necessari sarebbero troppo complicati [10]. Prima di usare la calcolatrice, assicuratevi di impostare correttamente le unità di misura, facendovi aiutare dal'insegnante [11].

Alle volte, inoltre è necessario eseguire l'operazione inversa. Supponiamo, ad esempio, di trattare con un triangolo che possiede un lato di 3 unità, uno di 4 e uno di 5.
Dopo aver verificato che si tratta di un triangolo rettangolo, detto α l'angolo minore di questo triangolo, risulterà:

$$sen(\alpha) = \frac{3}{5};\ cos(\alpha) = \frac{4}{5}\ e\ tg(\alpha) = \frac{3}{4}$$

Come è possibile ricavare, da questi valori, la misura dell'angolo α?
A questo scopo è necessario usare le cosidette funzioni goniometriche inverse, che si chiamano rispettivamente arcoseno, arcocoseno e arcotangente. Sulle calcolatrici scientifiche sono identificate dai simboli $\mathbf{sen^{-1}}$; $\mathbf{cos^{-1}}$; **e** $\mathbf{tg^{-1}}$.

A volte però, l'uso della calcolatrice può creare degli inganni. Supponiamo di lavorare con un angolo ottuso. Inserendo nella calcolatrice il valore del seno (per esempio $\frac{3}{5}$) risulterà impossibile ottenere il valore originale dell'angolo cercato, perchè la calcolatrice è impostata per restituire un angolo acuto. In questi casi, di conseguenza, bisogna adattare la risposta della calcolatrice alla situazione concreta.
Se la calcolatrice restituisce $arcsen(\frac{3}{5}) = 0,64rad$, l'angolo ottuso su cui stiamo lavorando varrà $\pi - arcsen(\frac{3}{5}) = 2,50rad$. Discutete con l'insegnante i casi in cui possono capitare queste situazioni e il modo corretto di gestirle.

[10] si dice che le funzioni goniometriche seno, coseno e tangente sono funzioni trascendenti.
[11] ogni modello di calcolatrice usa impostazioni diverse.