Distribución de Poisson

Ignacio Cosío Ortega

Características

Expresa, la probabilidad de que ocurra un determinado número de eventos durante cierto período de tiempo.

Una variable sigue una distribución de Poisson si se cumplen las siguientes condiciones:

- **Los datos son conteos de eventos (enteros no negativos, sin límite superior).**
- **Todos los eventos son independientes.**
- **La tasa promedio no cambia durante el período de interés.**

Función de Probabilidad

$$P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

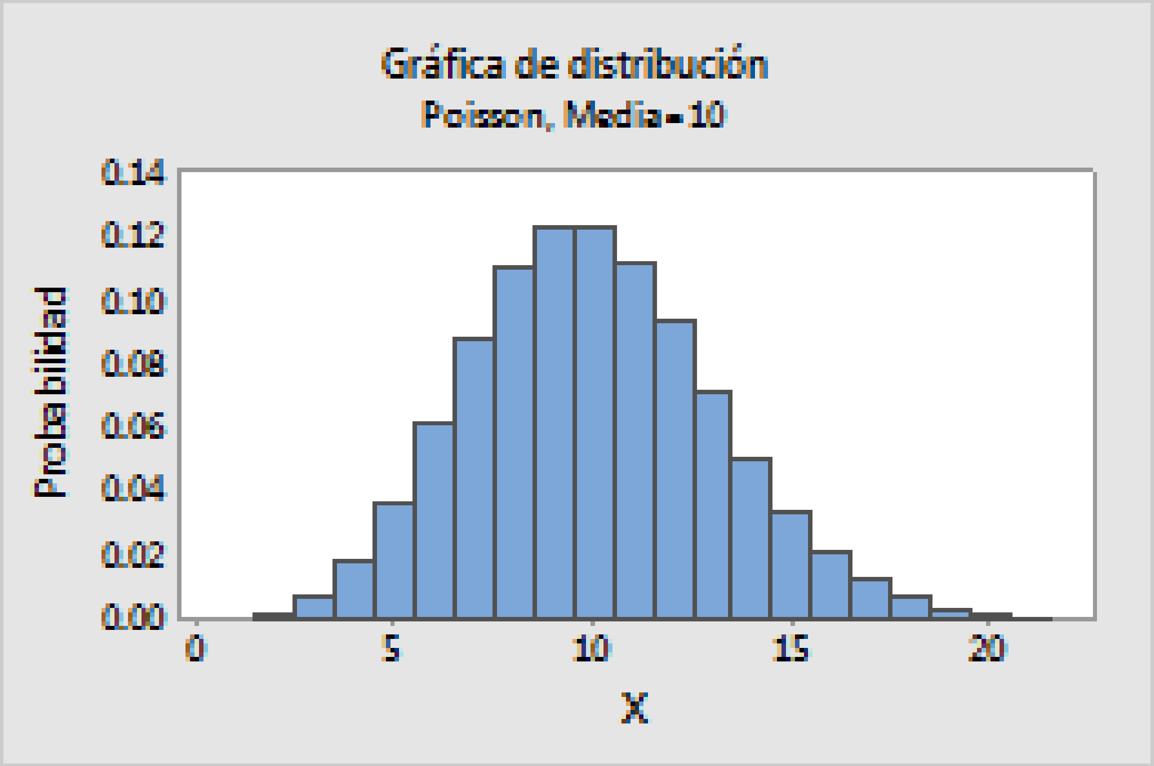
Donde:

P(X=x): Es la probabilidad de ocurrencia cuando la variable discreta “X” toma un valor finito “x”.

λ: Promedio de ocurrencias en un intervalo (tiempo, longitud, volumen, área)

e: Constante con valor aproximado de 2.71828183…

x: Es el número de ocurrencias



Valor esperado, Varianza y Desviación Estándar

Valor Esperado

$E[X] = \lambda$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \right) \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} \\
&= \lambda
\end{aligned}
$$

Varianza

$Var(X) = \lambda$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$Var(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2$$

$$Var(X) = \lambda$$

Desviación Estándar

$Var(X) = \sqrt{\lambda}$

$$Desv(X) = \sqrt{Var(X)}$$

$$Desv(X) = \sqrt{\lambda}$$

Ejemplo 1

En un hospital de una importante ciudad se está estudiando los nacimientos de bebes varones. Se sabe que en una semana nacen una medida de siete varones. Calcular:

1. Probabilidad de que nazcan 3 varones en una semana.
2. Probabilidad de que nazcan menos de 3 varones a la semana.

1

$$P_{(x=3)} = \frac{e^{-7} \cdot 7^3}{3!} = 0.052 \approx 5.2\%$$

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

2

$$P_{(x<3)} = p_{(x=0)} + p_{(x=1)} + p_{(x=2)}$$

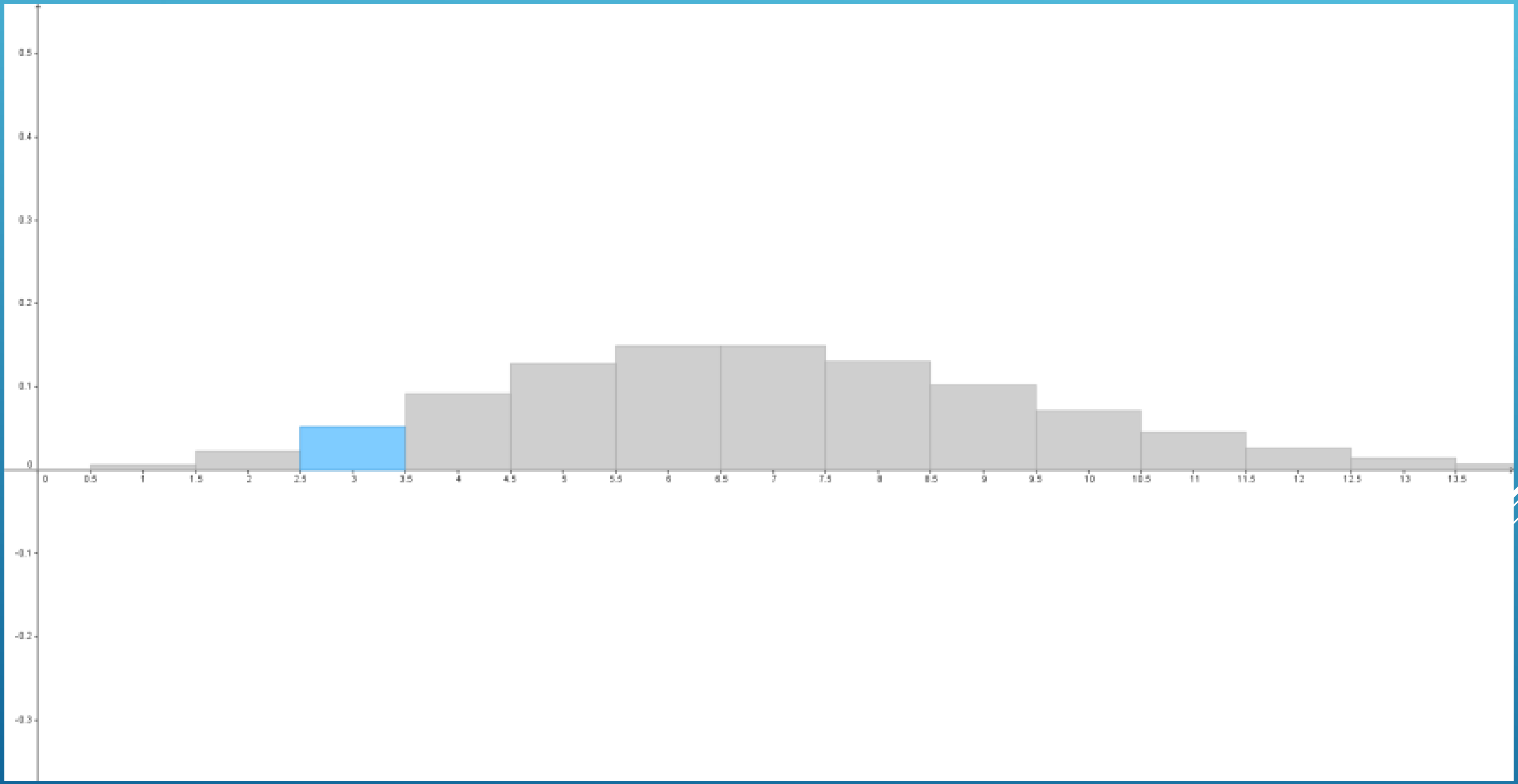
$$\frac{e^{-7} \cdot 7^0}{0!} = 0.001 \qquad \frac{e^{-7} \cdot 7^1}{1!} = 0.006 \qquad \frac{e^{-7} \cdot 7^2}{2!} = 0.022$$

$$\boldsymbol{P_{(x<3)} = 0.029 \approx 2.9\%}$$

Ejemplo 1

1

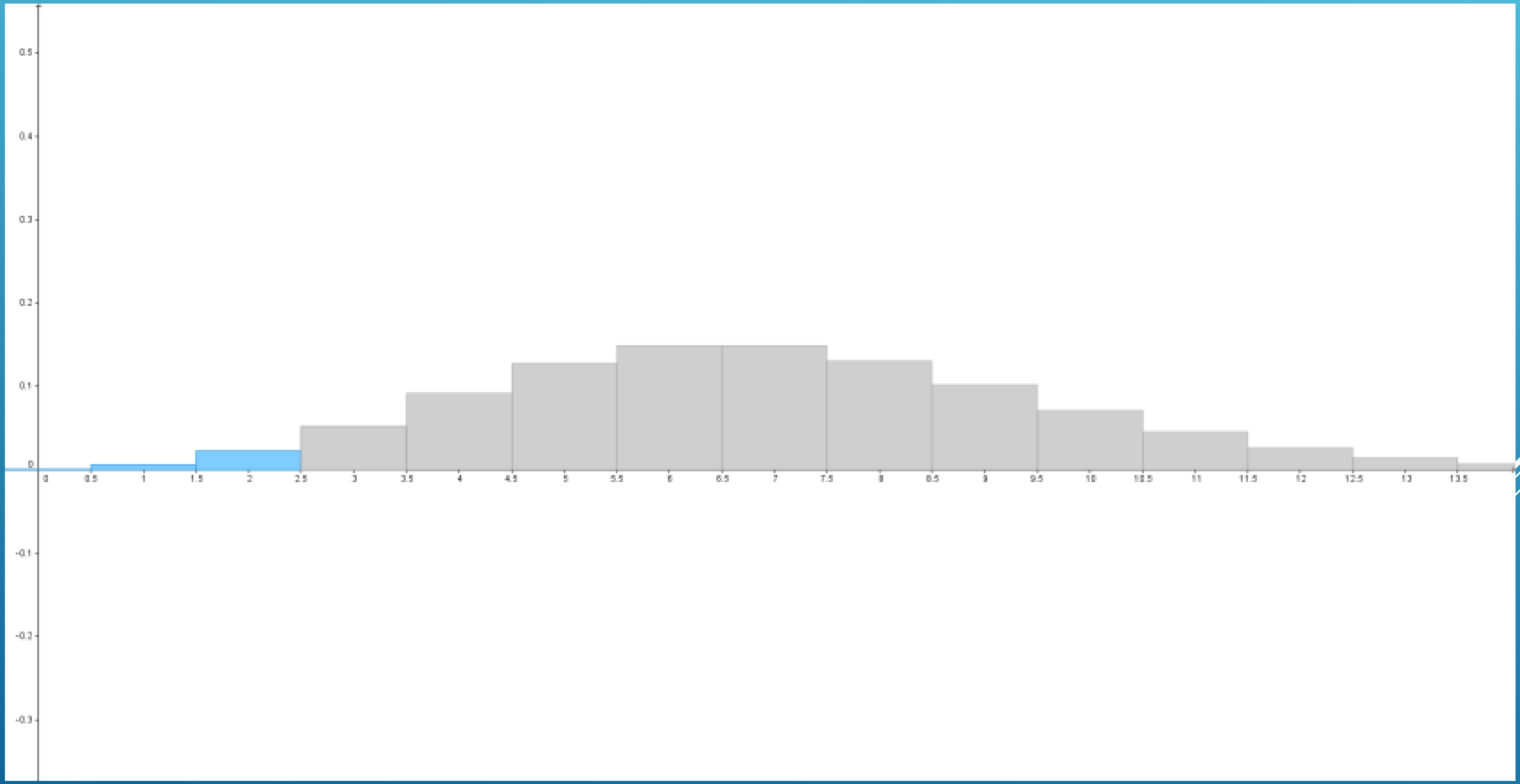
$$P_{(x=3)} = \frac{e^{-7} \cdot 7^3}{3!} = 0.052 \approx 5.2\%$$



Gráfica realizada en Geogebra

Ejemplo 1

2 $$P_{(x<3)} = 0.029 \approx 2.9\%$$



Gráfica realizada en Geogebra

Ejemplo 2

Los autobuses llegan a cierta terminal de transporte y se sabe que siguen un proceso de Poisson, con tasa de 8 buses por hora, de modo que el número de llegadas por un periodo de horas es una variable de Poisson con parámetro λ = 8t.

- ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 5 buses lleguen durante un periodo de una hora?
- ¿Cuántos buses se pueden esperar a que lleguen durante 90 minutos?

$x = 5$

$\lambda = 8 * 1 = 8$

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

1

$$P_{(x=5)} = \frac{e^{-8} \cdot 8^{5}}{5!} = 0.091 \approx 9.1\%$$

2

$$E(X) = \lambda = 8 * 1.5 = 12 \text{ autobuses}$$

$$12 \text{ autobuses } \pm 3.46\ autobuses$$

$$\text{Desv}(X) = \sqrt{E(X)} = \sqrt{12} = 3.46$$

$$8.54 \text{ autobuses } y\ 15.46\ autobuses$$

Bibliografía

- https://es.wikipedia.org/wiki/Distribuci%C3%B3n_de_Poisson#:~:text=En%20teor%C3%ADa%20de%20probabilidad%20y,durante%20cierto%20per%C3%ADodo%20de%20tiempo.
- Arroyo, I., Bravo, L., Llinás, H. and Muñoz, F., 2021. Distribuciones Poisson y Gamma: Una Discreta y Continua Relación. 1st ed. [ebook] pp.100, 101, 102. Available at: <http://www.scielo.org.co/pdf/prosp/v12n1/v12n1a12.pdf> [Accessed 17 March 2021].
- Paula Rodó(04 de noviembre, 2020).Distribución de Poisson. Economipedia.com
- https://support.minitab.com/es-mx/minitab/18/help-and-how-to/probability-distributions-and-random-data/supporting-topics/distributions/poisson-distribution/
- https://fisicaymates.com/distribucion-de-poisson/